

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

ACTA MATHEMATICA 13

ZVÄZOK 1

zborník príspevkov z VIII. nitrianskej matematickej konferencie
organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre v dňoch 16. – 17. septembra 2010

NITRA 2010

Názov: Acta mathematica 13
Edícia: PRÍRODOVEDEC, publikácia č. 423

Zostavovatelia:

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Recenzenti:

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
doc. RNDr. Mária Kmet'ová, PhD.
doc. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.
doc. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
PaedDr. Marek Varga, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Vydané v roku 2010 ako účelová publikácia Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s finančnou podporou grantu KEGA 3/6314/08 *Tvorba geometrických predstáv žiaka v mladšom školskom veku a adekvátna príprava učiteľov elementaristov* a Akademickým klubom FPV UKF v Nitre.

Schválené vedením FPV dňa 30. 9. 2010

Rukopisy príspevkov prešli odbornou oponentúrou, ale neboli jazykovo upravované.

©UKF v Nitre 2010

ISBN 978-80-8094-781-1

REFLEXE NETRADIČNÍCH ÚLOH A MATEMATICKÝCH AKTIVIT V PROSTŘEDÍ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

BOHUMIL NOVÁK

ABSTRACT. The summary of experience gained when solving the project dealing with putting nontraditional activities into the practice in the primary school mathematics teaching. The research results are presented and the examples of mathematics exercises leading to development of pupils' problem solving competences are given.

1. Úvod

V letech 2006 – 2009 byla v rámci řešení projektu Národního programu výzkumu II MŠMT, č. 2E06029 s názvem „Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže zaměřených na motivaci pro vědeckovýzkumnou činnost v oblasti přírodních věd“ řešeného na Přírodovědecké a Pedagogické fakultě UP v Olomouci realizována řada dílčích projektů na základních školách v olomouckém regionu, zaměřených na popularizaci a propagaci matematiky jako školního předmětu prostřednictvím motivačních aktivit. Kurikulární reforma v České republice vytváří prostor ke změně pojetí, forem a metod vyučování matematice, umožňuje, aby učitelé dokázali matematiku učit tvořivým a poutavým způsobem, stali se spolutvůrci změněného klimatu, nositeli výzev pro žáky i pro sebe samé.

Využití projektů, soutěží, nestandardních úloh a didaktických her považujeme v matematickém vyučování za významné. Podle *Spilkové (2004)* je v něm akcentována dialogičnost výstavby poznání, které se odehrává vždy v sociálním kontextu, zejména v komunikaci a v interakci se spolužáky a učitelem, i autentičnost poznání - „já“ jako subjekt originální tvorby poznatku (význam hledání, objevování a konstruování poznání na základě vlastní činnosti, zkušenosti, prožitku). Učitel již není ten, kdo jen sděluje, řídí, rozhoduje a kontroluje, ale vytváří vhodná prostředí, podmínky a situace pro žákovu úspěšné učení, motivuje, poskytuje možnost žákům podílet se na rozhodování o nástrojích, prostředcích a organizaci učební činnosti, dokáže prezentovat, „aranžovat“ úlohu či hru jako zajímavý problém, jinými slovy individualizovat vyučování matematice (*Fulier, Šedivý, 2001*). Pro učitele je přitom velmi důležitá reflexe vlastní činnosti: dovednost zpětně analyzovat a hodnotit svou činnost, následně ji měnit, inovovat, signifikantně ovlivňuje kvalitu činnosti učitele, může významně rozvíjet jeho didaktické myšlení a jednání (*Nezvalová, 2000*).

Uvedená teoretická východiska poskytla základní orientaci a rámec pro náš výzkum vedoucí k vytvoření matematických soutěží a projektů v rámci třídy, resp. školy pro 1. a 2. stupeň ZŠ s možností zapojení žáků se speciálními vzdělávacími potřebami, jehož konkrétními průběžnými výstupy se stala příprava a realizace akcí typu „Den s netradiční matematikou“ (otevřené hodiny matematiky, den se zajímavou matematikou, matematické soutěžení, ...) jako ukázkových aktivit zaměřených na změnu metod a forem výuky.

V našem příspěvku uvádíme některá zjištění, která vyplynula z výzkumného šetření realizovaného jako součást řešení projektu. Pokusili jsme se zjistit, jak přijímají netradiční matematické aktivity realizované v rámci projektu žáci a učitelé základních škol.

2. Metody výzkumu

K posouzení toho, do jaké míry se podařilo řešitelům projektu naplnění uvedeného cíle dosáhnout či alespoň se k němu přiblížit, bylo využito několika výzkumných nástrojů:

- 1) dotazníkové šetření na vzorku žáků základních škol participujících na výzkumu,
- 2) autentická vyjádření žáků (písemná i ústní) po skončení jednotlivých akcí na školách,
- 3) reflexe názorů a zkušenosti učitelů, získaných při přípravě a realizaci jednotlivých aktivit.

Data pro kvantitativní výzkum jsme získali prostřednictvím anonymního dotazníku, který musel být pro žáky 1. a 2. stupně ZŠ přiměřený a dostatečně srozumitelný. V záhlaví obsahoval základní údaje o dotazovaném – pohlaví, navštěvovanou třídu, školu a poslední známku z matematiky na vysvědčení - pro provedení následného třídění a vyhodnocení. Byl sestaven z 10 strukturovaných položek, ve kterých měli žáci své odpovědi označovat na čtyřstupňové škále (rozhodně ano - a, ano - b, ne - c, rozhodně ne - d), dále jedné stupnicové položky („Vyber a napiš názvy pěti činností, kterých ses zúčastnil(a), a seřaď je od nejlepší po nejhorší“) a z jedné nestrukturované položky („Napiš svoje vlastní zhodnocení akce“). Pro zachování autentičnosti a získání co nejvěrohodnějších údajů probíhalo dotazníkové šetření vždy bezprostředně po ukončení akce na dané škole. Podařilo se nám získat údaje od 340 respondentů, z toho 153 dívek (45%) a 165 chlapců (49%). V 22 dotaznících nebylo pohlaví uvedeno. Respondenti navštěvovali 6 základních škol a 1 víceleté gymnázium. Z celkového počtu bylo 119 žáků 1. stupně (36%) a 216 žáků 2. stupně a nižších ročníků víceletého gymnázia (64%), 5 dotazníků se vrátilo bez uvedení ročníku. Výsledky třídění prvního stupně jsme zřehlednili sloupcovými diagramy, ke zpracování výsledků šetření bylo použito testu nezávislosti chí-kvadrát pro čtyřpolní tabulky. V každé oblasti jsme zkoumali odlišnosti v odpovědích respondentů v závislosti na pohlaví (chlapci a dívky) ke zohlednění genderových rozdílů a na věku (navštěvovaný 1. nebo 2. stupeň ZŠ). Hodnoty χ^2 jsou uváděny pro 1 stupeň volnosti a hladinu významnosti 0,05, tj. srovnáváme s kritickou hodnotou $\chi^2_{0,05}(1) = 3,841$ (Chráška, 2007).

Dotazník byl koncipován tak, aby bylo možné blíže zkoumat následující oblasti:

- Zájem žáků o matematiku jako školní předmět.
- Zájem žáků o realizaci netradičních matematických aktivit, projektů, řešení nestandardních úloh a her.
- Využívání osobního počítače.
- Žákovské hodnocení jednotlivých aktivit a činností v rámci projektu.
- Posouzení netradičnosti aktivit a novosti uskutečněné akce žáky.
- Celková spokojenost žáků s akcí a zájem o opakování.

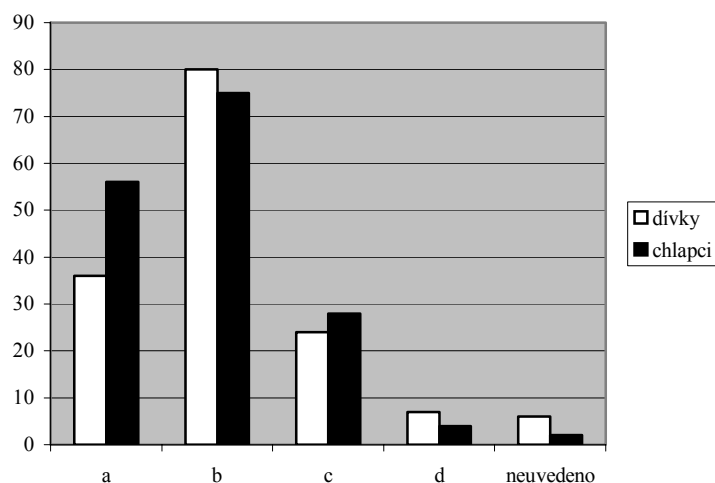
3. Výsledky výzkumu

3.1 Výsledky dotazníkového šetření

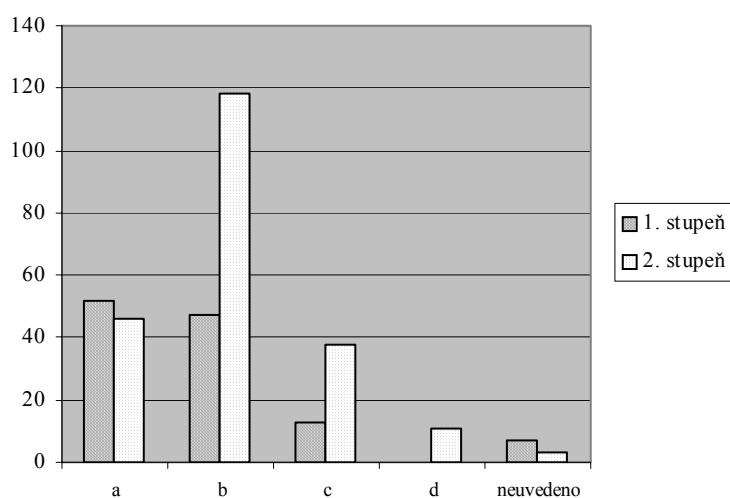
V našem příspěvku uvádíme některé výsledky šetření, zejména ty, které se vztahují k zájmu žáků o matematiku a o řešení netradičních, terminologií Rámcového vzdělávacího programu „nestandardních“, úloh a problémů. Z poměrně rozsáhlého materiálu, který šetření přineslo, uvádíme pouze několik ukázek a stručný pokus o určitá zobecnění. Jsme si vědomi omezené výpovědní hodnoty šetření a pokoušíme se vyhybat

kategorickým soudům. Podrobnější zpráva o projektu a všechny výstupy řešení jsou shrnuty v publikaci uvedené v seznamu použité literatury.

V první položce dotazníku měli žáci zaznamenat svůj postoj k výroku „Matematika mne baví“. Z celkového počtu platných odpovědí (graf 1) vyplývá, že matematiku si oblíbilo 77% žáků, což považujeme za velmi dobrý výsledek, přitom není statisticky významný rozdíl u dívek a chlapců ($\chi^2 = 0,1$). Poněkud překvapivé je zjištění (graf 2), že žáci 2. stupně v našem vzorku mají matematiku raději než žáci 1. stupně ($\chi^2 = 5,81$).



Graf 1: Matematika mne baví

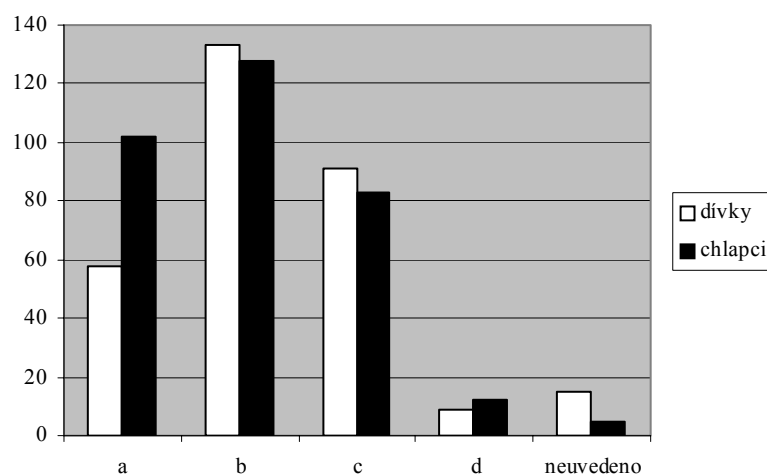


Graf 2: Obliba matematiky u žáků 1. a 2. stupně

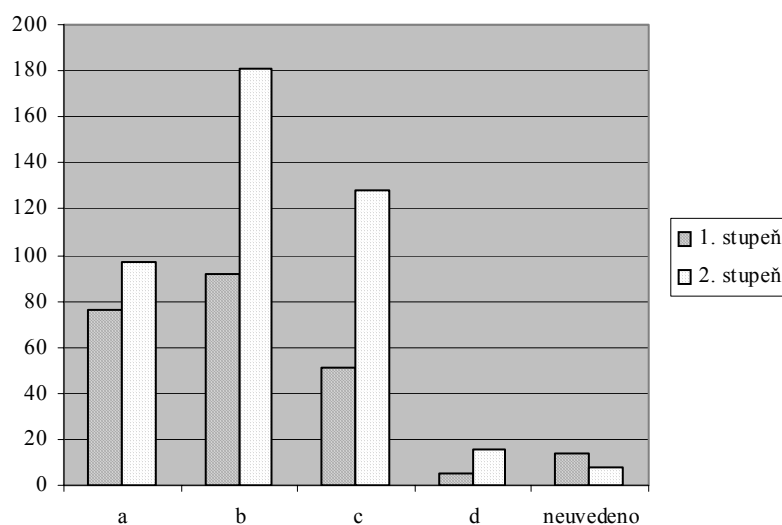
Položky dotazníku č. 2 – „Řeším rád(a) netradiční matematické úlohy“ a č. 3 – „Rád(a) řeším hlavolamy, hraji šachy, dámu, ...“ zjišťovaly míru oblíbenosti řešení netradičních,

nestandardních úloh (sudoku, tangramy, zápalkové hlavolamy, šachy, logické úlohy apod.).

Po vyhodnocení celkového počtu odpovědí (graf 3) vyplynulo, že netradiční úlohy se těší přízni asi dvou třetin žáků (66%) a to přibližně stejné oblibě u dívek i chlapců ($\chi^2 = 1,46$).



Graf 3: Obliba řešení netradičních úloh u chlapců a dívek

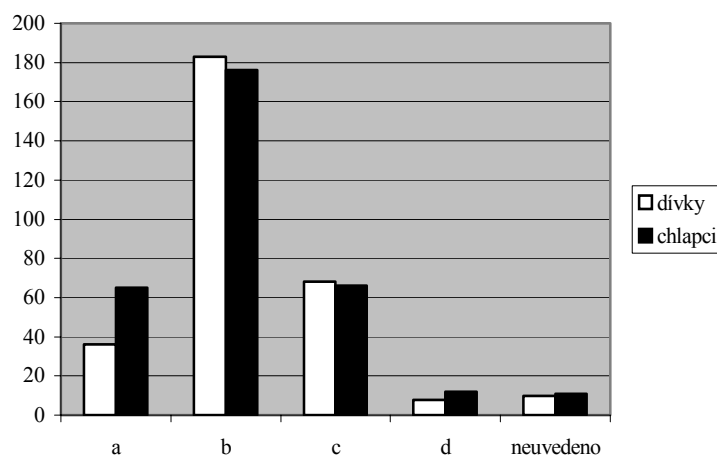


Graf 4: Obliba řešení netradičních úloh u žáků 1. a 2. stupně

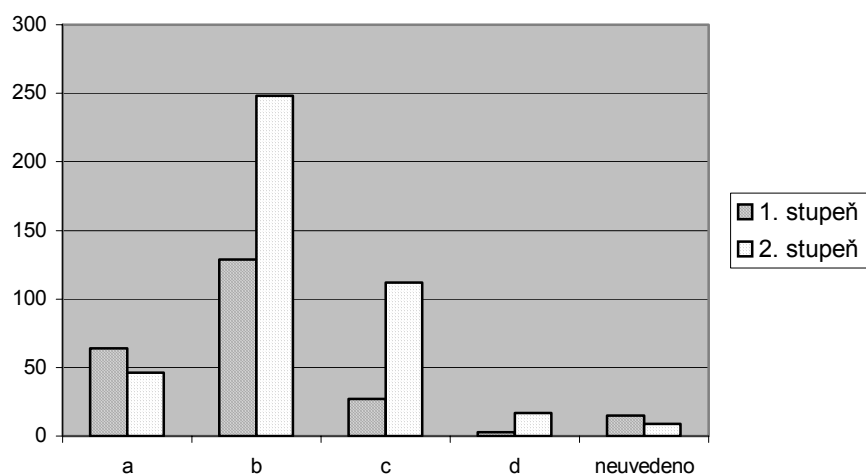
Při srovnávání odpovědí žáků různého věku (graf 4) bylo zjištěno, že tyto úlohy řeší raději žáci 2. stupně, než žáci 1. stupně ($\chi^2 = 5,52$).

V položkách 5: „Zadání úloh pro mě bylo jednoduché“ a 6: „Při řešení úloh jsem byl(a) úspěšný(á)“ jsme žáky chtěli přimět k tomu, aby sami zhodnotili obtížnost

jednotlivých aktivit a svou vlastní úspěšnost při jejich řešení. V této sebereflexi hodnotili svou úspěšnost (graf 5) vysoko: 16% uvádí odpověď rozhodně ano, 56% odpověď ano, přitom nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl mezi chlapci a děvčaty ($\chi^2 = 0,12$). Žáci 2. stupně se cítili při řešení úspěšnější než žáci 1. stupně ($\chi^2 = 22,86$).



Graf 5: Posouzení vlastní úspěšnosti u chlapců a dívek



Graf 6: Posouzení vlastní úspěšnosti u žáků 1. a 2. stupně

V našem šetření se nepotvrdilo často tradované tvrzení, že matematika je pro žáky neoblíbeným předmětem. Výsledky, ke kterým jsme dospěli, jsou však zřejmou reflexí toho, že dotazníkové šetření proběhlo bezprostředně po skončení takových akcí, které žákům ukázaly matematiku jinou než obvykle. Považujeme je za potvrzení smysluplnosti našeho projektu, směřujícího k popularizaci a propagaci matematiky. Naše zjištění považujeme také za určitou výzvu pro učitele, za příležitost ke změně pojetí, forem a metod vyučování matematice, aby dokázali matematiku učit tvořivým a poutavým způsobem, aby umožnili žákům zažít pocit radosti a úspěchu při řešení zajímavých, netradičních úloh, při aktivních činnostech.

3.2 Výpovědi žáků po ukončení akcí na škole

Žákovská hodnocení akcí byla zcela spontánní, bezprostřední. Od verbálních vyjádření v průběhu realizace či po jejím ukončení, hodnotících jednotlivé aktivity nebo celou akci, jsme přešli k možnosti anonymního písemného sdělení na připravených tabulích s nadpisem: „Co se mi zde nejvíce líbilo (a nelíbilo)“. Na tabulích obvykle zcela popsaných slovním komentářem dětských účastníků výrazně převažovala pozitivní hodnocení. Většina žáků vyjádřila potěšení plynoucí z kladného prožitku jak v roli řešitelů, tak v roli zadavatelů úloh, pomocníků či supervizorů. Některé výpovědi a projevy účastníků umožnily učitelům pokusit se o detailnější interpretaci.

3.3 Reflexe a sebereflexe učitelů

Značná pozornost byla v našem výzkumu věnována učitelským reflexím. V názorech učitelů se promítly zkušenosti získané v průběhu jednotlivých monotematických projektových dnů (například s pohádkovými náměty) nebo akcí typu hrátek či matematických jarmarků (s pestrými, různorodými činnostmi, jejichž „společným jmenovatelem“ byla činnost účastníků, vzájemná komunikace při soutěžích a didaktických hrách).

Učitelé základní školy, kteří se podíleli na přípravě a realizaci projektu, získali příležitost k individuální nebo kolektivní (kooperativní) reflexi vlastní činnosti. Příležitost klást si otázky typu: „Co a jak jsem dělal, jaké činnosti pro žáky připravil, s jakými záměry a očekáváním, s jakými výsledky? Co a proč se mi podařilo, kde byly problémy a kritické body? Které obtíže vyvstaly při porozumění žákovským produktům? Jaké interpretace žákovy výkonu jsou možné?“ Současně má učitel příležitost promýšlet a analyzovat, co se skrývá za jeho vlastní činností - jeho názory, postoje, přesvědčení, zkušenosti a zážitky. Toto akční, praktické vědění, většinou intuitivní, pocitové, neuvědomované, se prostřednictvím reflexe a sebereflexe zvědomuje, je klíčem k porozumění vlastní činnosti, k chápání souvislostí, příčin a následků, a může vést k žádoucí změně výukových metod a přístupu k matematickému vyučování.

4. Náměty úloh a činností

Smyslem a cílem projektu nebylo vytvořit jednotnou univerzální šablonu podobných akcí, ale pomoci vytvořit školní matematiku co nejvíce pestrá a živou, aby byla blízka nejširšímu spektru žáků, a přispět tím ke změně klimatu provázejícího matematické vyučování.

Z mnoha činností a aktivit (didaktické hry, číselné řady, magické čtverce, tangramy, úlohy finanční matematiky aj.) uvádíme alespoň 3 náměty úloh, které byly použity při našich akcích, a které mohou být podle našeho názoru kreativním učitelem velmi dobře využity v „běžném“ matematickém vyučování. Byly vytvořeny obměnou známých úloh ze zdrojů, uvedených v seznamu použité literatury. Práce s nimi umožňuje objevovat, argumentovat, rozvíjet úsudek žáků, jejich kompetence k učení a k řešení problémů. Obměna úloh podle konkrétní situace ve třídě, podle věku či mentální úrovně žáků, se tak stává rovněž příležitostí pro prokazování učitelských oborově předmětových i didaktických kompetencí. Dovednost reflektovat podobné úlohy z hlediska svých výukových záměrů, využít a interpretovat je ve své praxi edukace např. při práci s nadanými žáky, sledovat a rozvíjet různé oblasti myšlení těchto žáků – numerické, symbolické, verbální, logické,

analytické, kritické, prostorové představivosti – jak je uvádějí Blažková, Vaňurová (2009), považujeme v matematickém vyučování za významnou.

Úloha 1:

V číselném trojúhelníku je vždy pod dvěma sousedními čísly zapsán jejich součet.

1	2	3	4	5	6
3	5	7	9	11	
8	12	16	20		
20	28	36			
48	64				
112					

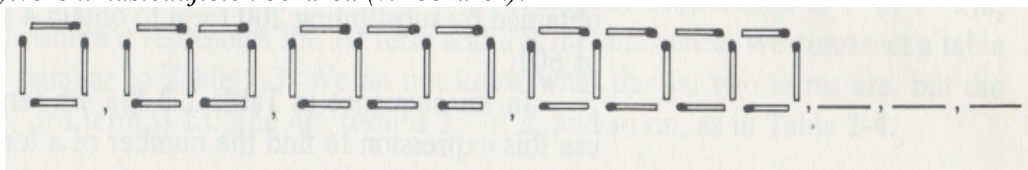
Hledejme zajímavosti v daném číselném trojúhelníku:

- V zadání se střídají čísla lichá a sudá, ve druhém řádku jsou pouze čísla lichá, v dalších řádcích pouze čísla sudá. Proč?
- V zadání rostou čísla po 1, v dalších řádcích po 2, po 4, po 8, po 16. Proč?
- Zaměníme-li pořadí čísel v zadání, změní se výsledný součet (ve třetím „vrcholu“ trojúhelníku, tj. číslo 112? Proč se změní/nezmění?
- Jak musíme uspořádat čísla v zadání, aby výsledný součet byl co možná největší (nejmenší)? Proč?

Úloha 2:

Původní úloha: U čtvercového stolu mohou sedět čtyři lidé. Na školní představení vytvořili žáci velký obdélníkový stůl ze sedmi takových čtvercových stolů. Kolik lidí se mohlo ke stolu posadit?

Upravená úloha: Ze čtyř zápalek je vytvořen čtverec. Kolik zápalek potřebujeme na vytvoření následujících obrazců (viz obrázek):



Obr. 1: Obrazce vytvořené ze zápalek

Z obrázku – z manipulací se zápalkami – je zřejmé, že počet zápalek v dalších obrazcích je 4, 7, 10, 13. Zjistěte, kolik zápalek bude třeba na obrazce tvořené 5, 6, ..., 10, ..., 100 čtverci.

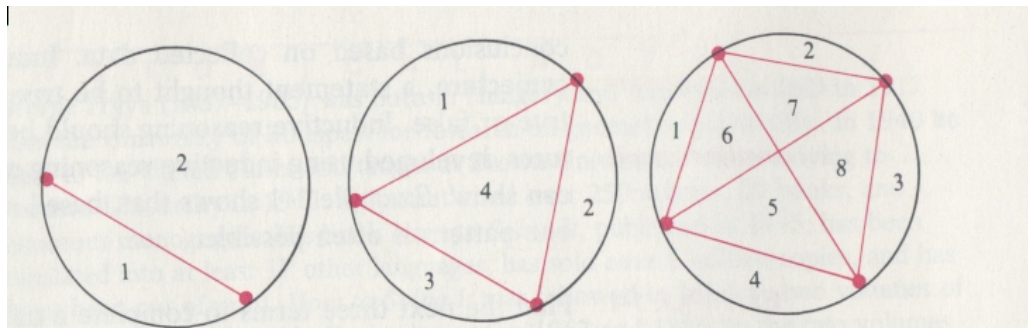
Počet čtverců	Počet zápalek
1	4
2	$7 = 4 + 3 = 4 + 1 \cdot 3$
3	$10 = 4 + 3 + 3 = 4 + 2 \cdot 3$
4	$13 = 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3 \cdot 3$
5	$16 = 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 4 \cdot 3$
...	...
10	$31 = 4 + 9 \cdot 3$
100	$301 = 4 + 99 \cdot 3$

Úloha 3:

Původní úloha:

Kolika rovnými řezy můžeme rozdělit kruhový dort na 7 dílů?

Upravená úloha:

Úsečka spojující 2 body kružnice (tětiva) rozdělí kruh na 2 části. Na kolik částí rozdělí kruh všechny úsečky, spojující 3, 4, 5 ... různé body na kružnici?

Obr. 2: Situace pro 2, 3 a 4 body na kružnici

Počet bodů	2	3	4	5	...	12	n
Počet částí	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	...	$2048 = 2^{11}$	2^{n-1}

5. Závěr

Priznivé reakce účastníků - žáků i jejich učitelů – na realizaci našich námětů v konkrétní realitě matematického vyučování na 1 i 2. stupni základní školy nás přesvědčují o tom, že“učit se znamená objevovat to, co už víš. Konat znamená demonstrovat, že to víš. Učit druhé znamená připomínat jim, že to vědí stejně dobře jako ty. Všichni jsme zároveň žáci, praktikanti a učitelé“. Naše aktivity charakterizovala v etapě přípravy i vlastní realizace činnost - zjevná manipulativní či latentní myšlenková, intelektuální - provázená vzájemnou komunikací, hledáním a obhajováním vlastních postupů řešení. Podílel se na ní tým pracovníků katedry, doktorandů, studentů několika ročníků prezenčního studia a samozřejmě učitelů na základních školách v regionu. Jejím smyslem byla především motivace žáků pro matematiku, rozvoj pozitivního vnímání matematiky na pozadí předmětové integrace, možnost přimět žáky vtupnou a nenásilnou formou učit se matematiku. Uvědomujeme si však i meze, limity využívání netradičních aktivit v reálném matematickém vyučování. Respektujeme a zohledňujeme názory, které upozorňují, že „nejkrásnější škola, nejkvalitnější učitel, výborné učebnice či aktivizující metody vyučování nic nezmohou u žáka, který se nechce učit.“ (Siwek, 2005). Při kritickém posouzení a zhodnocení dosažených výsledků bude třeba dále rozšířit rámec nových aktivit zaměřených na změnu metod a forem výuky matematiky na různých stupních školy, dostatečně je mezi učitelskou i rodičovskou veřejností propagovat.

LITERATURA

- [1] Blažková, R. *Přirozená čísla a posloupnosti jako prostředek rozvoje exaktního myšlení žáků*. Acta Univ. Palack. Olomucensis, Fac. Paed., Mathematica VI – 2008, Matematika 3, Olomouc, UP 2008, s.48 – 55, ISBN 978-80-244-1963-3.

- [2] Blažková, R., Vaňurová, M. *Několik úloh pro práci s nadanými žáky v matematice. Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania*. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí „Elementary Mathematics Education“, Tále 2009. Banská Bystrica: Univerzita M. Bela 2009, s. 25 - 30. ISBN 978-80-8083-742-6.
- [3] Billstein, R., Libeskind, S., Lott, J W. *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*, Redwood City, The Benjamin/Cummings P. C., 1990, ISBN 0-8053-03090-1.
- [4] Fulier, J., Šedivý, O. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Nitra, UKF, 2001, ISBN 80-8050-445-8.
- [5] Chráská, M. *Metody pedagogického výzkumu. Základy kvantitativního výzkumu*, Praha, Grada, 2007, ISBN 978-80-247-1369-4.
- [6] Nezvalová, D. *Reflexe v pregraduální přípravě učitelů*, Olomouc, UP, 2000, ISBN
- [7] Novák, B., Molnár, J., Švrček, J. *Mathematics for the talented ones as well as the others*. Variety of Education in Central and Eastern Europe. Problems of Education in the 21 Century, Vol. 2, 2007, pp. 59 - 66. „Scientia Educologica“, Lithuania, ISSN 1822-7864.
- [8] Novák, B., Dofková, R., Stopenová, A. *Reflexe netradičních matematických aktivit na základní škole*. Možnosti motivace mládeže ke studiu přírodních věd, sborník recenzovaných příspěvků, Olomouc, UP, 2007, s. 43- 51. ISBN 978-80-244-1886-5.
- [9] Novotná, J. *Matematické objevování založené na řešení úloh*. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 2. díl, Praha, UK, 2004, ISBN80-7290-189-3.
- [10] Siwek, H.. *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Warszawa: WsiP, 2005, 335 s., ISBN 83-02-09303-3.
- [11] Spilková, V. *Současné proměny vzdělávání učitelů*, Brno, Paido, 2004.

doc. PhDr. Bohumil Novák, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5
CZ – 771 40 Olomouc
e-mail: bohumil.novak@upol.cz

PRIESTOROVÁ ŠTATISTIKA

BEÁTA STEHLÍKOVÁ

ABSTRACT. Classical methods often do not clearly examine spatial phenomena. This paper is designed as an introductory study of spatial statistics. The paper presents the basic breakdown of spatial data and their basic characteristics, spatial autocorrelation, refers to the spatial probability distributions. There is an overview of spatial statistics methods supported by a software.

Úvod

Informácie sú v súčasnosti popri finančných, energetických a materiálových, zdrojoch hlavným faktorom podmieňujúcim pokrok vo všetkých odboroch ľudskej činnosti. Rozvoj informačných a komunikačných technológií má za následok hromadenie veľkého množstva údajov najrozličnejšieho charakteru. Práve štatistika je veda ako vyťažiť informácie a nové znalosti z pozorovaných údajov pre riešenie problémov reálneho sveta. Často je veľmi náročné identifikovať potrebné informačné zdroje a ich prepojenie, ako aj nájsť vedecky podložené a korektné riešenie. Záleží od úrovne spracovania dát – či z dát získame informácie alebo aj nové poznatky.

Ľudstvo v novom tisícročí stojí pred dôležitými úlohami týkajúcimi biodiverzity, ekológie, energetiky, vzdelávania a zdravotníctva. Rýchle sa meniace technológie si vyžadujú nové typy experimentov a meraní, ktorých výsledkom sú nové typy údajov – výsledky genetických štúdií, obrázky, podrobné mapy. Mení sa charakter údajov – vznikajú obrovské až masívne súbory, vysokej dimenzionality, nielen numerické, ale aj nenumерické, napríklad obrazové, s informáciami o polohe a často neúplné.

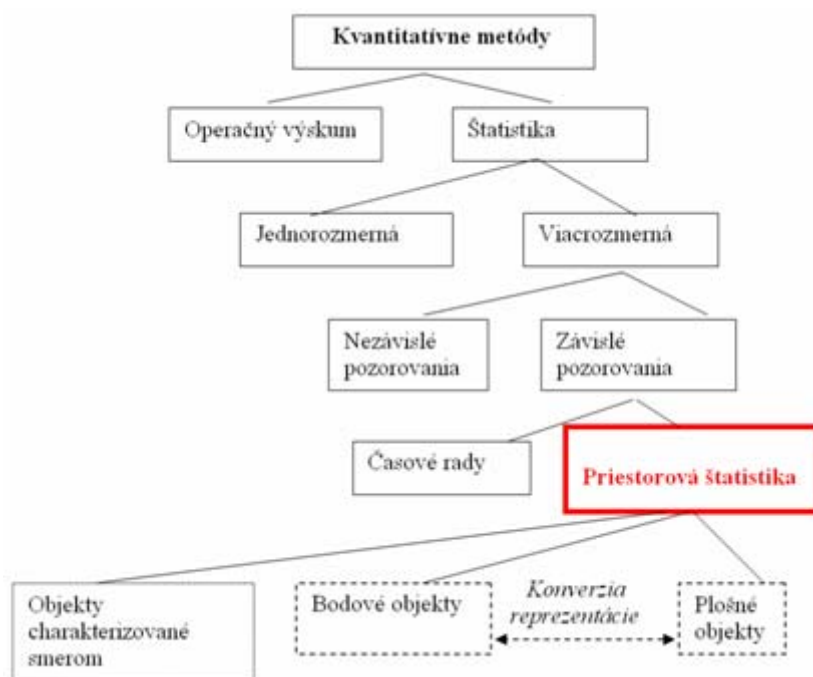
Štatistika sa stáva vstupnou bránou poznania. Mnohé skúmané javy existujú v priestore, sú viac či menej ovplyvňované svojím bezprostredným aj vzdialenejším okolím. Neexistujú izolovane od svojho okolia. Mnohé mimoriadne spoločensky, politicky a v neposlednom rade ekonomicky citlivé problémy majú priestorový charakter. A preto musíme s dátami nakladať ako s priestorovými. Informácia o polohe sa stáva dôležitá. Tento fakt musia zohľadňovať aj metódy, používané na ich analýzu.

Štatistickou analýzou priestorových javov sa zaoberá priestorová štatistika. Priestorové štatistiky sa líšia od klasickej štatistiky predovšetkým tým, že priestorové štatistiky pracujú so závislými premennými. Miesto priestorovej štatistiky v systéme kvantitatívnych metód je znázornené na obrázku 1.

Trochu z histórie

Prvé štatistické výpočty pre priestorové údaje sú spojené s mapami. Už v roku 1686 Halley naniesol do mapy smery vetrov a snažil sa určiť ich fyzikálnu príčinu a súvislosť. Bernoulli si v roku 1734 položil otázku, či mohli orbity vtedy známych šiestich planét vzniknúť náhodou. Odpoveď dal až Watson v roku 1970 pre všetky planéty našej slnečnej sústavy. Student v roku 1907 dokázal, že skúmané rozdelenie kvapaliny v priestore má Poissonovo rozdelenie.

Je iróniou osudu, že priestorová analýza je vlastne rovnako stará ako matematická štatistika. Teóriu chýb rozpracoval Gauss pre potreby merania uhlov v astronómii, t. j. v priestore. Chyby meraní však boli dostatočne malé a tak stačila ich lineárna aproximácia. Gauss potom rozpracoval lineárnu teóriu chýb a nie priestorovú. R. A. Fisher si už v roku 1935 uvedomoval priestorovú závislosť výsledkov poľných pokusov. Položil základy znáhodňovaniu, opakovaniu, vytváraníu blokov v poľnom pokusníctve. Metódou najbližšieho susedstva sa začal zaoberať Papadakis v deväťdesiatich rokoch. Skutočné priestorové modely sa objavili oveľa neskôr. Systematicky sa nimi zaoberajú vedci za posledných šesťdesiat rokov. Dovtedy v literatúre dominovali modely, v ktorých bola priestorová poloha ignorovaná a každý jedinec bol uvažovaný v rovnakej interakcii s ostatnými. Takéto modely dávali akceptovateľnú aproximáciu skutočnosti v mnohých kontextoch, ale ako už bolo povedané, narastá zoznam fenoménov, ktorými sa musí nakladať explicitne ako s priestorovými. Nezávislosť je veľmi výhodný predpoklad, ktorý robí teóriu matematickej štatistiky veľmi poddajnou, ľahko ovládateľnou. Jednako modely zahŕňajúce priestorovú závislosť sú realistickejšie.

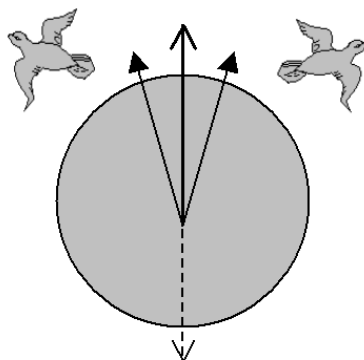


Zdroj: spracované podľa Griffith a i, 1999

Obrázok 1: Miesto priestorovej štatistiky v systéme kvantitatívnych metód

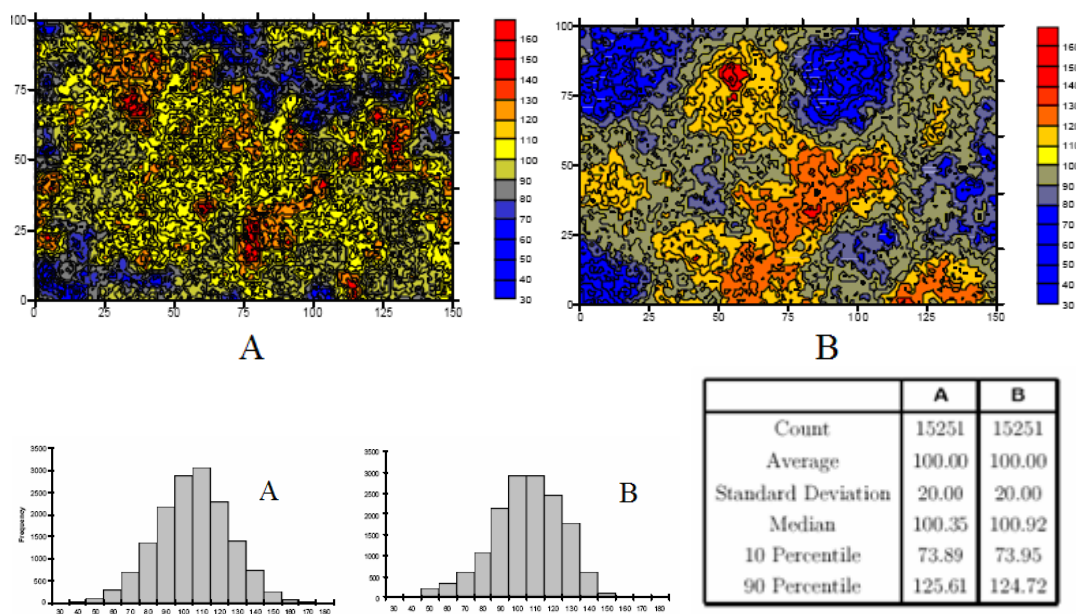
Kedy klasická štatistika nestačí

Klasické metódy často evidentne nevyhovujú skúmaniu priestorových javov. Aritmetický priemer z uhlov veľkosti 357° a 3° je 180° , čo je v rozpore s geometrickou predstavou priemerného smeru 0° (Obr. 2). Nie vždy však musí byť neadekvátnosť tak zrejímavá.



Zdroj: Vlastné zobrazenie
Obrázok 2: Priemerný smer

Uvedme ďalší príklad (Obr. 3). Klasická štatistika považuje súbory A a B za takmer identické (viď ich popisné charakteristiky), lebo nezahŕňa informáciu o priestorovom usporiadaní údajov. Nie je možné identifikovať rozdiely medzi súbormi údajov bez toho, aby sme do výpočtov nezahrnuli informáciu o polohe. Nemôžeme povedať, že údaje súboru A majú väčšiu variabilitu ako údaje súboru B (lebo majú zhodnú smerodajnú odchýlku). Ale môžeme povedať, že údaje súboru A sa v priestore menia rýchlejšie ako údaje súboru B.



Obrázok 3: Príklad dôležitosti priestorovej informácie

Tu nám prichádza na pomoc priestorová štatistika – zmeny hodnôt v priestore môžeme kvantifikovať pomocou priestorovej autokorelácie. Variogramy – kvantifikujú zmeny hodnôt v priestore.

Základné členenie priestorových údajov

Medzi základné atribúty priestorových údajov patria vzdialenosť, smer, relatívna poloha. Priestorové údaje členíme na štyri základné typy: bodové, plošné, sieťové, smerové.

Bodové dáta tvoria významnú triedu priestorových údajov s pomerne rozsiahle rozpracovanými metódami. Body majú určitú relatívnu polohu na zemskom povrchu. Body môžu reprezentovať jednotlivé rastliny na pokusnej parcele, stromy v lesnom poraste, a podobne. Body môžu tiež reprezentovať dom, obchod v určitej lokalite, ale aj mestá, obce, mestské časti.

Druhú veľkú skupinu tvoria plošné údaje obsahujú údaje z pozorovaní na plošných častiach nejakého regiónu, poľa, parcely, katastra a podobne. Mnohé štatistické údaje sú publikované na úrovni okresov, krajov, štátov. Sieť je súbor objektov, cez ktoré prúdia zdroje. Objekty, ktoré vytvárajú sieť, musia mať niekoľko dôležitých charakteristík: dĺžku, smer a čiary musia spájať najmenej dva body. Siete slúžia k modelovaniu prúdenia vody vo vodných tokoch, potrubíach, pohybu vozidiel, lodí, vlakov, elektrického prúdu v rozvodoch, ľudí po dopravných tratiach a podobne. Sieťové údaje sú používané vo výskume systémov a riadení rozsiahlych projektov. Analýzou sieťových údajov sa zaoberá *sieťová analýza*, ktorá je časťou teórie grafov. Smer je jedným zo základným parametrom, ktorý môžeme vyčítať z mapy. Všetky údaje, ktoré sa nanášajú do mapy majú charakter smerových dát. Šírenie choroby na parcele ale i na väčšom území sú príklady smerových dát. Políhavosť rastlín v určitom smere, ale aj údaje o pohybe pokusného zvieraťa majú smerový charakter. Typickým príkladom smerových údajov sú smery vetrov, ale tiež smer dochádzky do zamestnania, smer prepravy tovaru. Medzi smerové zaraďujeme aj sférické dáta. Údaje týkajúce sa vesmíru sú sférické. Meteorologické údaje majú charakter sférických údajov. Rozloženie plodov na strome je typickým príkladom sférických dát.

Uvedme základné popisné štatistiky pre bodové údaje. Najčastejšie používané miery polohy bodových údajov sú priemerný stred, vážený priemerný stred, Manhattanovský medián, vážený Manhattanovský medián, Euklidov medián, vážený Euklidov medián. Ak otočíme sústavu súradníc, otočí sa okolo svojho stredu aj obdĺžnik určujúci Manhattanovský medián. Táto vlastnosť je zo štatistického hľadiska nepríjemná. Vážený Euklidov medián je riešením klasického rozmiestňovacieho problému, tzv. Weberovho problému - nájsť optimálnu polohu pre továreň – ktorá minimalizuje súčet poplatkov za prepravu medzi továrňou a dvoma zdrojmi surovín a medzi továrňou a predajňou. Za predpokladu, že prepravné je lineárnou funkciou vzdialenosti, váhy bodov – zdrojov sú množstvami, ktoré je možné vyťažiť potrebných k produkcii 1 t finálneho produktu, váha obchodu je 1, potom riešením problému, t.j. optimálnou polohou továrne je vážený Euklidov medián. Euklidov medián je teda vhodný aj pre riešenie problému lokalizácie verejných zariadení, ako sú škôlky, školy, nemocnice, úrady a podobne. Je potrebné si tiež uvedomiť, že priemerná poloha bodov, resp. vážený priemer nič nehovoria o charakteristikách regiónu, do ktorého „padnú“. V praxi to znamená, že samotné miery polohy, bez analýzy v čase, nemôžu byť základom pre socio-ekonomické rozhodnutia. Je dôležité sledovať posun priemerného stredu počas niekoľkých časových období. Ďalšou zaujímavou charakteristikou priestorových údajov je ich rozptýlenosť v priestore. Miery sú založené na priemerných odchýlkach od priemeru, resp. niektorej z iných charakteristík centrálnej polohy. Najčastejšie používaným priestorovým ekvivalentom štandardnej odchýlky je tzv. štandardná vzdialenosť.

Umiestnenie hranice študovaného územia je ďalším kritickým problémom výskumu. Tie isté body sa v kontexte územia sa javia ako regulárne, rovnomerne rozložené. Naopak v kontexte inak vymedzeného sú body zhlukované. Z uvedeného vyplýva, že žiadna miera variability nesmie byť interpretovaná nezávisle od študovaného územia.

Priestorová autokorelácia

Podľa Toblera, uznávaného geografa, prvý zákon geografie znie nasledovne. Všetko súvisí so všetkým ostatným, ale blízke veci súvisia viac ako vzdialené. Ak hodnoty skúmaného znaku pre každú dvojicu oblastí skúmaného priestoru sú nekorelované, potom hovoríme, že neexistuje priestorová autokorelácia skúmaného znaku v systéme oblastí.

Existuje niekoľko mier priestorovej autokorelácie javov v priestore. Ktorú metódu použijeme, závisí od škály, v ktorej sú merané hodnotené údaje. Nech skúmaný znak X je dichotomický, t.j. nadobúda dve možné hodnoty. Označiť bielou farbou tie políčka, v ktorých sa znak nevyskytol a čiernou tie, v ktorých sa vyskytol. Samozrejme na voľbe farieb nezáleží. Oblasti i a j sú susediace, ak majú spoločnú hranicu nenulovej dĺžky. Každé políčko oblasti znázorňujúce hodnotu znaku na vymedzenom území je teda biele alebo čierne. Hranica medzi dvoma políčkami môže byť typu biela-biela, čierno-čierna, resp. zmiešaná bielo-čierna. Rôznym typom priestorovej autokorelácie prislúchajú rôzne počty hraníc kategórie biela-biela, čierno-čierna, resp. zmiešaná bielo-čierna. Poznamenajme, že údaje merané v ordinálnej, resp. intervalovej škále vieme dichotomizovať. Označme hodnoty menšie ako medián bielou a hodnoty väčšie ako medián farbou čiernou. Iný spôsob dichotomizácie je zvoliť hranicu, na základe ktorej políčka vyfarbujeme údaj prislúchajúci vyššiemu územnému celku. Napríklad okres bude biely, ak je prirodzený prírastok vyšší ako republikový a inak čierny.

O stupeň všeobecnejšie sú miery pre tzv. k farebné mapy, zodpovedajúce nominálnym znakom s k obmenami znaku. Uvedieme tri najpoužívanejšie a najviac preskúmané koeficienty priestorovej autokorelácie pre intervalovú škálu. Sú to Moranov koeficient, Gearyho koeficient, koeficient G . Za určitých podmienok sú známe momenty koeficientov a ich pravdepodobnostné rozdelenie je asymptoticky normálne. Táto skutočnosť umožňuje testovanie signifikantnosti mier priestorovej autokorelácie. Použitie spomínaných koeficientov priestorovej autokorelácie má určité ohraničenia. Matica susedstva, ktorá je pre ne kľúčový pojem, však kompletne ignoruje cestnú a železničnú sieť, schodnosť terénu a podobne. Viaceré, podstatne odlišné oblasti môžu mať rovnakú maticu susedstva. Matica susedstva nezohľadňuje ani "kvalitu" susedstva. Tento nedostatok odstraňuje miera, ktorej autorom je Dacey. Žiaľ jeho momenty sa nedajú priamo vyčíslieť a teda neexistuje priamy test preukaznosti upraveného Moranovho koeficientu. Popísané metódy založené na maticiach susedstva zohľadňujú len najbližších susedov. Existuje zovšeobecnenie pre územia susediace v druhom a vyššom stupni. Územie i susedí s územím j , územie j susedí s územím k , potom hovoríme, že územie i susedí s k v druhom stupni. Problematiku je možné riešiť pomocou aparátu teórie grafov.

Dá sa tiež dokázať, že pre niektoré špecifické usporiadania oblastí rozdelenie testovacej štatistiky koeficientov nie je asymptoticky normálne. Napríklad rozdelenie testovacej štatistiky Moranovho koeficientu pre oblasti hviezdovitého typu má *beta rozdelenie*. Preto sa pre malé počty oblastí alebo územia nepravidelného tvaru a iné anomálie doporučuje testovanie existencie priestorovej štatistiky pomocou metódy Monte Carlo.

Ak sú globálne koeficienty pre testovanie priestorovej autokorelácie, resp. asociácie signifikantné, je prirodzená otázka, ktoré hodnoty ju spôsobujú. Lokálny Moranov

koeficient je vhodný pre identifikáciu priestorových aglomeratívnych bodov, rovnako ako lokálne G koeficient. Lokálny Gearyho koeficient je vhodný pre identifikáciu podobnosti, resp. nepodobnosti. Lokálne indikátory sa konštruujú pre rôzne vzdialenosti, aby sa zistil polomer zhlukovanej oblasti.

Testovanie závislosti

Chí kvadrát test, známy z klasickej štatistiky, môžeme použiť aj pre testovanie závislosti dvoch znakov rozložených v priestore. Existuje uhlová analógia Pearsonovho koeficienta, Spearmanovho koeficienta aj Kendallovho koeficienta. Príkladom možnosti aplikácie ďalšieho typu korelácie je skúmanie závislosti medzi dĺžkou pohybu a smerom. Tento druh korelácie je mimoriadne dôležitý v zoológii. Nájde tiež uplatnenie pri skúmaní dochádzky do zamestnania, odbytových kanálov a podobne.

Problém škály sa v literatúre zvykne označovať aj ako problém priestorovej agregácie. Problém agregovania území je úzko spojený s testovaním závislosti. Rozličným agregáciám zodpovedá rozličná forma závislosti. Vo väčšine reálnych prípadov priestorová agregácia má tendenciu redukovať variačné rozpätie a znižovať disperziu. Porovnanie máp skúmanej premennej na rozličných úrovniach agregácie musí brať do úvahy uvedené znižovanie variability.

Na záver

National Research Council v USA v roku 1991 vyhlásil priestorovú štatistiku za rýchle sa rozvíjajúcu novú oblasť štatistiky, s fascinujúcimi teoretickými a aplikovanými výskumnými možnosťami. Nespomenuli sme modely pracujúce s priestorovou informáciou modely SAR, CAR, MA. Ani priestorové analógie *t*-testu, analýzy rozptylu, priestorovú faktorovú analýzu a rýchlo sa rozvíjajúcu perspektívnu priestorovú ekonometriu.

Priestorová štatistika je aplikovateľná v celom rade vedných odborov ako napríklad v poľnohospodárstve, lesníctve, biológii, demografii, sociológii, regionalistike, regionálnej ekonomike, urbanistickom plánovaní, ekológii, environmentálnych štúdiách, analýze prírodných zdrojov, epidemiológii, geológii, fyzike, kryštalografii, archeológii, kriminológii, diaľkovom prieskume zeme a v medzinárodných vzťahoch. Všade tam, kde analyzujeme priestorové javy. Existujú však aj oblasti, ktoré s úspechom využívajú metódy priestorovej štatistiky, hoci nepracujú priamo s údajmi priestorového charakteru. Napríklad ak skúmaný ekonomický časový rad popisuje jav so známou periódou, údaje môžeme transformovať na smerové. Na kružnici môžeme označovať aj počet novo hlásených prípadov ochorení, resp. úmrtí na určitú chorobu, tvorbu hrubého národného produktu vykazovanú štvrťročne, svetové akciové indexy, denné kurzy mien, a podobne.

Nesmieme zabudnúť na softwarovú podporu metód priestorovej štatistiky. Metódy priestorovej štatistiky obsahuje MINITAB – vyvinutý Griffithom. SPACESTAT, vyvinutý Anselinom, je mimoriadne vhodný pre priestorovú ekonomiku. Dostupné sú aj makrá pre SPSS. Niektoré modely možno nájsť vo Fortrane. V SPLUS existuje balík S+SpatialStat. Mnohé programy sú dostupné v špeciálnom jazyku R. SAS obsahuje aj procedúry umožňujúce niektoré priestorové štatistické analýzy. Na webových stránkach sú dostupné mnohé SAS makrá zamerané na špeciálne metódy priestorovej štatistiky. GIS je jedinečná kombinácia hardwaru a softwaru umožňujúca vizualizáciu geografických dát. Moduly pre priestorové analýzy GIS umožňujú prehľadávanie databázy, získavanie nových odvodených informácií, jednoduchú štatistickú analýzu údajov, predspracovanie údajov

pre zložitejšie štatistické analýzy, simuláciu a modelovanie procesov. Základnou analytickou časťou je Analyst. Pre vytváranie, zobrazovanie a analyzovanie sieťových údajov slúži podsystém Network analyst. Ide predovšetkým o úlohy pri výbere optimálnej trasy, optimálnej okružnej cesty, alokácie zdrojov a modelovanie zaťaženia siete. Grid analyst slúži pre prácu a analýzu rastrových reprezentácií – bunkových údajov. Patrí sem analýza povrchu, oceňovanie vzdialeností, generovanie zón. Nástroje pre tvorbu a využívanie modelov terénu poskytuje Terrain modeler. Imager a Advanced Imager umožňuje geografické analýzy, štatistické analýzy priestorových aj nepriestorových údajov, analýzy obrazov, prostriedky pre podporu priestorového rozhodovania a prostriedky pre analýzu zmien v čase.

Úplne na záver môžeme povedať iba toľko

Umenie hľadá krásu, spoločnosť spravodlivosť a veda pravdu.

A práve priestorová štatistika môže pomôcť túto pravdu nájsť.

LITERATÚRA

- [1] Arlinghaus, S.L.: *Practical handbook of spatial statistics*. Boca Raton: CRC Press, 1996 ISBN 0 8493 0132 7
- [2] Clif, A.P. - Ord, J.K.: *Spatial processes. Models and applications*. London: Pion, 1981 ISBN 0 85086 081 4
- [3] Griffith, D.A. - Layne, L.J.: *A casebook for spatial data analysis*. New York: Oxford University Press, 1999 ISBN 0 19 510958 9
- [4] Ord, J.K. - Getis, A.: *Local spatial autocorrelation statistics: Distribution issues and an application*. Geographical Analysis, 27, č. 4, 1995, s. 286-306
- [5] Ripley, B.D.: *Statistical inference for spatial processes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- [6] Stehliková, B.: *Priestorová štatistika*. Skriptá. Nitra: SPU, 2002. ISBN 80-8069-046-4

prof. RNDr. Beáta Stehliková, CSc.

Fakulta ekonómie a podnikania

Paneurópska vysoká škola

Tematínska 10

SK- 851 05 Bratislava

e-mail: stehlikovab@gmail.com

POUŽITIE POMERU PRI RIEŠENÍ GEOMETRICKÝCH ÚLOH (METODICKÝ PRÍSPEVOK)

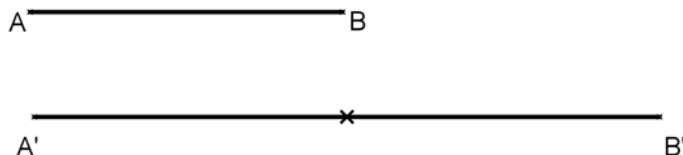
ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO

ABSTRACT. The paper introduced the concept of the ratio of segments (the ratio of lengths of segments). Using the ratio of the segments, we introduced a ratio of the points on the line, golden section, Apollonius' s circle, power point to a circle, a circle of five points, nine points circle, Euler line, Euclid' s Theorems. We present the didactic approach on the solutions of the examples which demonstrate the theory, too.

Úvod - pomer úsečiek

Pomer k úsečiek $AB, A'B'$ je kladné číslo, o ktorom platí: $A'B' = k \cdot AB$, resp.
 $\frac{A'B'}{AB} = k$.

Príklad:



Obr. 1

$$A'B' = 2 \cdot AB, \text{ čiže } \frac{A'B'}{AB} = 2$$

Podobne pomer používame aj pri dĺžkach úsečiek $\frac{|A'B'|}{|AB|} = k$, kde $|A'B'|$ je dĺžka úsečky $A'B'$, $|AB|$ je dĺžka úsečky AB .

Pomer úsečiek (pomer dĺžok úsečiek) má v geometrii veľké použitie. Používame ho pri určení bodu vzhľadom k daným bodom (deliaci pomer bodu), pri podobnosti trojuholníkov a ich použití pri konštrukčných úlohách, dôkazových úlohách, pri geometrických transformáciách a inde.

V našom metodickom príspevku uvedieme niekoľko ukážok použitia pomeru.

1. Deliaci pomer bodu

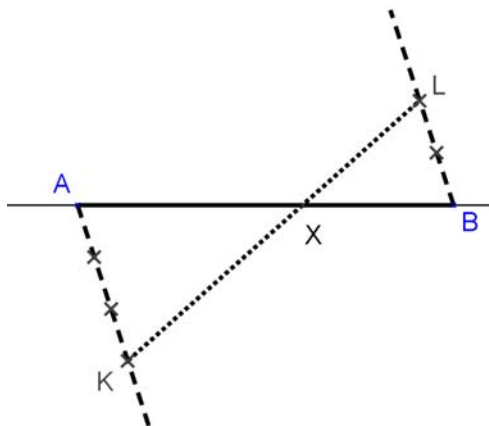
Deliacim pomerom bodu $X \neq A, B$ priamky AB vzhľadom k bodom A, B nazývame číslo, ktorého absolútna hodnota sa rovná $AX : BX$ a je kladné pre body X ležiace zvonka úsečky AB a záporné pre body X ležiace vo vnútri úsečky AB .

Deliaci pomer bodu X označujeme $AX : BX = \frac{AX}{BX} = (ABX) = \lambda$.

Príklad 1

Daná je priamka AB . Zostrojte na priamke AB bod X , ktorého deliaci pomer vzhľadom na body A, B sa rovná $-\frac{3}{2}$.

Riešenie. Použijeme podobnosť trojuholníkov.



Obr. 2

Úsečku AB bod X rozdelil na dve úsečky, ktorých pomer je $AX : BX = 3 : 2$, čo je to isté ako $|AX| : |BX| = 3 : 2$.

Príklad 2

Úsečku AB rozdeľte na dve úsečky tak, aby pomer menšej úsečky k väčšej úsečke sa rovná pomeru väčšej úsečky k celej úsečke.

Riešenie. Predpokladajme, že bod X delí úsečku AB podľa podmienok úlohy. Označme $|AB| = a$, $|AX| = x$; potom $|BX| = a - x$ a nech $|AX| > |BX|$. Podľa zadania úlohy má platiť

$$(a - x) : x = x : a,$$

po úpravách

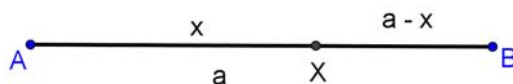
$$x^2 = a(a - x), \text{ čiže } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

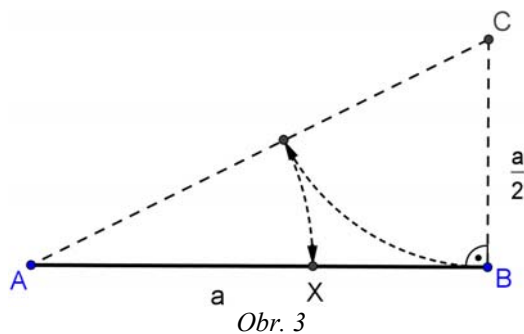
Riešením kvadratickej rovnice sú korene $x_1 = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$, $x_2 = \frac{1}{2}a(-\sqrt{5} - 1)$.

Koreň x_2 našej úlohy nevyhovuje, pretože je záporný. Koreň x_1 pre konštrukciu upravíme

$$x_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} - \frac{1}{2}a$$

$$|AC| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$





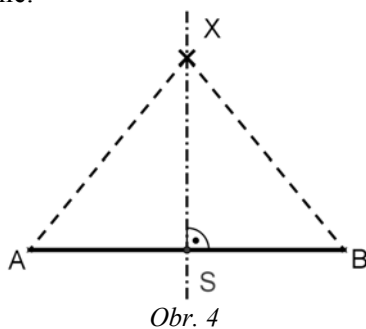
Obr. 3

Hovoríme, že úsečka AB je rozdelená podľa **zlatého rezu** (konštrukcia pochádza od Heróna).

Príklad 3

Daná je úsečka AB a kladné číslo k . Určte množinu všetkých bodov X v rovine, pre ktoré je $AX = k \cdot BX$.

Riešenie.

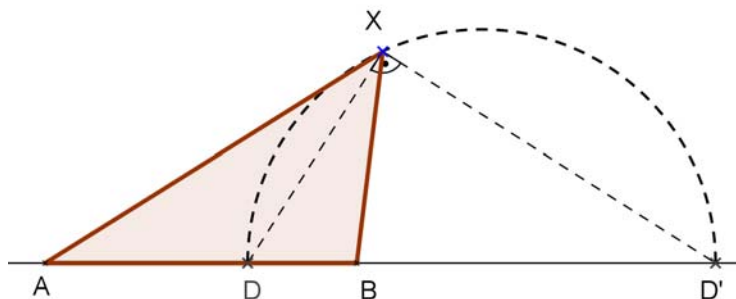


Obr. 4

a) Ak $k = 1$, potom je $AX = BX$ a hľadanou množinou bodov X je os úsečky AB .

b) Ak $k \neq 1$, existujú na priamke AB dva body D, D' , pre ktoré platí $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Každý bod X neležiaci na priamke AB , pre ktorý platí $AX = k \cdot BX$ je vrcholom pravého uhla nad úsečkou DD' .

(osi susedných uhlov sú navzájom kolmé). Môžeme stručne vysloviť tvrdenie, že každý bod X , pre ktorý platí $AX = k \cdot BX$, leží na kružnici s priemerom DD' .



Obr. 5

Treba ešte ukázať, že pre každý bod X , ktorý leží na kružnici s priemerom DD' , platí $AX = k \cdot BX$.

Ak bod X leží na uvažovanej kružnici, potom $XD \perp XD'$. Ved'me bodom B rovnobežky s XD, XD' a zostrojíme ich priesečníky Z, Y s priamkou AX . Pri vrchole B vznikol pravý uhol. Pretože $AD = k \cdot BD$, je $AX = k \cdot XY$. Podobne aj z rovnosti $AD' = k \cdot BD'$ plynie $AX = k \cdot XY$.



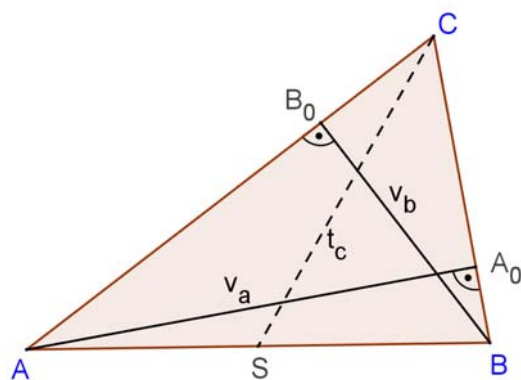
Záver.

Apollóniovu kružnicu budeme stručne označovať $\mu(A, B, k)$. Priemer DD' kružnice μ zostrojíme na základe deliacich pomerov $(ABD) = -k$, $(ABD') = k$. Na obrázku je konštrukcia kružnice $\mu(A, B, 2:1)$.



Zostojte trojuholník ABC , ak je daná strana c , ťažnica t_c a pomer výšok $v_a : v_b = 3 : 2$.

Rozbor. Nech trojuholník ABC má požadované vlastnosti.

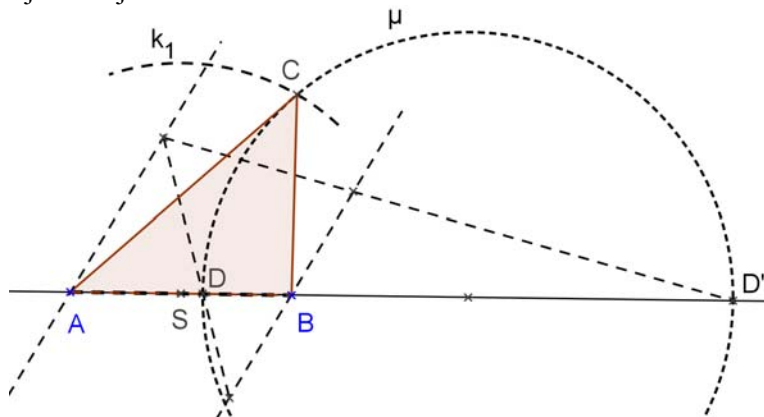


Obr. 8

Z podobnosti trojuholníkov AA_0C, BB_0C vyplýva $AC : BC = v_a : v_b = 3 : 2$. Z toho vyplýva, že bod C je bodom Apollóniovej kružnice $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$. Keďže poznáme ťažnicu t_c , bod C patrí aj kružnici $k_1(S, t_c)$.

Postup konštrukcie

1. Zostrojíme úsečku AB ; $|AB| = c$.
2. Zostrojíme stred S úsečky AB .
3. Zostrojíme kružnicu k_1 ; $k_1(S, t_c)$.
4. Zostrojíme body D, D' ; $(ABD) = -\frac{3}{2}, (ABD') = \frac{3}{2}$.
5. Zostrojíme kružnicu $\mu\left(A, B, \frac{3}{2}\right)$.
6. Zostrojíme bod C ; $C \in k_1 \cap \mu$.
7. Zostrojíme trojuholník ABC .



Obr. 9

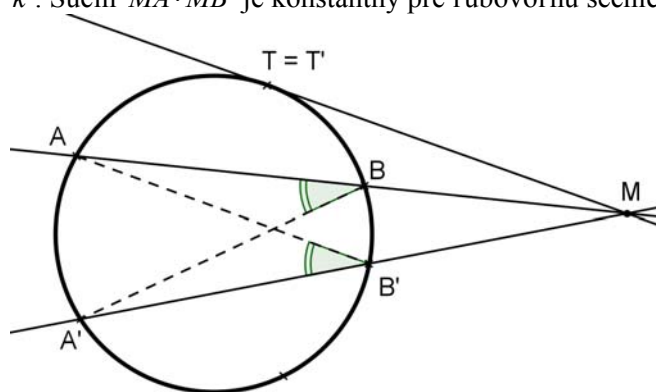
Skúška. Zrejme trojuholník má dĺžku strany AB podľa zadania $|AB| = c$. Ťažnica CS má dĺžku t_c , pretože $C \in k_1$. Naviac, $|CA| : |CB| = 3 : 2$, teda aj $v_a : v_b = 3 : 2$.

Diskusia. Počet riešení danej úsečky závisí od vzájomnej polohy kružníc k_1 a μ . Teda môžu mať dav, jeden alebo žiadny spoločný bod.

Ak bod C je jediný, musí ležať na priamke AB a vtedy nie je vrcholom trojuholníka ABC . Ak existujú dva rôzne body C , sú súmerné podľa priamky AB a zostrojené trojuholníky sú zhodné. Do úvahy berieme len jeden z nich.

2. Mocnosť bodu ku kružnici

Nech je daná kružnica $k(S, r)$ a bod M neležiaci na tejto kružnici. Vedme bodom M sečnice kružnice k . Súčin $MA \cdot MB$ je konštantný pre ľubovoľnú sečnicu kružnice k .



Obr. 10

Pomocou obvodových uhlov a ich vlastností platí

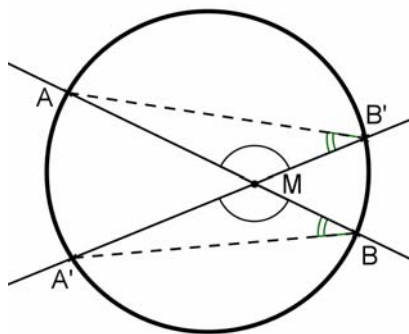
$$\triangle MAB' \sim \triangle MA'B \Rightarrow |MA| : |MB'| = |MA'| : |MB|.$$

Po úprave dostaneme $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.

Pri dotýčanici je $T = T'$. Teda $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$.

Číslo $|MT|^2$ nazývame **mocnosťou bodu M ku kružnici $k(S, r)$** .

Ak bod M je vnútorným bodom kružnice k , potom opäť platí $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$.



Obr. 11

V tomto prípade hovoríme o zápornej mocnosti bodu M ku kružnici k . Mocnosť bodu kružnice k tejto kružnici je zrejme nulová.

Na základe mocnosti bodu ku kružnici môžeme udať postačujúcu podmienku pre to, aby štyri rôzne body ležali na jednej kružnici.

Ak priamky AB , $A'B'$ pretínajú v bode M tak, že $|MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'|$ a bod M leží súčasne vo vnútri úsečiek AB , $A'B'$ alebo súčasne mimo týchto úsečiek, potom body A, B, A', B' ležia na jednej kružnici.

3. Kružnica piatich bodov

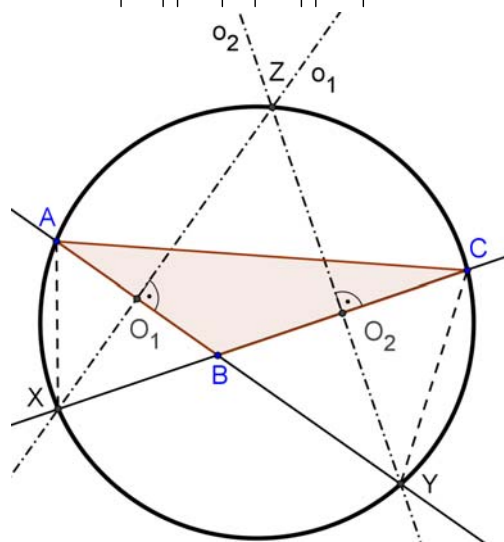
Vyslovme tvrdenie.

Nech je daný trojuholník ABC , ktorého uhol pri vrchole B nie je pravý. Zostojme os o_1 úsečky AB a os o_2 úsečky BC . Označme X, Y, Z : $X \in o_1 \cap BC$, $Y \in o_2 \cap AB$, $Z \in o_1 \cap o_2$. Potom body X, Y, Z, A, C ležia na jednej kružnici.

Tvrdenie vyplýva z nasledujúceho: $\triangle BO_1X \sim \triangle BO_2Y$ (podľa vety uu).

Potom

$$\begin{aligned} |BO_1| : |BX| &= |BO_2| : |BY| \\ |BO_1| \cdot |BY| &= |BO_2| \cdot |BX| \\ 2|BO_1| \cdot |BY| &= 2|BO_2| \cdot |BX| \\ |BA| \cdot |BY| &= |BC| \cdot |BX| \end{aligned}$$



Obr. 12

Nech bod B je vrcholom tupého uhla, ležia body na predĺžení strán AB, BC za bodom B a bod B je vnútorným bodom úsečiek AY, CX .

Podľa vety o štyroch bodoch ležiacich na kružnici vyplýva, že body A, C, X, Y ležia na jednej kružnici.

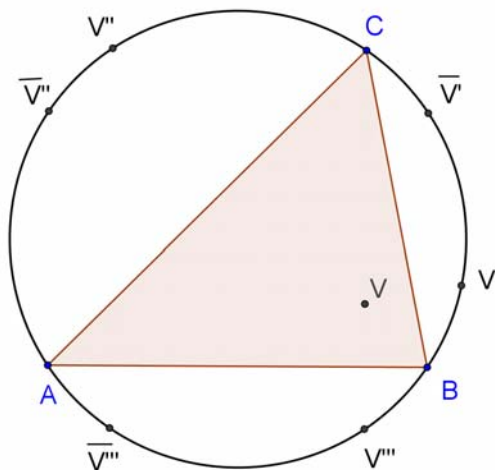
Zo zhodnosti uhlov vyznačených na obrázku vyplýva, že bod Z leží na jednej kružnici s bodmi A, C, X, Y .

Kružnicu k nazývame **kružnicou piatich bodov**.

Na základe vety o kružnici piatich bodov a so skladania osových súmerností vyplývajú dve vlastnosti priesečníka výšok trojuholníka:

- Body súmerné s priesečníkom výšok podľa strán trojuholníka ležia na kružnici trojuholníku opísanej.

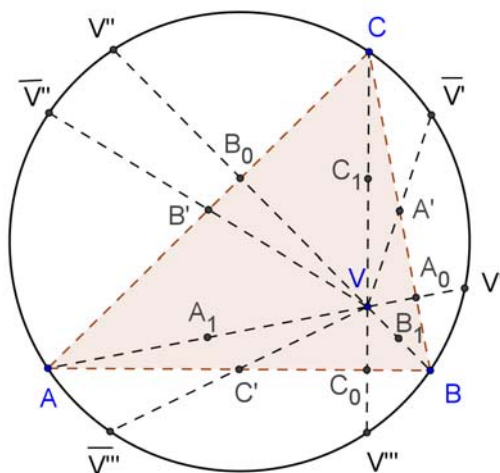
- b) *Body súmerné s priesečníkom výšok podľa stredov strán trojuholníka ležia na kružnici trojuholníku opísanej .*



Obr. 13

4. Kružnica deviatich bodov

V predchádzajúcom odstavci sme uviedli, že na kružnici trojuholníku opísanej ležia body súmerné s priesečníkom výšok podľa strán trojuholníka a podľa stredov strán trojuholníka. Keďže je to kružnica trojuholníku opísaná, ležia na nej aj vrcholy trojuholníka.



Obr. 14

- Zvoľme rovnoľahlosť $H\left[V, \chi = \frac{1}{2}\right]$. V nej sa spomínaných deväť bodov na kružnici opísanej trojuholníku zobrazí do deviatich bodov, ktoré označme nasledovne:
1. Body A, B, C sa zobrazia do bodov A_1, B_1, C_1 - sú to stredy úsečiek AV, BV, CV .
 2. Body V', V'', V''' sa zobrazia do piat A_0, B_0, C_0 výšok trojuholníka ABC .
 3. Body $\overline{V'}, \overline{V''}, \overline{V'''}$ sa zobrazia do stredov A', B', C' strán trojuholníka ABC .

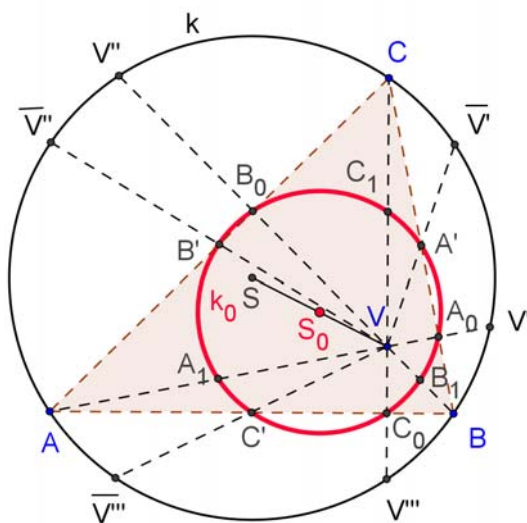
Keďže body $A, B, C, V', V'', V''', \overline{V'}, \overline{V''}, \overline{V''}'$ ležia na jednej kružnici (je to kružnica trojuholníka opísaná), potom aj body $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A_0, B_0, C_0$ ležia na jednej kružnici.

Túto kružnicu nazývame **kružnicou deviatich bodov** (**Feuerbachovou kružnicou**), ktorej stred budeme označovať S_0 .

Teda na kružnici deviatich bodov ležia:

- stredy úsečiek spájajúcich priesečníky výšok s vrcholmi trojuholníka - A_1, B_1, C_1
- päty výšok trojuholníka - A_0, B_0, C_0
- stredy strán trojuholníka - A', B', C'

Z rovnoľahlosti $H \left[V, \chi = \frac{1}{2} \right]$ vyplýva, že stred S_0 kružnice deviatich bodov je stredom úsečky VS a jej polomer $r_0 = \frac{1}{2}r$.



Obr. 15

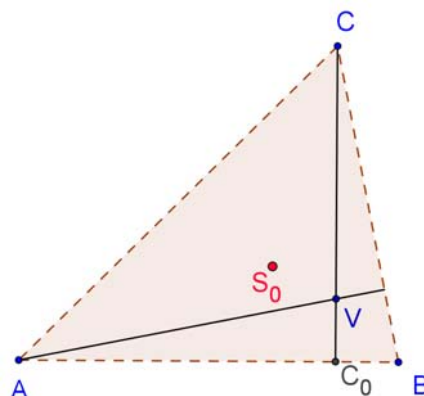
Príklad 5

Zostrojte trojuholník ABC , v ktorom poznáte priesečník V výšok, stred S_0 kružnice deviatich bodov, päť C_0 výšky v_c .

Riešenie

Rozbor

Vyznačme v načrtnutom trojuholníku ABC dané prvky hľadaného trojuholníka.

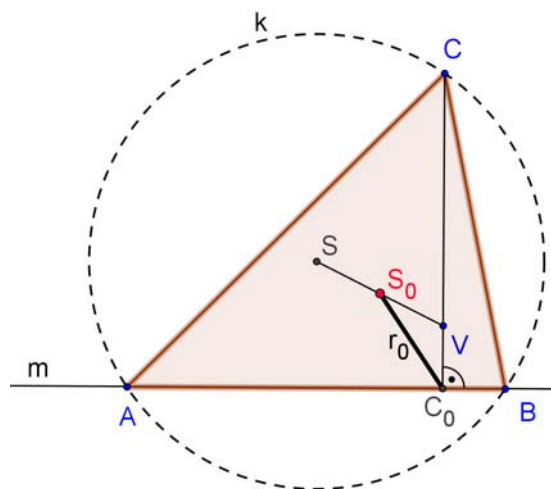


Obr. 16

Z vlastností prvkov trojuholníka vyplýva, že body V, C_0 ležia na priamke, na ktorej leží výška v_c . Body V, S_0 ležia na priamke, na ktorej leží stred S kružnice opísanej, pričom S_0 je stred úsečky VS . Polomer r kružnice trojuholníku opísanej je dvojnásobok dĺžky úsečky S_0C_0 . Z toho vyplýva postup.

Postup konštrukcie

1. Zostrojíme priamku VC_0 .
2. Zostrojíme priamku m , ktorá prechádza bodom C_0 kolmo na VC_0 ; $m \perp VC_0$.
3. Zostrojíme bod S , S leží na polpriamke VS_0 a platí $|VS_0| = |SS_0|$.
4. Zostrojíme kružnicu $k(S, r = 2r_0)$.
5. Zostrojíme body A, B ; $A \in m \cap k, B \in m \cap k$.
6. Zostrojíme bod C ; $C \in VC_0 \cap k$.
7. Zostrojíme trojuholník ABC .

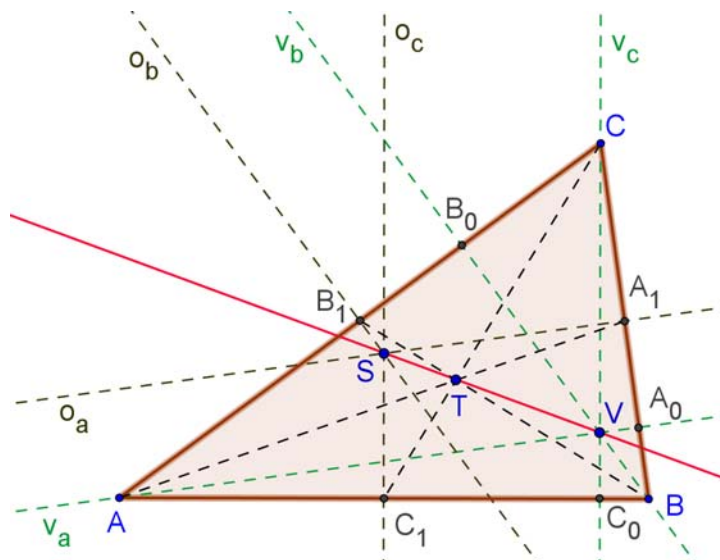


Obr. 17

Skúšku a diskusiu prenechávame čitateľovi.

5. Eulerova priamka

Nech je daný ľubovoľný rôznostranný trojuholník ABC , v ktorom je T ťažisko, V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku.



Obr. 18

Zvoľme rovnôľnosť $H\left[T, -\frac{1}{2}\right]$. Táto rovnôľnosť zobrazí body A, B, C do bodov A_1, B_1, C_1 , kde A_1, B_1, C_1 sú stredy strán uvažovaného trojuholníka. Daná rovnôľnosť zobrazí výšky v_a, v_b, v_c do osí strán o_a, o_b, o_c . Priesečník výšok V sa zobrazí do priesečníka S osí strán. Potom body V, S ležia na priamke, ktorá prechádza ťažiskom T (stred rovnôľnosti) a platí $|VT| = 2|TS|$. Deliaci pomer je potom $(SVT) = -\frac{1}{2}$.

Z toho vyplýva:

Body S, V, T ležia na jednej priamke a platí $(SVT) = -\frac{1}{2}$. Táto priamka sa nazýva

Eulerova priamka.

Poznámka:

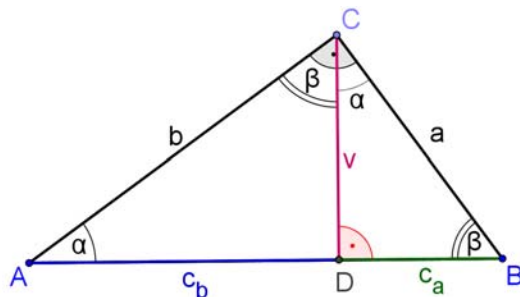
- Ak trojuholník ABC je rovnostranný, body S, V, T splývajú.
- Z vlastností kružnice deviatich bodov vyplýva, že bod S_0 leží na Eulerovej priamke a zrejme S_0 je stred úsečky VS .

6. Euklidove vety

Ako sme už viackrát spomenuli pri podobnosti trojuholníkov sa vyskytuje pomer odpovedajúcich strán.

Teraz sa obmedzíme na podobnosť pravouhlých trojuholníkov.

Nech je daný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C . Označme a, b, c dĺžky strán, v dĺžku výšky na preponu a c_a, c_b dĺžky úsekov prepony, rozdelených výškou v .



Obr. 19

a) Zrejme trojuholníky ADC a CDB sú podobné, a preto platí $v : c_b = c_a : v$,

čiže $v^2 = c_a \cdot c_b$.

Geometrická interpretácia znie:

Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z príslých úsekov prepony (**Euklidova veta o výške**).

b) Zrejme aj trojuholníky ABC a ACD sú podobné, a preto platí: $c : b = b : c_b$,

čiže $b^2 = c \cdot c_b$.

Analogicky pre trojuholníky ABC a CBD platí $c : a = a : c_a$,

čiže $a^2 = c \cdot c_a$.

Môžeme vysloviť tvrdenie:

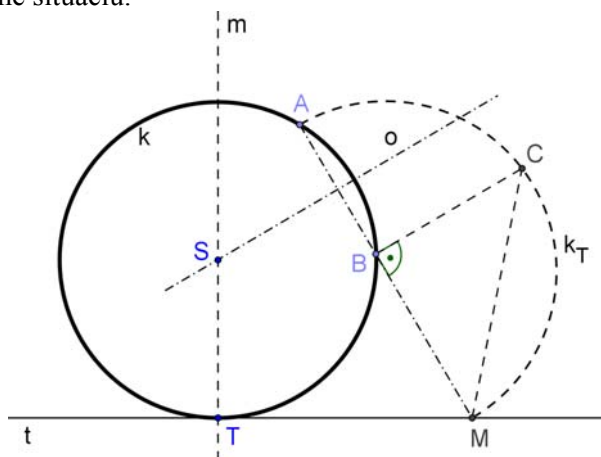
Obsah štvorca zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z prepony a príslého úseku prepony (**Euklidova veta o odvesne**).

Príklad 6

Daná je priamka t a body A, B ($A \neq B$), ktoré ležia v jednej polrovine určenej priamkou t . Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza bodmi A, B a dotýka sa priamky t .

Riešenie

Rozbor. Načrtnime situáciu.



Obr. 20

Stred S kružnice k je priesečníkom osi úsečky AB a priamky m kolmej na priamku t , idúcej bodom T . Bod T však nie je daný, a preto sa zacieme na jeho zostrojenie. Priamka AB vo všeobecnosti pretne priamku t v bode M . Z mocnosti bodu M ku kružnici k platí $|MA| \cdot |MB| = |MT|^2$. Úsečku dĺžky $|MT|$ zostrojíme pomocou Euklidovej vety o odvesne. Zrejme platí $|MT| = |MC|$.

Postup konštrukcie

1. Zostrojíme bod M ; $M \in AB \cap t$.
2. Zostrojíme bod C ; pomocou Euklidovej vety o odvesne platí $|MA| \cdot |MB| = |MC|^2$, $C \in k_t$, $BC \perp AB$.
3. Zostrojíme bod T ; $|MT| = |MC|$, $T \in t$.
4. Zostrojíme bod S ; $S \in o \cap m$.
5. Zostrojíme kružnicu $k(S, r = |ST|)$.

Skúšku správnosti a konštrukciu prenechávame čitateľovi.

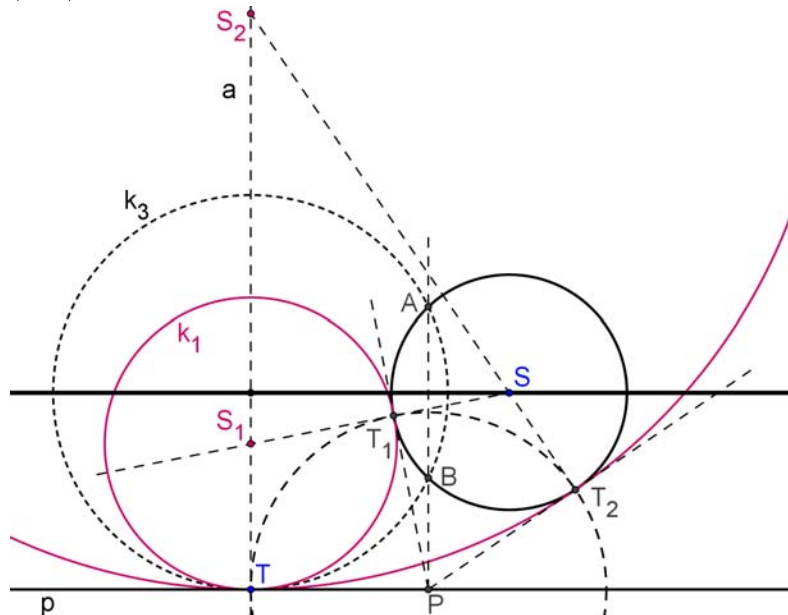
V diskusii uvažujte o všetkých možnostiach polôh bodov A, B vzhľadom na priamku t .

Príklad 7

Zostrojte kružnicu k , ktorá sa dotýka danej kružnice $k_1(S, r)$ a priamky p v danom bode T , ktorý neleží na kružnici k_1 .

Riešenie

Rozbor. Zostrojme kružnicu k_2 takú, ktorá sa dotýka priamky p v bode T a pretína kružnicu k_1 v dvoch bodoch A, B . Zostrojme priamku m určenú bodmi A, B . Jej priesečník s priamkou p označme P . Zrejme platí: $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PT_1|^2 = |PT_2|^2$, kde T_1, T_2 sú dotykové body dotýčnic ku kružnici k_1 idúce bodom P . Z toho vyplýva: $|PT| = |PT_1| = |PT_2|$. Body T, T_1, T_2 ležia na kružnici so stredom v bode P .



Obr. 21

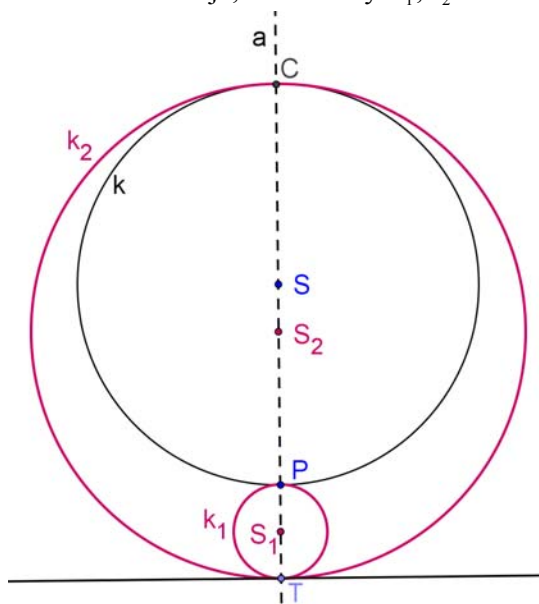
Postup konštrukcie

1. Zostrojíme ľubovoľnú kružnicu k_2 , ktorá sa dotýka priamky p v bode T .
2. Zostrojíme body $A, B; \{A, B\} \subset k_1 \cap k_2$.
3. Zostrojíme priamku $m; m = AB$.
4. Zostrojíme bod $P; P \in m \cap p$.
5. Zostrojíme kružnicu $k_3; k_3(P, |PT|)$.
6. Zostrojíme body $T_1, T_2; \{T_1, T_2\} \subset k_1 \cap k_3$.
7. Zostrojíme priamku $a; a \perp p, T \in a$.
8. Zostrojíme body $S_1, S_2; S_1 \in a \cap \overline{ST_1}, S_2 \in a \cap \overline{ST_2}$.
9. Zostrojíme kružnice $k(S_1, |S_1T|), k'(S_2, |S_2T|)$.

Skúšku správnosti prenechávame čitateľovi.

Diskusia. Kružnica k_2 , ktorú sme zostrojili, vždy existuje; potom aj priamka AB , kde $\{A, B\} \subset k_1 \cap k_2$ tiež vždy existuje. Priamka AB môže byť rovnobežná s priamkou p alebo je s ňou rôznobežná (nemôže byť s priamkou p totožná).

a) Ak $AB \parallel p$, potom bod P neexistuje, avšak body S_1, S_2 ľahko zostrojíme.



Obr. 22

b) Ak $AB \not\parallel p$, bod P existuje a nesplýva s bodom T (pretože by sa kružnice k_1, k_2 dotýkali v bode $T, T \in k_1$). Bod P je vonkajší bod kružnice k_1 , a potom existujú dotykové body T_1, T_2 dotyčníc PT_1, PT_2 .

V ostatných prípadoch má úloha dve riešenia.

Záver

V práci sme metodicky spracovali ukážky použitia pomeru pri odvodení niektorých tvrdení a pri riešení konštrukčných úloh. Problematiku sme nevyčerpali, použitie pomeru dáva veľké uplatnenie nielen v elementárnej geometrii, je osvedčeným nástrojom pri štúdiu napr. kužeľosečiek a iných geometrických útvarov. Niektoré úlohy a ich riešenia poskytujú aj obtiažne geometrické problémy .

LITERATÚRA

- [1] Martin, Q. E.: *Geometry Construction.*, Springer 1997. ISBN: 0-387-98276-0
- [2] Šedivý, J.: *Shodnost a podobnost v konštrukčných úlohách.* Škola mladých matematiku. Mladá fronta. Praha 1980. ISBN: 23-065-8003/2
- [3] Chmelíková, V.: *Zlatý řez nejen v matematice.* Praha 2009, MATFYZ PRESS. ISBN: 978-80-7378-078-4
- [4] Šedivý, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.* FPV UKF v Nitre. Nitra 2001. ISBN: 80-8050-417-2
- [5] Šedivý, O. a kol.: *Geometria 2.* SPN Bratislava 1997. ISBN: 067-466-87 G 2X 03/02

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
 Katedra matematiky
 Fakulta prírodných vied
 Univerzita Konštatntína Filozofa v Nitre
 Trieda A. Hlinku 1
 SK – 949 01 Nitra
 e-mail: osedivy@ukf.sk

RNDr. Dušan Vallo, PhD..
 Katedra matematiky
 Fakulta prírodných vied
 Univerzita Konštatntína Filozofa v Nitre
 Trieda A. Hlinku 1
 SK – 949 01 Nitra
 e-mail: dvallo@ukf.sk

MOTIVÁCIA POMOCOU RIEŠENIA KONŠTRUKČNÝCH GEOMETRICKÝCH ÚLOH S VYUŽITÍM IKT

EVA BARCÍKOVÁ

ABSTRACT. In this paper we deal with problems of motivation in learning mathematics and we want to show the importance of modernisation of approaches to solving geometrical tasks. We focus mainly on solving geometrical construction tasks as a motivational factor based on use of IKT.

ÚVOD

Každé ľudské správanie je motivované. Bez motivácie by nebol pokrok. O to väčší význam má motivácia pre objavovanie a vzdelávanie. Od praveku je osvojovanie a zachovanie poznatkov, ako aj ich odovzdanie ďalšej generácii motivované prirodzenou snahou ľudstva prežiť a zlepšovať svoje životné podmienky. Od čias praveku po 21. storočie sa množstvo poznatkov znásobilo a rozčlenilo do sofistikovaného systému vied a odovzdávanie poznatkov do školského systému. Je teda samozrejmé, že otázkou motivácie sa zaoberá aj pedagogika a predovšetkým didaktika. Motivácia vo vyučovaní má v dnešnom školstve dôležité, aj keď mnohokrát nedocenené, postavenie. V súčasnej reforme a humanizácii školstva je význam motivácie na učebnú činnosť žiakov nezanedbateľný. Učenie nemá byť len nutnosťou a povinnosťou, ale aj radosťou a prirodzenou aktivitou. Každé dieťa má právo objaviť čaro vzdelávania, radosť z objavovania nového a nepoznaného. Je pedagogickým umením učiteľa odovzdať s poznatkami aj túto radosť. O to viac v exaktnej vede akou je matematika. Matematika často patrí k neoblúbeným predmetom. Mnoho ľudí aj v dospelosti spomína na vyučovanie matematiky negatívne a s odôvodnením, že matematiku nikdy dobre neovládali. Vrodené vlohy nie sú postačujúce pre trvalé osvojenie si matematických poznatkov. Dostatočná motivácia je nevyhnutná.

Motivácia vo vyučovaní

Modernú školu charakterizujú zmeny nie len v obsahu vzdelávania, ale hlavne zmeny v metódach vzdelávania. Dôležité je neustále skúmanie nových postupov, ktoré by boli adekvátne novým úlohám edukačného procesu. Po stanovení cieľov a obsahu vyučovacieho procesu závisí jeho efektivita od spôsobu, akým sa tieto ciele snažíme dosiahnuť, t. j. od vyučovacích metód, organizačnej formy a materiálnych prostriedkov. Prostredníctvom vyučovacích metód sa transformuje obsah vzdelávania a výchovy do výchovno-vzdelávacieho procesu. Ide teda o spôsob, respektíve cestu, pomocou ktorej sa dosahujú stanovené ciele. Táto charakteristika vychádza z pôvodu slova metóda. Odvodené je z gréckeho slova „methodos“ čo znamená spôsob, cesta. Definícia vyučovacej metódy je obsiahlejšia. Podľa E. Stračára: „*Vyučovacou metódou rozumieme zámerné usporiadanie obsahu vyučovania, činnosti učiteľa a žiaka, ktoré sa zaciľujú na dosiahnutie stanovených výchovných a vzdelávacích cieľov a to v súlade so zásadami organizácie vyučovania.*“ (Petlák, E., 1997, s. 108) Vyučovacia metóda teda zahrňuje aj súčinnosť učiteľa, učiva a žiaka a zároveň plní aj výchovné ciele. Podrobnejšiu definíciu zahrňujúcu aj mnohostrannosť podmienok pôsobiach na výchovno-vzdelávací proces

podal I. Mojžišek „*Vyučovacia metóda je pedagogická – špecifická didaktická aktivita subjektu a objektu vyučovania, rozvíjajúca vzdelanostný profil žiaka, súčasne pôsobiaca výchovne a to v zmysle vzdelávacích a tiež výchovných cieľov a v súlade s vyučovacími a výchovnými princípmi. Spočíva v úprave obsahu, v usmernení aktivity objektu a subjektu, v úprave zdrojov poznania, postupov a techník, zaistení fixácie alebo kontroly vedomostí a zručností, záujmov a postojov.*“ (Petlák, E., 1997, s. 109) Z uvedených definícií vyplýva, že vyučovacia metóda nie je len premyslený spôsob práce učiteľa.

Motivácia, aktivizácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky

„*Psychologicko-pedagogické pozorovania ukázali, že najlepším spôsobom, ako vyvolať záujem o predmet, je ukázať jeho potrebu, a to znamená urobiť získané vedomosti použiteľnými v iných podmienkach ako sú tie, za ktorých boli osvojené.*“ (Gábor, O., Kopanec, O., Križalkovič, K., 1989, s.225) Štúdium matematiky v škole má najskôr vzbudiť, neskôr usmerniť a hlavne udržať záujem a schopnosť využívať matematický aparát s ľahkosťou v každodenných životných situáciách. Najlepšou motiváciou vo vyučovaní je ukázať potrebu osvojenia si nových poznatkov a ich využiteľnosť v praxi. Odpoveď na častú žiacku otázku „na čo sa mám učiť matematiku“ dáva matematika sama. Vznikla z prirodzenej potreby ľudstva a teda každá matematická teória je využiteľná a nevyhnutná v praxi. Pri štúdiu exaktnej vedy, akou je aj matematika, sú obzvlášť dôležité vedomostné výkony a ich neustále upevňovanie a skvalitňovanie. Dosiahnutie výkonu je podmienené viacerými faktormi. Najdôležitejšie sú schopnosti jedinca a úroveň motivácie. V psychológii sa používa rovnica

$$\text{výkon} = \text{schopnosti} \cdot \text{motivácia}$$

Teda pri nízkej úrovni motivácie sa znižuje aj výkon. Dokonca pri nulovej motivácii je výkon prakticky nulový.

Význam motivácie vo vyučovaní zdôraznil aj G. Polya vo svojich troch základných princípoch učenia matematiky : princíp aktívneho učenia, princíp najlepšej motivácie a princíp následnosti fáz. Odporúča : „Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra.“ „Najlepším spôsobom ako sa niečo naučiť je objaviť to.“

Pre úspešné rozvíjanie vedomostí je nevyhnutná samostatná aktívna činnosť žiaka. Môže sa prejavovať vnútorne a navonok. Vnútorne aktivita, ako úmyselná pozornosť, je síce ťažko pozorovateľná, avšak rovnako dôležitá ako vonkajšia aktivita. Aplikácia aktivizujúcich vyučovacích metód zvyšuje u žiakov pochopenie riešenej problematiky, pozornosť, aplikáciu vyšších myšlienkových pochodov, podporuje rozvoj tvorivosti, podnecuje žiakov vnímať učenie ako činnosť, ktorú realizujú oni sami a zvyšuje úroveň motivačnú zložku študentovej psychiky. A naopak správna motivácia je základom aktívnej činnosti žiaka na vyučovaní. Zároveň aj pri motivácii matematickej činnosti rozlišujeme primárnu a sekundárnu motiváciu.

Primárna motivácia (zvedavosť, túžba vyriešiť úlohu, radosť z práce, tvorby, hry...) sa považuje za centrálny činiteľ učenia. Sekundárna motivácia zahŕňa klasifikáciu, hodnotenie, odmenu, trest, ovplyvňovanie postojov k matematike. Úspechom učiteľovej práce je keď dosiahne zvnútornenie sekundárnych motívov. Žiak by mal sám očakávať a tešiť sa z nárastu vedomostí a zručností.

Značný motivačný charakter má riešenie konštrukčných geometrických úloh. Samotná podstata ich riešenia má niekoľko motivačných aspektov :

- riešenie úlohy je cestou bádania a objavovania vzájomných vzťahov,
- žiaci vidia jasný cieľ úlohy – čo treba zostrojiť (na rozdiel od viet a dôkazov),

- riešenie geometrických konštrukcií vyplýva z potreby praxe,
- každá úloha je svojím spôsobom jedinečná a jej vyriešenie prináša radosť a napĺňa túžbu po intelektuálnych zážitkoch.

Z psychologického hľadiska napomáha riešenie konštrukčných úloh rozvoju priestorovej predstavivosti, kombinačných schopností, pamäti, tvorivosti, schopnosti abstrakcie atď.

Motivácia prostredníctvom geometrických softvérov

V súčasnej technicko-informačnej spoločnosti prenikajú moderné technológie do každej oblasti života. Prax si žiada technicky zdatných absolventov, schopných využívať, tvoriť a aktívne sa prispôbovať výdobytkom doby. Neustály rozvoj informačných technológií sa zákonite musel odraziť aj vo vzdelávacom procese a jeho modernizácii. Škola, ako spoločenská inštitúcia, reflektuje tento pokrok na úrovni informačnej ako aj praktickej. Tomuto trendu sa nevyhlo ani vyučovanie matematiky a v rámci neho aj geometrie. Využívanie výpočtovej techniky na školách sa pomaly, ale iste stáva samozrejmosťou. Samotné používanie počítača sa však ešte nedá nazvať modernou vyučovacou metódou. Aby bol dosiahnutý najlepší výsledok je dôležité spájať používanie nových didaktických pomôcok s novými prístupmi k vyučovaniu. Didaktických aspektov fenoménu IKT je viacero.

Zelenický (2000) ich zhrňa nasledovne :

- vizualizácia, ktorá uľahčuje predstavivosť daného javu a skracuje proces učenia,
- simulácia procesov, ktorá môže na základe rôznych vstupných hodnôt vytvoriť model správania sa reálneho procesu,
- interakcia medzi počítačom a používateľom, ktorá je jednou z dôležitých vlastností multimédií

Využitie počítača vo vyučovacom procese môže prispieť tiež k naplneniu týchto didaktických funkcií (Lukáč, 2001):

- motivačná funkcia,
- informačná funkcia –IKT umožňujú získavať, uchovávať, spracovávať, prezentovať a šíriť informácie a práca s nimi napomáha rozvoju analytického a syntetického myslenia,
- riadiaca funkcia,
- racionalizačná funkcia – vhodné zaradenie IKT do vyučovacieho procesu môže podporiť diferenciaciu postupu a metód vyučovania vo vzťahu k jednotlivým študentom,
- kontrolná funkcia,
- komunikačná funkcia,
- sociálna funkcia.

Súčasný trh ponúka viacero matematických softvérov využiteľných v praxi ako aj v učive základných, stredných i vysokých škôl. Medzi najznámejšie matematické softvéry patria : *Cabri*, *Matlab*, *Mathematica*, *Maxima*, *Scilab*, *KFormula* ...

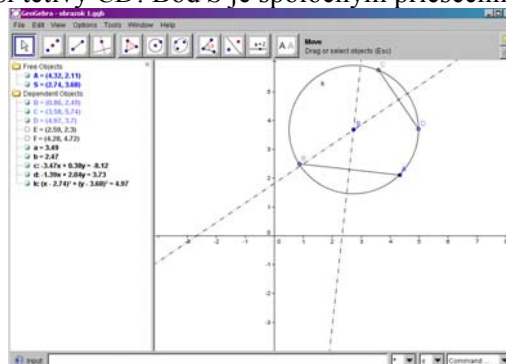
Pre vyučovanie geometrie sú zaujímavé hlavne *Cabri geometrie II*, *Kig*, *KGeo*, *KSeq*, *WinGeom*, *Euklides*, *Cinderella*, *Dr Geo*, *The Geometer's Sketchpad*. Na stránke infovek.sk sú dostupné : *Konštrukčné úlohy z geometrie*, *Maľovanie obsahov*, *Uhly*, *Pytagorova veta*, *Geometrické laboratórium*, *Rezy kocky*, *Podobnosti*, *Analytická geometria* ... Medzi voľne dostupné softvéry v súčasnosti patri aj program *GeoGebra* , ktorý je porovnateľný s *Cabri*.

Hlavnou výhodou týchto softvérov je ich dynamická stránka. Jedným z hlavných momentov pri budovaní priestorovej predstavivosti žiakov je totižto manipulácia s geometrickými útvarmi. Klasická metóda rysovania na tabuľu je v tomto smere značne obmedzená. Priestorová predstavivosť, geometrické a schematické myslenie sa pritom rozvíja nie len skúsenosťami s rôznymi objektmi v bežnom živote, ale aj systematickým učením (a to najmä na hodinách geometrie). Jednoduchá vizualizácia a dynamická manipulácia s objektmi prostredníctvom geometrických softvérov umožňuje žiakom jednoduchšie pochopenie vzájomných vzťahov a súvislostí medzi nimi. Tým sa odbúrava problém nedostatočnej predstavivosti žiakov, ktorá môže viesť k odporu ku geometrii. Zároveň vyučovanie pôsobí zábavnejšie a pútavo a teda aj motivujúco. Takéto vyučovanie je viac zážitkové a menej stresujúce pre žiakov a v konečnom dôsledku aj vyučujúceho. Samozrejme nevyhnutným predpokladom sú dobré vedomosti a schopnosti učiteľa pracovať s daným geometrickým softvérom.

Príklad :

Kde bolo, tam bolo, bola raz jedna neporiadna kružnica, ktorá stratila svoj stred. Dobří ľudia jej ho však pomohli nájsť. Viete ako? Nájdite, čo najviac riešení.

Riešenie 1 : Stred kružnice, bod S , je bodom rovnako vzdialeným od všetkých bodov kružnice. Zvoľme si teda na kružnici k dva navzájom rôzne body A, B . Zostrojíme tetivu AB . Bod S musí ležať na osi tejto tetivy. Ak zostrojíme druhú tetivu CD , rôznobežnú s AB , stred S leží na tiež na osi tetivy CD . Bod S je spoločným priesečníkom osí.



Obrázok 1

Riešenie 2: Znovu vychádzame z tetivy AB kružnice k . Zostrojíme os tetivy AB , ktorá pretne kružnicu v dvoch bodoch E, F . Úsečka EF je priemerom kružnice k a teda stred S je stredom úsečky EF .

Riešenie 3: Zvoľme na kružnici k tri rôzne body A, B, C . Zostrojme trojuholník ABC . Kružnica k je teda kružnica opísaná trojuholníku a jej stred leží v priesečníku osí strán AB, BC a CD .

Táto jednoduchá úloha sa dá riešiť ďalšími spôsobmi (napr. vpísaním obdĺžnika do kružnice – jeho uhlopriečky sa pretínajú v stred S), čo dáva žiakom možnosť tvorivo pristupovať k jej riešeniu. Zároveň ukazuje rozmanitosť využitia poznatkov o elementárnych geometrických útvaroch pri riešení jednej úlohy. Pritom manipuláciou s bodmi ukážeme žiakom vzájomné súvislosti objektov. Napr.: ak posúvam bodom A po kružnici k , čím mením veľkosť a polohu tetivy, stred S sa nachádza stále v priesečníku osí.

Záver

V tomto príspevku sme naznačili dôležitosť motivácie vo vyučovaní matematiky. Z možných motivačných metód sme sa zamerali na motiváciu úlohami a to predovšetkým geometrickými konštrukčnými. Hoci sa zdá, že ich význam pre moderné vyučovanie matematiky klesá. Zamerali sme sa na ich motivačný potenciál, ktorý sa vďaka využitiu dynamických geometrických softvérov ešte zvyšuje. V neposlednom rade sme poukázali aj na potrebu využitia IKT ako motivačného faktora vo vyučovaní.

LITERATÚRA

- [1] Malá, D.: *Psychologické aspekty motivácie, individualizácie a tvorivosti vo vyučovaní matematiky*. Dostupné na: <http://docs.google.com/gview?a=v&q=cache%3Aii3b3PuswFQJ%3Apdfweb.truni.sk%2Fzbornik%2Fsmolenice%2Fmala.pdf+Mal%C3%A1%2C+Dana+%3A+Psychologick%C3%A9+aspekty+motiv%C3%A1cie%2C+individualiz%C3%A1cie+a+tvorivosti+vo+vyu%C4%8Dovan%C3%AD+matematiky&hl=sk&gl=sk&pli=1>
- [2] Orbánová, D.: *Aktivizujúce vyučovacie metódy v ekonomickom vzdelávaní*. 1. vyd. Bratislava : Vydavateľstvo EKONÓM, 2008. 106 s. ISBN 978-80-225-2535-0
- [3] Gábor, O., Kopanec, O., Križalkovič, K. : *Teória vyučovania matematiky* 1. 1. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989. 328 s. ISBN 80-08-00285-9
- [4] Petlák, E.: *Všeobecná didaktika*. Bratislava: IRIS, 1997. 270 s. ISBN 80-88778-49-2
- [5] Klindová, L. et al.: *Aktivita a tvorivosť v škole*. 1. vyd. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 130 s. ISBN 80-08-00399-5
- [6] Šedivý, O. : *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky – Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia*. 1. vyd. Nitra : Edícia prírodovedec č. 78, 2001. 123 s. ISBN 80-8050-417-2
- [7] Zelenický, L.: *Nové trendy v prírodovednom vzdelávaní*. In: Technológia vzdelávania. č. 12, Nitra: Slovidac, 2000. s. 8 – 11
- [8] Vallo, D.: *Použitie programu Cabri 3D v stredoškolskej matematike*. In IKT vo vyučovaní matematiky 2 . Nitra : UKF, 2006, pp.39 – 43 ISBN 80-8094-057-6
- [9] Lukáč, S. : *Multimédiá a počítačom podporované učenie sa v matematike*. Košice : Prírodovedecká fakulta UPJŠ, 2001, 60s. ISBN 80-7097-423-0
- [10] Vallo, D. : *Jedna elementárna úloha z geometrie*. In Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. stupeň ZŠ. Nitra : UKF, 2008, pp 15 – 20 ISBN 978-80-8094-346-2

PaedDr. Eva Barčíková
 Katedra matematiky
 Fakulta prírodných vied
 Univerzita Konštantína Filozofa
 Trieda A. Hlinku 1
 SK – 949 01 Nitra
 e-mail: eva.barcikova@ukf.sk

INVARIANTNÍ PODGRUPY GRUP OBYČEJNÝCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ DRUHÉHO ŘÁDU

JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA

ABSTRACT. The contribution is devoted to characterization of some significant invariant subgroups of the group of linear differential operators of the second order.

Matematické vzdělávání studentů univerzitního studia (budoucích učitelů matematiky i matematických odborníků) i studentů matematických disciplín na vysokých školách technického zaměření vyžaduje orientovat studenty na propojení různých matematických teorií za účelem hlubšího pochopení souvislostí mezi studovanými součástmi matematiky. V tomto příspěvku je zdůrazněn klasický vztah látky z oblasti matematické analýzy a teorie algebraických struktur, konkrétně vztah obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu a teorie grup. Na konstrukci invariantních podgrup grupy lineárních diferenciálních operátorů 2. řádu je ukázána souvislost mezi klasickými problémy matematické analýzy a teorií algebraických struktur. Použitý pojmový aparát je převzat z monografií [4], [9], [11] a prací [2], [3], [7], [8], [13] a [14]. Množinu všech reálných čísel budeme značit $\mathbf{R}$; pod označením $C(J)$ budeme rozumět komutativní okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí. Analogicky okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu J , které mají ve všech bodech $x \in J$ všechny (spojité) derivace až do řádu n včetně pro nějaké přirozené číslo n , budeme označovat $C^n(J)$. Symbolem $C_+(J)$ označíme podpolookruh okruhu $C(J)$, tvořený všemi kladnými spojitými funkcemi, tedy

$$C_+(J) = \{f: J \rightarrow \mathbf{R}; f(x) > 0, x \in J\}.$$

Připomeneme nyní konstrukci grupy lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, které tvoří levé strany obyčejných homogenních diferenciálních rovnic tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1)$$

Využijeme úvah obsažených v práci [11]. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval v množině reálných čísel; nevylučujeme přitom případ $J = \mathbf{R}$. Množinu všech diferenciálních rovnic (1), v nichž $p \in C_+(J)$, $q \in C(J)$, označíme v souladu s [8] $A_2(J)$. Dále označíme I_d identický operátor na $C^2(J)$, tj. $I_d y = y$ pro každou funkci $y \in C^2(J)$, a položíme $D = \frac{d}{dx}$, tedy

$Dy(x) = y'(x)$ pro každou funkci $y \in C^2(J)$. Nechť pro dvojici funkcí $p \in C_+(J)$, $q \in C(J)$ označuje $L(p, q)$ diferenciální operátor

$$L(p, q) = D^2 + p(x)D + q(x)I_d.$$

V tomto označení má rovnice (1) tvar $L(p, q)(y) = 0$. Dále klademe

$$LA_2(J) = \{L(p, q): C^2(J) \rightarrow C(J); [p, q] \in C_+(J) \times C(J)\}, \quad (2)$$

tj. $LA_2(J)$ označuje množinu všech výše popsanych diferenciálních operátorů. Pro $r \in \mathbf{R}$ označme ještě $\chi_r: J \rightarrow \mathbf{R}$ konstantní funkci s hodnotou r .

Tvrzení 1. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $LA_2(J) = \{L(p, q); p, q \in C(J), p(x) > 0, x \in J\}$. Pro libovolnou dvojici diferenciálních operátorů $L(p_1, q_1), L(p_2, q_2) \in LA_2(J)$ položíme

$$L(p_1, q_1) \cdot L(p_2, q_2) = L(p_1 p_2, p_1 q_2 + q_1).$$

Potom $(\mathbf{LA}_2(J), \cdot)$ je nekomutativní grupa s jednotkovým prvkem $L(\chi_1, \chi_0)$.

Důkaz: Viz [8]. Poznamenejme pouze, že jedničkou zkonstruované nekomutativní grupy $\mathbf{LA}_2(J)$ je operátor $L(\chi_1, \chi_0)$ a inverzní prvek k operátoru $L(p, q)$ je operátor $L(\frac{1}{p}, -\frac{q}{p})$.

Pro zjednodušení zápisu budeme dále konstantní funkce $\chi: J \rightarrow \mathbf{R}$ označovat pouze jejich funkční hodnotou, tj. např. jedničkou výše definované grupy je operátor $L(1, 0)$. V dalším textu ještě využijeme následující významnou podgrupu této grupy. Označme $L_{11}\mathbf{A}_2(J)$ podmnožinu grupy $\mathbf{LA}_2(J)$ definovanou rovností

$$L_{11}\mathbf{A}_2(J) = \{L(p, q) ; L(p, q) \in \mathbf{LA}_2(J), p(x) \equiv 1\}, \text{ tedy } L_{11}\mathbf{A}_2(J) = \{L(1, q) ; q \in \mathbf{C}(J)\}.$$

V práci [2] je uveden důkaz, že $(L_{11}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$ je invariantní (komutativní) podgrupa grupy $(\mathbf{LA}_2(J), \cdot)$, izomorfní s $(\mathbf{C}(J), +)$.

Pojem invariantní podgrupy hraje v teorii grup důležitou úlohu. Připomeňme proto, že neprázdná podmnožina H grupy G (na množině H uvažujeme zúžení operace definované na G) se nazývá podgrupa grupy G , jestliže $e \in H$ (jednička neboli neutrální prvek grupy G), dále pro každou dvojici prvků $a, b \in H$ platí $a \cdot b \in H$ a rovněž pro každý prvek $a \in H$ je $a^{-1} \in H$ (kde a^{-1} je inverzní prvek k prvku $a \in H \subset G$). Podgrupa H grupy G se nazývá invariantní (také normální podgrupa grupy G nebo normální dělitel grupy G), jestliže pro každý prvek $a \in G$ platí $a^{-1} \cdot H \cdot a \subset H$. Ekvivalentní podmínkou je rovnost $a^{-1} \cdot H \cdot a = H$ pro každý prvek $a \in G$, tedy tato podgrupa H je invariantní vzhledem k vnitřním automorfismům grupy G – odtud název invariantní podgrupa. Připomeňme používané označení, kterého se v dalším přidržíme: $H \triangleleft G$.

Nyní se budeme věnovat lineárním diferenciálním operátorům tzv. Jacobiho tvaru. V padesátých letech minulého století započal prof. Otakar Borůvka systematické studium globálních vlastností lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. V roce 1967 odvodil O. Borůvka kritérium tzv. globální ekvivalence pro diferenciální rovnice druhého řádu v Jacobiho tvaru, tj.

$$y'' + q(x)y = 0, q \in \mathbf{C}(J) \quad (3)$$

a našel příslušné globální kanonické tvary pro uvedené rovnice; tyto jsou založeny na tvaru $y'' + y = 0$ a liší se pouze definičními obory řešení. Podrobně se čtenář může o této teorii informovat v monografii O. Borůvky [6]. Za účelem postižení jistého algebraického aspektu výše zmíněných rovnic opatříme množinu diferenciálních operátorů $\mathbf{LA}_2(J)$ binární operací, vzhledem k níž se stane opět nekomutativní grupou (za předpokladu $q(x) \neq 0, x \in J$), v níž operátory vytvářející levé strany rovnic (3) tvoří komutativní podgrupu s jednotkovým prvkem $L(0, 1)$, tj. $L(0, 1)y = y'' + y$. Označme nejprve $\mathbf{JA}_2(J)_q$ podmnožinu množiny $\mathbf{LA}_2(J)$ definovanou takto: $\mathbf{JA}_2(J)_q = \{L(0, q) ; q \in \mathbf{C}(J), q(x) \neq 0 \wedge x \in J\}$.

Věta 1. *Bud' $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, nechť $\mathbf{LA}_2(J)_q = \{L(p, q) ; p, q \in \mathbf{C}(J), q(x) \neq 0, x \in J\}$, $\mathbf{JA}_2(J)_q = \{L(0, q) ; L(0, q) \in \mathbf{LA}_2(J)_q\}$. Pro každou dvojici operátorů $L(p_1, q_1), L(p_2, q_2) \in \mathbf{LA}_2(J)_q$ položme $L(p_1, q_1) \bullet_B L(p_2, q_2) = L(p_1 q_2 + p_2, q_1 q_2)$. Potom $(\mathbf{LA}_2(J)_q, \bullet_B)$ je nekomutativní grupa, $(\mathbf{JA}_2(J)_q, \bullet_B)$ je její komutativní podgrupa s jednotkovým prvkem $L(0, 1)$, přiřazujícím každé funkci $f \in \mathbf{C}^2(J)$ funkci $f'' + f$.*

Důkaz: Snadno se nahlédne, že $\mathbf{LA}_2(J)_q$ je nekomutativní grupoid, v němž platí

$$L(p, q) \bullet_B L(0, 1) = L(p, q) = L(0, 1) \bullet_B L(p, q).$$

Binární operace „ $\bullet_B$ “ je asociativní: Pro libovolnou trojici $L(p_i, q_i) \in \mathbf{LA}_2(J)_q$, $i = 1, 2, 3$ platí

$$\begin{aligned} [L(p_1, q_1) \bullet_B L(p_2, q_2)] \bullet_B L(p_3, q_3) &= L(p_1 q_2 + p_2, q_1 q_2) \bullet_B L(p_3, q_3) = \\ &= L(p_1 q_2 q_3 + p_2 q_3 + p_3, q_1 q_2 q_3) = L(p_1, q_1) \bullet_B L(p_2 q_3 + p_3, q_2 q_3) = \\ &= L(p_1, q_1) \bullet_B [L(p_2, q_2) \bullet_B L(p_3, q_3)]. \end{aligned}$$

Jelikož pro každý diferenciální operátor $L(p, q) \in \mathbf{LA}_2(J)_q$ platí $L(p, q) \bullet_B L(-\frac{p}{q}, \frac{1}{q}) =$

$$L(0, 1) = L(-\frac{p}{q}, \frac{1}{q}) \bullet_B L(p, q), \text{ je } L^{-1}(p, q) = L(-\frac{p}{q}, \frac{1}{q}). \text{ Tím jsme ověřili, že } (\mathbf{LA}_2(J)_q, \bullet_B)$$

je nekomutativní grupa.

Dále, pro libovolnou dvojici operátorů $L(0, p), L(0, q) \in \mathbf{JA}_2(J)_q$ je $L(0, p) \bullet_B L(0, q) =$
 $L(0, pq) = L(0, q) \bullet_B L(0, p)$ a také $L(0, p) \bullet_B L^{-1}(0, q) = L(0, p) \bullet_B L(0, \frac{1}{q}) = L(0, \frac{p}{q}) \in$

$\mathbf{JA}_2(J)_q$, takže $(\mathbf{JA}_2(J)_q, \bullet_B)$ je komutativní podgrupa grupy $(\mathbf{LA}_2(J)_q, \bullet_B)$, která je izomorfní např. s grupou všech kladných reálných funkcí jedné proměnné. $\square$

Poznámka: Podgrupa $\mathbf{JA}_2(J)_q$ grupy $\mathbf{LA}_2(J)_q$ není invariantní, jak se snadno ověří. Rovněž další podgrupy, jako např. podgrupa lineárních diferenciálních operátorů s konstantními koeficienty nebo sudými funkcemi jako koeficienty, nejsou invariantní, což poskytuje jednu z klasických motivací studia mnohoznačných struktur ([1, 3, 7, 8]). Zde se zaměříme na příklady invariantních podgrup.

Označme $\mathbf{JCA}_2(J)_q = \{L(0, r); r \in \mathbf{R} - \{0\}\}$, což je množina všech operátorů Jacobiho typu s konstantními koeficienty u nederivované funkce.

Věta 2. *Bud' $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Podgrupoid $(\mathbf{JCA}_2(J)_q, \bullet_B)$ grupy $(\mathbf{JA}_2(J)_q, \bullet_B)$ je invariantní podgrupa této grupy, tj.*

$$(\mathbf{JCA}_2(J)_q, \bullet_B) \triangleleft (\mathbf{JA}_2(J)_q, \bullet_B).$$

Důkaz: Pro libovolnou dvojici operátorů $L(0, r), L(0, s) \in \mathbf{JCA}_2(J)_q$ platí

$$L(0, r) \bullet_B L^{-1}(0, s) = L(0, r) \bullet_B L(0, \frac{1}{s}) = L(0, \frac{r}{s}) \in \mathbf{JCA}_2(J)_q.$$

Dále, pro každý operátor $L(0, p) \in \mathbf{JA}_2(J)_q$ je

$$L(0, p) \bullet_B L(0, r) \bullet_B L^{-1}(0, p) = L(0, pr) \bullet_B L(0, \frac{1}{p}) = L(0, r),$$

tedy $L(0, p) \bullet_B \mathbf{JCA}_2(J)_q \bullet_B L^{-1}(0, p) \subset \mathbf{JCA}_2(J)_q$, takže $(\mathbf{JCA}_2(J)_q, \bullet_B) \triangleleft (\mathbf{JA}_2(J)_q, \bullet_B)$. $\square$

Poznamenejme, že každá diferenciální rovnice tvaru $L(0, r)y = 0$, kde $L(0, r) \in \mathbf{JCA}_2(J)_q$, tj. rovnice $y'' + ry = 0$, $r \in \mathbf{R}$, $r \neq 0$, je řešitelná elementární metodou. Pro $r > 0$ je obecné řešení tvaru $y = C_1 \cos \sqrt{r}x + C_2 \sin \sqrt{r}x$, pro $r < 0$ je obecné řešení $y = C_1 \exp(\sqrt{-r}x) + C_2 \exp(-\sqrt{-r}x)$. Dodejme, že vyloučený případ $r = 0$ dává rovnici $y'' = 0$, jejíž obecné řešení je tvořeno dvoupametrickým systémem funkcí $y = C_1x + C_2$, jejichž skládání je motivačním modelem pro definice binárních operací v množině operátorů $\mathbf{LA}_2(J)$, $J \in \mathbf{R}$.

Nyní se vrátíme k původně uvažované operaci na množině $\mathbf{LA}_2(J)$, která je používána v dřívějších člancích věnovaných této problematice [2, 3, 7, 8, 12, 13, 14]. Připomeňme, že

$\mathbf{LA}_2(J) = \{L(p, q); p, q \in \mathbf{C}(J), p(x) > 0, x \in J\}$ a $L(p, q) \cdot L(u, v) = L(pu, pv + q) \in \mathbf{LA}_2(J)$ pro každou dvojici operátorů $L(p, q), L(u, v) \in \mathbf{LA}_2(J)$.

Dále označme $\mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J) = \{L(r, q); L(r, q) \in \mathbf{L}\mathbf{A}_2(J), r \in \mathbf{R}, r \neq 0\}$ a symbolem $\mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J)$ množinu všech operátorů tvaru $L(l, q) \in \mathbf{L}\mathbf{A}_2(J)$, tedy operátorů tvořících levé strany diferenciálních rovnic

$$y'' + y' + q(x)y = 0, \quad x \in J.$$

V článkách [2, 3, 7, 8] je ukázáno, že $(\mathbf{L}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$ je nekomutativní grupa a $(\mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$ je její komutativní invariantní podgrupa, izomorfní s aditivní grupou všech spojitých reálných funkcí jedné proměnné. Dokážeme obecnější větu, v jejíž formulaci jsou obsažena právě zmíněná fakta.

Věta 3. *Bud' $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Platí: $(\mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J), \cdot) \triangleleft (\mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J), \cdot) \triangleleft (\mathbf{L}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$.*

Důkaz: Necht' $L(l, q) \in \mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J)$, $L(r_1, q_1), L(r_2, q_2) \in \mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J)$, $L(u, v) \in \mathbf{L}\mathbf{A}_2(J)$ jsou libovolné diferenciální operátory. Platí

$$L(r_1, q_1) \cdot L^{-1}(r_2, q_2) = L(r_1, q_1) \cdot L\left(\frac{1}{r_2}, -\frac{q_2}{r_2}\right) = L\left(\frac{r_1}{r_2}, q_1 - \frac{r_1}{r_2}q_2\right) \in \mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J),$$

takže $(\mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$ je podgrupa grupy $(\mathbf{L}\mathbf{A}_2(J), \cdot)$. Dále

$$L(r_1, q_1) \cdot L(l, p) \cdot L^{-1}(r_1, q_1) = L(r_1, r_1p + q_1) \cdot L\left(\frac{1}{r_1}, -\frac{q_1}{r_1}\right) = L(l, r_1p) \in \mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J),$$

tedy $L(r_1, q_1) \cdot \mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J) \cdot L^{-1}(r_1, q_1) \subset \mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J)$; dále platí

$$L(u, v) \cdot L(r_1, q_1) \cdot L^{-1}(u, v) = L(r_1u, v + uq_1) \cdot L\left(\frac{1}{u}, -\frac{v}{u}\right) = L(r_1, (1-r_1)v + uq_1) \in \mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J),$$

tudíž $L(u, v) \cdot \mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J) \cdot L^{-1}(u, v) \subset \mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J)$ pro každý operátor $L(u, v) \in \mathbf{L}\mathbf{A}_2(J)$. Z výše zmíněných odkazů a právě provedených úvah vyplývá správnost krátkého řetězce relací

$$(\mathbf{L}_{II}\mathbf{A}_2(J), \cdot) \triangleleft (\mathbf{L}_{CI}\mathbf{A}_2(J), \cdot) \triangleleft (\mathbf{L}\mathbf{A}_2(J), \cdot).$$

□

Závěr: S pojmem invariantní podgrupy úzce souvisí pojem vytvořujícího rozkladu ([5]) a ekvivalentní pojem kongruence. Vlastnosti těchto pojmů pro grupy lineárních diferenciálních operátorů a prostorů řešení jim příslušných diferenciálních rovnic budou předmětem dalšího studia.

LITERATURA

- [1] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *From Groups of Linear Functions to noncommutative Transposition Hypergroups*. 1999. vyd. České Budějovice : Jihočeská univerzita, 1999. 10 s. Department of Mathematics Report Series, Volume 7. ISBN 80-7040-392-6.
- [2] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *O nekomutativní grupě lineárních prostorů hladkých funkcí dimenze dvě*. In *Acta mathematica* 11, ed. PRÍRODOVEDEC, publ. č. 326. první. Nitra : Fakulta přírodních vied UKF v Nitre, 2008. s. 11-16. ISBN 978-80-8094-396-7.
- [3] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *O nekomutativní transpoziční hypergrupě lineárních prostorů hladkých funkcí dimenze dvě*. In *Acta mathematica* 11, ed. PRÍRODOVEDEC, publ. č. 326. první. Nitra : Fakulta přírodních vied UKF v Nitre, 2008. s. 17-24. ISBN 978-80-8094-396-7.
- [4] BERAN, LADISLAV. *Grupy a svazy*. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1974. 358 s. Matematický seminář SNTL.

- [5] BORŮVKA, OTAKAR. *Základy teorie grupoidů a grup*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 216 s.
- [6] BORŮVKA, OTAKAR. *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, VEB Verlag, Berlin 1967; extended English version *Linear Differential Transformations of the Second Order*, English Univ. Press, London, 1973.
- [7] CHVALINA, JAN, MOUČKA, JIŘÍ. *Action of Join Spaces of Continuous Functions on Hypergroups of Second-Order Linear Differential Operators*. In: 6. mezinárodní matematický Workshop. první. Brno : FAST VUT Brno, 2007. 10 s.
- [8] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Join Spaces of Linear Ordinary Differential Operators of the Second Order*. 2003. vyd. Brno: MU, 2003. 10 s. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 13, pp. 77 – 86.
- [9] KALAS, JOSEF, RÁB, MILOŠ. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vyd. Brno: Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.
- [10] KUROŠ, ALEKSANDR GENNADIJEVIČ. *Teoriya grupp*. 3. vyd. Moskva : Nauka [Moskva], 1967. 648 s.
- [11] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991, ISBN 0-7923-1269-4).
- [12] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Criterion of global equivalence of linear differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 97 A (1984), 217–221.
- [13] NEUMAN, FRANTIŠEK. *A Survey of Global Investigations of Lineary Differential Equations*. Proc. of XXVIII. International Colloquium, Brno, University of Defence, Brno 2010, 7 p., ISBN 978-80-7231-722-6.
- [14] NEUMAN, FRANTIŠEK. *On a Representation of Linear Differential Equation*. In: Mathematical and Computer Modelling 52 (2010), pp. 355-360, ISSN 0895-7177.

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky PdF MU
Poříčí 31, 603 00 Brno
e-mail: beranek@ped.muni.cz

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Ústav matematiky FEKT VUT
Technická 8, 616 00 Brno
e-mail: chvalina@feec.vutbr.cz

ŽÁCI SE SPECIFICKÝMI VZDĚLÁVACÍMI POTŘEBAMI

RŮŽENA BLAŽKOVÁ

ABSTRACT. Education of pupils with specific education needs. Gifted pupils with specific learning disabilities. In this article we present some results of our research.

1. Úvod

Výzkumná činnost v oblasti didaktiky matematiky se na Katedře matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně zaměřuje, mimo jiné, na vzdělávání žáků se specifickými vzdělávacími potřebami. Tito žáci mohou mít problémy v matematice a je třeba, aby učitel matematiky byl seznámen s možnostmi vzdělávání těchto žáků vzhledem k jejich budoucímu profesnímu zařazení i k možnostem využívání nezbytných matematických poznatků v běžném životě. K žákům se specifickými vzdělávacími potřebami řadíme např. žáky se zdravotním znevýhodněním, s poruchami učení, s poruchami chování, žáky ze znevýhodněného sociokulturního prostředí, žáky z jiných jazykových destinací, žáky nadané a mimořádně nadané. V mnoha případech se nejedná pouze o jednu specifickou vzdělávací potřebu a často se kumulují. Tak se můžeme setkat např. se žákem tzv. dvojí vyjímečnosti, u kterého identifikujeme nadání pro matematiku a zároveň dyslexii nebo dysgrafii, se žákem se zdravotním handicapem a zároveň matematicky nadaným, nebo naopak s poruchou učení, s nadaným žákem s poruchou chování apod. Všichni tito žáci potřebují ke svému úspěšnému studiu jednak velmi empatického učitele matematiky, jednak výrazný individuální přístup, neboť je poměrně obtížné uplatňovat obecnější postupy, jednak chápající rodinné zázemí. Vzhledem k neustálému trendu inkluzivního vzdělávání těchto žáků v běžných základních a středních školách považujeme za potřebné zkoumat možnosti žáků vzhledem k matematickému vzdělávání a také přípravu budoucích učitelů matematiky v této oblasti.

Mezi významnými osobnostmi můžeme najít mnoho matematiků i fyziků, u kterých se objevovala tzv. dvojí vyjímečnost. Jedním ze současných je např. britský teoretický fyzik Stephen Hawking, který je proslulým vědcem a je těžce zdravotně postižený, pohybuje se pomocí elektrického vozíku a komunikuje prostřednictvím speciálního přístroje.

2. Případové studie

Na našem pracovišti se věnujeme žákům nadaným pro matematiku (Blažková, Vaňurová, Budínová), žáků s poruchami učení (Blažková, Šírká), žákům ze znevýhodněného sociokulturního prostředí (Vaňurová), nadaným žákům s poruchami učení (Portešová, Vaňurová, Blažková).

Naše zkoumání se zaměřuje na individuální práci s jednotlivými žáky a je zaměřené na:

- Analýzu příčin problémů žáka v matematice.
- Sledování charakterových, zejména volných vlastností žáka.
- Hledání vhodných motivačních přístupů a získávání zájmu o matematiku.
- Hledání adekvátních výukových přístupů a komunikačních prostředků.

- Sledování schopnosti reprodukce naučených postupů
- Sledování úrovně logického a tvůrčího myšlení.
- Řešení dalšího vzdělávání žáka na vyšších stupních škol a v profesním zařazení.

Jako příklad uvádíme některé případové studie, které jsme v posledním období řešili.

Případová studie 1.

Chlapec studuje střední školu sociálního zaměření. V prvním pololetí prvního ročníku propadá z matematiky, v ostatních předmětech nemá problémy, je hodnocen stupni 1 a 2. Doporučení učitelky matematiky i pedagogické poradny: změnit školu.

Chlapec je velmi houževnatý, ochotný, pracovitý, citlivý, má výrazné sociální cítění. Školu si vybral proto, aby mohl pracovat v sociální oblasti. Projevuje se u něj kumulace problémů zdravotních (výrazná zraková vada) a poruchy učení v matematice. Má velmi dobré rodinné zázemí.

Analýza příčin výukových problémů:

- Na základní škole měl velmi empatickou učitelku, která jeho problémy chápala a hodnotila ty části matematického učiva, ve kterých byl úspěšný. Na střední školu odcházel s hodnocením 2, avšak potřebnému rozsahu učiva pro střední školu jeho vědomosti neodpovídaly.
- Byl schopen řešit elementární úlohy, úlohy komplexnější povahy řešit nedokázal, nezvládl rozložení úlohy na elementární kroky.
- Nedokázal pracovat se sbírkou úloh, neorientoval se v textu, který nebyl vhodně graficky rozčleněn.
- Měl problémy se čtením některých symbolických zápisů, nejvýrazněji se to projevilo při zápisu logaritmů.
- Neměl vytvořeny geometrické představy, problematické pro něj byly jednotky měr.
- Projevovaly se poruchy dlouhodobé paměti, bylo nutné neustálé opakování již zvládnutého učiva.
- Byl pro něj nevýhodný pouze písemný způsob hodnocení, který na škole převažoval.

Sledování charakterových vlastností žáka:

- Dominantní vlastností byla jeho touha vystudovat zvolenou školu a případně pokračovat ve zvoleném oboru a vyšším typu školy.
- Projevovala se houževnatost, pracovitost, snaha po pochopení učiva, svědomitost při plnění zadaných úkolů.

Hledání vhodných motivačních přístupů a získávání zájmu o matematiku.

- Psychickou zátěží pro žáka byl trvalý neúspěch a neustálé hodnocení písemných prací stupněm 5.
- Motivační pro něj byla možnost hovořit o problému, možnost zeptat se na cokoliv, komunikovat s učitelem.
- Motivačním faktorem byla změna didaktických prostředků, neboť obdržel pracovní listy, kterým rozuměl.
- Motivační pro něj byla i změna ve způsobu zkoušení, kdy byl častěji zkoušen ústně a mohl komunikovat s učitelem.
- Výrazným motivačním faktorem bylo postupné zlepšování klasifikace (na konci druhého ročníku byl hodnocen stupněm 3).

Hledání adekvátních výukových přístupů a komunikačních prostředků.

- Pro chlapce byla výraznou pomocí individuální práce, kdy se při zvládnutí učiva právě probíraného ve škole doplňovalo nezvládnuté učivo z předchozích ročníků.
- Byly zpracovávány speciální pracovní listy, kdy každý list obsahoval pouze jeden elementární krok. Byl uveden řešeným příkladem, podle kterého se řešily další podobné úlohy. V závěru listu byl pokyn, aby žák vymyslel podobný příklad.
- Velký význam mělo grafické zpracování pracovních listů, využívání nerůznějších symbolů, značek, šipek apod. Vzhledem ke zrakové vadě se používalo většího písma.
- I když se postupovalo velmi pomalu a vše bylo třeba neustále opakovat a připomínat, postupně se zvyšovala samostatnost žáka při řešení úloh, jeho důvěra ve vlastní schopnosti. Hodnocení výsledků jeho práce se zlepšovalo.

Řešení dalšího vzdělávání žáka na vyšších stupních škol a v profesním zařazení.

Vzhledem ke snaze samotného žáka a jeho touze vystudovat zvolenou školu lze předpokládat, že bude moci pokračovat i ve studiu na vyšším stupni.

Případová studie 2.

Chlapec 5. ročníku základní školy. Projevuje se u něj nadání pro matematiku, avšak byla u něj diagnostikována dysgrafie a dyslexie.

Analýza příčin výukových problémů

- Problémy chlapce nejsou v oblasti vědomostí, ale v oblasti prezentace výsledků jeho práce. Jeho písmo je neúhledné, zaměňuje některá písmena nebo slova.
- Pisemné vyjadřování je velmi stručné, heslovité, neumí odpovědět na otázku slovní úlohy celou větou.
- Velmi rád využívá symbolických vyjádření, zkratek, obrázků a grafické prezentace.

Sledování charakterových vlastností žáka:

- Chlapec je velmi zvědavý, projevuje výraznou myšlenkovou činnost, kterou nepotřebuje zaznamenávat.
- Preferuje slovní komunikaci před písemnou.
- Rád řeší úlohy nestandardní, které dříve neřešil a pro které vymýšlí originální postupy řešení.
- Logické myšlení je na vysoké úrovni.

Hledání vhodných motivačních přístupů a získávání zájmu o matematiku.

- Motivační je pro chlapce každá úloha, kterou doposud neřešil a kdy se může dozvědět další informace (na př. počítání s mocninami, kombinatorické vztahy, využívání písmen ve významu čísel aj.)
- Zájem o matematiku má.

Hledání adekvátních výukových přístupů a komunikačních prostředků.

- Příprava didaktických materiálů s nestandardními úlohami.
- Zajištění individualizované výuky.
- Preferování verbální komunikace, aby mohl prezentovat svůj myšlenkový potenciál.

Řešení dalšího vzdělávání žáka na vyšších stupních škol a v profesním zařazení.

Chlapec bude studovat v matematické třídě víceletého gymnázia.

Případová studie 3.

Šestiletý chlapec, který prokazuje vyjímečné znalosti v oblastech, které jej baví, avšak nemá vůbec vyvinutou grafomotoriku. Obrázky kreslí s nechutí, nedaří se mu nakreslit jakoukoliv čáru. Návrh na odložení nástupu školní docházky.

Analýza příčin problémů

Chlapec má problém s držením tužky, s uvolněním ruky. Objevuje se problém s koncentrací na činnosti, které nejsou v oblasti jeho zájmu, snadno se rozptýluje. Kreslení jej vůbec neoslovuje, nemá zájem cokoli graficky vyjádřit.

Hledání vhodných motivačních přístupů

Při individuální práci bylo zjištěno, že pokud má pro něj kresba význam, pak je schopen kreslit čáry a uvolňovací cviky. Dále bylo zjištěno, že jeho "vidění" neodpovídá představám učitele. Např. při pokynu "nakresli schody" kreslil obdélníky (pohled shora na jednotlivé schody – půdorys), avšak učitel očekával lomenou čáru (pohled zprava – bokorys). Analogicky se to projevovalo při pokynu "nakresli lod".

Hledání adekvátních výukových přístupů a komunikačních prostředků.

Byly vypracovány pracovní listy k uvolňovacím cvikům tak, aby vždy čára představovala něco, co chlapce oslovilo. Např. dráha závodního automobilu, dráha lyžaře na sjezdovce, pohyb lodi na moři, dráha vlaku aj.

Chlapci byly předkládány úlohy pro rozvoj prostorové představivosti – stavby z krychlí. Dostal stavebnici asi 300 krychlí a dokázal pracovat se zaujetím dlouhou dobu a prokázal vlastní tvořivé přístupy.

Řešení dalšího vzdělávání

Po pravidelné práci s maminkou podle našich pokynů se výrazně zlepšily jeho grafomotorické schopnosti a bez problému může nastoupit do 1. ročníku základní školy.

3. Závěr

V činnostech s dětmi jsme zjistili několik skutečností, které je možno zobecnit:

- Práce s dětmi je výrazně individuální, každý žák vyžaduje vlastní specifické přístupy.
- Veškeré činnosti vyžadují empatického učitele, který je jednak dobrým matematikem, jednak dobrým psychologem a pedagogem.
- Úspěšnost žáků je závislá do jisté míry na možnostech komunikace s učitelem.
- Velký význam má vlastní motivace žáka k matematickým činnostem, jeho snaha, úsilí, pracovitost a vytrvalost.
- Podnětné rodinné prostředí a pochopení problémů žáka rodiči, prarodiči přispívá ke zlepšení situace.
- I když se úspěchy dostavují pomalu, je třeba prokázat trpělivost a neustálé opakování.
- Nikdy není pozdě ke zvládnutí matematického učiva základní či střední školy.

REFERENCES

- [1] BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I.: *Děti s nadáním pro matematiku potřebují podnětné prostředí*. In: Komenský 132, č. 3 (2008) s. 16 – 20. ISSN 0323-0449.
- [2] BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I.: *Kaskády úloh jako prostředek rozvíjení matematického nadání žáků*. : ŠIMONÍK, O (ed.): *Výchova a nadání 2*, Brno: Masarykova univerzita, 2008, s. 76 -84. ISBN 978-80-7392-055-5.
- [3] BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I., VAŇUROVÁ, M.: *Matematické nadání a péče o talenty*. In: ŠIMONÍK, O. at all. (eds.): *Výchova a nadání 1*. Brno: Masarykova univerzita, 2008, s. 45 – 56. ISBN 978-80-7367-024-1.
- [4] BLAŽKOVÁ, R., BUDÍNOVÁ, I., VAŇUROVÁ, M.: *Kultivace funkčního myšlení na 1. stupni ZŠ*. In: *Matematika z pohledu primárního vzdělávání*. Banská Bystrica, Univerzita Mateja Bela, 2009, s. 19 – 24. ISBN 978-80-8083-742-6.
- [5] BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M.: *Náměty úloh pro práci s nadanými žáky v matematice v rámci inkluzivního vzdělávání*. In: ŠIMONÍK, O (ed.): *Výchova a nadání 2*, Brno: Masarykova univerzita, 2008, s. 57 -75. ISBN 978-80-7392-055-5.
- [6] BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M.: *Několik úloh pro práci s nadanými žáky v matematice*. In: *Matematika z pohledu primárního vzdělávání*. Banská Bystrica, Univerzita Mateja Bela, 2009, s. 25 – 30. ISBN 978-80-8083-742-6.
- [7] BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M.: *Objevováním známého učíme objevovat neznámé*. 2008. In: *Učitel a nadaný žák*. Brno: Masarykova univerzita, 2008, s. 7 – 18. ISBN 978-80-7392-054-8.
- [8] BLAŽKOVÁ, R., VAŇUROVÁ, M.: *Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh*. In: *Matematika 4*, Olomouc, Univerzita Palackého, 2010, s. 57 – 61. ISBN 978-80-244-2511-5.
- [9] BUDÍNOVÁ, I.: *Talented students in mathematics – how They express themselves*. In: In: ŠIMONÍK, O (ed.): *Education and talent 2*, Brno: Masarykova univerzita, 2008, s. 65 -68. ISBN 978-80-7392-056-2.
- [10] PORTEŠOVÁ, Š.: *Skryté nadání. Psychologická specifika rozumově nadaných žáků s dyslexií*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-5014-3.
- [11] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Dostupné on line: www.vuppraha.cz

RNDr. Růžena Blažková, CSc.
 Masarykova univerzita
 Pedagogická fakulta
 Katedra matematiky
 Poříčí 31
 ČR- 60300 Brno
 e-mail: blazkova@ped.muni.cz

CONVERGENCE THEOREMS FOR THE OPTIMAL INTEGRAL IN RIESZ SPACES

ANTONIO BOCCUTO, XENOFON DIMITRIOU, NIKOLAS PAPANASTASSIOU

ABSTRACT. An integral for real-valued maps with respect to Riesz space-valued measures compatible with respect to the operation of supremum and continuous from above is introduced. The main properties are investigated and some convergence theorems are proved.

KEY WORDS. Riesz space, order convergence, optimal measure and integral, Maeda-Ogasawara-Vulikh representation theorem, monotone convergence theorem, Fatou lemma, Lebesgue dominated convergence theorem.

1. Introduction

In the literature, in several fields of mathematics - for example quantum theory, fuzzy events, measures, integral and probability theory- in investigating and finding representation models for various kinds of problems, sometimes it seems more natural to deal with measures which are "compatible with respect to the operation of supremum" rather than classical finitely additive measures. Examples of such set functions are the Shilkret maxitive measures (see [12,17]), the M -measures (see [15]) and the optimal measures (see [1,2,3,4]). These kinds of measures have several applications in quantum structures and observables (see [16]) as well as in intuitionistic fuzzy sets (see [5]), which are pairs of the type (μ_A, ν_A) of measurable functions $\mu_A, \nu_A : (X, \beta) \rightarrow [0,1]$ such that $\mu_A + \nu_A \leq 1$.

The M -measures with values in lattice ordered groups were studied in [8] and [9], where in particular some results about extension theorems and product measures were proved. In this paper we introduce the integral for some non-negative real-valued functions with respect to optimal Riesz space-valued measures. For the real case, this integral was studied by N. K. Agbeko ([1-4]). Furthermore, using the Maeda-Ogasawara-Vulikh representation theorem for Dedekind complete Riesz spaces as suitable spaces of continuous extended real-valued functions, we prove the main convergence theorems for this integral. Similar integrals for real-valued maps with respect to Riesz space-valued set functions were investigated in [7,10,11].

2. Preliminaries

From now on R denotes a Dedekind complete Riesz space, X any nonempty arbitrary set (possibly infinite) and $\beta \subset P(X)$ be any σ -algebra. Let us add to R two extra elements, $+\infty$ and $-\infty$, obeying to the usual rules as in the classical case, and set $\bar{R} := R \cup \{\pm\infty\}$.

We say that a sequence $(p_n)_n$ of positive elements of R is an (o) -sequence if $p_n \downarrow 0$. A sequence $(x_n)_n$ in R is said to be *order-convergent* (or (o) -convergent) to x if there

exists an (o) -sequence $(p_n)_n$ with $|x_n - x| \leq p_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, and in this case we write $(o)\lim_n x_n = x$.

We say that a set function $P: \beta \rightarrow R$ is an *optimal measure* if $P(A \cup B) = P(A) \vee P(B)$ whenever $A, B \in \beta$ and P is *continuous from above*, that is $P(A) = \bigwedge_n P(A_n)$ whenever $(A_n)_n$ is a decreasing sequence in β , such that $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

We now recall the Maeda-Ogasawara-Vulikh representation theorem (see also [6]).

Theorem 1. *Every Dedekind complete Riesz space R is algebraically and lattice isomorphic to an order dense ideal of $C_{\infty}(\Omega) = \{f \in \tilde{\mathbb{R}}^{\Omega} : f \text{ is continuous, and } \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| = +\infty\} \text{ is nowhere dense in } \Omega\}$, where Ω is a suitable compact Hausdorff extremally disconnected topological space. Moreover, if we denote by $\bar{a}$ an element of $C_{\infty}(\Omega)$ which corresponds to $a \in R$ under the above isomorphism, then for any family $(a_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ in R such that $a_0 := \bigvee_{\lambda} a_{\lambda} \in R$ we have $\bar{a}_0(\omega) = \sup_{\lambda} [\bar{a}_{\lambda}(\omega)]$ in the complement of a meager subset of Ω . The same is true for $\bigwedge_{\lambda} a_{\lambda}$.*

We denote by $\sup$ and $\vee$ the pointwise and the lattice supremum respectively, and by $\inf$ and $\wedge$ the corresponding infima.

3. The main results

Proposition 1. *Let $(B_n)_n$ be any increasing sequence in β , and $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Assume that P is an optimal measure. Then $P(B) = (o)\lim_n P(B_n) = \bigvee_n P(B_n)$.*

Proof: Observe that $(B \setminus B_n)_n$ is a decreasing sequence in β and thus $\inf_n P(B \setminus B_n) = (o)\lim_n P(B \setminus B_n) = P(\emptyset) = 0$. Furthermore note that $B_n \subset B$, and so $B = B_n \cup (B \setminus B_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Hence $P(B) = P(B_n) \vee P(B \setminus B_n)$ for any $n \in \mathbb{N}$. From this and by Theorem 1 it follows the existence of a meager set N such that $P(\emptyset)(\omega), P(B)(\omega), P(B_n)(\omega) \in \mathbb{R}$;

for all $\omega \in \Omega \setminus N$ and $n \in \mathbb{N}$;

$\inf_n P(B \setminus B_n)(\omega) = \lim_n P(B \setminus B_n)(\omega) = 0$ for all $\omega \in \Omega \setminus N$. We now claim that, for such ω 's,

$$P(B)(\omega) = P(B_{n_0})(\omega) \quad (1)$$

for at least one index $n_0 = n_0(\omega)$. From this, by monotonicity of P , we will get $P(B)(\omega) = P(B_n)(\omega)$ for all $n \geq n_0(\omega)$, and hence

$$\lim_n P(B_n)(\omega) = \sup_n P(B_n)(\omega) = P(B)(\omega). \quad (2)$$

By arbitrariness of $\omega \notin N$ and by a density argument, since the complement of a meager subset N is dense in Ω , from (2) we will obtain that $P(B) = \sup_n P(B_n) = (o)\lim_n P(B_n)$, that is the assertion.

So, to complete the proof it remains to prove (1). If (1) should not hold, then for at least one $\omega_0 \in \Omega \setminus N$ we should get $P(B)(\omega_0) \neq P(B_n)(\omega_0)$, and hence

$$P(B)(\omega_0) > P(B_n)(\omega_0) \quad (3)$$

for any $n \in \mathbb{N}$. So we should have $P(B)(\omega_0) = P(B \setminus B_n)(\omega_0)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Taking the infimum as n varies in $\mathbb{N}$ we should get $P(B)(\omega_0) = 0$. By monotonicity, $P(B_n)(\omega_0) = P(B)(\omega_0) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, which contradicts (3). This concludes the proof. $\square$

Let $s := \sum_{i=1}^n a_i \chi(A_i)$ be any nonnegative simple function, where $A_1, \dots, A_n \in \beta$ and $\cup_{i=1}^n A_i = X$. If $A \in \beta$, we call *integral of s with respect to P on A* the quantity $\vee_{i=1}^n a_i P(A_i \cap A)$, and we denote it by the symbols $\int_A s dP$ or $I_A(s)$. If $A = X$, set $\int s dP = \int_X s dP = I(s) = I_X(s)$.

We now prove that our integral is well-defined, that is it does not depend on the choice of the representation of s . Indeed, if $s := \sum_{i=1}^n a_i \chi(A_i) = \sum_{k=1}^m b_k \chi(B_k)$, then for all

$i=1, \dots, n$, $k=1, \dots, m$ we get $A_i = \cup_{k=1}^m (A_i \cap B_k)$, $B_k = \cup_{i=1}^n (A_i \cap B_k)$, and hence $P(A_i) = \vee_{k=1}^m P(A_i \cap B_k)$, $P(B_k) = \vee_{i=1}^n P(A_i \cap B_k)$. From this it follows that

$$\vee_{i=1}^n a_i P(A_i) = \vee_{i=1}^n [\vee_{k=1}^m a_i P(A_i \cap B_k)] = \vee_{i,k} a_i P(A_i \cap B_k), \quad (4)$$

$$\vee_{k=1}^m b_k P(B_k) = \vee_{k=1}^m [\vee_{i=1}^n b_k P(A_i \cap B_k)] = \vee_{i,k} b_k P(A_i \cap B_k). \quad (5)$$

The assertion follows from (4) and (5) taking into account that $b_i = c_k$ whenever $A_i \cap B_k \neq \emptyset$ and $P(A_i \cap B_k) = 0$ whenever $A_i \cap B_k = \emptyset$. $\square$

Proposition 2. *Let s be any simple function and $(B_n)_n$ be any increasing sequence in β , with $\cup_{n=1}^\infty B_n = B$. Then $I_B(s) = \vee_n I_{B_n}(s) = (o) \lim_n I_{B_n}(s)$.*

Proof: Let $s := \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$. Then $I_B(s) = \vee_{i=1}^m a_i P(A_i \cap B)$, $I_{B_n}(s) = \vee_{i=1}^m a_i P(A_i \cap B_n)$. For each $i=1, \dots, m$ we get $A_i \cap B_n \subset A_i \cap B \in \beta$ and $\cup_{n=1}^\infty (A_i \cap B_n) = A_i \cap B$. By Proposition 1 we get:

$$P(A_i \cap B) = (o) \lim_n P(A_i \cap B_n) = \vee_n P(A_i \cap B_n). \quad (6)$$

Since the a_i 's, $i=1, \dots, m$, are positive, from (6) we get:

$$\begin{aligned} I_B(s) &= \vee_{i=1}^m a_i P(A_i \cap B) = \vee_{i=1}^m [\vee_n a_i P(A_i \cap B_n)] = \\ &= \vee_n [\vee_{i=1}^m a_i P(A_i \cap B_n)] = \vee_n I_{B_n}(s) = (o) \lim_n I_{B_n}(s). \end{aligned} \quad (7)$$

This concludes the proof. $\square$

Note that $I(s_1 + s_2) \leq I(s_1) + I(s_2)$ whenever s_1, s_2 are two simple non-negative functions and $I(s_1) \leq I(s_2)$ whenever $s_1 \leq s_2$. Indeed, if (without loss of generality)

$$s_1 = \sum_{i=1}^n a_i \chi(A_i), \quad s_2 = \sum_{i=1}^n b_i \chi(A_i), \quad \text{then}$$

$$I(s_1 + s_2) = \vee_{i=1}^n (a_i + b_i) P(A_i) \leq \vee_{i=1}^n a_i P(A_i) + \vee_{i=1}^n b_i P(A_i) = I(s_1) + I(s_2); \quad (8)$$

$$I(s_1) = \vee_{i=1}^n a_i P(A_i) \leq \vee_{i=1}^n b_i P(A_i) = I(s_2)$$

if $s_1 \leq s_2$. We now introduce our integral for any non-negative measurable function.

Definition 3. Let $f \geq 0$ be a measurable map, $S_f := \{s \text{ simple: } 0 \leq s \leq f\}$ and $A \in \beta$.

The quantity $I_A(f) := \vee_{s \in S_f} I_A(s) \in \bar{R}$ is called the *integral of f on A with respect to P* , and denote it also by the symbol $\int_A f dP$. Moreover we indicate with the symbols $\int_X f dP$ or $I(f)$ the quantity $I_X(f)$. We say that $f \geq 0$ is *integrable* (on X) if $I(f) \in R$.

It is easy to check that our integral satisfies the classical elementary properties: in particular we get $I_A(af) = aI_A(f)$ whenever $A \in \beta$, $a \geq 0$ and $f \geq 0$ is a measurable real-valued function, and from (8) it easily follows that, if $0 \leq f_1 \leq f_2$ and $A \in \beta$, then $I_A(f_1) \leq I_A(f_2)$. Furthermore it is readily seen that $I_A(f) \leq I_B(f)$ whenever $A \subset B$, $A, B \in \beta$ and $f \geq 0$ is measurable.

Proposition 4. (Absolute continuity) *Let $f \geq 0$ be any measurable bounded map. If $(o)\lim_n P(E_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $(o)\lim_n I_{E_n}(f) = 0$.*

Proof: Let $a > 0$ be such that $0 \leq f \leq a$. It is easy to see that $0 \leq I_{E_n}(f) \leq aP(E_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$. The assertion follows directly from this and the hypotheses. $\square$

Observe that, even $R = \mathbb{R}$, Proposition 4 is in general not true without assuming boundedness of f (see for instance [1]).

We now prove some convergence theorems.

Theorem 5. *Let $(f_n)_n$ be an increasing sequence of measurable non-negative maps, and set $f := \lim_n f_n$. Then $I(f) = (o)\lim_n I(f_n)$.*

Proof: First of all let us prove the inequality

$$I(f) \leq \vee_n I(f_n) = (o)\lim_n I(f_n). \quad (9)$$

If the sequence $(I(f_n))_n$ is not bounded in R , then the right member in (9) is equal to $+\infty$ and so there is nothing to prove. So, let us suppose that $(I(f_n))_n$ is bounded in R : then, by Dedekind completeness of R , there exists in R the quantity $\vee_n I(f_n) = (o)\lim_n I(f_n)$. Fix arbitrarily $\alpha \in (0, 1)$ and $s \in S_f$. For each $n \in \mathbb{N}$, set

$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$. It is easy to check that $(E_n)_n$ is an increasing sequence in β and $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. By virtue of monotonicity of the integral, we get

$$I_{E_n}(\alpha s) \leq I_{E_n}(f_n) \leq I_X(f_n) = I(f_n). \quad (10)$$

Since it is readily seen that $I(\alpha s) = \alpha I(s)$, from this, (10) and Proposition 2 it follows that

$$\begin{aligned} \alpha I(s) &= I(\alpha s) = I_X(\alpha s) = (o) \lim_n I_{E_n}(\alpha s) = \\ &= \vee_n I_{E_n}(\alpha s) \leq \vee_n I(f_n) = (o) \lim_n I(f_n). \end{aligned} \quad (11)$$

By arbitrariness of $\alpha \in (0, 1)$, from (11) we get

$$I(s) \leq \vee_n I(f_n) = (o) \lim_n I(f_n). \quad (12)$$

By arbitrariness of $s \in S_f$, from (12) we obtain

$$I(f) = \vee_{s \in S_f} I(s) \leq \vee_n I(f_n) = (o) \lim_n I(f_n),$$

that is precisely (9). Concerning the opposite inequality, we have: $I(f_n) \leq I(f_{n+1}) \leq I(f)$, and so $\vee_n I(f_n) = (o) \lim_n I(f_n) \leq I(f)$. This concludes the proof. $\square$

We state the following version of the monotone convergence theorem for decreasing sequences.

Theorem 6. *Let $(h_n)_n$ be a decreasing sequence of measurable functions, and suppose that there is $a > 0$ with $0 \leq h_n \leq a$ for all $n \in \mathbb{N}$, and set $h := \lim_n h_n$. Then $I(h) = (o) \lim_n I(h_n) = \wedge_n I(h_n)$.*

Proof: First of all, let us show that

$$I(f + t) \leq I(f) + I(t) \quad (13)$$

for each measurable non-negative function f and for any $0 \leq t \in S$, where S is the class of all simple functions. We have:

$$\begin{aligned} I(f + t) &= \vee_{s \in S, 0 \leq s \leq f+t} I(s) = \vee_{s \in S, t \leq s \leq f+t} I(s) = \\ &= \vee_{s \in S, 0 \leq s \leq f} I(s + t) \leq \vee_{s \in S, 0 \leq s \leq f} [I(s) + I(t)] \leq \\ &\leq [\vee_{s \in S, 0 \leq s \leq f} I(s)] + I(t) = I(f) + I(t), \end{aligned}$$

getting the claim.

Now, fix arbitrarily $\varepsilon > 0$, and let $B_n := \{x \in X : h_n(x) \leq h(x) + \varepsilon\}$. It is easy to see that the sequence $(B_n)_n$ is increasing in β and $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Thus $\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus B_n)$. By continuity from above we get

$$(o) \lim_n P(X \setminus B_n) = \wedge_n P(X \setminus B_n) = 0. \quad (14)$$

For all $n \in \mathbb{N}$ we get $h_n \leq (h + \varepsilon) \vee a \chi_{(X \setminus B_n)} \leq (h + \varepsilon) + a \chi_{(X \setminus B_n)}$. By (13) and monotonicity of the integral, we obtain

$$I(h_n) \leq I(h + \varepsilon) + a P(X \setminus B_n) \leq I(h) + \varepsilon P(X) + a P(X \setminus B_n).$$

Hence, $\limsup_n I(h_n) \leq I(h) + \varepsilon P(X) + a \limsup_n P(X \setminus B_n) = I(h) + \varepsilon P(X)$. By arbitrariness of $\varepsilon > 0$ we get

$$\inf_n I(h_n) = (o) \lim_n I(h_n) = \limsup_n I(h_n) \leq I(h).$$

Concerning the converse inequality, note that, by monotonicity of the integral, $I(h) \leq I(h_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$ and hence $I(h) \leq \inf_n I(h_n) = (o) \lim_n I(h_n) = \limsup_n I(h_n)$. $\square$

Observe that, without assuming equiboundedness of the sequence $(h_n)_n$, in general Theorem 6 fails to hold, even when $R = \mathbb{R}$ (see [1]).

We now prove our version of the Fatou Lemma.

Lemma 7. *If $(f_n)_n$ is a sequence of measurable non-negative functions, then $I(\liminf_n f_n) \leq \liminf_n I(f_n)$. Moreover, if the f_n 's are equibounded, then we get also $I(\limsup_n f_n) \geq \limsup_n I(f_n)$.*

Proof: We prove only the first inequality, since the second one is similar. For every $n \in \mathbb{N}$ set $h_n := \bigwedge_{k \geq n} f_k$. The sequence $(h_n)_n$ is increasing, and so by the monotone convergence theorem we get:
 $I(\liminf_n f_n) = I(\bigvee_n h_n) = (o) \lim_n I(h_n) = \liminf_n I(h_n) \leq \liminf_n I(f_n)$. $\square$

We now turn to the Lebesgue dominated convergence theorem.

Theorem 8. *Let $(f_n)_n$ be an equibounded sequence of measurable non-negative mappings, and suppose that $f := \lim_n f_n$. Then $I(f) = (o) \lim_n I(f_n)$.*

Proof: Since $f = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$, by virtue of Lemma 7 we get:

$$I(f) \leq \liminf_n I(f_n) \leq \limsup_n I(f_n) \leq I(f). \quad (15)$$

So all the inequalities in (15) are equalities, and hence the theorem is proved. $\square$

REFERENCES

- [1] N. K. AGBEKO, *On optimal averages*, Acta Math. Hungar. **63** (2) (1994), 133-147.
- [2] N. K. AGBEKO, *On the structure of optimal measures and some of its applications*, Publ. Math. Debrecen **46** (1995), 79-87.
- [3] N. K. AGBEKO, *How to characterize some properties of measurable functions*, Math. Notes Miskolc 1 (2), 87-98.
- [4] N. K. AGBEKO, *The role of the maximum operator in the theory of measurability and some applications*, Ph. D. Thesis, Department of Applied Mathematics, University of Miskolc (2009).

- [5] K. ATANASSOV, *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*, Physics Verlag, New York (1999).
- [6] S. J. BERNAU, *Unique representation of Archimedean lattice group and normal Archimedean lattice rings*, Proc. London Math. Soc. 15 (1965), 599-631.
- [7] A. BOCCUTO - B. RIEČAN, *The Concave Integral with respect to Riesz Space-valued Capacities*, Math. Slovaca 59 (2009), 647-660.
- [8] A. BOCCUTO - B. RIEČAN, *On extension theorems for M -measures in l -groups*, Math. Slovaca 60 (2010), 65-74.
- [9] A. BOCCUTO - B. RIEČAN - A. R. SAMBUCINI, *On the product of M -measures in l -groups*, Australian J. Math. Anal. Appl. 7 (1) (2010), Paper N. 9, 8 p., electronic only.
- [10] A. BOCCUTO - A. R. SAMBUCINI, *On the De Giorgi-Letta integral with respect to means with values in Riesz spaces*, Real Anal. Exch. 21 (1995/96), 793-810.
- [11] A. BOCCUTO - A. R. SAMBUCINI, *The monotone integral with respect to Riesz space-valued capacities*, Rend. Mat. (Roma) 16 (1996), 491-524.
- [12] L. DREWNOWSKI, *A representation theorem for maxitive measures*, Indag. Math. New Ser. (1) 20 (2009), 43-47.
- [13] D. DUBOIS - H. PRADE, *Qualitative possibility functions and integrals*, Pap E. (ed.), Handbook of Measure Theory, Vol. I and II, Amsterdam, North-Holland (2002), 1469-1522.
- [14] P. MAZUREKOVÁ - J. PETROVIČOVÁ - B. RIEČAN, *Product of M -measures*, Tatra Mt. Math. Publ. 42 (2009), 87-93.
- [15] P. MAZUREKOVÁ - B. RIEČAN, *A measure extension theorem*, in: Notes on IFS, 12 (4) (2006), 3-8.
- [16] B. RIEČAN - T. NEUBRUNN, *Integral, Measure and Ordering*, Kluwer Acad. Publ. and Ister Science (1997).
- [17] N. SHILKRET, *Maxitive measure and integration*, Indag. Math. 33 (1971), 109-116.

Doc. Antonio Boccuto, PhD.
Università di Perugia
Dipartimento di Matematica e Informatica
Via Vanvitelli, 1
I – 06123 Perugia (Italy)
 e-mail: boccuto@yahoo.it

Dr. Xenofon Dimitriou, Prof. Nikolaos Papanastassiou
Department of Mathematics
University of Athens,
Panepistimiopolis
Athens 15784 (Greece)
 e-mail: x.dimitriou@yahoo.gr, dxenof@math.uoa.gr, npapanas@math.uoa.gr

VÝVOJ POJMU FUNKCE OD ARCHIMEDA PO NEWTONA

IRENA BUDÍNOVÁ

ABSTRACT. The article shows problems with development of the concept of function. It was very difficult to build the problematics of functions. At the end of the article we consider how the historic difficulties could affect education of functions at basic school.

Počátky vzniku pojmu funkce

Pojem funkce jako takový se nerozvíjel plynule, ze začátku se spíše objevuje v pracích některých geniálních myslitelů, kteří však nenašli následovníky a vývoj tím byl stále zbržděn. Největšího posunu se pojmu funkce dostalo díky následujícím okolnostem:

- řecké studium křivek (zejména Archimédes),
- astronomie, která si vyžádala vznik trigonometrie,
- studium fyzikálních zákonitostí (např. popis pohybu hmotného bodu v 17. st.),
- vytvoření pravoúhlého systému Fermatem a Descartem a jejich objev analytického vyjádření funkční závislosti,
- vznik diferenciálního počtu,
- pochopení pojmu limity.

Prvním myslitelem, které dokázal o závislostech uvažovat v obecnějším duchu, byl Archimédes ze Syrakus (287 – 212 př. n. l.). Byl jediný, kdo se zabíral takovými pojmy jako nekonečno, a to i přesto, že tento pojem byl výslovně zapovězen Aristotelem, jehož autorita přetrvala 2000 let. S nekonečnem se Archimédes setkal, když se rozhodl určit obsah plochy úseku, který ohraničuje parabola a přímka (asi 225 př. n. l.). Určování obsahu plochy trochu složitějších křivek byl tehdy nepředstavitelný problém. Archimédes ale zvolil velice důmyslný způsob postupného vepisování stále menších trojúhelníků do úseku paraboly. Když se těchto kroků udělá nekonečně mnoho, pokryje se plocha úseku paraboly celá. Archimédes takto vytvořil nekonečnou řadu obsahů trojúhelníků a dokonce dokázal najít součet této řady. Vypočítal, že obsah úseku paraboly je roven $\frac{2}{3}$ obsahu obdélníka, kterému je úsek paraboly vepsán. Bohužel ale tento postup je natolik specifický, že nebylo možné provést zobecnění, které by platilo pro libovolnou křivku.

Dále se v jeho pracích můžeme s limitním uvažováním setkat při určování obsahu kruhu. Tento příklad intergace mimo jiné vedl k aproximaci čísla π .

Archimédes, podobně jako i jiní matematikové té doby, se zabýval také studiem křivek, a to zejména kuželoseček a spirál. Rozvinul metodu na stanovování tečen ke křivkám a metodu na určování extrémů. Jeho velký nástupce Apollonios z Pergy (asi 260 – 170 př. n. l.) se proslavil svým pojednáním Kuželosečky (Kóniká).

V rozvoji pojmu funkce sehrála důležitou úlohu také astronomie. Ze vztahu mezi matematikou a astronomií vyrostla potřeba zavedení trigonometrie. První práce o trigonometrických funkcích se vztahovaly k oblouku kruhu. Kruh daného poloměru byl rozdělen na 60 dílů (zde vidíme inspiraci řecké matematiky v babylónském systému, který

používal šedesátkovou soustavu). Úkolem bylo najít délku oblouku ležícího proti danému úhlu. První známé tabulky oblouků byly vytvořeny řeckým matematikem Hipparchem kolem roku 140 př. n. l. Přestože tyto tabulky nepřežily, říká se, že Hipparchos napsal 12 knih s tabulkami oblouků. Je proto považován za objevitele trigonometrie.

Posledním obdobím starověku je období římské nadvlády, ve kterém nastal úpadek a stagnace vědy. Jedním z nejdůležitějších děl tohoto období je dílo Claudia Ptolemaia (85 – 165) Velká skladba (Megalé syntaxis, známější pod arabským názvem Almagest). Kromě toho, že je zde výklad všech astronomických poznatků té doby, obsahuje i soustavně vyloženou « trigonometrii tětiv » (v jeho práci se již skrytě vyskytuje funkce sinus, sestavil tabulky závislosti mezi velikostí úhlu a délkou příslušné tětivy).

Období středověku nebylo z hlediska vývoje funkcí nijak zásadně významné. Středověkou matematiku je možno shrnout do přínosu indické a arabské matematiky a do prací scholastických myslitelů.

V indické matematice se poprvé objevuje funkce sinus. Byly vytvořeny tabulky polovičních oblouků (tedy tabulky sinů). Tento krok umožnil přirozeným způsobem zavést další funkce, které vyjadřovaly závislosti mezi stranami a úhly v pravoúhlém trojúhelníku.

Arabská matematika je spojena zejména se jmény dvou významných matematiků – al-Farábího a al-Bírúniho. Výzkum al-Farábího (870 – 950) rozšířil trigonometrii o tangens a kotangens, které chápal jako délky příslušných tečen ke kružnici. Sestavil velmi přesné trigonometrické tabulky a svým dílem významně přispěl k vyčlenění rovinné i sférické trigonometrie na samostatnou vědeckou disciplínu.

Al-Bírúní (973 – 1048) udělal přechod od separovaných modelů k univerzálnímu modelu křivky. Jako první začal uvažovat o křivce obecně, hledat její extrémy a intervaly monotónnosti. Jeho myšlenky však nenašly pokračovatele a byly znovu objeveny až po šesti stoletích. Rovněž al-Bírúní sestavil velmi přesné tabulky sinů a tangentů, přičemž poloměr kružnice považoval za jednotkový (v Evropě se začal všeobecně jednotkový poloměr trigonometrické kružnice používat až v 18. století, a to hlavně zásluhou L. Eulera).

Scholastičtí myslitelé na anglických a francouzských univerzitách ve 12. až 14. století sledovali přírodní zákonitosti a jejich příčiny (např. vztah mezi rychlostí pohybu a silou, která jej způsobuje). V této době byly také udělány první krůčky k zavedení mocninné, exponenciální a logaritmické funkce, o což se zasloužil francouzský matematik Nicole Oresme (asi 1320 – 1382) tím, že zobecnil pojem mocniny pro případ kladných racionálních exponentů a zformuloval pravidla pro počítání s takovými mocninami.

V 15. století vytvořil německý matematik Johannes Müller systematický úvod do trigonometrie. Od této doby se stala trigonometrie vědou nezávislou na astronomii. Vytvořil dále tabulky sinů (s přesností na 7 desetinných míst) pro intervaly jedné minuty. Zavedl i funkce, které byly v 17. století nazvány tangens a kotangens a sestavil i tabulky jejich hodnot.

16. a 17. století

Od 16. století se ve funkčním vývoji přihodilo mnoho zajímavých a důležitých událostí. Do centra pozornosti se v přírodních vědách postupně dostala kromě astronomie i mechanika, hlavně její nová oblast, dynamika, ke které se připojila i nebeská mechanika. Astronomická pozorování byla v té době již natolik přesná, že umožnila J. Keplerovi (1571 – 1630) učinit závěry o eliptických drahách planet a zahrnout geocentrickou soustavu. Základní úlohou mechaniky se stalo studium pohybu hmotného bodu, a to nejen

rovnoměrného přímočarého -- např. Galileo Galilei (1564 – 1642) podrobně popsal volný pád. Většina funkcí, které byly studované v 16. a 17. století, byly proto nejprve zkoumány jako trajektorie pohybujících se bodů.

Pro usnadnění astronomických výpočtů se zrodila další z transcendentních funkcí, a to logaritmická. Logaritmus objevil a pojmenoval skotský matematik John Napier (1550 – 1617), který jako první uveřejnil tabulky logaritmů. Při jejich sestavování využil vztah mezi geometrickou posloupností, vytvořenou z postupných mocnin jistého základu a aritmetickou posloupností jejích exponentů, který znal už Archimedes a který byl roku 1544 znovuobjeven a rozpracován Michaelem Stifelem. Základem tohoto vztahu byla skutečnost, že vynásobením dvou členů geometrické posloupnosti je exponent jejích součinu roven součtu příslušných členů aritmetické posloupnosti, např.

$$3^3 \cdot 3^5 = 27 \cdot 243 = 6561 = 3^8 = 3^{3+5}.$$

Logaritmus byl tedy nejdříve zaveden jako početní operace. Logaritmus jako funkci zavedli až o 20 let později nezávisle na sobě francouzští matematici Pierre de Fermat (1601 – 1665) a René Descartes (1596 – 1650). V 17. století se tedy objevil nový způsob vyjádření funkční závislosti, a to pomocí formule, tj. vyjádření pomocí analytického výrazu daného rovnicí. Dosud byly funkce převážně zadávány slovy nebo tabulkami, případně graficky. Všechny tyto způsoby jsou v 17. století postupně vytlačovány analytickými výrazy ve tvaru symbolických rovnic.

Fermat už před Descartem zavedl pravoúhlé souřadnice a vytvořil tzv. souřadnicovou metodu, kterou aplikoval v geometrii. Také se zabýval lineární funkcí, nepřímou úměrností a dalšími funkcemi (zejména těmi, jejichž grafy jsou částmi kuželoseček). Ukázal, jak je možné najít lokální extrémy polynomických funkcí. Díky svým matematickým výzkumům bývá někdy Fermat pokládán za zakladatele diferenciálního počtu.

Myšlenka určení funkce pomocí analytického výrazu byla mnohem podrobněji rozvedena Renéem Descartem v jeho knize « La Géométrie » (1637). Ukázal, že rovnice s proměnnými x, y umožňuje vypočítat libovolnou hodnotu jedné z nich pomocí formule, využitím hodnot druhé veličiny. Touto formulí se ovšem rozuměla funkce daná implicitně rovnicí $F(x,y)=0$.

Newton a Leibniz

Ve druhé polovině 17. století byl v matematice učiněn zásadní objev, a to sice možnost rozkládat funkce do nekonečných řad. Prvním matematikem, který tuto metodu použil, byl N. Kaufman (1620 – 1687), známý pod jménem Nicholas Mercator. Rozklady funkcí do mocninných řad se zabýval hlavně významný anglický matematik a fyzik Isaac Newton (1643 – 1727). Tyto rozklady spolu s Cavalieriho objevem, že

$$\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1),$$

mu mimo jiné umožnily hledat obsah útvaru ohraničeného křivkami. To byla jedna z nejdůležitějších úloh, kterou se zabývala celá řada dalších matematiků (včetně např. Leibnize). Newton našel pro funkci vyjádření ve tvaru mocninné řady a integrováním člen po členu získal hledaný obsah.

Zejména fyzikové, v čele s Newtonem, si brzy uvědomili, jak mimořádně významná je při studiu pohybu tečna k trajektorii. Vyjádření sečny dané funkce bylo jednoduché, ale při hledání její limitní polohy narazili matematikové na výraz $0/0$. S tímto problémem se částečně vypořádal opět Isaac Newton. Objevil totiž způsob, jak hledat rovnice tečen, a to pomocí fluxí, které jsou předchůdkyněmi dnešní derivace. Popsal postup, v němž pracoval s téměř nulovými hodnotami, ale operace s nimi nedokázal uspokojivě vysvětlit. Ukažme na jednoduchém příkladě, jak Newton postupoval: Vezměme funkci $y=x^3+2x^2+3x+1$. Vzhledem k tomu, že Newton byl v první řadě fyzik, jako nezávisle proměnná vystupuje v jeho pracích téměř výlučně čas. Předpokládal tedy, že y a x se mění s časem. Rychlosti jejich změn označme dy a dx . Newton nechal diferenciály měnit, ale nekonečně málo, na změnu jim vlastně nedal žádný čas. Tento nulový okamžik označíme písmenem o . Po uplynutí daného času dostáváme rovnici

$$(y+o \, dy)=(x+o \, dx)^3+2(x+o \, dx)^2+3(x+o \, dx)+1$$

$$y+o \, dy=x^3+3x^2(o \, dx)+3x(o \, dx)^2+(o \, dx)^3+2x^2+4x(o \, dx)+2(o \, dx)^2+3x+3(o \, dx)+1.$$

Vidíme, že se na obou stranách rovnice nachází y , tedy ho můžeme od obou stran rovnice odečíst. Newton nyní prohlásil, že vzhledem k tomu, že hodnota $o \, dx$ je opravdu velice malá, můžeme pokládat za nulovou její druhou a třetí mocninu. Tento krok ale nedokázal nijak odůvodnit. Dostáváme tedy

$$o \, dy = 3x^2(o \, dx)+4x(o \, dx)+3(o \, dx)$$

$$\frac{o \, dx}{o \, dy} = 3x^2 + 4x + 3$$

Newton se v tomto postupu dopouští hned dvou velice závažných chyb. Jestliže jsou vyšší mocniny výrazu $o \, dx$ rovny nule, pak je rovno nule i samotné $o \, dx$. Pak ale není jasné, proč z rovnice odstraňujeme pouze vyšší mocniny tohoto výrazu. A v předposledním kroku, kdy jsme dělili výrazem $o \, dx$, jsme vlastně dělili nulou.

Přestože tento aparát byl velice podezřelý a nevysvětlitelný, pro hledání rovnice tečny fungoval a tak matematikům nezbývalo, než jej přijmout. S myšlenkou limity, která dávala klíč k vysvětlení Newtonova záhadného výpočtu, přišel až ke konci 18. století d'Alambert. Začalo se pracovat pouze s konečnými hodnotami. Náhle bylo jasné, že místo dělení nulou je třeba dělit číslem, které se nule blíží.

Newton ještě nepoužívá slovo funkce (pro označení explicitně zadané funkce používá termín ordináta). Samotný termín funkce (z latinského slova *functio* – úkon, vykonávání) zavedl v roce 1673 německý matematik Leibniz, avšak ve smyslu více méně geometrickém. V dnešním významu (ve smyslu analytického výrazu) poprvé slovo funkce použil roku 1698 Johann Bernoulli (1667 – 1748).

Velkým Newtonovým soupeřem při budování diferenciálního počtu byl již zmíněný Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), a to i přes to, že v matematice byl samoukem. Ve svých pracech vychází z geometrického hlediska. Vytvořil symboliku, která je používána dodnes. Nejdůležitější Leibnizovou prací bylo zjištění, že integrace a derivace spolu souvisí.

Na křivku Leibniz nahlížel jako na mnohoúhelník sestavený z nekonečně mnoha malých úseček. Tečna je podle něj přímka, která prochází dvěma body křivky, které jsou nekonečně málo od sebe vzdáleny. Při vyjadřování této nekonečně malé veličiny jednal

velice odvážně. Přestože Leibniz získal své výsledky až několik let po Newtonovi, byl první, kdo je šířil, neboť Newton své poznatky nejprve vůbec nezveřejňoval.

Pojem funkce v dnešní školské matematice

Přestože pojem funkce si díky své složitosti prokopával cestu na svět celá staletí a i ti největší matematikové a fyzikové s ním měli pořádné potíže, školní přístup k zavádění tohoto pojmu se podle toho moc netváří. Žáci základní školy mají dojít k pochopení základům problematiky funkcí na příkladu mnohdy jediné funkce – lineární. Občas se k tomu přidá nepřímá úměrnost či kvadratická funkce, ale málokdy se žáci zabývají například určováním definičních oborů nebo vlastností funkcí.

Pro lidstvo nebylo snadné ani zjistit, že je Země kulatá a jaké má rozměry. Když se povedlo, mnozí tomu nechťeli uvěřit, nebo si to nedokázali představit. Když dnes dětem suše sdělíme, že Země je kulatá a velká, těžko můžeme očekávat, že tuto informaci stráví se všemi důsledky. Podobně je to s pojmem funkce, který pro dobré pochopení potřebuje náročnou cestu, při které může dojít i k částečnému rozbourání dosavadní poznávací soustavy žáka, ale nikoli povrchní seznámení s lineární funkcí.

REFERENCES

- [1] Fulier, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. UKF, Nitra 2001. ISBN 80-8050-418-0
- [2] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *A history of the calculus*. [online] www.hisotry.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/
- [3] Seife, Ch.: *Nula*. Dokořán, Praha 2005. ISBN 80-7363-048-6
- [4] Schwabik, Š.: *Druhá krize matematiky aneb potíže růstu diferenciálního a integrálního počtu*. In: *Matematika v proměnách věků I*. Sborník. Editors: Bečvář, J., Fuchs, E. Prometheus, Praha 1998
- [5] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky*. Orbis, Praha 1963
- [6] *Wikipedia, die frei Enzyklopädie*. [online] <http://de.wikipedia.org/wiki/Differenzialrechnung>

Mgr. Irena Budínová.
Department of Mathematics
Faculty of Education
Masaryk University
Poříčí 31
CZ – 602 00 Brno
e-mail: irena.budinova@seznam.cz

VÝSTAVBA ZÁKLADNÝCH ARITMETICKÝCH ŠTRUKTÚR V PRIMÁRNEJ ŠKOLE NA SLOVENSKU, V NEMECKU A VO VEĽKEJ BRITÁNII

ĽUBOMÍR CZANNER – JÁN ČIŽMÁR

ABSTRACT. The principal goal of this paper is a comparative analysis of building of basic arithmetical structures in elementary schools in Great Britain, Germany and Slovak republic. In a broader sense of this theme we study the organisational structure of the school system of the three countries with emphasis on primary grades of education; and on government organised educational preparation of the relevant teachers. To effectively achieve the goals we focus on the content of taught subjects (framework, textbooks, didactic tools), on teaching methods (methodical procedures for education which are represented by textbooks, each concerned on specific subjects themes) and on the building of adequate language tools (terminology of a school arithmetic). An important part of this paper is results of an effectivity comparison of relevant subjects' education in the three countries via realisation and evaluation of didactical tests with standard and advanced statistical methods.

KEY WORDS. educational system in Great Britain, Germany and Slovak republic; comparative analysis; education of primary school teachers; building of arithmetical structures in primary school; contents, teaching methods and language of school mathematics in the area of arithmetical structures.

Na úvod

Obsah vyučovania aritmetiky, ciele, metódy a prostriedky vyučovania so zreteľom na tvorbu kľúčových kompetencií žiakov v aritmetike predstavujú trvale aktuálnu problematiku, ktorej teoretické riešenie a praktická realizácia výsledkov výskumu sú predmetom záujmu popredných teoretikov a praktikov primárnej školy od samých začiatkov budovania ľudového školstva v strednej a západnej Európe. Teoretické riešenie tejto problematiky zažilo veľkú konjunktúru v 2. polovici 20. storočia v špičkových výskumných centrách západnej a strednej Európy a Severnej Ameriky a zostáva aj dnes významnou úlohou, do riešenia ktorej sa rozličnými formami zapája čoraz širší aktív výskumníkov a realizátorov výskumných projektov. Problematika je stále otvorená a vzhľadom na výchovno-vzdelávacie ciele a stupeň efektivity školskej práce ju nikdy nebude možné pokladať za uzavretú.

V predkladanom príspevku, ktorý stručne opisuje výsledky výskumu dizertačnej práce, sa hlavná pozornosť venuje *analýze metód vyučovania základných aritmetických operácií a relácií* v primárnej škole na Slovensku, v Nemecku a v Anglicku - v krajinách, ktorých školský systém sme mali možnosť sledovať vlastným aktívnym zapojením do vzdelávacieho a výchovného procesu a s niekoľkými pracovníkmi zo zahraničia udržiavame trvalý pracovno-profesionálny kontakt.

Cieľom práce bolo:

- zistiť zhody a rozdiely vyučovania aritmetiky v porovnateľných skupinách, čo sa týka obsahu
- zistiť zhody a rozdiely vyučovania aritmetiky v porovnateľných skupinách, čo sa týka metód vyučovania (od metodiky pre učiteľov až po metodiku pre žiakov)

- zistiť, do akej miery je zhodná a rozdielna terminológia daných krajín a do akej miery sa v jednotlivých metódach odrážajú nové trendy

Hlavným cieľom práce bola analýza zavádzania *aritmetických operácií* (sčítovania a násobenia) a *relácií* (odčítovania a delenia) v množine prirodzených čísel na primárnom stupni všeobecného vzdelávania v školských systémoch Slovenska, Nemecka a Anglicka. (Odčítovanie a delenie na množine prirodzených čísel *nie sú* binárne operácie, ale len binárne relácie, do ktorých vstupujú len niektoré dvojice prirodzených čísel; navyše operácie aj relácie sa zužujú na podmnožiny, s ktorými sa žiaci už oboznámili.) Táto analýza mala teda priniesť poznatky vyúsťujúce do záverov, v ktorých realizácia by komplexnejšie rešpektovala pedagogicko-psychologické, mentálne a iné vekové osobitosti žiakov a v konečnom dôsledku by efektívnejšie prispela k formovaniu matematických kompetencií žiakov v najširšom význame tohto pojmu.

Podružným cieľom v obmedzenom rozsahu limitovanom mnohými faktormi bolo experimentálne preverovanie možností niektorých alternatívnych postupov v budovaní koncepcie aritmetických operácií a relácií. Pre dosiahnutie tohto cieľu bolo oslovených niekoľko kolegov z Anglicka, Nemecka a Slovenska, pričom hlavnú úlohu v tomto experimente mal doktorand. Na záver experimentu bol vypracovaný test, ktorý bol na konci školského roka po vzájomnej konzultácii všetkých zúčastnených učiteľov zadaný žiakom štvrtého (v Anglicku piateho) ročníka.

Práca bola *porovnávací* a týkala sa *didaktiky elementárnej matematiky* na primárnom stupni vzdelávania. Keďže tu ide o *porovnávanie* metodických postupov, vyplývala z toho aj nutnosť zachytiť metodickú i odbornú prípravu budúcich *pedagógov* v oblasti matematiky, či už v dennom alebo v diaľkovom štúdiu.

Záver porovnávej analýzy

1. V obsahu vyučovania aritmetiky na primárnych školách vo všetkých troch sledovaných krajinách (Anglicko, Nemecko, Slovensko) v skupinách žiakov porovnateľných vekom a úrovňou predchádzajúcej prípravy niet podstatných rozdielov. Veľmi zhodný paralelizmus možno konštatovať v časovom zaradení toho istého učiva medzi Nemeckom a Slovenskom, kde jediným významným rozdielom je zaradenie celej násobilky v Nemecku už do 2. ročníka, zatiaľ čo na Slovensku je toto učivo rozdelené do 2. a 3. ročníka. V Anglicku vzhľadom na skorší začiatok povinnej školskej dochádzky už vo veku 5 rokov dieťaťa je pre začiatkové tematické celky v prvých ročníkoch primárnej školy zvolené adekvátne pozvoľnejšie tempo, čím sa rozsah absolvovaného učiva približne na konci 3. ročníka výučby vyrovnáva so stavom v Nemecku a na Slovensku. Rozsah a požiadavky študentov sú na konci primárnej školy vo všetkých troch krajinách vyrovnané.

2. V základných metódach výučby aritmetiky niet medzi nemeckou a slovenskou školou významných rozdielov. Obe zakladajú výučbu na dôslednom rešpektovaní základných didaktických zásad s dôrazom na názornosť, konkrétnosť a využívanie sociálnej skúsenosti žiakov. V obsahu i v metódach výučby sú implicitne zahrnuté poznatky didaktického výskumu posledných desaťročí, najmä overené výsledky o akcelerácii fyzického a psychického vývoja detí. Pokročilejšia v tomto smere je nemecká škola, v ktorej vyššia úroveň rozumového vývinu je priamo zakomponovaná do foriem komunikácie medzi učiteľom a žiakmi.

Anglická škola na rozdiel od oboch sledovaných kontinentálnych škôl je poplatná konzervatívnej tradícii – s najväčšou pravdepodobnosťou v celej Veľkej Británii osvedčenej – v duchu ktorej sa pridrižiava častejšieho spájania výučby matematických pravidiel s jazykovou výchovou (matematické poučky vo forme rýmovačiek) a s používaním mnemotechnických pomôcok (komplikované pravidlá s používaním prstov oboch rúk pri vyučovaní násobilky). Aj nácvik realizačných algoritmov aritmetických operácií a utváranie zručností v ich písomnej realizácii sa odlišuje od kontinentálnej praxe, ktorá za posledných päťdesiat – šesťdesiat rokov dospela k istému zjednodušeniu. Anglická škola v poslednom čase čiastočne ustupuje od numerického drilu s odôvodnením, že úlohu numerických výpočtov preberú vreckové kalkulačky. Tento problém treba považovať za otvorený, pretože určité množstvo pohotovostných matematických vedomostí a zručností je významné nielen z aspektu matematiky, ale aj z pohľadu všeobecnej rozumovej výchovy, nácviku logického myslenia a rozvíjania pamäti.

3. Najväčšie rozdiely v celej výchovno-vzdelávacej problematike v uvedených krajinách sú v koncepcii realizačnej podoby učebníc matematiky pre primárne školy. Nemecké učebnice vychádzajú z osvedčenej tradície výkladu a nácviku zručností na príkladoch z reálneho života blízkyh vekovým skúsenostiam a rozumovému chápaniu žiakov, často tematicky pospájaných jednou ústrednou témou (Cirkus). Charakteristikou týchto učebníc je vysoká metodická prepracovanosť dôsledne rešpektujúca didaktické zásady, osobitne dôkladne zásady názornosti, postupnosti a primeranosti.

Jediná séria slovenských učebníc pre primárne školy má niekoľko nedostatkov, z ktorých treba uviesť koncepčnú neujasnenosť vzhľadom na vzťah vedeckého základu učiva a jeho didaktickej transformácie, v praxi nie príliš osvedčenú implementáciu rozprávkových a pseudorozprávkových postáv do motivačných a realizačných textov učebnice, nefunkčnosť mnohých obrázkov a ich nejasný didaktický zámer a chaotické usporiadanie niektorých tematických celkov a tém. Alternatívna séria učebníc by bola veľmi potrebná a užitočná.

Anglické učebnice sú zamerané pragmaticky a utilitaristicky na osvojenie matematického učiva bez prítomnosti rozptyľujúcich a vnímanie matematickej podstaty komplikujúcich faktorov. Spojenie učiva s reálnymi matematickými situáciami a zameranie na aplikácie matematiky v reálnej praxi (výpočty s jednotkami meny, rôzne jednotky miery atď.) je v anglických učebniciach zastúpené výraznejšie než v učebniciach v Nemecku a na Slovensku.

4. Podstatné rozdiely boli v doterajšej profesionálnej príprave učiteľov elementárnych škôl. Kým na Slovensku a v Nemecku príprava učiteľov-elementaristov prebieha už pol storočia formou vysokoškolského štúdia s vyváženým zastúpením predmetov odbornej a didakticko-metodickej zložky, príprava učiteľov primárnej školy v Anglicku prebiehala doteraz formou interných alebo externých kurzov, účasť na ktorých nebola podmienená kvalifikáciou porovnateľnou s maturitou v kontinentálnych školských systémoch. Zjednocovanie systémov vysokoškolského štúdia v Európe (aj mimo nej) zasiahne vo väčšej miere prípravu učiteľov-elementaristov v Anglicku, kde možno očakávať minimálne absolvovanie bakalárskeho štúdia ako podmienku učiteľskej kvalifikácie pre primárnu školu.

Efektivita vysokoškolského štúdia učiteľov-elementaristov sa pre reálnu pedagogickú prax v mnohých prípadoch v našom školstve ukazuje veľmi nízka. Vedecká báza školskej matematiky je pre značnú časť tejto skupiny učiteľov odtrhnutá od vzdelávacej praxe,

v ktorej mnohí upadajú do rutinnej činnosti vzdialenej od potrebnej a premyslenej didaktickej transformácie vedeckých poznatkov do školského učiva.

Učitelia-elementaristi v Nemecku a Anglicku sú v porovnaní s našimi učiteľmi podstatne lepšie vybavení podrobnými metodickými príručkami, ktoré môžu poskytovať neoceniteľné služby najmä učiteľom – začiatočníkom pri orientácii v učive a pri prípravách na vyučovacie hodiny. Naše školstvo taktiež zaostáva oproti školstvu v Anglicku a Nemecku v materiálnom vybavení, ktoré umožňuje pestrejšiu a variabilnejšiu činnosť so žiakmi na vyučovacích hodinách.

5. Štatistické vyhodnotenie vedomostných testov žiakov porovnateľných vekových skupín s porovnateľným rozsahom prípravy a jej porovnateľnou úrovňou vykázalo signifikantné zaostávanie testovaných anglických žiakov v riešení zložených slovných úloh. V rutinných numerických úlohách boli výsledky žiackych testov pomerne vyrovnané. Z malej vzorky nemožno dedukovať ďalekosiahle závery najmä preto, že úroveň anglických škôl je značne rozdielna následkom rozsiahlej diferencovanosti, ktorú anglický školský systém umožňuje. Platné štandardy, učebnice a metodické materiály však naznačujú, že tento úkaz – zaostávanie v samostatnom riešení zložitejších aplikačných úloh – by mohol mať širšiu platnosť.

Závery práce a odporúčania pre prax slovenského školstva

1. Obsah vyučovania, ktorým sa v elementárnych školách na Slovensku budujú základy aritmetických štruktúr, vykazuje dlhodobú stabilitu a nejaké radikálne zásahy v ňom sú nežiaduce. Dôležité je, aby rámcové vzdelávacie programy a konkrétne školské vzdelávacie programy príliš nenarušili pomerne ustálenú štruktúru didaktickej transformácie tohto učiva a jeho časové zadelenie. Mierne lokálne úpravy by mali vychádzať z dlhodobých skúseností učiteľských kolektívov s praxou na elementárnych školách.

2. V metódach výučby aritmetických štruktúr na elementárnych školách na Slovensku treba väčšiu pozornosť venovať zavádzaniu a rozvíjaniu metód pedagogického konštruktivismu používaním štandardizovaných materiálnych prostriedkov, ktoré by mali byť na ten účel vyvinuté a zavedené do škôl. Veľmi by v tomto smere bolo užitočné štúdium zahraničných skúseností. Hlbavý a iniciatívny učiteľ si aj bez týchto pomôcok nájde svoju cestu, ale ide o pomoc širokej mase učiteľov bez takéhoto tvorivého prístupu k vlastnej práci.

3. Slovenské elementárne školstvo naliehavo potrebuje alternatívnu sériu učebníc matematiky rešpektujúcich osvedčené zahraničné vzory a dlhodobé skúsenosti úspešných a uznávaných učiteľov-elementaristov. Text takej učebnice má byť syntézou praktických skúseností v tejto skupine učiteľov a premyslenej didaktickej transformácie realizovanej poprednými vysokoškolskými odborníkmi v tejto oblasti. Grafická výbava musí byť v súlade s didaktickými zámermi textu a má mať mnohostrannú podpornú funkciu ako neoddeliteľná a organická súčasť učebnice. O učebniciach by sa mala viesť široká diskusia v učiteľskej obci a názory hodné pozornosti a uznania by sa mali stať súčasťou zásad pre konečnú verziu najmä textu, ale aj obrázkov a celkovej grafickej a technickej úpravy učebníc.

4. Problémom kvality a efektivity práce našich učiteľov-elementaristov nie je ich vysokoškolská príprava, i keď aj na nej by sa mohli niektoré zásadné i podružné stránky zlepšiť, najmä v smere lepšieho a účinnejšieho prepojenia teórie s reálnymi a dlhodobými aktuálnymi problémami živého didaktického pôsobenia. Skúsenosti z pracoviska, metodických zhromaždení i didaktických konferencií posilňujú domnienku, že tento nedostatok vysokoškolskej prípravy značná časť učiteľov nevie samostatne preklenúť a vo vlastnej didaktickej praxi tápe pri vyučovaní elementárnych partii s hlbokým a dôležitým teoretickým pozadím. V tejto oblasti môže a má zohrať dôležitú úlohu ďalšie vzdelávanie učiteľov, ktoré by sa malo zamerať na tieto kľúčové problémy učiteľskej praxe, pomôcť učiteľom nadobudnúť istotu v didaktickej transpozícii teórie a sústrediť sa na otváranie a zvyšovanie didaktického umenia.

5. Jedným z vážnych problémov nášho školstva je seriózny výskum dôležitých problémov vzdelávania a výchovy. Vo vyučovaní matematiky je táto dôležitá zložka komplexnej školskej problematiky v úzadí pozornosti inštitúcií a učiteľov, prinajmenšom pokiaľ ide o najvážnejšie problémy vyučovania matematiky. V celoživotnom vzdelávaní učiteľov by mala dôležité miesto zaujať dôkladná teoretická i praktická príprava na realizáciu didaktického výskumu a schopní a pripravení učitelia by sa mali v oveľa väčšom rozsahu než doteraz podieľať na častejších a významnejších výskumných projektoch, a to nielen ako terénni realizátori výskumných úloh, ale aj ako koncipienti projektov, vyhodnocovatelia výsledkov a spolutvorcovia záverov.

Aj táto činnosť môže prispieť k zvýšeniu vážnosti učiteľského povolania, k mnohostrannému skvalitneniu práce v našom školstve, k objektívnemu zvyšovaniu jeho úrovne a zlepšovaniu jeho obrazu v spoločnosti doma aj v zahraničí.

LITERATÚRA

- [1] John Neter, J. - Kutner, M.H. – Christopher J. Nachtsheim, CH. J. - Wasserman, W.: *Applied Linear - Statistical Models*, 4th ed., McGraw-Hill Int. 1974]
- [2] *European Education*, vol. 36, no. 1, Spring 2004, pp.29- 49. © 2004 M.E. Sharpe, Inc. All rights reserved.
- [3] Clegg, A.: *Revolution in the British Primary Schools*, 82p, 1971, National Association of Elementary Schools, Washington DC.
- [4] Andel, J.: *Matematická statistika*, SNTL 1985
- [5] Lorenz, J.H.: *Anschaung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*, by Hogrefe, 1992
- [6] Wittmann, E.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, by Friedr. Vieweg & Sohn, 1981
- [7] <http://www.google.com>
- [8] <http://www.standards.dfes.gov.uk/primaryframeworks>
- [9] <http://www.teachernet.gov.uk/publications>
- [10] <http://www.dfes.gov.uk>
- [11] <http://www.bbc.co.uk>

- [12] *The National Numeracy Strategy*, Qualifications and Curriculum Authority, 1999
- [13] Ashcroft, K. - Palacio, D.: *The Primary Teacher's Guide to the New National Curriculum*, The Falmer Press, London, 1995
- [14] Haylock, D. - Cockburn, A.: *Understanding Mathematics in the Lower Primary Years*, Paul Chapman Publishing, London, 2003
- [15] Schmidt, R.: *Denken und Rechnen*, Westermanns Schulbuchverlag, Braunschweig, 1985
- [16] Winkeler, R.: *Schulformen und Schulorganisation*, OTTO MAYER Verlag Ravensburg 1994

PaedDr. Ľubomír Czanner, PhD.
Základná škola
Dubová ul. č. 1
811 04 Bratislava
e-mail: czanner@zsdubova.sk

Prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta
Trnavská univerzita
Priemyselná ulica č. 4
P.O. BOX 9
91843 Trnava
e-mail: jan.cizmar@truni.sk
cizmar@fmph.uniba.sk

EXCEL SPREADSHEET AS A SUPPORTING TOOL FOR CONDUCTING MATHEMATICAL REASONING

ADAM CZAPLIŃSKI, MACIEJ MAJOR

ABSTRACT. In this paper I show examples of maths problems to which finding a solution can be supported by the use of the Excel 2007, which is part of the Microsoft Office 2007 pack. We are going to show two examples that illustrate basic Excel possibilities which can be used in solving the notions of the probability theory.

Introduction

A 20th century compendium of the ways of how to approach solving problems can be found in a book by G. Polya How to solve it? (see [3]). The reading provides examples of ways of ‘attacking’ problems. It shows, among other things, methods of deduction and reduction. In principle, it contains manual methods of solving problems. A modern view on heuristic solving of problems can be found in a book by Z. Michalewicz and D. Fogel How to solve it – modern heuristics (see [2]). As the authors point out, nowadays pencil and paper are hardly ever used to solve a problem; instead, computer methods are more often in use.

In this paper I show examples of maths problems to which finding a solution can be supported by the use of the Excel 2007, which is part of the Microsoft Office 2007 pack. This program is as advanced as well as commonly used tool that facilitates analyzing and processing information.

The Excel spreadsheet is equipped in numerous useful functions. Its statistical, mathematical, logical or financial functions are worth mentioning here. Thanks to these functions Excel can be used as a scientific calculator. It is not a mere calculator emulation, however. In the Excel program one can do a lot more.

We are going to show two examples that illustrate basic Excel possibilities which can be used in solving the notions of the probability theory.

1. Birthday paradox

A very interesting paradox of the probability theory is a so-called birthday paradox. Let us assume that a k number of people met by chance. What we are interested in is when each of them has his/her birthday.

With the aim of building a mathematical model of the above situation, let us make an assumption that a year has 365 days and that the probability of birth of a person on each day of a year is the same and it is $\frac{1}{365}$.

Let us note that if $k \geq 366$, on the basis of Dirichlet pigeon hole theory, the probability that at least two people were born on the same day is 1 (see. [5]). Let us assume that $k \leq 365$.

With such an assumption the mathematical (probabilistic) model for the discussed situation can be a *random distribution of k elements in s holes* (see. [4]). We will discuss this random diagram.

Let us take k numbered elements and s numbered holes, where $k \leq s$. For the element numbered 1 we select at random a hole in which his element will be placed – giving each of the holes an equal chance. Next, for the element numbered 2 we draw one of s holes, in which this element will be placed – giving each of them an equal chance. We act in the same fashion until all the elements have been distributed. The set of Ω results is the set of k -word variations of the set $\{1, 2, \dots, s\}$. All the results are equally probable and there are s^k of them.

In our case we have $s = 365$, $2 \leq k \leq 365$ and $k \in \mathbf{N}$.

Let us discuss events:

$A_k = \{\text{each of these people has his/her birthday on the different day}\}$,

$B_k = \{\text{at least two of these people have their birthday on the same day}\}$,

For $k \in [2; 365] \cap \mathbf{N}$.

Event A_k is the set of k -word variations without repetitions of the set $\{1, 2, \dots, s\}$. There are $\frac{s!}{(s-k)!}$ of them, which means $\binom{s}{k} k!$.

We have, then

$$P(A_k) = \frac{\frac{s!}{(s-k)!}}{s^k} = \binom{s}{k} \frac{k!}{s^k}, \quad P(B_k) = 1 - P(A_k),$$

for $k = 2, 3, \dots, 365$.

Calculating probabilities of event A_k is very onerous and time-consuming. That is why a computer is used for doing calculations. With the aim of doing so, in column A we will place a number of people (from 2 to 365), in column B the probabilities of event B_k will be calculated, whereas in column C the probabilities of event A_k will be calculated.

In order to calculate the probabilities of event A_k and B_k in cell C2 we will place the formula $= (\text{COMBIN}(365; A2) * \text{FACT}(A2)) / 365^{\wedge} A2$, whereas in cell B2 the formula $= 1 - C2$. Then we will fill in analogically cells C3 - C365 and B3 - B365.

Because of technical limitations it is not possible to calculate the probability of events A_k as a quotient $\frac{s!}{(s-k)!}$. That is why we should use the following formula

$$P(A_k) = \binom{s}{k} \frac{k!}{s^k}.$$

Unfortunately, there are certain limitations in this case, too. The probability of events A_k can be calculated only for $k \leq 120$. This is not a serious limitation, though, because for $k > 120$ is $P(B_k) > 0,9999999998 \approx 1$.

The figure below presents a fragment of the solving of the problem by means of the Excel spreadsheet.

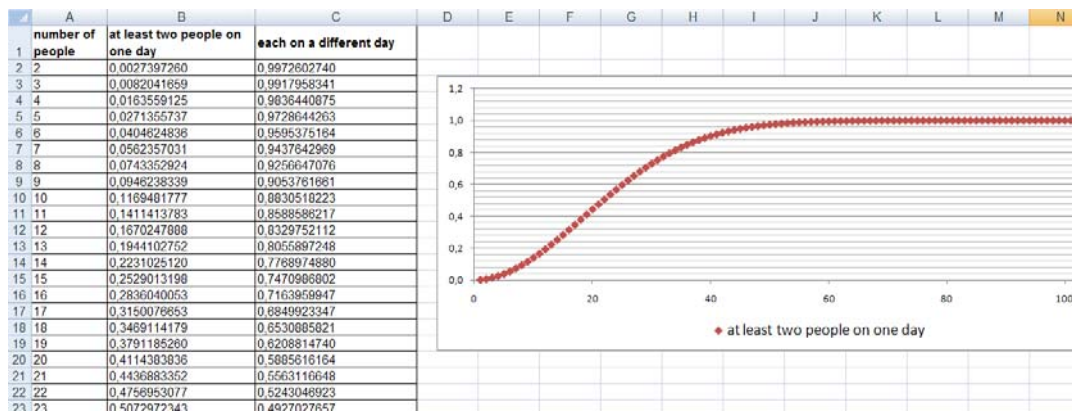


Figure 1: Fragment of the solving of the birthday problem.

Let us note that with 23 people the probability of event B_{23} is greater than $\frac{1}{2}$, but for $k = 47$ it is $P(B_{47}) > 0,95$, so this event is practically sure (with significance level that equals 0,05).

In an analogical way the following problems can be solved.

Let us assume that k people met by chance.

What interests us is

1. which day of the week each person was born,
2. what sign of the zodiac each of them was born under.

The figures below present the solution to the problems by means of the Excel spreadsheet.

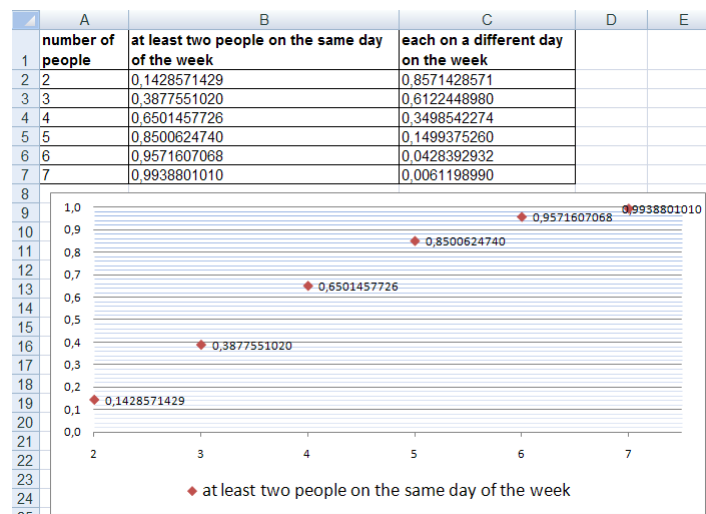


Figure 2: Day of the week.

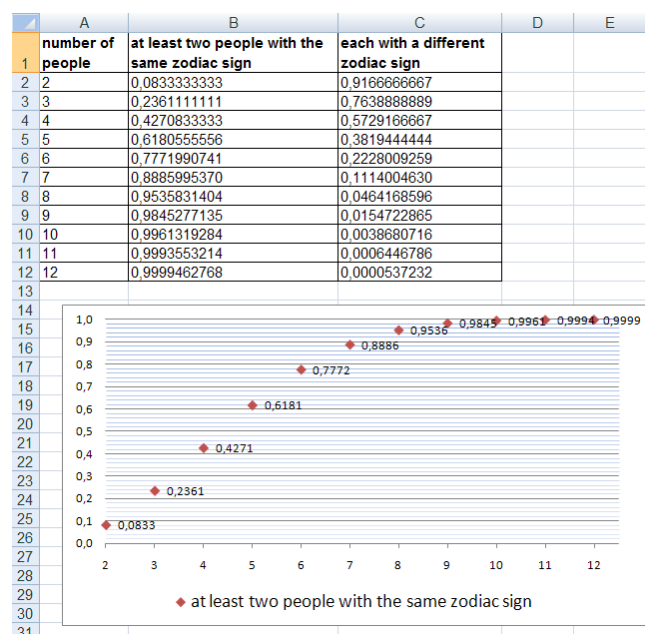


Figure 3: Sign of the zodiac.

2. Excel spreadsheet as a program drawing balls in the game of Lotto

In Poland, in Lotto 6 balls out of 49 numbered ones, numbered from 1 to 49, are subsequently drawn from an urn. Thanks to the Excel program we can quite easily define e.g. the frequency of certain events connected with the discussed random experience, e.g. the frequency of getting at least two subsequent numbers during the Lotto draw.

The occurrence of at least two subsequent balls among 6 drawn ones seems little probable (there are 49 balls in the urn and we draw only 6). Let us verify this fact empirically. For this reason we will repeat many times (eg. 100 times) the draw without placing the 6 numbers back and next we will check, in how many cases at least two subsequent numbers occurred. To estimate the probability of event we will assume its frequency.

Let us assume that $A = \{\text{among the drawn numbers there will be at least two subsequent ones}\}$. We will show how, by means of using the Excel spreadsheet, we can estimate the probability of event A .

Thanks to macros language we can in an easy fashion draw an integral number from the range 1-49 ($\text{Int}((49 * \text{Rnd}) + 1)$). We will show how the mentioned function can be used for simulating drawing numbered balls in Lotto. Let us note that if we use this function in a loop 6 times, we will generate 6 natural numbers from the range $[1, 49]$. In such case, there may happen that the sequence of the 6 drawn numbers will not be one-to-one function, which means that at least one of the numbers will repeat, so the obtained score is not the result of the Lotto draw. In this case we can conclude that the experience failed and we can repeat it. Unfortunately, it will not be happening quite often, every four times on average. Indeed, all 6-word variations of the set $\{1, 2, \dots, 49\}$ equal 49^6 whereas 6-word variations without repetitions of the same set equal $\frac{49!}{43!}$. Concluding, the relation of

a number of 6-word variations of the set $\{1,2,...,49\}$, in which at least one word is repeated, with the number of all 6-word variations equals approximately 0,27.

Let us propose a few macros with the use of an inbuilt Excel function, by means of which we can delete this inconvenience.

At first, with the use of macro we will generate 1000 times 6 natural random numbers from the range $[1,49]$ placing them in subsequent lines of columns from the range A:ALL.

```
Dim wiersz As Integer
Dim kolumna As Integer
For kolumna = 1 To 1000
For wiersz = 1 To 6
Cells(wiersz, kolumna) = Int((49 * Rnd) + 1)
Next wiersz
Next kolumna
```

Next we will sort out 6 drawn numbers increasingly in each column.

```
Dim obj As Object
Dim i As Integer
For i = 1 To 1000
Set obj = Sheets(1).Range(Cells(1, i), Cells(6, i))
obj.Sort obj, xlAscending, , , , , xlNo, , , xlSortColumns
Next i
Range("A10").Select
```

Our next step will be to make differences of subsequent numbers from columns A:ALL (for column A the numbers equal $=A2-A1$, $=A3-A2$, $=A4-A3$, $=A5-A4$, $=A6-A5$). These differences will be placed in lines from 10 to 14 appropriately in columns A:ALL. Next, we will sort out the obtained differences increasingly.

```
Range("A10:ALL14").Select
Selection.Copy
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, _
Operation:=xlNone, SkipBlanks:=False, Transpose:=False
Dim tablica As Object
Dim j As Integer
For j = 1 To 1000
Set tablica = Sheets(1).Range(Cells(10, j), Cells(14, j))
tablica.Sort tablica, xlAscending, , , , , xlNo, , , xlSortColumns
Next j
Range("A10").Select
```

Let us note that if as a result of the draw of 6 numbers any of those numbers repeated, it happened so after sorting out the differences, in line 10, in the column appropriate for his draw we will find 0. In such a case the draw will be regarded as a failure. Let us also note that if after sorting out the differences we will get number 1 in line 10 this means that in the draw we got at least two neighbouring numbers. (perhaps even more than two neighbouring numbers).

Next, by means of the inbuilt function SUMIF we sum up the number of ones in line 10 which is the number of draws in which at least two neighbouring numbers occurred ($=SUMIF(A10:ALL10;"1";A20:ALL20)$).

The above mentioned SUMIF function makes use of the data from line 20 (number 1).

Next, by means of this function we sum up the number of so-called failed draws. (=SUMIF(A10:ALL10;"<1";A20:ALL20)).

The number of draws in which we got at least two neighbouring numbers is placed in cell A18, whereas the number of failed draws is placed in cell A19.

In order to calculate the frequency of event A it is enough to divide the number of draws in which two neighbouring numbers occurred by the number of all 'successful' draws, the ones in which two identical numbers were not drawn. The advantage of his type of estimate is the fact that we can quite easily modify macro and formulas in order to change (increase or decrease) the number of draws. The gathered statistical data in the Excel spreadsheet show quite a surprising fact. On average, in every other Lotto draw we get at least two neighbouring numbers. It turns out that the approximate probability of event A very close to theoretical calculations $P(A)$ on the maths ground. Calculating the probability of this event on the maths ground we will get a number close to 0,495198449. In cell B26 we will calculate absolute value of the estimate value difference of the probability of event A occurrence and its frequency.

Figure 4 presents the effect of the creation of the spreadsheet.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	15	1	3	3	13	12	6	1	3	8	11	4
2	15	3	19	18	14	29	12	5	14	8	16	10
3	27	21	39	26	15	41	27	6	15	14	21	13
4	29	35	43	30	23	41	35	29	15	20	21	23
5	35	38	43	38	31	45	49	34	19	32	32	29
6	38	40	48	47	32	49	49	40	47	49	35	45
7												
8												
9												
10	0	2	0	4	1	0	0	1	0	0	0	3
11	2	2	4	8	1	4	6	4	1	6	3	6
12	3	3	5	8	1	4	8	5	4	6	5	6
13	6	14	16	9	8	12	14	6	11	12	5	10
14	12	18	20	15	8	17	15	23	28	17	11	16
15												
16												
17												
18	362	- the number of draws where two neighbouring numbers occurred										
19	256	- the number of failed draws										
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21												
22	A = {among the drawn numbers there will be at least two neighbouring ones }								ctrl+r	activate all		
23	P(A) ≈	0,4866							ctrl+y	delete		
24	P(A) =	0,4952							ctrl+a	draw numbers		
25	Difference	0,008639							ctrl+m	sort out drawn numbers		
26									ctrl+n	create differences		
27									ctrl+o	sort out differences		

Figure 4: Effect of the creation of the spreadsheet.

Conclusion

The paper demonstrates two examples of maths problems which can be solved by means of the Excel spreadsheet. It is possible to prolong the initial problems

The Excel spreadsheet can be used in many aspects as a tool by means of which we can:

- broaden our knowledge and mathematical skills;
- support developing mathematical activity, including a-mathematical activity that has a creative aspect (e.g. formulating and verifying hypotheses);

- facilitate organisation of deduction phase (e.g. accelerate important but at the same time onerous calculations);
- simulate the course of experiments and random processes (typical random diagrams, Markow's chains).

REFERENCES

- [1] A. Czapliński, *Rozwiązywanie zadań i problemów matematycznych wspomagane programem Excel*, Niepublikowana praca licencjacka obroniona w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, Kraków 2010.
- [2] Z. Michalewicz, D. B. Fogel, *Jak to rozwiązać czyli nowoczesna heurystyka*, WNT, Warszawa, 2006.
- [3] G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa, 1964.
- [4] A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela. Rachunek prawdopodobieństwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Płock 2005.
- [5] K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008.
- [6] J. Walkenbach, *Excel 2003. Programowanie w VBA. Vademecum profesjonalisty*, Helion 2004.

*Czapliński Adam,
Maciej Major
Pedagogical University of Cracow
Institute of Mathematics
Podchorążych 2
PL - 30-084 Cracow
e-mail: aczapli@vp.pl
e-mail: mmajor@up.krakow.pl*

ÚLOHY (NIELEN) O ŽIAROVKÁCH A ÚSPORE ELEKTRICKEJ ENERGIE

SOŇA ČERETKOVÁ, ĽUBICA KORENEKOVÁ, JANKA MELUŠOVÁ

ABSTRACT. The aim of the project LLP Comenius COMPASS is to develop complex interdisciplinary tasks for implementing Inquiry Based Learning (IBL) in mathematics and science lessons. The article describes the main principles and gives a short introduction of tasks developed by project partner at Pädagogische Hochschule, Freiburg, Germany.

Kontext úloh z reálneho života

Úlohy a problémy určené na samostatnú prácu študentov na vyučovacích hodinách matematiky a ostatných prírodovedných predmetov, prípadne zadávané ako domáce úlohy, sú viac motivujúce, ak sa s ich kontextom riešiteľ stotožní, ak v nich identifikuje problém, alebo časť problému, ktorý musí riešiť i v bežnom, osobnom živote. Hľadanie uveriteľných kontextov je zaujímavým dobrodružstvom, ktoré absolvujú autori učebníc a zbierok úloh, ale i zaniatení či okolnosťami prinútení učitelia. Samozrejým zdrojom podnetov a tiež aktuálnych údajov, ktoré môžu slúžiť ako zdroj a inšpirácia k tvorbe úloh a problémov s kontextom z reálneho života je denná tlač a internet.

V príspevku uvádzame časť učebného textu, ktorý bol pripravený v rámci riešenia projektu LLP Comenius COMPASS; 503635-LLP-1-2009-1-DE-COMENIUS-CMP. Text pripravila skupina riešiteľov z Vysoké školy pedagogickej vo Freiburgu, Nemecko. Úplné znenie učebného textu bude preložené z pôvodného jazyka, angličtiny, do slovenského jazyka a text ponúknutý na overenie učiteľom na vyučovaní na školách spolupracujúcich na projekte. Učebný text aj s metodickým návodom pre učiteľa, bude publikovaný na webovskej stránke projektu: <http://www.compass-project.eu>.

Novinový článok z 9. decembra 2008

Od roku 2012 obchody budú môcť predávať iba úsporné žiarovky

ZÁKAZ: EÚ zrušila tradičné žiarovky

Plány EÚ sa dostali na verejnosť. Experti z 27 členských krajín EÚ určili presné časové vymedzenie zákazu predaja žiaroviek. Klasické žiarovky by mali zmiznúť z obchodov do roku 2012. V roku 2009 už EÚ zakázala žiarovky s najvyšším príkonom. Musí to však ešte schváliť Európsky parlament a Rada ministrov.

Počas konferencie 8. decembra 2008, **predstavitelia komisie pre ekológiu EÚ** rozhodli, že klasické žiarovky budú postupne od roku 2009 do roku 2012 odstraňované. Iniciatíva postupného odstraňovania klasických žiaroviek z predaja vyšla zo strany Európskej komisie.

Postupný zákaz predaja žiaroviek od roku 2009

Používanie starých žiaroviek nebude zakázané, ale predávanie áno. Už v septembri 2009 EÚ zakázala predaj žiaroviek s príkonom viac ako 100 Wattov. Začiatkom roka 2010 by mali z obchodov zmiznúť žiarovky s príkonom 40 Wattov. Od konca roka 2012 sa budú predávať iba kompaktné žiarovky, známe ako úsporné žiarivky.

Podľa EÚ, obyvatelia členských štátov EÚ ušetria takmer 40 terawattov výmenou klasických žiaroviek za úsporné žiarivky. To zodpovedá spotrebe energie Rumunska alebo spotrebe elektrickej energie 11 miliónov domácností. Desiat' 500 – megawattových elektrární by sa mohlo zavrieť. Navyše, emisie CO₂ by sa zmenšili o 15 ton za rok.

Matematika, objavné vyučovanie a úspora elektrickej energie

Článok v novinách je inšpiráciou k tvorbe učebného textu pre študentov a metodického materiálu pre učiteľov. Úlohy v učebnom texte vytvorené, budú naplňovať obsah hodín matematiky a fyziky. Vo zvolenom kontexte sa dajú veľmi vhodne využiť medzipredmetové vzťahy a práca študentov i učiteľov, v ideálnom prípade toho istého učiteľa oboch predmetov, môže byť metodicky pripravená v súlade so zásadami objavného vyučovania (Inquiry Based Learning, IBL).

Na hodinách matematiky sa na otázku úspory elektrickej energie pozrieme detailnejšie z dvoch rôznych pohľadov, najprv z pohľadu jednotlivca, mikroperspektívy. Jednotlivec – študent, občan, si môže položiť otázku: Čo to pre mňa znamená, ak v domácnosti použijem iný typ žiaroviek? Z pohľadu spoločnosti, z pohľadu makroperspektívy, sa pýtame: Ako používanie úsporných žiaroviek ovplyvní spoločnosť? Odpovede na uvedené dve otázky nemusia byť súhlasné. Ak, napríklad, jednotlivec nevidí žiadnu výhodu pre seba (pretože uprednostňuje teplé svetlo „starých“ žiaroviek a môže si ho, vzhľadom na svoju ekonomickú situáciu, dovoliť), ale zároveň chápe v čom je globálna výhoda používania úsporných žiaroviek (veľká úspora elektrickej energie celkovo) a považujete ju za dôležitú. Preto bude pravdepodobne používať úsporné žiarovky.

Hodiny matematiky môžu byť zamerané na hľadanie odpovedí na otázky:

- Aké výdavky ušetrí domácnosť, ak nahradí klasické žiarovky úspornými? Študenti môžu vypočítať úsporu v domácnosti svojich rodičov alebo úsporu v budove školy. V uvedenom prípade sa študenti zaoberajú problémom, teda obmedzovaním predaja klasických žiaroviek a ich nahrádzaním úspornými žiarovkami z mikroperspektívy.
- Koľko energie sa ušetrí celosvetovo? Dajú sa dokázať alebo overiť čísla uvedené v článku z novín? V tomto prípade sa študenti pozerajú na problém z makroperspektívy.

Mikroperspektíva: Osobná úspora

Prvé úvahy: Ak sa pozrieme na informácie od výrobcu na obale kompaktnnej žiarivky, tak zistíme, že jej životnosť je 8 000 hodín. Ak by sem svietili klasickými žiarovkami, so životnosťou 1 000 hodín, potrebujeme ich za rovnakú dobu osem.

Prevádzkové náklady môžeme vypočítať takto:

$8000 \text{ h} * P * 0,17 \text{ Euro/kWh}$; kde P je príkon v kW

Odhad je ešte zaujímavejší, ak nezvažujeme len jednotlivé žiarovky, ale tiež celkový počet žiaroviek vo všetkých svetelných zdrojoch v domácnosti.

Úlohou študentov je ďalej zistiť, koľko stoja úsporné žiarovky v porovnaní s klasickými žiarovkami a koľko stojí 1 kWh elektrickej energie.

Budeme vychádzať z nasledujúcich vstupných údajov:

Vzhľadom na konštrukčnú zložitosť úsporných žiaroviek, je pri ich výrobe potrebné použiť viac energie ako pri výrobe klasických žiaroviek. Preto je cena jednej úspornej žiarovky 8 eur. Klasická žiarovka má cenu približne 1 euro. 1kWh energie stojí asi 17 centov.

Ako už bolo načrtnuté, študenti môžu pracovať na nasledujúcich úlohách:

- Vypočítajte náklady na osvetlenie bytu vašej rodiny. Porovnajte náklady na kúpu a inštaláciu klasických žiaroviek a úsporných žiaroviek.
- Vypočítajte náklady na osvetlenie vašej školy. Porovnajte náklady na kúpu a inštaláciu klasických žiaroviek a úsporných žiaroviek.

Úloha o úspore elektrickej energie – domácnosť

Vhodnou metódou začiatku vyučovacej hodiny je brainstorming, pri ktorom sa zozbierajú všetky možné návrhy na riešenie a zapisujú sa na tabuľu alebo na fóliu premietanú projektorom. Študenti môžu pracovať v skupinách a vymyslieť plán a postup riešenia na základe výsledkov brainstormingu. Pravdepodobne nastane problém v tom, že študenti v skutočnosti nevedia, aké žiarovky a s akým výkonom používajú v domácnosti. Preto musia zozbierať určité údaje doma: Aký typ osvetlenia je v každej miestnosti? Priemerne, ako dlho je každé zo svetiel zapnuté každý deň? Pri tejto úvahe by študenti mali zvážiť sezónne rozdiely svietenia počas jednotlivých ročných období. Leto aj zima nie sú práve najvhodnejšie pre zhromažďovanie údajov pozorovaním resp. presným zapisovaním hodín svietenia. Je rozumnejšie zvoliť si jar alebo jeseň. Alternatívne, študenti môžu tiež uvažovať o všetkých štyroch ročných obdobiach a porozmýšľať, kedy sa stmieva a ako dlho je potrebné svietiť počas jednotlivých mesiacov roka.

Riešenie by mohlo byť nasledovné:

Uvažujeme o štvorizbovom byte, v ktorom predpokladáme rozmiestnenie svetiel uvedené v tabuľke 1.

Celková spotreba elektrickej energie za mesiac je $30 \cdot (12h \cdot 100W + 7h \cdot 60W) = 48,6 \text{ KWh} = 49 \text{ KWh}$, čo predstavuje sumu 8 Euro. Ak použijeme úsporné žiarivky, tak celková spotreba je $30 \cdot (12h \cdot 20W + 7h \cdot 11W) = 9,6 \text{ KWh}$, čo predstavuje sumu 1,6 Euro.

Rozdiel v mesačných nákladoch a úspora elektrickej energie v domácnosti je už teraz zrejmá. Rozdiel narastá, ak sa v byte použije viac svietidiel alebo svietia dlhšiu dobu. Príkladom môžu byť ozdobné svietidlá na stenách. Ak sú v byte miestnosti bez okien alebo naozaj veľmi tmavé miestnosti, počet svetiel narastá.

Nemá zmysel používať úsporné žiarivky, pokiaľ ich veľakrát zapíname a vypíname. Aby sa efekt používania úsporných žiaroviek prejavil na spotrebe elektrickej energie v domácnosti, je potrebné, aby svietili bez vypínania dlhší čas.

Už vieme, že cena úsporných žiaroviek je osemkrát vyššia ako cena klasických žiaroviek. Ale vieme tiež, že úsporné majú životnosť 8 až 12 krát dlhšiu ako klasické. To znamená, že bez ohľadu na ušetrnú energiu, náklady na obstaranie úsporných žiaroviek nie sú v skutočnosti vyššie.

Izba	Osvetlenie	Priemerná denná doba svietenia
Obývačka	1 stropné svietidlo (100W)	2h
	2 stojacie lampy (60W)	spolu 1h
Spálňa	1 stropné svietidlo (100W)	2h
	2 nočné lampy (60W)	spolu 1h
Detská izba	1 stropné svietidlo (100W)	2h
	1 stolná lampa (60W)	1h
	1 nočná lampa (60W)	0.5h
Pracovňa	1 stropné svietidlo (100W)	1h
	1 stolná lampa (60 W)	1h
	1 lampa na čítanie (60 W)	0.5h
Kúpeľňa	1 stropné svietidlo (100W)	1h
	2 svetlá na zrkadle (60 W)	2h spolu
Kuchyňa	1 stropné svietidlo (100W)	2h
	Ostatné svetlá 3 · 100 W	1h
Chodba	1 stropné svietidlo (100W)	1h

Tabuľka 1: Model osvetlenia domácnosti

Na záver riešenia problematiky, môžu niektorí študenti ústne prezentovať svoje riešenia pre celou triedou. V diskusii o riešení sú prípustné rôzne názory a víťané vhodné komentáre ostatných študentov. Prezentácia môže prebiehať tiež formou posterov. V prípade posterov je vhodné nechať čas na pozorné preštudovanie “galérie posterov” s možnosťou hodnotenia a komentárov k jednotlivým riešeniam prezentovaným na posteroch všetkými ostatnými študentmi.

Úloha o úspore elektrickej energie – spoločnosť

Druhú úlohu, ktorá sa týka úspory elektrickej energie v škole, možno vyriešiť podobne. Jej riešenie pravdepodobne študentom nebudú také blízke ako riešenie týkajúce sa domácnosti. Ako to urobiť? Najprv si študenti musia opäť pripraviť plán. Je to vhodná príležitosť na prehĺbenie metodických vedomostí a na zopakovanie plánu riešenia z kontextu odohrávajúceho sa v domácnosti. Je vhodné využiť metódu “Mysli – podel sa – diskutuj”. Najprv študenti premýšľajú samostatne, potom sa podelia o svoje nápady so susedom, a nakoniec celá trieda diskutuje o pláne.

Študenti môžu použiť rôzne spôsoby postupu prípravy vstupných údajov: buď spočítajú miestnosti v školskej budove alebo jej časti za predpokladu, že v každej miestnosti je rovnaké osvetlenie a svetlá sú zapnuté rovnako dlho, alebo si zistia konkrétne osvetlenie v každej miestnosti a odhadnú, ako dlho je osvetlenie zapnuté.

Výpočty dokazujú, že má zmysel – z pohľadu jednotlivca aj z pohľadu majiteľa danej budovy – zaobstaráť si úsporné žiarivky. Napriek tomu, veľa ľudí uprednostňuje

používanie klasických žiaroviek spomínaných v článku, a radi by ich používali naďalej, pretože preferujú teplé svetlo bez ohľadu na vyššie náklady na energiu. Takúto voľbu jednotlivca však obmedzil nový zákon EÚ. Je toto rozhodnutie správne? Aby sme našli odpoveď na otázku, musíme zmeniť uhol pohľadu z individuálneho na globálny – z mikroperspektívy na makroperspektívu.

Pokúsme sa odpovedať na otázku: Aký úžitok má spoločnosť a celé ľudstvo z navrhovanej zmeny typu používaných žiaroviek? V článku v novinách je uvedené:

Podľa EÚ, obyvatelia členských štátov EÚ ušetrí takmer 40 terawattov výmenou klasických žiaroviek za úsporné žiarivky. To zodpovedá spotrebe energie Rumunska alebo spotrebe elektrickej energie 11 miliónov domácností. Desiat' 500 – megawattových elektrární by sa mohlo zavrieť. Navyše, emisie CO₂ by sa zmenšili o 15 ton za rok.

Zdá sa, že ak sú čísla správne, tak spoločnosť by z takejto zmeny profitovala predovšetkým z ekologického hľadiska. Pokúsme sa, spolu so študentmi, formulovať nasledujúce otázky:

- Ako môže EÚ vyhlásiť, že obyvatelia členských krajín EÚ by ušetrili 40 terawattov?
- Súvisí to s vyhlásením, že dôsledkom toho by bolo zatvorenie desiatich 500-megawattových elektrární?
- Naozaj by sa emisie CO₂ znížili tak výrazne?
- Existujú nejaké čísla, ktoré by ilustrovali situáciu vzhľadom na CO₂?

Na zodpovedanie týchto otázok je najprv potrebné zistiť:

- Koľko ľudí žije v EÚ?
- Koľko megawattov je jeden terawatt?
- Koľko emisií CO₂ vyprodukuje jeden človek?

Študenti môžu hľadať vstupné informácie napríklad na internete. Uvažovať by na základe vlastného prieskumu údajov mohli nasledovne:

V prvom rade, z článku nie je jasné za aký čas sa ušetrí 40 terawattov. Hovorí článok o jednom roku? Navyše, v článku sa používa terawatt namiesto terawatt hodiny. Je to správne? Tento problém sa dá vyriešiť na hodine matematiky alebo na hodine fyziky.

Študenti môžu kriticky pouvažovať nad informáciami z článku a využiť svoj úsudok.

Na základe vedomostí z fyziky vieme: Elektrická energia sa meria vo wattoch a dá sa vypočítať ako súčin energie a napätia. Spotreba elektrickej energie sa meria v Wh/kWh alebo terawatt hodinách. Informácia v článku je teda nepresná. Keďže nie je uvedené obdobie, za ktoré sa ušetrí 40 terawattov (opravené: 40 terawatt hodín, skratka TWh), predpokladáme, že to bude jeden rok.

Navrhované riešenie

V súčasnosti má v EÚ približne 490 000 000 obyvateľov. 40 terawatt hodinám zodpovedá 40 000 gigawatt hodín, to je 40 000 000 megawatt hodín a 40 000 000 000 kWh.

$40\,000\,000\,000 : 490\,000\,000 \approx 80 \text{ kWh}$

Podľa článku v novinách, každý obyvateľ EÚ ušetrí 80 kilowatt hodín elektrickej energie za rok.

Ako tento sa tento výsledok zhoduje s predchádzajúcimi výpočtami?

Vypočítali sme, že štvorčlenná rodina by ušetrila 40 kWh za mesiac. Takže jeden člen domácnosti, občan EÚ, by ušetril priemerne 10 kWh za mesiac, čo je 120 kWh za rok. Na základe týchto výpočtov, jeden človek ušetrí za rok 120 kWh, zatiaľ čo článok uvádza 80 kWh. Keďže čísla vychádzajú z odhadov, nemôžu byť rovnaké. Rozsah chyby odhadu je však prípustný.

Pozrime sa na ďalšiu informáciu: Keďže 40 TWh je 40 000 MWh, zdá sa, že je to v rozpore s informáciou, o tom, že by bolo možné odstaviť desať elektrární s výkonom 500 megawatt hodín ročne. Z matematického hľadiska je to však správne:

$10 \text{ (elektrárni)} \cdot 500 \text{ MW (výkon jednej elektrárne)} \cdot 24 \text{ h (počet hodín dňa)} \cdot 365 \text{ (dní v roku)} = 43.800.000 \text{ MWh} = 43,8 \text{ MWh} \approx 40 \text{ TWh}$

A čo emisie CO₂?

V článku je uvedené, že za rok sa emisie CO₂ zredukujú o 15 miliónov ton. Treba však vziať do úvahy, že množstvo emisií CO₂ závisí od typu elektrárne. Na internete (<http://de.wikipedia.org/wiki/Kraftwerk>) sa napríklad dajú nájsť čísla vyjadrujúce množstvo emisií vypustených v roku 2007 v Nemecku. Bolo to 604g CO₂ na 1 kWh vyrobenej elektrickej energie priemerne. Jednoducho pomocou úmernosti sa dá vypočítať, že pri 40 TWh je vypustených 24 miliónov ton CO₂. Je to viac ako je uvedené v článku, ale opäť je rozsah chyby odhadu porovnateľný. Prípadné rozdiely môžu vzniknúť v dôsledku toho, že Európa má nižšie emisie CO₂ na 1 kWh vďaka rozdielnym typom elektrární.

Uvedené výpočty nebudú pravdepodobne dostatočne uspokojivé z hľadiska vedomostí z fyziky, pretože sú to iba odhady a nie sú v nich uvažované dôležité technické aspekty výroby elektrickej energie a tiež neukazujú ako konkrétne vypočítať množstvo emisií CO₂. Ak je dostatok času na vyučovaní fyziky môžu byť skúmané ďalšie detaily uvedeného problému, ale nie je to nevyhnutné. Cieľom náčrtu problematiky bola úspora elektrickej energie, jednoduché overenie informácií vlastným prieskumom študentov a uvedomenie si, čo uvádzané číselné údaje predstavujú. Študentom môžeme otvoriť nové dimenzie vnímania okolitého sveta a vytvoriť si vlastný kritický obraz skutočnosti, ktorá sa priamo dotýka ich životov.

V závere vyučovania, keď študenti zozbierajú všetky údaje, riešenia a argumenty k diskusii o zákaze predaja klasických žiaroviek v štátoch EÚ, môžu svoje názory prezentovať vo forme riadenej diskusie.

Záver

V projekte Comenius COMPASS má každý partner (Nemecko, Holandsko, Španielsko, Veľká Británia, Slovensko) za úlohu pripraviť učebné texty so zadaniami problémov a úloh s kontextom z reálneho života. Zároveň by každá téma mala zahŕňať medzipredmetové vzťahy. Vedomosti potrebné na riešenia úloh by mali byť nielen z matematiky ale ešte z iného, aspoň jedného prírodovedného predmetu. Taktiež je vhodné zakomponovať do riešení úloh i informačno-komunikačné technológie. Každú z pripravených tém bude možné odučiť na samostatných vyučovacích hodinách z daných predmetov, avšak v istej vhodnej postupnosti navzájom na seba nadväzujúcich a dopĺňajúcich sa činností, riešení a výstupov. Ďalšou možnosťou je pracovať na jednej vyučovacej hodine a využiť **medzipredmetové vzťahy** v rámci **princípov integrovaného**

tematického vyučovania. Výber a použitie metód v tomto prípade závisí od vedomostí a záujmov študentov.

Hlavnou myšlienkou projektovej metódy a implementovania objavného vyučovania je samostatnosť študentov vo voľbe témy, metód riešenia i prezentácií výsledkov. Alternatívnou vyučovacou metódou je workshop. Pre takúto hodinu je charakteristická samostatná práca študentov, ktorá je zároveň usmerňovaná prostredníctvom úloh a zadaní vyžadujúcich si v závere prezentáciu a diskusiu o riešeníach.

Podobne ako pri projektovej metóde sa počas hodiny prezentujú motivujúce informácie publikované v tlači. O informáciách sa diskutuje a postupne sa odhaľuje hlavná téma, hlavný problém, ktorý bude v priebehu vyučovacej hodiny, alebo niekoľkých vyučovacích hodín, potrebné vyriešiť. Je rozumné nechať študentov diskutovať, zatiaľ čo učiteľ pomaly vystupuje z diskusie. V diskusii je, vzhľadom na tému o žiarovkách, možné zaoberať sa otázkami typu:

- Aký druh osvetlenia si študenti a ich rodičia vyberajú domov?
- Aké informácie o danej téme už študenti majú?
- Sledovali študenti diskusie v médiách o postupnom vymiznutí klasickej žiarovky?
- Čo si študenti myslia o používaní klasických žiaroviek? Aký je ich vlastný názor?

Na záver by študenti mali dostať čas na brainstorming alebo na vytváranie pojmových máp a dôkladne si premyslieť, ako by sa situácia dala preskúmať systematickejšie pomocou vedomostí z matematiky a fyziky. Učiteľ by sa mal zo začiatku opäť zdržať prezentácie vlastných názorov a len zhromažďovať a usporadúvať argumenty študentov a vhodne ich zviditeľňovať tak, aby boli všetky zaznamenané a dostupné k ďalšej diskusii.

Popri diskusii a argumentoch študentov je dobré priblížiť študentom ďalší postup riešenia problému a úloh s ním spojených. Nakoniec je potrebné uviesť všetky dôležité aspekty, ktoré dovtedy neboli zmienené.

Počas celého priebehu vyučovania je veľmi dôležité poskytnúť študentom čo najviac priestoru pre samostatnú prácu, a neriadiť ich krok po kroku. Študenti dokážu pristupovať k riešeniu zadaní úloh s reálnym kontextom veľmi kreatívne.

LITERATÚRA

- [1] Lipman, M: *Thinking in Education*, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0-521-81282-8
- [2] Maaß, K.: Classification Scheme for Modeling Tasks, *Journal fur Mathematik-Didaktik*, DOI 10.1007/s13138-010-0010-2, GDM 2010, Springer, 2010
- [3] Sendova, E. (editor): *Meeting in Mathematics*, Sofia, Demetra Publishing House, 2008, ISBN 978-954-9526-49-3
- [4] Turek, I: *Didaktika*, edícia EKONÓMIA, Bratislava, Iura Editions, 2008, ISBN 978-80-8078-198-9
- [5] Ulovec, A. (ed.) et al: *Motivating and Exciting Methods in Mathematics and Science, Case Studies*, Olomouc, Palacký University, 2009, ISBN 978-80-244-2347-0

- [6] Ulovec, A. (editor) et al: *Motivating and Exciting Methods in Mathematics and Science*, Glossary of Terms, Olomouc, Palacký University, 2007, ISBN 978-80-244-1830-8

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk
jmelusova@ukf.sk

Mgr. Ľubica Koreneková
Gymnázium Andreja Vrábla / Gymnasium of Andrej Vrábel
Mierová 5
SK – 934 03 Levice
e-mail: lkorenekova@yahoo.com

PRINCÍPY TVORBY ÚLOH PROJEKTU LLP COMENIUS COMPASS (UKÁŽKY ÚLOH VYTVORENÝCH V HOLANDSKU)

SOŇA FÁNDLYOVÁ, MIROSLAVA SOVIČOVÁ

ABSTRACT. The aim of the project LLP Comenius COMPASS is to develop complex interdisciplinary tasks for implementing Inquiry Based Learning (IBL) in mathematics and science lessons. The article describes the main principles of tasks developed by project partners in Freudenthal Institute, Utrecht University, The Nederland.

Princípy tvorby úloh zameraných na medzipredmetové vzťahy

V posledných rokoch stále častejšie v rôznych krajinách sveta dochádza k poznaniu, že študenti majú v prírodovedných predmetoch problém s porozumením a aplikáciou poznatkov, s hľadaním súvislostí a medzipredmetových vzťahov a rozvíjaním schopností a zručností potrebných k úspechu v štúdiu a v budúcej profesijnej činnosti. Zároveň sa môžeme stále častejšie stretnúť i s názorom, že tradičný spôsob výučby (v ktorej je aktívnym činiteľom prevažne učiteľ) v modernej dobe už plne nevyhovuje súčasným potrebám študujúcej mládeže, ktorých vstupné skúsenosti, kultúrne zázemie i schopnosti sú stále rôznorodejšie. Vo výučbe by sa preto malo objavovať množstvo činností, pri ktorých je hlavným aktívnym činiteľom žiak (Mokrejšová, 2009).

Začínajú sa vyskytovať slovné úlohy, ktoré na prvý pohľad ani nevyzerajú ako matematické úlohy. Vo viacerých možno badať využitie medzipredmetových vzťahov (fyziky, matematiky, chémie, biológie a geografie)“ (Toroková, 2005).

Projekt COMPASS je zaradený v rámci programu celoživotného vzdelávania (LLP – Lifelong Learning Program), ktorý podporuje vzdelávanie a odbornú prípravu učiteľov a pedagogických pracovníkov v celej Európe. Je to program vzdelávania v Európe, financovaný zo zdrojov EÚ.

Cieľom COMPASSu je vyvinúť vyučovaciu metódu, ktorá prepája matematiku a prírodné vedy navzájom a hlavne s každodenným životom žiakov a ich okolia.

Projekt má za úlohu prepojiť matematiku a prírodné vedy, vzbudiť u študentov záujem už pri čítaní textu úlohy, v ktorej sa nachádzajú zaujímavé informácie zo života.

Práca s údajmi obyčajne prebieha v štyroch fázach – identifikácia problému, zber údajov, ich spracovanie a interpretácia.

Existujúce postupy môžu inšpirovať k zmysluplným vyučovacím hodinám. V tom prípade musia takéto postupy spĺňať dve podmienky:

1) musí byť určený jasný cieľ na precvičenie a tento cieľ musí študentov zaujať alebo študenti musia pochopiť jeho význam, napríklad pre ich osobný život,

2) študenti si musia osvojiť spôsoby práce a myslenia súvisiace s cieľom úlohy, s vypracovaním jej riešenia. Uvedené podmienky vyučovania je možné vo výchovno-vzdelávacom procese ďalej rozvíjať.

Cieľom úloh sú myšlienky a nápady študentov, ktoré zaberajú v učebných materiáloch ústrednú pozíciu. Kľúčom je naučiť sa vytvoriť dobrý teoretický odhad a následne tento odhad využiť na spracovanie materiálov. Práca s materiálmi a konkrétnymi údajmi môže

byť inšpirovaná existujúcimi postupmi s jasnými cieľmi a spôsobmi myslenia a spracovania údajov. V objavnom vyučovaní majú svoje miesto i intuitívne vedomosti študentov.

Osnova učebných textov:

- téma
- zadanie problému
- formulovanie otázok
- navrhnutie domácej úlohy
- jednoznačný cieľ úlohy
- zamyslenie sa študenta nad daným problémom (objavné vyučovanie)
- analyzovanie úlohy spoločne s učiteľom (vzdelávanie)

1 Úloha: Biodiverzita

Téma: - ekológia
 - rok biodiverzity 2010
 - porozumenie, porovnávanie a počítanie biodiverzít
 - napísanie správy o svojich výsledkoch

Počet divých husí, ktoré sa vyskytujú v Holandsku, sa stále zvyšuje. To je zrejmé z výsledkov národného sčítavania vtáctva. Toto sčítavanie organizuje organizácia Sovon, aby sledovala, aké vtáctvo sa vyskytuje v Holandsku. Sovon uverejňuje výsledky sčítavania v tabuľkách na internete.

Zamestnancov Sovon-u, ktorí vtáctvo sčítavajú, zvyšujúci sa počet divých husí znepokojuje. Môže totiž ohroziť biodiverzitu, rôznorodosť, druhov vodného vtáctva.

(holandský) názov	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Dodaars (kačka)	274	247	336	704	815	825
Fuut (kačka)	10788	12319	11299	11680	10996	10524
Knobbelzwaan (labuť)	4786	5551	6646	8125	9025	10150
Hus divá	39273	47714	53448	67675	76547	87425

(holandský) názov	2002	2003	2004	2005	2006
Dodaars (kačka)	948	844	815	1134	1036
Fuut (kačka)	11626	10617	9080	10050	9494
Knobbelzwaan (labuť)	10853	11056	11393	10771	11457
Hus divá	101680	100901	110316	114651	119559

Table 1: Zdroj: Network Ecological Monitoring, SOVON, RWS & CBS, www.sovon.nl

1.1 Otázky týkajúce sa témy

1. Sovon sčítava vtáctvo. Počet divých husí sa zvyšuje. Je tento nárast znepokojujúci vzhľadom na diverzitu druhov vodného vtáctva?

2. Vzorec na výpočet biodiverzity umožňuje vidieť len jednu stranu mince. Výsledky nie sú natoľko relevantné, aby sa uskutočnili opatrenia. Preto navrhnete, aké ďalšie informácie sú potrebné, alebo, aký ďalší výskum by bolo treba uskutočniť, aby sme získali lepší prehľad o probléme s divými husami.
3. Informácie o počtoch vtákov v Európe sa dajú nájsť na: <http://www.ebcc.info/> spolu s informáciami pre každú európsku krajinu osobitne na adrese: <http://www.ebcc.info/pecbm.html>
4. Preskúmajte situáciu vo vašej krajine, vyberte niektoré druhy vtákov a napíšte správu o vývoji biodiverzity počas posledných 10 rokov.

1.2 Návrh domácej úlohy

Napište krátky list pre zamestnancov sčítavajúcich vtáctvo z organizácie Sovon o výsledkoch svojej analýzy. Popíšte problém a naznačte, akú závažnosť mu pripisujete. Ilustrujte váš opis problému grafmi a tabuľkami. Uvažujte o hodnote vypočítanej zo vzorca ako o indexe biodiverzity.

1.3 Cieľ úlohy

Zadanie týkajúce sa biodiverzity spĺňa podmienky vyučovania vedúce k objavnému vyučovaniu. V navrhovanej sérii vyučovacích hodín sa u študentov rozvinie hlbšie porozumenie pojmu biodiverzita a zároveň budú uvažovať nad jej zmenami a vývojom počas sledovaných rokov. Študenti si navyše osvoja vzorce, ktoré sa používajú na výpočet biodiverzity, pochopia význam týchto vzorcov a vzájomne ich porovnávajú. Počas práce na zadaniach si študenti vyskúšajú, ako teoretické koncepty a modely pracujú v realite.

1.4 Myšlienky študentov ako počiatkový bod učenia sa

Čo sa týka biodiverzity, študenti vedia, že biodiverzita je pojem označujúci rozmanitosť biologických druhov. Úroveň biodiverzity na danom pozorovanom území sa počíta podľa vzorca, do ktorého vstupujú príslušné hodnoty. Študenti vedia používať príslušný vzorec a dokážu modelovať, ako sa bude vypočítaná hodnota biodiverzity líšiť, ak zmeníme niektorú zo vstupných hodnôt.

1.5 Nejasnosti a predchádzajúce vedomosti študentov ako počiatkový bod učenia sa

Znižujúca sa úroveň biodiverzity je intuitívne spojená s klesajúcim počtom biologických druhov. Otázka: Môže sa nárast počtu jedincov určitého druhu odraziť na zníženej úrovni biodiverzity?

Študenti si navyše nie sú istí, či vzorec môže byť použitý a nevedia, ktorý zo vzorcov je najvhodnejšie použiť. Základnou myšlienkou je, že šanca, že dva jedince rovnakého druhu sa stretnú na rovnakom území, je vlastne miera biodiverzity. V zadaniach sa rozoberajú rôzne vzorce a použitie vzorcov je vysvetlené použitím príkladov. Študenti sa učia, ako nakresliť graf v Exceli a ako porovnať a vysvetliť rôzne grafy. Po nakreslení grafov môžu graficky sledovať vývoj biodiverzity v uplynulých rokoch.

Učiteľ ponúka študentom možnosti, ako zapísať svoje myšlienky a nejasnosti. To neskôr učiteľovi umožňuje diskutovať o témach spoľahlivosti a presnosti použitých metód (vzdelávací cieľ) tak, že využije myšlienky, dotazy a informácie získané od študentov.

2 Úloha: Kvalita vody v prírodných nádržiach, riekach a pri morských pobrežiach

Téma: - ekológia
 - chápanie politických rozhodnutí
 - správať sa ako kritizujúci občan

Správa z tlače

Brusel, 11. jún 2009

Kvalita prírodnej vody na kúpanie v EÚ sa zlepšuje

Výročná správa o vode v prírodných nádržiach, riekach a pri pobreží morí, ktorú dnes predložila Európska komisia a Európska environmentálna agentúra ukazuje, že veľká väčšina miest na kúpanie v Európskej únii spĺňa hygienické normy EÚ z roku 2008. Počas letnej sezóny si asi 96% pobrežných oblastí na kúpanie a 92% miest na kúpanie v riekach a jazerách udržalo minimálne normy. Správa poskytuje užitočné informácie o kvalite vody pre milióny ľudí, ktorí každé leto navštevujú európske pláže.

Splnomocnenec pre životné prostredie Stavros Dimas povedal: „Vysoká kvalita vody na kúpanie je dôležitá pre zdravie európskych občanov a životné prostredie – a to platí aj pre ostatné systémy vôd. Teším sa, keď vidím, že celková kvalita vody v oblastiach na kúpanie v rámci únie sa zlepšuje.“

Profesorka Jacqueline McGlade, výkonná riaditeľka Európskej environmentálnej agentúry, dodáva: „Zdroje informácií, ako táto správa, a naše nástroje na webe umožňujú občanom nielen to, aby si skontrolovali kvalitu vody na kúpanie v mieste bydliska alebo prázdninovej destinácii, dovoľuje im tiež viac sa zapájať do ochrany životného prostredia.“

Z 21 400 miest na kúpanie, monitorovaných v celej Európskej únii v roku 2008, dve tretiny sa nachádzali na pobreží a zvyšok pozdĺž riek a jazier. Najväčšie množstvo pobrežných vôd na kúpanie je v Taliansku, Grécku, Francúzsku, Španielsku a Dánsku, zatiaľ čo Nemecko a Francúzsko majú najvyšší počet vnútrozemských vôd na kúpanie.

Celková kvalita vôd na kúpanie v EÚ sa od roku 1990 významne zlepšila. Splnenie nariadených hodnôt (minimálne kvalitatívne požiadavky) sa zvýšili za obdobie od roku 1990 do roku 2008 z 80% na 96% a z 52% na 92% v pobrežných a vnútrozemských vodách, v danom poradí. Od roku 2007 do roku 2008 sa splnenie hodnôt pre vnútrozemské i pobrežné vody zvýšilo (o 1,1 a 3,3%, v danom poradí).

[<http://europa.eu/rapid/pressReleasesAction.do?reference=IP/09/903>]

2.1 Otázky týkajúce sa témy

1. Existujú rozličné normy na určenie kvality vody. Metóda testovania prírodnej vody vhodnej na kúpanie sa nazýva Blue Flag (www.blueflag.org). Môže byť metóda Blue Flag použitá na testovanie vašej vzorky vody?
2. Na webovej stránke metódy Blue Flag sú zobrazené grafy vývoja kvality prírodnej vody v rozličných krajinách. Porovnajte graf vašej krajiny s grafom najmenej jednej ďalšej krajiny. Vysvetlite rozdiely a podobné vlastnosti.

2.2 Návrh domácej úlohy

Napište správu pre vašu miestnu turistickú agentúru, v ktorej vysvetlíte, prečo by si mali prísť turisti zaplávať do prírodnej vody vo vašom okolí. V tejto správe sa odvolajte na vzorku, ktorú ste testovali a na výsledky vašich testov.

2.3 Cieľ

Pri precvičovaní testovania kvality vody sa u študentov rozvinie väčšie porozumenie pre spoľahlivosť a presnosť, ktoré je súčasťou testovania a výsledkov testov. Počas práce na hodinách si študenti vyskúšajú, ako tieto koncepty fungujú v praxi. Študenti sa navyše oboznámia s normami pre kvalitu prírodnej vody, ako sa tieto normy určujú, ako sa vyberajú parametre podľa ktorých musí byť prírodná voda testovaná, a aká argumentácia s tým súvisí.

2.4 Myšlienky študentov ako počiatočný bod učenia sa

Čo sa týka testovania kvality vody, študenti vedia, že voda môže obsahovať rôzne látky, ktoré môžu nepriaznivo ovplyvniť jej kvalitu. Vedia tiež, že kvalitu vody je potrebné testovať a že výsledky testu budú musieť byť porovnané referenčnými údajmi. V učebnom materiáli sú aktivity navrhované tak, aby študenti sami kládli niektoré otázky, napríklad: Prečo je nutné testovať kvalitu vody v prírodných nádržiach, v riekach, jazerách a pri morských plážach? Aké hodnoty zistených látok sú prípustné a ktoré prekračujú hranicu povolenej koncentrácie?

2.5 Nejasnosti študentov ako počiatočný bod učenia sa

Študenti si zvyčajne nie sú istí výsledkami vlastného testovania, ktoré sú namerané vždy v istej tolerancii. Vedia, že to znamená, že merania neboli veľmi presné. Často spochybňujú spôsob, ktorým boli testy uskutočnené. Testovanie kvality vzoriek vody neprebíha vždy tak, ako to bolo naplánované. Keďže študenti často nevedia, prečo majú urobiť určité kroky, je pre nich náročné rozhodnúť, či by bolo vhodné urobiť niektoré úkony inak (napríklad pridať o jednu kvapku niektorej kontrastnej látky viac, alebo roztok intenzívnejšie zamiešať alebo čakať na reakciu dlhšie, ako bolo predpísané, atď.). Predpokladané nejasnosti sú opísané v učebných materiáloch. Keďže študenti potrebujú uvedené nejasnosti vyriešiť, materiály ponúkajú prepojenie na uvedenie si konceptov presnosti a spoľahlivosti praktickým spôsobom. Okrem toho sa môže stať, že študenti si nebudú istí výberom parametrov, ktoré testujú: prečo ich je iba istý počet (napríklad štyri v prípade prírodnej vody) a prečo uvažujeme o týchto parametroch tieto a nie o iných? Existujú aj iné jedovaté alebo závadné látky, ktoré by sa mohli v testovanej vzorke vody nachádzať a prečo sa tieto netestujú? Študenti majú snahu vyriešiť aj tieto nejasnosti. Uvedeným metodickým postupom hodiny vedieme študentov, aby objavili argumentáciu skrytú za výberom parametrov.

2.6 Aktivita a rola učiteľa

Otázka znie: *Aké aktivity by mal učiteľ vyvíjať, aby sa uistil, že študenti považujú svoje aktivity na vyučovacej hodine za zmysluplné, a že súčasne budú na vyučovacej hodine dosiahnuté aj vzdelávacie ciele?*

V prípade kvality vody si študenti napríklad zapisujú svoje nejasnosti o spôsobe, akým uskutočňovali testy a o rozpätí zistených výsledkov (aktivita študenta). Pre študentov je to prvý krok k tomu, aby tieto nejasnosti vyriešili (funkcia). Študenti vedia, že je potrebné ich vyriešiť, aby dosiahli svoj cieľ: objaviť, ako sa zisťuje kvalita vody tým, že to urobia sami. Učiteľ dá študentom inštrukcie, aby si tieto nejasnosti zapísali. To učiteľovi umožňuje (funkcia) neskôr prediskutovať témy spoľahlivosti a presnosti (vzdelávacie cieľ) tak, že využije potrebu študentov vyriešiť nimi formulované nejasnosti (iný cieľ: zmysluplnosť).

Záver

Učiteľ je ten, kto vie, že dôležitejšie ako množstvo informácií, ktoré študenti na vyučovacej hodine dostanú, je rast kvality ich vzdelania a tým aj ich osobnosti. Musí sa vyznať v problematike, musí pripraviť mnoho pomôcok a podkladov, aby pripravil vyučovaciu hodinu zaujímavú. V príprave na vyučovaciu hodinu môže byť zahrnutá aj spolupráca a stretnutia, konzultácie, so špecialistami v odbore zvoleného námetu, pozvanie odborníkov do školy, alebo návšteva, spolu so žiakmi, reálneho pracovného prostredia.

Pri realizácii vyučovacích hodín s obsahom z reálneho kontextu a metodikou objavného vyučovania, sa učiteľ stáva partnerom svojich študentov a vydáva sa spolu s nimi na novú cestu plnú neistoty za, často náročným, poznávaním tohto sveta. Cielene môže, ba niekedy musí vystupovať vo viacerých úlohách (samozrejme, po dôkladnom zvážení). Môže to byť rola radcu, organizátora, manažéra, spolupracovníka, kritika, alebo môže zostať iba v pozadí (Ganajová, 2008) a ponechať na žiakov uskutočniť celý objavný proces, od získania informácie až po vedomosť.

LITERATÚRA

- [1] Mokrejšová Oľga: *Moderní výuka chemie*, Praha, TRITON, 2009, ISBN 978-80-7387-234-2
- [2] Toroková Ľ.: *Matematické vzdelávanie*. In: *Pedagogické rozhľady*. 03/2005 (cit. 2009-07-08). Dostupné na internete: <http://www.rozhlady.pedagog.sk/cisla/pr3-2005.pdf>
- [3] Ganajová, M., Kalafutová, J., Mitrová, M.: *Teória a prax projektového vyučovania v chémii k téme trvalo udržateľný rozvoj*, Košice, EQUILIBRIA, 2008, ISBN 978-80-89284-17-7

PaedDr. Soňa Fándlyová
Mgr. Miroslava Sovičová
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: sona.fandlyova@ukf.sk
e-mail: miroslava.sovicova@ukf.sk

PRAVDEPODOBNOSŤ ALEBO ŠANCA?

ZOLTÁN FEHÉR

ABSTRACT. The main idea of the article is, how to use the experience gained by students in the percentages to solve probability problems. We present some types of exercises from probability theory.

1. Úvod

Snahou každého dobrého učiteľa je, aby stále lepšie vedel svojim študentom priblížiť učivo a odovzdať svoje poznatky aj skúsenosti. Aby sme to dosiahli hľadáme vždy aktuálne metódy vyučovania. Stáva sa, že k zmenám v zaužívaných vyučovacích metódach nás prinútiť vonkajšie okolnosti. Zníženie hodinovej dotácie predmetov veľmi výrazne zasiahla do vyučovania aj z metodického hľadiska. Na Ekonomickej fakulte Univerzity J. Selyeho v študijných odboroch ekonomického smeru hodinová dotácia matematických predmetov, medzi nimi aj Matematika 3 – Pravdepodobnosť, sa znížila na polovicu. Táto zmena nás núti k tomu, aby sme efektívnejšie využili časový rámec, ktorý máme k dispozícii, a tiež aby sme hľadali nové spôsoby vyučovania.

Podnetom pre napísanie tohto článku boli príklady, ktoré sme našli v článku A. Furdeka [1]. Tieto príklady sa vzťahujú na výpočet percenta. Rovnaké úlohy s totožným textom môžeme nájsť aj v teórii pravdepodobnosti, samozrejme s tým rozdielom, že otázka sa nevzťahuje na percento ale na pravdepodobnosť.

Takto vznikla hlavná myšlienka tohto článku: ako môžeme využiť poznatky študentov v počítaní s percentami vo vyučovaní pravdepodobnosti na vysokej škole? Ako môžeme v didaktických postupoch využiť prepojenie medzi percentami a klasickou pravdepodobnosťou?

2. Využitie počítania s percentami vo vyučovaní pravdepodobnosti

Ako sme už uviedli v úvode, hlavnou motiváciou tohto článku boli úlohy v článku A. Furdeka [1]. Tieto úlohy, ktoré predstavíme ako ukážku, môžu byť vhodným podkladom pri riešení niektorých typov pravdepodobnostných úloh.

Úloha 1. ([1], s.9/5.1): Pri výrobe porcelánových tanierov je 20 % nepodarkov. Koľko porcelánových tanierov treba vyrobiť, aby sme dostali 1000 kusov bezchybných?

Prvá úloha sa dá použiť vo vyučovaní pravdepodobnosti aj bez zmeny, ale na tomto príklade môžeme zakladať aj rôzne variácie.

Úloha 1.1: V množstve 1000 tanierov je 20 % nepodarkov. Koľko bezchybných tanierov treba ešte vyrobiť, aby pomer nepodarkov v celku sa znížil na 10 %?

Úloha 1.2: V celkovom množstve N kusov je p % nepodarkov. Koľko bezchybných kusov treba ešte vyrobiť, aby pravdepodobnosť toho, že náhodne vyberieme chybný tanier sa znížil na q ($0 < q < p/100$) ?

Cieľom je aby študenti pochopili ako chápeme pravdepodobnosť pri náhodnom výbere z celku, a aký je rozdiel medzi pomerom 20 % a pravdepodobnosťou 0,2 ?

Úloha 2. ([1], s.10/5.3.1): V jednej krajine z 1000 občanov priemerne 1 má danú chorobu. Chorobu zistíme pomocou testu, ktorý vždy vykazuje chorobu. Test ale nie je vždy spoľahlivý, niekedy dáva pozitívny výsledok aj v prípade zdravých ľudí. Presnejšie: pri testovaní 1000 zdravých ľudí u 10-ich vykazuje nesprávne pozitívny výsledok.

Otázka a): Podľa výsledkov testov, koľko percento ľudí je skutočne chorých?

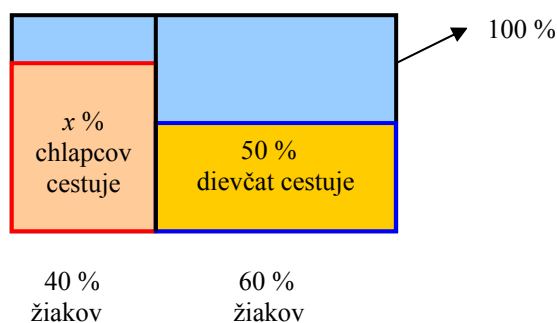
Otázka b): Aká je pravdepodobnosť, že pozitívne testovaný človek je skutočne chorý?

Úlohu 2. môžeme využiť v objasnení podmienenej pravdepodobnosti. Pri riešení úloh tohto typu, ak chceme počítať podľa príslušného vzorca (podmienená pravdepodobnosť), študenti majú často ťažkosti s určením jednotlivých udalostí a príslušajúcej pravdepodobnosti. Preto je výhodnejšie najprv riešiť úlohu s percentami a odpovedať na otázku a). Potom vyjadrením jednotlivých podmienených udalostí určíme ich pravdepodobnosti a prispejeme k odpovedi na otázku b).

Úloha 3. ([1], s.11/5.4.1): V jednej školskej triede sú žiaci, ktorí chodia do školy pešo, a žiaci ktorí denne cestujú. Zo všetkých žiakov 60 % sú dievčatá, a 50 % dievčat cestuje. 40 % žiakov chodí pešo.

Otázka a): Koľko percento chlapcov cestuje?

Otázka b): Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný chlapec cestuje?



Obrázok 1.

Túto úlohu využijeme pri podmienenej alebo pri úplnej pravdepodobnosti. Pri riešení môžeme spraviť tabuľku, obrázok. Ak označíme celkovú plochu obdĺžníka ako 100 %, tak jednotlivým hľadaným udalostiam prislúcha plocha nejakého obdĺžníka. Pravdepodobnosť udalosti je úmerná s obsahom plochy, je to vlastne geometrická pravdepodobnosť.

Na základe predchádzajúcich úloh môžeme zakladať na percentách aj riešenie niektorých ďalších typov úloh. Najvhodnejšie sú úlohy z geometrickej pravdepodobnosti, keď k danej množine bodov (napr. interval, plocha) priradíme 100 %, potom hľadaná podmnožina tohto geometrického útvaru má mieru priamo úmernú veľkosti tejto časti.

Úloha 4. ([2] s.17/35.), Geometrická pravdepodobnosť: Aká je pravdepodobnosť, že meteor padne na tú časť zemegule, kde je pevnina, keď vieme, že 149 mil. km² povrchu Zeme je pevnina a 361 mil. km² je more?

Otázka a): Ktorá z udalostí má väčšiu šancu, meteor padne na pevninu alebo do mora?

Otázka b): V akom pomere sú na zemskom povrchu pevnina a more?

Otázka c): Koľko percent povrchu Zeme tvorí pevnina? Aká je šanca, že meteor padne na pevninu?

V prípade úplnej pravdepodobnosti 100 % označuje množinu všetkých udalostí, ktorá je daná systémom nezlučiteľných podmnožín. Pri danom pomere týchto podmnožín určujeme zvolenú vlastnosť, a aký je pomer prvkov s touto vlastnosťou v celkovej množine. V týchto úlohách sú údaje zadania uvedené často v percentách.

Úloha 5. ([2] s.22/86.) Úplná pravdepodobnosť, Bayesova veta: Tri závody vyrábajú elektrické žiarovky. Prvý závod vyrába 45 % celkovej produkcie, druhý 40 % a tretí 15 %. Z produkcie prvého závodu je 70 % štandardných, druhého závodu 80 % a z produkcie tretieho 81 %.

Otázka a): Ktorý závod vyrába najviac štandardných žiaroviek?

Otázka b): Ak sa vyrobí 10 tisíc kusov žiaroviek, koľko štandardných vyrobia jednotlivé závody?

Otázka c): Aký je pomer štandardných žiaroviek v celkovej produkcii troch závodov?

Otázka d): Určte pravdepodobnosť toho, že zákazník si kúpi štandardnú žiarovku?

Otázka e): V akom pomere sú rozdelené štandardné žiarovky v produkcii jednotlivých závodov?

Postupné riešenie uvedených úloh využije znalosti študentov v počítaní s percentami, pomáha lepšie pochopiť pravdepodobnostné situácie a tým aj úspešnejšie zvládnutie časti učiva z teórie pravdepodobnosti.

3. Počítajme pravdepodobnosť alebo šancu?

V teórii pravdepodobnosti je pojem pravdepodobnosti udalosti jednoznačne definovaný, preto v tomto prípade je odpoveď na otázku samozrejme. Pravdepodobnosť je reálna funkcia, ktorá priradí udalosti reálne číslo z uzavretého intervalu $[0, 1]$ a spĺňa určité podmienky.

V zbierkach úloh z pravdepodobnosti, samozrejme vo všetkých úlohách sú otázky kladené vo forme: „Aká je pravdepodobnosť ...?“, tiež „Určte pravdepodobnosť ...“. Sú to matematické knihy, zbierky úloh určené pre matematikov, pre študentov matematických odborov. V týchto knihách, učebniciach sa samozrejme dodržiava presné používanie pojmov.

V bežnom živote, v praktických situáciách súvisiacich s pravdepodobnosťou nejakej udalosti častejšie sa pýtame na šancu s akou daná udalosť môže nastať. Veľakrát len porovnáme šance jednotlivých prípadov, aj bez číselného výpočtu. Keď vyčíslime hodnotu šance, zvykneme to vyjadriť v percentách. Študenti celkom intuitívne chápu percentá vyjadrujúce šancu napr. 20 %, 50 % alebo 100 %. Vyjadriť výsledok pravdepodobnostnej úlohy vo forme desatinného čísla alebo ako percento neznamena len formálny rozdiel. Dôležitý rozdiel môže byť z didaktického hľadiska, študent musí pochopiť čo znamená výsledok: napr. $P(A) = 0,21$ je viac abstraktný ako 21 %, čo dokáže lepšie predstaviť.

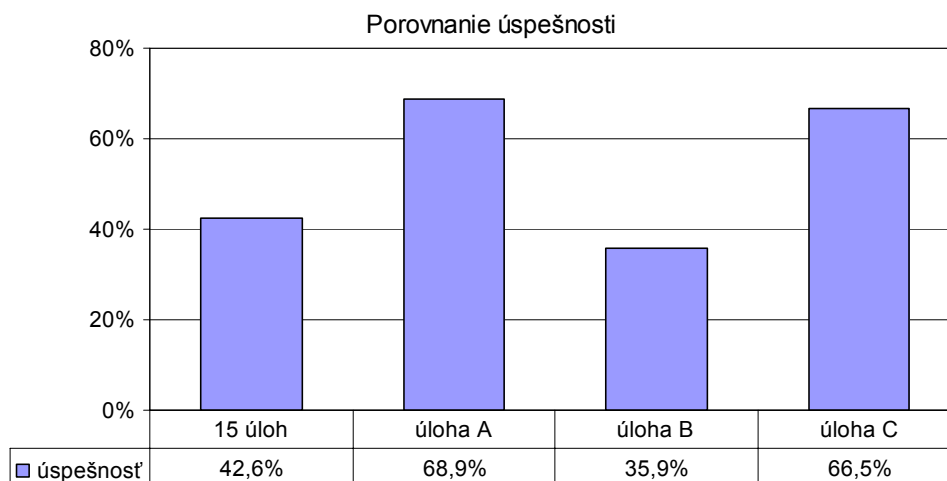
V procese vyučovania popri vysvetlení teoretických poznatkov sa súčasne snažíme priblížiť študentom aj možné aplikácie, vysvetliť súvislosti, poukázať na využitie v praxi. Často kladieme na tieto poznatky väčší dôraz, hlavne pri poslucháčov nematematických odborov. V tomto prípade už určite nie je nutné dodržať striktnú matematickú formuláciu, a môžeme klásť otázku aj v tvare: „Aká je šanca, že ...?“ Pojem šanca v matematike nie je

definovaný, chápeme to ako príležitosť na úspech. Pod výrazom šanca najčastejšie predstavujeme číslo vo forme percenta. Niekedy – to už nesprávne – hovoríme aj o 200%-nej šance, tým chceme vyjadriť, že udalosť celkom určite nastane.

Ak sa pozrieme do nematematických publikácií, napr. úlohy na internete, alebo na súčasné príklady z praxe, tu už zistíme častejšie používanie výrazu šanca. V prípade študentov ekonomického odboru sú dôležitejšie jednotlivé aplikácie, pochopenie významu výsledku, ako striktné dodržiavanie matematických teórií. Osobne pri počítaní úloh nevidím chybu v tom, ak študenti vyjadrujú výsledok v percentách aj keď otázka bola položená na pravdepodobnosť. Navyše ak je to vhodné, snažím sa formulovať úlohy z bežného života tak, aby študenti vypočítali šancu, alebo bez výpočtu porovnávali šancu viacerých prípadov, ktoré môžu nastať. Študenti ekonómie obvykle majú dobré základy v počítaní s percentami, určite o to zaslúžia aj ovládanie rôznych finančných výpočtov. Práve tieto základy môžeme využiť pri riešení rôznych pravdepodobnostných úloh ako napr. geometrická, podmienená, úplná pravdepodobnosť, spôsobom ako sme to načrtli v predchádzajúcej časti článku.

Pri využití percent v postupe riešenia treba vždy zdôrazniť rozdiel medzi percentom a pravdepodobnosťou. Nesprávne vnímanie týchto pojmov, hlavne pravdepodobnosti, môže viesť k chybným výsledkom ako napr. 120% pravdepodobnosť.

Na obrázku 2. porovnáваме celkovú priemernú úspešnosť študentov s niektorými vybranými úlohami v písomnom teste z predmetu MAT 3 - Pravdepodobnosť. Na vzorke 193 testov sme zistili priemernú úspešnosť 42,6 % v písomnom teste pozostávajúceho z 15 úloh. Úspešnosť vybraných úloh: úloha A – geometrická pravdepodobnosť 68,9 %, úloha B – úplná pravdepodobnosť 35,9 %, úloha C – úplná pravdepodobnosť a Bayesova veta 66,5 %.



Obrázok 2.

Vyhodnotením výsledkov testov dostaneme miešaný obraz z riešenia vybraných typov pravdepodobnostných úloh. Úloha A (bola totožná s úlohou 4. tohto článku) a úloha C (podobná úlohe 5.) majú značne vyššiu úspešnosť v porovnaní s priemerom všetkých úloh. Pritom ďalšia úloha B na úplnú pravdepodobnosť (podobná úlohe 3.) má výrazne nižšiu úspešnosť. Napriek tomu môžeme tvrdiť, že spomínané typy úloh majú väčšiu úspešnosť

práve z toho dôvodu, že študenti využívajú svoje znalosti v počítaní s percentami. Na zistenie ďalších súvislostí treba jednotlivé výsledky podrobnejšie analyzovať, čo už presahuje rámec tohto článku.

4. Záver

Využitie poznatkov študentov v počítaní s percentami môže byť veľmi užitočné vo vyučovaní pravdepodobnosti. Pri riešení niektorých typov pravdepodobnostných úloh je vhodné zakladať na známych súvislostiach, pomocou ktorých vyjadrujeme pomer v percentách. Takýto postup riešenia úloh môže lepšie pomôcť v pochopení pravdepodobnostných situácií hlavne pre poslucháčov nematematických odborov, kde sa viac zameriame na využitie v praxi a na rôzne aplikácie.

Prepojenie dvoch matematických oblastí ako percentá a pravdepodobnosť treba využiť aj druhým smerom: už na základnej a strednej škole pri aritmetických úlohách, keď počítame pomer alebo percento, treba poukázať aj na to, že zmenou otázky alebo vhodnou formuláciou zadania je možné zistiť aj pravdepodobnosť s ktorou daná situácia nastane. Týmto spôsobom lepšie využijeme potenciál danej úlohy a pripravíme aj neskôršie zavedenie pojmov z pravdepodobnosti.

LITERATÚRA

- [1] Furdek, A.: Új utak a matematika tanításában (3), (Nové cesty vo vyučovaní matematiky), *A matematika tanítása: módszertani folyóirat*, Szeged, Mozaik, 2008, roč. 16/2, s. 9-14. ISSN 1216-6650
- [2] Potocký, R., Kalas, J., Komorník, J., Lamoš, F.: *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*, Bratislava, Alfa, 1991, ISBN 80-05-00524-5

RNDr. Zoltán Fehér, PhD.
Katedra hospodárskej matematiky
Ekonomická fakulta
Univerzita J. Selyeho
P.O.Box 54
SK – 945 01 Komárno
e-mail: feherz@selyeuni.sk

NIEKOĽKO POZNÁMOK O SUMÁCH ČÍSELNÝCH RADOV

JOZEF FULIER

ABSTRACT. This article is concerned with some aspects of the question: Given that a particular series converges, to what value does the series converge?

Úvod

Hoci pre študentov univerzít a ani študentov stredných škôl tematický celok *Nekonečné číselné rady* nepatrí k najobľúbenejším častiam elementárnej matematickej analýzy nerobí im táto časť veľmi vážne problémy. Základnou úlohou je totiž zistiť či daný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje alebo diverguje a pre túto úlohu sa používa iba niekoľko, v podstate dosť jednoduchých, kritérií konvergenzie radov, ktoré sa študenti bez vážnejších problémov naučia používať. Určenie súčtu $S = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je však *prekvapivo obtiažny problém*. Z tohto dôvodu sú výsledky v tejto oblasti skôr vedľajšie výsledky pokročilejších častí matematickej analýzy (napríklad integrálneho počtu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}$ či teórie funkcionálnych radov: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$). Základnou ťažkosťou pri určovaní súčtu radu na základe definície súčtu radu je to, že operácia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_2 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

nie je prípustná. Totiž známe pravidlo o limite súčtu postupností platí iba pre konečný počet sčítancov (čo v tomto prípade nie je splnené). Z tohto dôvodu je potrebné najprv vyjadriť n -tý člen

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n = 1, 2, \dots$$

postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v tvare vhodnom na limitovanie (v tvare uzavretého konečného vzorca) a až potom môžeme určiť $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (samozrejme pokiaľ existuje). Toto je však vo všeobecnosti náročný problém, s ktorým si vieme poradiť iba pri špeciálnych nekonečných radoch. K takýmto radom patrí najmä *rad geometrický* a *rad teleskopický*, o ktorých pojednáme bližšie.

2. Geometrický rad

Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$, kde $a \neq 0, q \in \mathbb{R}$ sú dané konštanty, konverguje práve vtedy, ak $|q| < 1$. Pre $q \neq 1$ platí $s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$, odkiaľ po vynásobení kvocientom q dostaneme $qs_n = aq + aq^2 + \dots + aq^n$. Odčítaním posledných rovností máme $s_n - qs_n = a - aq^n$, čiže $s_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$. Toto vyjadrenie čiastočného súčtu s_n je už vhodné na aplikáciu limitného prechodu pre $n \rightarrow \infty$, pričom v prípade $|q| < 1$ pre súčet S daného radu platí $S = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$.

Vzhľadom na to, že platí

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k, \alpha \in \mathbb{R},$$

je zrejmé, že dokážeme bez problémov určiť nielen súčet konvergentného geometrického radu, ale aj súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktorý je lineárnou kombináciou konvergentných geometrických radov $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_j (a_j q_j^{n-1})$, $|q_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. V takomto prípade totiž platí

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_1 (a_1 q_1^{n-1}) + \alpha_2 (a_2 q_2^{n-1}) + \dots + \alpha_m (a_m q_m^{n-1})] &= \\ = \alpha_1 a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n-1} + \alpha_2 a_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_2^{n-1} + \dots + \alpha_m a_m \sum_{n=1}^{\infty} q_m^{n-1}. \end{aligned}$$

Príklad 1. Určte súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 6^{2n+1} - 12 \cdot 4^{2n-1}}{3 \cdot (12)^{2n}}$.

Riešenie. Jednoduchými úpravami postupne dostaneme

$$\frac{9 \cdot 6^{2n+1} - 12 \cdot 4^{2n-1}}{3 \cdot (12)^{2n}} = 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = 18 \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Odkiaľ máme } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9 \cdot 6^{2n+1} - 12 \cdot 4^{2n-1}}{3 \cdot (12)^{2n}} = \frac{9}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{9}{2}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{39}{8}.$$

2. Teleskopické súčty a teleskopické rady

Pri hľadaní radov, ktorých súčet vieme určiť priamo na základe definície súčtu radu (t.j. ako limitu jeho postupnosti čiastočných súčtov, teda $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in N$) je možné túto úlohu modifikovať. Predpokladajme, že si dopredu zvolíme súčet radu S a aj nejakú postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$. Nájdime aspoň jeden nekonečný rad, ktorého postupnosť čiastočných súčtov $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ je totožná s postupnosťou $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ a teda jeho súčet sa rovná číslu S . Ľahko nahliadneme, že takýmto radom je rad

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}) + \dots = s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{n+1} - s_n),$$

keďže pre jeho n -tý čiastočný súčet S_n platí

$$S_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1}) = s_n, n \in N,$$

teda $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$.

Príklad 2. Zvoľme napríklad číslo $S = 1$ a konvergentnú postupnosť, ktorá konverguje k tomuto číslu S , napríklad postupnosť $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$. Určme rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ktorého postupnosť $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, čiastočných súčtov je totožná s uvedenou postupnosťou, teda jeho súčet S sa rovná číslu 1.

Riešenie. Na určenie radu môžeme použiť vyššie uvedený postup. Hľadaným radom je rad $s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Overme, že

súčtom tohto radu je skutočne číslo $S = 1$ (i napriek tomu, že to samozrejme vyplýva z predchádzajúcej konštrukcie, chceme však použiť iný postup). Rozložme racionálnu funkciu $Q(m) = \frac{1}{m(m+1)}$ na parciálne zlomky. Ľahko nahliadneme, že pre uvedený rozklad platí

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \text{ a pre postupnosť čiastočných súčtov } (S_n)_{n=1}^{\infty} \text{ tohto radu dostaneme}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Teda skutočne $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Je vidieť, že n -tý čiastočný súčet $S_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots + (s_n - s_{n-1})$, a aj modifikovaný súčet $S_n = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$ vyššie uvedeného radu majú veľmi zaujímavú vlastnosť, ktorú nazývame *teleskopickou vlastnosťou* súčtu: temer okamžite sa dá vyjadriť uvedený súčet v uzavretom tvare, pretože v uvedených

súčtoch sa väčšina členov navzájom zruší (zmizne) podobne ako miznú (zasúvajú sa do seba) jednotlivé diely *teleskopického* (vysúvacieho) ďalekohľadu.

Je zrejmé, že problematika zisťovania súčtu daného konvergentného radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ by sa výrazne zjednodušila, ak by bolo možné daný rad vyjadriť v vo vyššie uvedenom tvare, t.j. tvare tzv. *teleskopického radu* $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$.

Teleskopická vlastnosť uvedeného radu nám umožňuje vyjadriť jeho n - tý čiastočný súčet S_n v uzavretom tvare. Platí totiž

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Z uvedenej rovnosti vyplýva, že *teleskopický rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ *konverguje práve vtedy, ak konverguje postupnosť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. V takomto prípade tohto súčtu radu ľahko určíme $S = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

V ďalšom sa budeme zaoberať radmi tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, resp. konečnými (čiastočnými) súčtami $\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, kde f je vhodná funkcia definovaná na množine N .

V predchádzajúcom príklade sme ukázali, že pre funkciu $f(k) = \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ platí $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n}{n+1}$, a tiež, že $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 1$.

Toto je možné interpretovať nasledovne:

pre funkciu $f: f(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ sme našli takú funkciu $F: F(k) = -\frac{1}{k}$, že platí rovnosť

$$f(k) = F(k+1) - F(k). \quad (1)$$

Využitím tejto rovnosti ľahko dostaneme rovnosť

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) - F(1), \quad (2)$$

z ktorej pre konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ vyplýva rovnosť

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n+1) - F(1) = F(\infty) - F(1). \quad (3)$$

Detailnejší pohľad na formuly (1), (2) a (3) nám možno pripomenie *známe formuly integrálneho počtu*: formula (1) pripomína definíciu *primitívnej funkcie* F k funkcii f t.j.

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

formula (2) môžeme považovať za diskretnú formu *Newton-Leibnizovho vzorca* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ a formulu (3) je možné

považovať za diskretný variant definície *nevlastného integrálu* $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Jeden rozdiel

(a to veľmi podstatný) tu samozrejme je: prírastok argumentu sa nepribližuje k nule, ale sa vždy rovná číslu 1. Preto sa prirodzene nedajú využiť známe vzťahy pre *výpočet primitívnych funkcií a integrálov*, s ktorými sa stretávame v kurze matematickej analýzy.

Je vhodné poznamenať, že úloha „*Určiť k danej funkcii $f = f(k)$ jej diskretnú „primitívnu funkciu“ F spĺňajúcu vzťah (1)*“ je vo všeobecnosti veľmi ťažkou úlohou a darí sa ju úspešne riešiť iba vo veľmi špeciálnych prípadoch. Niektoré takéto prípady uvedieme.

Poznamenajme tiež, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ patrí ku klasickým *teleskopickým radom*, s ktorým sa stretne pravdepodobne každý študent pri ilustrácii pojmu *súčet radu*. Ak študenti už poznajú procedúru rozkladu racionálnej funkcie na parciálne zlomky je možné sa pýtať na možné zovšeobecnenia tvaru uvedeného radu, ktoré vedú k teleskopickým radom. Takéto rady môžu následne poslúžiť ako vhodný generátor precvičovacích, ale i problémových úloh pre určenie súčtu radu na základe definície. Ukážme si niekoľko takýchto zovšeobecnení (šípka $\Rightarrow$ vychádza z daného radu a ústi do jeho zovšeobecnenia):

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}, m \in N;$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, m \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)(n+r)}, m \neq r \in N;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)(an+a+b)}, a, b \in N;$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}, m \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\beta)(n+1+\beta)(n+2+\beta)\dots(n+m+\beta)}, m \in N, \beta \in Q^+, \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n c_{n+1} c_{n+2} \dots c_{n+m}},$ kde $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná aritmetická postupnosť reálnych čísel s diferenciou $d \neq 0$, pričom pre každé $n \in N$ je $a_n \neq 0$.

Súčty vyššie uvedených konvergentných radov, ktoré majú tvar $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, určíme jednotným spôsobom tým, že nájdeme *diskrétnu primitívnu funkciu* F k funkcii f , ktorá spĺňa vzťah (1), t.j. $f(k) = F(k+1) - F(k), k \in N$.

1. Rozkladom racionálnej funkcie $f(k) = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ na parciálne zlomky dostaneme

$$f(k) = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right).$$

Pre diskretnú primitívnu funkciu F zrejme platí $F(k) = -\frac{1}{2} \frac{1}{k(k+1)}$, preto

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = F(n+1) - F(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ a súčet } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

2. Bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r > m$, preto existuje $s \in N$ také, že $r = m + s$. Rozkladom racionálnej funkcie $f(k) = \frac{1}{(k+m)(k+m+s)}$ na parciálne zlomky a následnou jednoduchou úpravou dostaneme

$$f(k) = \frac{1}{(k+m)(k+m+s)} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{k+m} - \frac{1}{k+m+s} \right) = \frac{1}{s} \left[\left(\frac{1}{k+m} + \frac{1}{k+m+1} + \dots + \frac{1}{k+m+s-1} \right) - \left(\frac{1}{k+m+1} + \dots + \frac{1}{k+m+s-1} + \frac{1}{k+m+s} \right) \right] = F(k+1) - F(k),$$

kde pre funkciu F platí

$$F(k) = -\frac{1}{s} \left(\frac{1}{k+m} + \frac{1}{k+m+1} + \dots + \frac{1}{k+m+s-1} \right).$$

Využitím čoho podľa vzťahu (3) máme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m)(n+m+s)} = F(\infty) - F(1) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+s} \right).$$

3. Ľahko overíme, že platia rovnosti

$$f(k) = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{1}{k+j} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)} \right),$$

z ktorých vyplýva, že $F(k) = -\frac{1}{m} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)}$. Využitím čoho máme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m)} = F(n+1) - F(1) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \right) \text{ a preto}$$

pre súčet uvedeného radu platí $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{m.m!}$.

4. Nech $f(k) = \frac{1}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}}$, kde $0 \neq c_k = a + (k-1)d, a, d \in R, d \neq 0, k \in N$.

Tento prípad patrí k najvšeobecnejším. Predchádzajúce prípady nám umožňujú odhadnúť tvar diskretnéj primitívnej funkcie F k funkcii f . Položme $F(k) = -\frac{1}{md} \frac{1}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m-1}}$, potom pre $k \in N$ platí požadovaná rovnosť (1). Totiž

$$F(k+1) - F(k) = \frac{1}{md} \left(\frac{1}{c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}} - \frac{1}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}} \right) = \frac{1}{md} \frac{c_{k+m} - c_k}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}} =$$

$$= \frac{1}{md} \frac{md}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}} = f(k). \text{ Z toho vyplýva, že}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k c_{k+1} c_{k+2} \dots c_{k+m}} = F(n+1) - F(1) = \frac{1}{md} \frac{1}{c_1 c_2 c_3 \dots c_m} - \frac{1}{md} \frac{1}{c_{n+1} c_{n+2} c_{n+3} \dots c_{n+m}},$$

odkiaľ konečne máme $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{md} \frac{1}{c_1 c_2 c_3 \dots c_m}$.

Poznámka 1. Vyššie uvedené príklady *teleskopických nekonečných radov* nám spravidla postačujú na určenie súčtov teleskopických radov, ktoré sú uvedené v bežných zbierkach úloh z matematickej analýzy (pozri napríklad (Demidovič, 2003)). Väčšina týchto úloh sa dá riešiť rozkladom k -tého člena (v tvare racionálnej funkcie premennej k) daného n -členného súčtu či nekonečného radu na *parciálne zlomky*. Je vhodné poznamenať, že vo všeobecnosti táto procedúra nemusí fungovať, pretože daný rad (či konečný súčet) nie je jednoducho teleskopickým radom (či súčtom).

Napríklad, rad n -tý čiastočný súčet S_n radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ je možné vyjadriť v tvare teleskopického súčtu $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \rightarrow 1$ pre $n \rightarrow \infty$. Na druhej strane rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2n}{n^2+3n+2}$ teleskopickým radom nie je (aj napriek tomu, že vieme rozložiť n -tý člen tohto na parciálne zlomky $\frac{3+2n}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$).

V tejto súvislosti je dôležitá odpoveď na otázku: za akých podmienok bude rad $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$, (kde $P(n), Q(n)$ sú polynomicke funkcie premennej n s racionálnymi koeficientmi, $\deg(P) < \deg(Q)$) teleskopickým radom. Odpoveď na túto otázku našli v tvare nutnej a postačujúcej podmienky autori článku (Marshall & Catoiu, 2005). Zhruba povedané, ak polynóm Q má iba racionálne korene a $\frac{P(n)}{Q(n)} = \sum_{s \in N} \sum_{K \in Q/Z} \sum_{\alpha \in K} \frac{A_{\alpha,s}}{(x-\alpha)^s}$, tak uvedenou podmienkou je platnosť rovnosti $\sum_{\alpha \in K} A_{\alpha,s} = 0$. Ak v rozklade polynómu Q vystupujú aj nerozložiteľné kvadratické trojčleny, potom pre príslušné skupiny (triedy rozkladu) vzájomne ekvivalentných mocnín dvojčlenov a trojčlenov (pričom $f \sim g \Leftrightarrow$ ak existuje celé číslo m , také, že $g(k) = f(k+m)$) platí tiež analogická podmienka v tvare nulového súčtu koeficientov nachádzajúcich sa v číateľoch príslušných zlomkov).

3. Záverečné poznámky

Na záver poznamenajme, že jednou tried, pre ktoré je možné pomerne efektívne vyjadriť konečné súčty $\sum_{k=1}^n f(k)$ v tvare teleskopických súčtov sú *polynomicke funkcie*. Je zjavné, že v prípade týchto funkcií sa musíme obmedziť iba na konečné súčty, pretože príslušne nekonečné rady sú divergentné. Pre určenie súčtu $S(n)$, $S(n) = \sum_{k=1}^n f(k)$, kde $f(k)$ je polynomicke funkcia premennej k , môžeme pritom zvoliť nasledovný postup: Najskôr definujeme pre $m = 0, 1, 2, \dots$, tzv. *zovšeobecnenú mocninu* $x^{(m)}$ čísla x vzťahmi

$$x^{(0)} := 1, \quad x^{(m)} := x(x-1)(x-2) \dots (x-(m-1)) \text{ pre ľubovoľné } m \in N.$$

V priestore polynomických funkcií zvolíme nasledovnú bázu funkcií

$$B = \{x^{(0)}, \quad x^{(1)}, \quad x^{(m)}, \dots\},$$

v ktorej je zrejme možné vyjadriť ľubovoľnú polynomicke funkciu. Definujeme *lineárny operátor*, ktorý nazveme „*diskrétnym integrálom*“, ktorý každému polynómu $f(x) = x^{(m)}$ z bázy B priradí polynóm $F(x) = \frac{x^{(m+1)}}{m+1}$. Tento polynóm nazveme *diskrétnym integrálom funkcie f* (všimnime si, že sa formálne zhoduje s tabuľkovým integrálom

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, známym z integrálneho počtu). Ľahko overíme, že sú splnené podmienky (1) a (2), t.j.

$$k^{(m)} = \frac{(k+1)^{(m+1)}}{m+1} - \frac{k^{(m+1)}}{m+1}, \text{ odkiaľ } \sum_{k=1}^n k^{(0)} = n, \sum_{k=1}^n k^{(m)} = \frac{(n+1)^{(m+1)}}{m+1}, m \in N.$$

V prípade ľubovoľnej polynomickej funkcie $f(k) = a_0 + a_1 k + \dots + a_s k^s$, najprv vyjadríme túto funkciu v báze **B**, teda $f(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k^{(1)} + \dots + \alpha_s k^{(s)}$, kde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ sú vhodné čísla. Využitím diskretných integrálov polynómov z bázy **B** a linearity tohto operátora už ľahko dostaneme diskretný integrál $F(k)$ funkcie $f(k)$

$$F(k) = \alpha_0 k^{(1)} + \alpha_1 \frac{k^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{k^{(3)}}{3} \dots + \alpha_s \frac{k^{(s+1)}}{s+1}, \text{ pričom } f(k) = F(k+1) - F(k).$$

Využitím čoho máme

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n (\alpha_0 + \alpha_1 k^{(1)} + \dots + \alpha_s k^{(s)}) = F(n+1) - F(1) = \dots \\ &= \alpha_0 (n+1)^{(1)} + \alpha_1 \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{(n+1)^{(3)}}{3} \dots + \alpha_s \frac{(n+1)^{(s+1)}}{s+1} - \alpha_0. \end{aligned}$$

Napríklad, nech daný polynóm $f(k)$ má tvar $f(k) = 5 - 4k + 11k^2$. Určme súčet $S(n) = \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n (22 - 9k + 21k^2)$. Vyjadrenie polynómu $f(k)$ v báze **B** je

$$f(k) = 22 + 12k + 21k(k-1) = 22 + 12k^{(1)} + 21k^{(2)}.$$

Z toho vyplýva, že pre jeho „diskretný integrál“ F platí $F(k) = 22k^{(1)} + 6k^{(2)} + 7k^{(3)}$.

Využitím čoho jednoduchými úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n (22 - 9k + 21k^2) = \sum_{k=1}^n [F(k+1) - F(k)] = F(n+1) - F(1) = \\ &= 22(n+1)^{(1)} + 6(n+1)^{(2)} + 7(n+1)^{(3)} - 22 = 7n^3 + 6n^2 + 21n. \end{aligned}$$

Príklad 3. Pomocou zovšeobecnej mocniny odvodte vzorec pre $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

Riešenie. Podľa (4) platí $\sum_{k=1}^n k^{(2)} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3}$, t.j. $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$. Odkiaľ,

s prihliadnutím na vzťah $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dostaneme

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) = \sum_{k=1}^n k^{(2)} + \sum_{k=1}^n k = \\ &= \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) = \sum_{k=1}^n k^{(2)} + \sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

LITERATÚRA

- [1] Demidovič, B.P.: Zbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, Praha 2003, ISBN 8072005871
- [2] Fulier, J.: Riemannova hypotéza, Bazilejský problém a sumácia istých nekonečných radov, In: Acta Mathematica 10, Nitra: UKF Nitra 2007, s. 53-58, ISBN 978-80-8094-181-9
- [3] Marshall, J. – Catoiu, S: Telescoping, rational-valued series, and Zeta functions, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 357 (2005), Number 8, p. 3339-3358
- [4] Šibasov, L.: Kak najti summu? Kvant, 2002/No 3, s. 37- 42

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.

Katedra matematiky Fakulta prírodných vied

Univerzita Konštantína Filozofa

Trieda A. Hlinku 1

SK – 949 74 Nitra

e-mail: jfulier@ukf.sk

JEDEN Z PRÍSTUPOV ROZVÍJANIA MATEMATICKÉHO MYSLENIA V OBLASTI KOMBINATORIKY.

FILIP HALAMA, PATRÍCIA BENICKÁ

ABSTRACT. This paper is dedicated to Combinatorics and its presence in the curriculum of secondary and primary school effort that students understand at first glance a simple substance such as combinatorics is.

Úvod

Kombinatorika je učivo, ktoré je pre mnohých žiakov často ťažko pochopiteľné. Z pôvodnej snahy o to, aby žiaci pochopili lepšie zákonitosti usporiadaní, sa pomerne zavčasu prejde k používaniu vzorcov, čo vedie k formalizmu. Nie všetci žiaci však sú schopní tak skoro prejsť od konkrétnej manipulácie s objektmi k abstraktným pojmom.

Stáva sa, že žiaci úlohu síce pochopia, no vzorec ktorý použijú, nie je vhodný na riešenie zadanej úlohy.

Kde sa rodí táto chyba? Ako jej predchádzať?

Kombinatorika na základnej škole

S kombinatorikou sa podľa ISCED 2 žiaci prvýkrát stretávajú na základnej škole. V 6. ročníku je odporúčaný počet 15 vyučovacích hodín venovaných vyučovaniu kombinatoriky, počas ktorých by sa mali naučiť usporiadať prvky do radu s použitím rôznych systémov vypisovania, tvoriť dvoj-, troj-, štvorciferné čísla z daného počtu číslíc, rôznymi spôsobmi riešiť slovné úlohy s kombinatorickou motiváciou. Zároveň by sa na hodinách mal venovať čas aj propedeutike štatistiky, pravdepodobnosti a kombinatoriky, hlavne zhromažďovaniu, usporiadaniu a grafickému znázorneniu údajov.

V 7. ročníku je odporúčaná časová dotácia kombinatoriky 18,5 vyučovacích hodín. Žiaci sa učia riešiť úlohy na tvorbu skupín predmetov, úlohy o ich počte z rôznych oblastí života. Mali by ovládať rôzne spôsoby vypisovania na jednoduchých úlohách, pravidlo súčtu, pravidlo súčinu. Mali by tiež ovládať viac spôsobov riešenia kombinatorických úloh, stromový graf, tabuľku, systematické vypisovanie.

V 8. ročníku sa v rámci odporúčaných 17 vyučovacích hodín venujú žiaci pravdepodobnosti a úvodu do štatistiky.

Podľa ISCED 2 by mal žiak štúdiom získať kompetencie organizovať konkrétne súbory predmetov podľa istých kritérií, mal by vedieť vytvárať skupiny prvkov, vykonávať zber, zápis a interpretáciu údajov, vedieť ich graficky znázorniť. Mal by byť schopný orientovať sa v množine údajov a posudzovať realitu z pravdepodobnostného a štatistického pohľadu.

S týmito kompetenciami by mal žiak vstupovať do ďalšieho štúdia na SŠ, kde sa podľa ISCED 3A stretne s kombinatorikou najmä v prvom ročníku.

Jeden z prístupov k vyučovaniu kombinatoriky

Aby sme splnili všetky ciele, je v prvom rade potrebné naučiť žiakov vnímať základné rozdiely medzi permutáciami, variáciami a kombináciami. Musíme teda venovať čo najviac času určovaniu práve týchto rozdielov. Keď si budeme istí, že žiaci si tieto rozdiely uvedomujú a správne ich určujú, potom môžeme zaviesť vzorce. Často sa podceňuje práve význam jednoduchých úloh, ktoré sa dajú vypočítať aj vymenovaním prvkov. To, že žiak môže narábať s prvkami, tvoriť ich, systematicky ich usporadúvať a nakoniec dospieť k správnejmu výsledku, je pre neho veľmi dôležité. Získava tak nové poznatky a aj pevnejšiu pôdu pod nohami.

Je tiež potrebné odhadnúť primeraný počet jednoduchých úloh. Môže sa stať, že žiak už potrebnú istotu získal a jednoduché úlohy zvláda bez väčších problémov. To v ňom vzbudí záujem o náročnejšie úlohy. Ak učiteľ tento moment nepostrehne a bude sa držať jednoduchých úloh, môže žiakov záujem ustať a téma ho začne nudiť, čo povedie k tomu, že podcení náročnejšie úlohy a nadobudnutá istota sa stratí.

Úlohy by teda mali ísť od jednoduchých, cez zložitejšie až prídu k bodu, kedy sa už príklad nebude dať vyriešiť jednoduchým vymenovaním prvkov, resp. vymenovanie prvkov by bolo príliš zdĺhavé. Vtedy je vhodné, ak učiteľ nechá najprv postupovať žiakov spôsobom, ktorý sa dovtedy naučili. Žiaci sami prídu na to, že je to zdĺhavé a začnú sa pýtať, či neexistuje ľahší spôsob. Bolo by však chybou poskytnúť im hneď vzorec na výpočet. Učiteľ by mal žiakov nasmerovať, aby sa snažili zistiť zákonitosti a skúsili ich matematicky vyjadriť a zapísať. Spoločnou prácou dospejú k vzorcu, ktorý si zapamätajú ľahšie, nakoľko naň prišli sami, vedia odkiaľ vyplynul a čo vlastne znamená.

Uvádzame niekoľko príkladov, ktoré sú vhodné pri odvodzovaní vzorcov.

Príklad č.1: Na turnaji vo futbale súťažilo 5 tried. Koľko je možností na obsadenie na prvých:

- dvoch miestach?
- troch miestach?
- štyroch miestach?

Riešenie:

Základom k riešeniu tohto príkladu je označenie. Označme 5 tried písmenami od A po E.

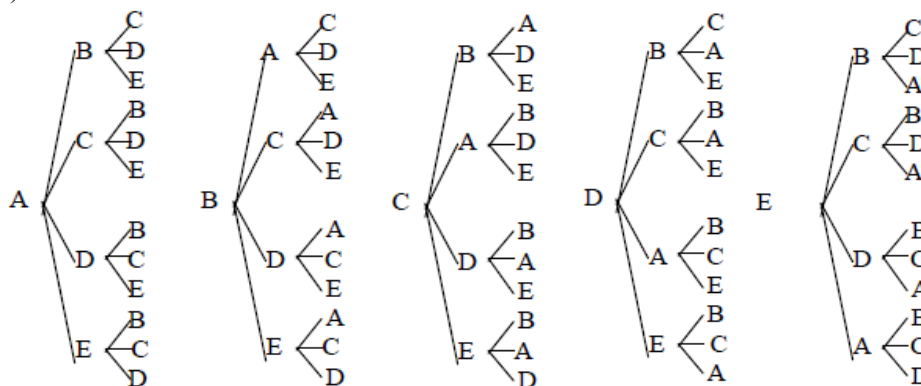
a)

1. miesto	2. miesto
A	B
A	C
A	D
A	E
B	A
B	C
B	D
B	E
C	A
C	B

1. miesto	2. miesto
C	D
C	E
D	A
D	B
D	C
D	E
E	A
E	B
E	C
E	D

Možností na umiestnenie na prvých dvoch miestach je 20.

b)



Možností na umiestnenie na prvých troch miestach je 60.

Pozn. Už pri riešení zadania b) žiaci zistia, že sa jedná o zdĺhavý a náročný spôsob.

c) Uvedomme si, že možností, ktorý tím obsadí 1. miesto je 5.

Na obsadenie 2. miesta máme potom už len 4 tímy, 3. miesta 3 tímy a 4. miesta 2 tímy.

Miesto: 1. 2. 3. 4.
Počet možností: 5 * 4 * 3 * 2 = 120

Možností na umiestnenie na prvých štyroch miestach je 120.

Príklad č.2: Koľkými spôsobmi si môžu vedľa seba v kine sadnúť:

- a) traja kamaráti?
- b) štyria kamaráti?
- c) piati kamaráti?

Riešenie:

Kvôli lepšiemu rozlíšeniu si v prípade a) kamarátov označíme číslami od 1 po 3, resp. od 1 po 4 v prípade b).

a) môžeme vyriešiť vypísaním všetkých možností a ich spočítaním:

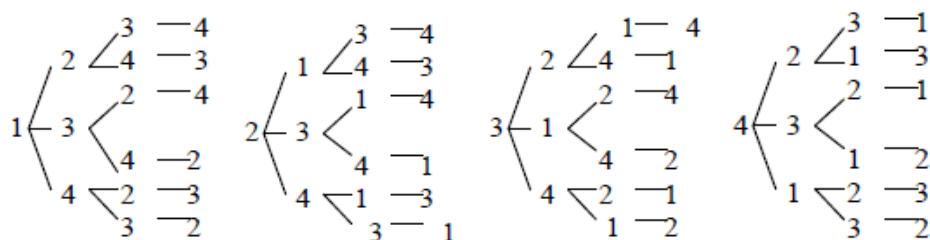
123 132
213 231
312 321

1 < 2 — 3 2 < 1 — 3 3 < 2 — 1
 < 3 — 2 < 3 — 1 < 1 — 2

Treja kamaráti si môžu sadnúť šiestimi spôsobmi.

b) môžeme ešte stále vyriešiť vymenovaním prvkov, no je to už zdĺhavejšie:

1234 1243 1324 1342 1423 1432
2134 2143 2314 2341 2413 2431
3124 3142 3214 3241 3412 3421
4123 4132 4213 4231 4321 4312



Štyria kamaráti si môžu sadnúť 24 spôsobmi.

c) Tu už je vypísanie všetkých možností, alebo riešenie pomocou grafov, úlohou na niekoľko desiatok minút a ľahko by mohla nastať chyba. Je teda dôležité nasmerovať žiakov, aby zistili princíp riešenia.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \\ 5 & * & 4 & * & 3 & * & 2 & * & 1 & = & 120 \end{array}$$

Piati kamaráti si môžu sadnúť $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ spôsobmi.

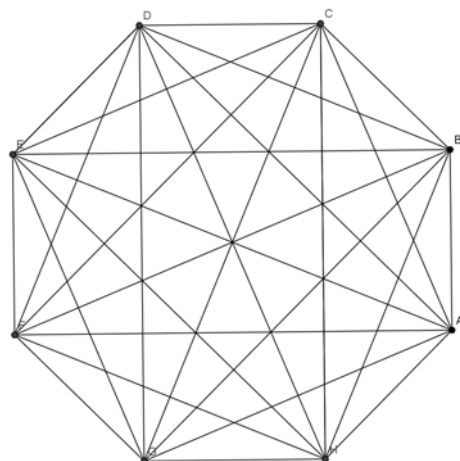
Príklad č.3: V triede je 8 žiakov. Na konci školského roka dostanú najlepší žiaci knihu. Koľko rôznych skupín žiakov môže byť odmenených, ak máme k dispozícii:

- dve rovnaké knihy?
- tri rovnaké knihy?
- štyri rovnaké knihy?

Riešenie:

V prvom rade si uvedomme, že knihy sú rovnaké, takže na poradí najlepších žiakov nezáleží.

a) Toto zadanie vieme riešiť graficky. Počet skupín žiakov je rovnaký ako počet strán a uhlopriečok pravidelného osemuholníka.



Počet rôznych dvojíc je 28.

b) V tomto prípade žiaci rýchlo zistia, že jednoduchý spôsob neexistuje a ak začnú vypisovaním možností, veľmi rýchlo prídu na to, že možností je veľa, prípadne zistia, že trojica ABC a BAC je v tomto prípade tá istá trojica, teda na poradí nezáleží. Žiaci už vedú vypočítať počet takýchto usporiadaní, ak by na poradí záležalo.

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

V tomto počte sú ale zahrnuté niektoré trojprvkové skupiny viackrát. Počet týchto trojíc, ktoré sa líšia iba usporiadaním prvkov je $3 \cdot 2 = 6$. To je počet rôznych usporiadaní troch písmen. Týmto číslom vydělíme číslo 336 a dostaneme číslo 56.

Počet rôznych trojíc je 56.

c) Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom prípade. Počet rôznych štvoríc je 70.

Záver

V súčasnosti, keď sa kombinatorike, pravdepodobnosti a štatistike venuje väčšia pozornosť, je potrebné vedieť naučiť žiakov nielen vzorce a ich použitie. Je potrebné naučiť žiakov rozmyšľať, analyzovať úlohy a spôsob ich riešenia. V tejto snahe nám môže pomôcť vhodne zvolená metóda a k nej odpovedajúce úlohy.

V úvode článku sme spomínali jednu z najčastejších chýb, ktorých sa žiaci dopúšťajú pri riešení úloh z kombinatoriky. Myslíme si, že uvedeným spôsobom sa zníži počet žiakov, ktorí použijú nesprávny vzorec.

LITERATÚRA

- [1] Milan Hejný a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, vysokoškolská učebnica, Bratislava, SPN, 1989, ISBN 80-08-00014-7
- [2] *ISCED 2 – nižšie sekundárne vzdelávanie* [25.7.2010], dostupné na:
http://www.statpedu.sk/documents//16/vzdelavacie_programy/statny_vzdelavaci_program/isced2_jun30.pdf

Mgr. Filip Halama
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
 e-mail: filip.halama@ukf.sk

Mgr. Patrícia Benická
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
 e-mail: patricia.benicka@ukf.sk

FUNKCIA VIZUALIZÁCIE V MATEMATICKOM VZDELÁVANÍ

SILVIA HYČKOVÁ, LÝDIA KONTROVÁ

ABSTRACT. This article presents the results of pedagogical experiment carried out on students of Faculty of Civil Engineering from University of Žilina. This experiment was focused on particular themes of curriculum – solution of the systems of linear equations. To make this form of education more appealing we utilized instantiation and visualization of this mathematical terms through numerical and graphic models created by computer with the didactical software Maple.

Úvod

Súčasná doba volá stále viac po uvedomelom študentovi, ktorého matematická gramotnosť nespočíva len v umení počítať či ovládať matematiku operatívne, faktograficky a encyklopedicky. Dôraz je kladený na rozvoj schopností študenta vyformulovať dobre podložené matematické úsudky s cieľom aplikovať matematiku pri riešení konkrétnych problémov každodennej praxe. Takto definovaná matematická gramotnosť je predovšetkým o tom, že študent používa relevantnú matematickú vedomosť na riešenie úloh každodenného života, je schopný vidieť, vnímať, formulovať a riešiť problém pomocou matematiky. Uvedomujúc si potrebu zmienených kompetencií sme nútení sa zamýšľať nad spôsobmi, ako inovovať a posunúť vyučovanie matematiky spomínaným smerom – aby študenti lepšie chápali a následne úspešne aplikovali získané vedomosti. Pri vyučovaní matematiky je tak neodmysliteľnou súčasťou dôsledná reflexia medzi matematickými pojmami ktoré vyučujeme, a poznaním cesty k nim.

Problematika riešenia systémov lineárnych algebrických rovníc

V článku predkladáme výsledky prieskumu realizovaného medzi poslucháčmi 1. ročníka bakalárskeho štúdia Stavebnej fakulty ŽU. Títo sa v rámci predmetu Matematika 1 oboznamujú okrem iných tém aj s úvodom do lineárnej algebry, ktorého obsahom sú pojmy ako: *vektorový priestor*, *vektory*, *lineárna závislosť a nezávislosť vektorov*, *báza vektorového priestoru*, *matice* či *determinanty*.

Centrálnym problémom výučby je v nadväznosti na uvedené pojmy riešenie systémov lineárnych rovníc (v ďalšom texte budeme používať skratku SLR). Zvládnutie problematiky riešenia SLR je predpokladom pre úspešnú percepciu ďalších tém vyššej matematiky ako sú: rozklad racionálnej lomenej funkcie na parciálne zlomky (neurčité integrály), rôzne numerické metódy aproximácie, interpolácie, metóda najmenších štvorcov, či riešenie systémov diferenciálnych rovníc, pri riešení ktorých sa s touto problematikou opätovne stretávajú a sú nútení ju použiť ako nástroj na riešenie širšieho komplexu matematických problémov.

Neformálne pochopenie problematiky je preto v tejto fáze výučby pre študentov veľmi dôležité. Vo svojom prieskume sme sa rozhodli zmapovať úspešnosť študentov pri riešení SLR, diagnostikovať najrozšírenejšie chyby a pátrať po ich príčinách.

Následne naznačíme možné riešenia – ako zvýšiť úspešnosť študentov pri zvládaní tejto témy prostredníctvom lepšej vizualizácie a implementácie prostriedkov IKT do jej

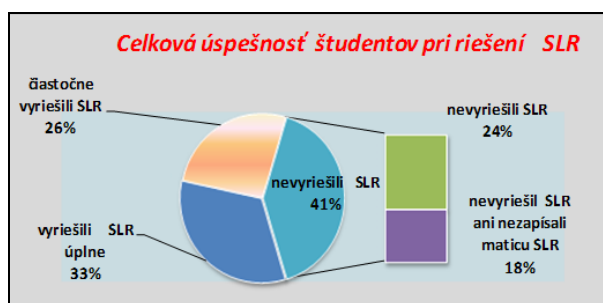
vyučovania. Na prieskume sa zúčastnilo 581 študentov prvého ročníka všetkých odborov bakalárskeho štúdia SvF ŽU. Prieskum sme formulovali ako diagnosticko-deskriptívny problém. Získané výsledky sme štatisticky vyhodnotili pomocou grafov a tabuliek.

Identifikácia problému

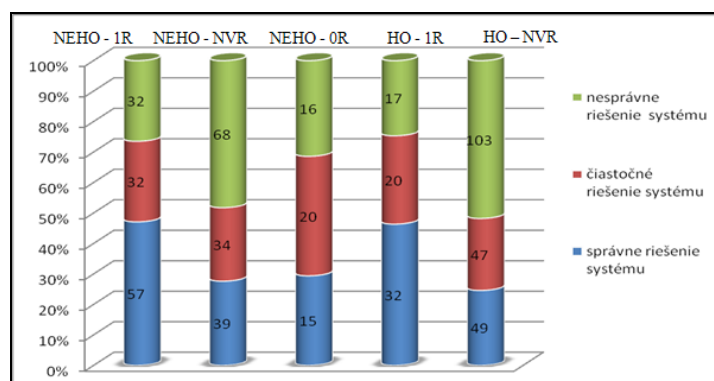
Pri každoročnom záverečnom preverovaní vedomostí z danej oblasti registrujeme u mnohých študentov izolované vnímanie preberaných pojmov, absenciu systematickej a dôslednej reflexie medzi preberanými pojmami a existujúcou cestou k nim. Zaznamenali sme, že študentom uniká poznanie a vnímanie potrebných súvislostí medzi matematickými pojmami, čo následne vedie k nesprávnym úsudkom a chybným záverom. Tabuľka 1 interpretuje počty študentov a ich úspešnosť pri riešení jednotlivých typov SLR.

Najmenej problémov sme zaznamenali pri riešení SLR, ktoré majú jediné riešenie - v týchto prípadoch bez ohľadu nato, či sa jedná o homogénne (47%) alebo nehomogénne systémy (46,3%) dokázalo viac ako 46% študentov úspešne a úplne riešiť SLR. Navyše ďalších približne 28% študentov riešilo úlohu čiastočne úspešne. SLR tohto typu nevyriešilo vôbec len približne 25% riešiteľov.

Naopak najviac problémov spôsobujú študentom tie typy SLR, ktoré majú nekonečne veľa riešení. Počet úspešných riešiteľov sa v týchto prípadoch pohybuje okolo 24% a tí, ktorí neuspeli tvoria približne 76% respondentov.



Obrázok 1: Celková úspešnosť študentov pri riešení SLR



Obrázok 2: Ako riešili študenti SLR

Typ sústavy LR	Počet úspešných riešiteľov	Počet čiastočne úspešných riešiteľov	Počet neúspešných riešiteľov	Celkový počet riešiteľov jednotlivých typov SLR
1. <u>Nehomogénny SLR s jedným riešením</u>	57	32	32	121
2. <u>Nehomogénny SLR s nekonečne veľa riešeniami</u>	39	34	68	141
3. <u>Nehomogénny SLR žiadne riešenie</u>	15	20	16	51
4. <u>Homogénny SLR s jedným riešením</u>	32	20	17	69
5. <u>Homogénna SLR s nekonečne veľa riešeniami</u>	49	47	103	199
Celkom	192	153	236	581

Tabuľka 1

Informačný vek otvára nové možnosti

Často registrujeme, že študent zvládne úspešne úpravu matice sústavy a rozšírenie matice sústavy na horný trojuholníkový tvar, správne určí hodnoty týchto matic, vie formulovať Frobeniovu vetu, no napriek tomu nedokáže vyjadriť riešenie SLR. Študenti tiež temer vôbec nevyužívajú systém spätnej väzby - v prípade systémov, ktoré majú nekonečne veľa riešení nedokážu urobiť skúšku správnosti, čo je opäť dôsledok len formálneho chápania danej problematiky.

Čo je príčinou tohto stavu? Predovšetkým v poznatkovej štruktúre študentov absentuje znalosť pojmov a prepojenie parciálnych vedomostí. V matematickom vzdelávaní nestačí poznať len izolované pojmy, vzťahy či algoritmy. Je nevyhnutné percipovať každý nový poznatok ako dôsledok predchádzajúcich a predpoklad nasledujúcich poznatkov. Inými slovami, treba prejsť správne miesto v existujúcej poznatkovej štruktúre. Čo teda môžeme urobiť pre zlepšenie úspešnosti študentov pri riešení SLR?

Matematické vnímanie a vzdelávania môžeme v súčasnosti zlepšiť predovšetkým implementáciou IKT do výučby. Ich potenciál je v možnej a hodnotnejšej vizualizácii a konkretizácii, ktoré uľahčujú vznik a vytváranie predmetnej predstavy matematického pojmu. Okolo každého matematického pojmu môžeme vytvárať množstvo konkrétnych virtuálnych modelov, ktorých pozorovanie, analyzovanie a porovnávanie otvára priestor pre formuláciu matematických hypotéz a ich následný neformálny dôkaz.

Vizualizácia problému

Pre našu tému to znamená predstaviť geometrický model dvojdimenzionálneho a trojdimenzionálneho vektorového priestoru a interpretovať na nich problematiku riešenia SLR, dôsledkom čoho predpokladáme následný neformálny prechod k riešeniu úloh v n -dimenzionálnom vektorovom priestore.

Skúsenosti nám potvrdili, že v prípade SLR s jedným riešením veľmi často dosadzovacou alebo sčítacou metódou získajú študenti správne riešenie úlohy. Ak však nastáva niektorý z prípadov: sústava buď nemá riešenie alebo má nekonečne veľa riešení študenti často zneistejú, ich formulácie záverov riešenia bývajú vágne a rozpačité. Geometrickú interpretáciu danej problematiky „po riadkoch“ (dve priamky, analýza počtu ich spoločných bodov vo vzťahu k počtu riešení SLR) poznajú študenti už zo stredných škôl. Metodicky podstatne silnejšou je pre študentov na vyššom stupni geometrická interpretácia SLR po stĺpcoch, ktorá vhodne akcentuje vzťah danej

problematiky a pojmov: *lineárna nezávislosť a závislosť vektorov, lineárna kombinácia vektorov, báza vektorového priestoru, hodnota systému vektorov, matice a determinanty*. V krátkosti ju preto predstavíme podľa [2].

Nech $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ sú nenulové vektory pričom jeden nie je násobkom druhého, teda sú to lineárne nezávislé vektory. Máme určiť takú ich lineárnu kombináciu, ktorá sa rovná vektoru $\vec{d} = (d_1, d_2)$, tj. nájsť také reálne čísla x, y aby platilo

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{d} \quad (1)$$

Podľa pravidiel pre operácie s vektormi a pre násobenie vektora skalárom môžeme vektorovú rovnicu (1) nahradiť dvoma skalárnymi rovnicami

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 &= d_1 \\ xa_2 + yb_2 &= d_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Úloha teda vedie k riešeniu sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktorú riešime napríklad sčítacou metódou.

Prvú rovnicu vynásobíme číslom $-a_2$, druhú a_1 . Získame ekvivalentnú sústavu rovníc

$$\begin{aligned} -xa_1a_2 - yb_1a_2 &= -d_1a_2 \\ xa_2a_1 + yb_2a_1 &= d_2a_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Ked' tieto rovnice sčítame dostávame:

$$y(b_2a_1 - b_1a_2) = d_2a_1 - d_1a_2 \quad (4)$$

Pretože vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú lineárne nezávislé a teda žiadny z nich nie je násobkom druhého je $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ a môžeme vypočítať

$$y = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (5)$$

Rovnakým spôsobom vypočítame neznámu x :

$$x = \frac{b_2d_1 - b_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (6)$$

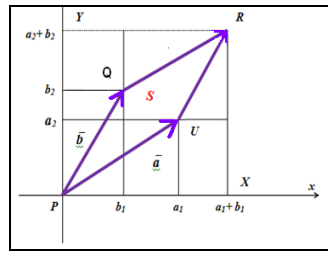
Následne predstavíme študentom geometrickú interpretáciu čísla $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ v menovateli zlomkov, ktoré označujeme symbolom

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

a nazývame determinantom matice sústavy (2). Využijeme interpretáciu pomocou obdĺžnika **PXRY** na obrázku 4. Obsah tohto obdĺžnika **PXRY** sa rovná číslu $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + b_1a_2 + a_1b_2 + b_1b_2$

Tento obdĺžnik môžeme pokryť rovnobežníkom **PURQ**, ktorého obsah označíme **S**, dvoma zhodnými pravouhlými trojuholníkmi s obsahom $0,5 \cdot a_1a_2$, dvoma zhodnými pravouhlými trojuholníkmi s obsahom $0,5 \cdot b_1b_2$ a s dvoma zhodnými obdĺžnikmi s obsahom a_2b_1 . Toto nám umožní vyjadriť obsah rovnobežníka **PURQ** takto: $S = b_2a_1 - b_1a_2$

Hodnota determinantu D sa rovná obsahu rovnobežníka, ktorého strany sú umiestnením vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ vid' obrázok 3.



Obrázok 3: Názorná interpretácia determinantu matice sústavy (2)

Študenti veľmi živo registrujú ako sa problém riešiť SLR vynoril z problému určiť lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a tiež ako sa následne ukázala súvislosť počtu riešení tohto systému s lineárnou závislosťou či nezávislosťou vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ a tiež s hodnotou determinantu matice sústavy (2).

Pri vizualizácii systému troch lineárnych rovníc s troma neznámymi využijeme interpretáciu SLR *po riadkoch*. Každá z rovníc systému je všeobecnou rovnicou roviny. Počet spoločných bodov takto zobrazených rovín indikuje počet riešení daného systému a tiež naznačuje kontext medzi hodnotou matice sústavy a polohou rovín (vzájomný vzťah normálových vektorov týchto rovín).

Na zobrazenie rovín sme použili didaktický softvér *Maple*. Jednoduchým príkazom znázorníme všetky tri roviny v jednom grafickom okne. Príkazom

$$R := \{a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2, a_3x + b_3y + c_3z + d_3\};$$

vložíme SLR do dialógového riadku a následne príkazom *solve()* získame jeho riešenie. Pre grafickú interpretáciu SLR použijeme príkaz *smart3dplot* $[x, y, z]$.

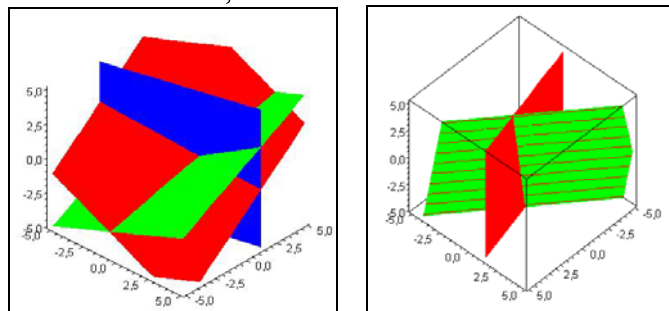
Uvádzame dva príklady, ktorých riešenia naznačia, ako je v systéme *Maple* možné jednoducho riešiť a tiež graficky interpretovať riešenie systému troch rovníc s troma neznámymi.

Príklad 1. Nehomogénny SLR s jediným riešením

```
> R := {5*x+7*y-13*z-5, 3*x-5*y+6*z-3, 2*x-8*y+1, 5*x+7*y-13*z-5};
{3*x-5*y+6*z-3, 2*x-8*y+1, 5*x+7*y-13*z-5}
> solve((1));
{y = 9/22, z = 3/11, x = 25/22}
> smartplot3d[x, y, z];
```

Príklad 2. Nehomogénny SLR s nekonečne veľa riešeniami

```
> R := {5*x+6*y-z-5, 10*x+12*y-2*z-10, 2*x-8*y+1};
{5*x+6*y-z-5, 2*x-8*y+1, 10*x+12*y-2*z-10}
{z = 26*y - 15/2, x = -1/2 + 4*y, y = y}
```



Obrázok 4: Grafická interpretácia riešení príkladov 1 a 2 v Maple

Na záver chceme poukázať ešte na jednu možnosť vizualizácie matematických pojmov, ktorá je veľmi nápomocná pri „učení sa matematiky s pochopením“. Využijeme reč symbolov, obrazov a ikon (tak blízku dnešnej našej mládeži) a vizualizujeme sieť matematických pojmov vhodnou mentálnou mapou. Mentálne mapy podporujú prirodzený proces myslenia, pozitívne vplyvajú na trvácnosť vedomostí a profitujú z neho predovšetkým študenti, ktorí majú s matematikou problémy. Vďaka mentálnej mape si lepšie uvedomujú vzájomné prepojenie, následnosť a podmienenosť preberaných matematických pojmov. Pomocou mentálnej mapy nájde informáciami zahľtený študent v učive to, čo je podstatné, dokáže si „urobiť v problematike logický poriadok“.

Pri výučbe SLR sme matematickú vetu 1 prezentovali mentálnou mapou - obrázok 5, ktorú sme následne využívali pri precvičovaní učiva, v dôsledku čoho bolo fixovanie preberaných pojmov intenzívnejšie a úspešnejšie.

Veta 1: Nech je daná štvorcová matica A stupňa n . Potom sú ekvivalentné nasledujúce výroky

1. Riadky matice A sú tvorené lineárne nezávislými vektormi z R^n .
2. Hodnota matice A sa rovná n ; $h(A) = n$.
3. Matica A je regulárna, t.j. existuje k nej inverzná matica A^{-1} .
4. Matica A je regulárna, t.j. $\det(A) \neq 0$.
5. Stĺpce matice A sú tvorené lineárne nezávislými vektormi z R^n .
6. Homogénna sústava lineárnych rovníc, ktorej maticou sústavy je matica A , má iba triviálne riešenie.
7. Každý algebraický vektor z R^n môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov tvorených riadkami (stĺpcami) matice A a to jednoznačne, až na poradie.
8. Sústava lineárnych rovníc, ktorej maticou sústavy je matica A má pre ľubovoľnú voľbu koeficientov na pravých stranách rovníc jediné riešenie.



Obrázok 5: Mentálna mapa

Záver

Cieľom článku bolo prezentovať výsledky prieskumu zameraného na vyhodnotenie úspešnosti študentov 1. ročníka bakalárskeho štúdia stavebnej fakulty ŽU pri riešení systémov lineárnych rovníc. Nakoľko štatistika ukázala vysokú mieru formálneho

vnímania uvedenej problematiky snažili sme sa následne upozorniť na možnosti, ktoré sa ponúkajú učiteľovi v dnešnej informačnej spoločnosti. Vďaka počítačovým technológiám je možná mnohonásobná systematická a strategická konkretizácia a vizualizácia matematických pojmov, ktorá pozitívne ovplyvňuje poznávací proces študenta a otvára priestor pre neformálne chápanie a následné úspešné aplikovanie takto získaných vedomostí v praxi.

LITERATÚRA

- [1] Bačová Beatrix: *Computer technology in mathematics education*. In: XXVI. International colloquium on the management of educational process. UO Brno 2008. ISBN 80-7231-139-5.
- [2] Kuřina František: *Podivuhodný svět elementární matematiky*. Akadémia Praha. ISBN 80-200-1366-0.
- [3] Kontrová Lýdia: *Mind mapping for building structures in mathematics*. In: XXVIII. International colloquium on the management of educational process. UO Brno 2010. ISBN 978-80-7231-722-6.
- [4] Sedliačková Zuzana – Pobočíková Ivana – Marta Janáčková: *Použitie sústav lineárnych rovníc pri riešení elektrických obvodov*. In: Did ZA: 3. žilinská didaktická konferencia s medzinárodnou účasťou. Zborník príspevkov z konferencie. Žilina, 2006. ISBN 80-8070-557-7.

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 026 01 Žilina
e-mail: lydia.kontrova@fpv.uniza.sk

Mgr. Silvia Hyčková
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 026 01 Žilina
e-mail: silvia.hyckova@fpv.uniza.sk

STOCHASTIKA V ŠTÚDIU UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE

JÚLIUS JENIS, MARTA VRÁBELOVÁ

ABSTRACT. The paper deals with the stochastics in the teacher training study for primary schools. We say that games and simulations by computer can be important tools in the teaching of this subject.

Úvod

Potreba rozvoja stochastického myslenia vyplýva z potrieb každodenného života, preto sa stochastika, predovšetkým pravdepodobnosť a štatistika dostala do učebných plánov mnohých, i nematematických, študijných odborov u nás i v zahraničí. Posilnila sa tiež hodinová dotácia kombinatoriky, pravdepodobnosti a štatistiky na základných a stredných školách. Podľa Štátneho vzdelávacieho programu má pravdepodobnosť a štatistika svoje zastúpenie aj v učive prvého stupňa ZŠ. Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy v Slovenskej republike ISCED 1- Primárne vzdelávanie konkrétne obsahuje: *Súčasťou matematického vzdelávania žiakov na 1. stupni ZŠ je Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika. Tento tematický okruh na 1. stupni ZŠ sa objavuje len v podobe úloh. Žiaci takéto úlohy na 1. stupni ZŠ riešia manipulatívnou činnosťou s konkrétnymi objektmi, pričom vytvárajú rôzne skupiny predmetov podľa určitých pravidiel (usporiadavajú, rôzne zoskupujú). Pozorujú frekvenciu výskytu určitých javov, udalostí a zaznamenávajú ich. Z tohto dôvodu musí mať stochastika zastúpenie aj v príprave učiteľov pre tento stupeň ZŠ. V tomto článku chceme poukázať na to, aké je dôležité, aby budúci učitelia ovládali základné poznatky z oblasti stochastiky, aby sa zbavili prípadných nekonceptných intuícii a spoznali úskalia s akými sa vo svojej učiteľskej praxi môžu stretnúť. Uvádzame tiež, ako možno u týchto študentov budovať stochastické myslenie pomocou hier a počítačových simulácií, a to takých, ktoré môžu v budúcej praxi využiť.*

Dôvody zavedenia stochastiky v príprave učiteľov pre 1. stupeň ZŠ

Pomocou vhodných úloh sa majú u žiakov 1. stupňa ZŠ položiť základy stochastického myslenia. Tento ich prvý kontakt so stochastikou je veľmi dôležitý a závisí od učiteľa, či žiaci nadobudnú k stochastike pozitívny vzťah. Učiteľ, ktorý neprešiel kurzom stochastiky, ani didaktickou prípravou v tejto oblasti, alebo mu stochastika bola podaná formálnym matematickým prístupom môže spôsobiť, že sa u žiakov vytvoria mylné predstavy o stochastike, ktoré sa veľmi ťažko odstraňujú. Na meranie rôznych komponentov štatistického a pravdepodobnostného myslenia existujú meracie nástroje. Jedným z nich je dotazník, ktorý vytvoril Gerfield. Na Pedagogickej fakulte Univerzity v Granade sa uskutočnil výskum, v rámci ktorého 132 študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie odpovedalo na 5 položiek tohto dotazníka ([3]). Nekoncepčnosť v ich stochastickom myslení sa plne prejavila. Uvedieme dve základné mylné predstavy, ktoré sa vyskytujú i v mnohých iných výskumoch a o ktorých si myslíme, že sú vlastné aj našim študentom. Prvá sa týka veľkosti vzorky. *Študenti malé vzorky považujú za rovnako reprezentatívne ako veľké vzorky* (tejto mylnej predstave sa hovorí „zákon malých čísel“). Druhá sa týka

pravdepodobností nastania výsledkov náhodného pokusu. *Študenti majú tendenciu považovať všetky výsledky náhodného pokusu za rovnako pravdepodobné.* Myslíme si, že túto druhú mylnú predstavu študenti nadobudnú tým, že sa pri vyučovaní pravdepodobnosti na strednej škole len formálne zavedie vzorec pre klasickú pravdepodobnosť a dostatočne sa neozrejmi jeho obmedzené použitie.

Na druhej strane by sme sa mohli pýtať, či je vôbec možné, aby deti pred desiatym rokom života pochopili elementárne pojmy stochastiky. Aj v tomto smere boli uskutočnené výskumy. Už u detí predškolského veku sa skúmalo, ako deti porozumejú pojmu spravodlivá hra. Deti objavili, že dve rulety, ktoré sa pri hre využívali by mali mať rovnako veľké biele a čierne políčka, aby bola hra spravodlivá ([5]). Potvrďuje to aj výskum robený v rámci projektu Kega 3/7001/09, kde sa okrem iného sleduje zvyšovanie kompetencií v oblasti náhodnosť u žiakov 5. ročníka ZŠ. V dotazníku týkajúceho sa úloh z tejto oblasti jedna učiteľka napísala, že úlohy boli ľahké, deti pravdepodobnosť vedia. Zrejme sa tieto deti už so stochastikou stretli v nižšom ročníku. Boli to ľahké úlohy, ale mnoho učiteľov ich považovalo za nevhodné a vôbec ich do vyučovania nezaradili. Tak tieto deti, ako mnohé iné, nedostali šancu objaviť jednoduchosť a krásu stochastiky.

Matematika v učebnom pláne učiteľstva pre primárne vzdelávanie

Predmet stochastika resp. pravdepodobnosť a štatistika sa do učebného plánu magisterského študijného programu Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie, ktorý je na PF UKF v Nitre akreditovaný v rámci študijného odboru 1.1.5. Predškolská a elementárna pedagogika nedostal. Medzi matematické predmety zaradené do tohto plánu patria povinné predmety Metódy riešenia matematických úloh, Didaktika matematiky I a Didaktika matematiky II a povinne voliteľné predmety Aritmetika – vybrané kapitoly II, Geometria – vybrané kapitoly II a Zábavné úlohy. Je tu ešte voliteľný predmet Počítač a didaktické hry. Prostredníctvom tohto článku chceme navrhnúť, aby sa študenti tohto študijného programu stretli so stochastikou aspoň v rámci uvedených predmetov. V rámci didaktiky matematiky by sa mali oboznámiť s najnovšími výskumami u žiakov daného veku v oblasti náhodnosť, oboznámiť sa s úskaliami, ktoré musia deti prekonať. Učiteľ sa musí dozvedieť, čo deti nechápu a naučiť sa pomôcť im preklenúť tieto prekážky. Napr. výsledky výskumu Kega 3/7001/09 ukázali, že niektorí piatáci si myslia, že starší a skúsenejší človek vie „lepšie ovplyvniť náhodu“ ako neskúsenejší a mladší. Témy zo stochastiky možno zaradiť do predmetu Zábavné úlohy alebo Počítač a didaktické hry. To ale znamená, že stochastike môže byť venovaných len niekoľko hodín, ktoré musia byť využité efektívne. Pre študentov bude najzaujímavejšie a aj najväčším prínosom, ak budeme s nimi riešiť úlohy ktoré budú môcť využiť v praxi ([2]). Môžeme využiť aj stochastické hry, takýto prístup k výkladu stochastiky je prirodzený a historicky daný. Študentom môžeme odporučiť študijnú literatúru, aby si v prípade záujmu mohli sami doplniť vzdelanie v tejto oblasti. Najvhodnejšou knihou pre študentov tohto štúdia je Płockého kniha [4], o niečo vyššiu odbornú úroveň má učebnica Zváru a Štěpána [6]. Zaujímavé problémy z rôznych oblastí pravdepodobnosti a štatistiky publikoval Anděl v [1]. Veľa zaujímavých stránok sa nájde aj na internete, veľmi vhodná je napr. webová stránka [7].

Ukážka didaktickej hry

Uvedieme hru, ktorá nesie pracovný názov *Po rebríku ku hviezdám*.

Popis hry. Potrebujeme dva rebríky s 10 priečkami – červený a modrý (môžu byť aj nakreslené), dvoch panáčikov – červeného a modrého (môžu mať mená), hraciu kocku, mincu a dostatočne veľa hviezdčiek.

Pravidlá hry. Žiakov rozdelíme na dve skupiny. Jednej skupine dáme kocku, červený rebrík a červeného panáčka, druhej skupine mincu, modrý rebrík a modrého panáčka. Žiak prvej skupiny hádže kockou a súčasne žiak druhej skupiny hádže mincou. Ak prvej skupine padne stena zo šiestimi bodkami – šesťka, červený panáček vystúpi na prvý schodík červeného rebríka, v druhej skupine modrý panáček vystúpi na prvý schodík modrého rebríka, ak padne na minci znak – líce. Hra pokračuje rovnako, len dvojice žiakov, ktorí hádžu sa menia. Vyhrá skupina, ktorej panáček prvý vystúpi na poslednú priečku rebríka a získa hviezdu. Hra sa môže niekoľkokrát opakovať, pričom sa stále zaznamenáva, čo padlo na kocke a čo na minci, napríklad na tabuľu.

Didaktické ciele hry u žiakov:

- Pochopiť, že výsledok hodu kockou resp. hodu mincou nezávisí od toho, kto hádže (ani od farby rebríka) a nedá sa dopredu predpovedať výsledok, teda, že sú to *náhodné pokusy*.
- Všimnúť si, koľko výsledkov a akých môže nastať pri hode kockou a pri hode mincou, určiť *množinu výsledkov náhodného pokusu*.
- Spočítať koľko je priaznivých a koľko nepriaznivých výsledkov pri hode kockou a pri hode mincou a dať tieto výsledky do pomeru, to znamená určiť *šancu*, že padne šesťka pri hode kockou a znak pri hode mincou.
- Porovnať šance. Zistiť, že skupina s mincou má väčšiu šancu, že postúpi o schodík vyššie ako skupina s kockou, *hra je nespravodlivá*.
- Navrhnuť ako urobiť túto hru spravodlivou (navrhnuť, že obe skupiny by mali hádzať tým istým – používať ten istý *náhodný mechanizmus*, môžeme ich vyzvať, aby hľadali riešenie pri používaní kocky a mince – možno navrhnú výmenu kocky a mince v skupinách po každej hre a možno ich napadne, aby sa červený panáček posunul vyššie, keď padne dvojka, štvorka alebo šesťka - teda keď nastane *náhodný jav* A: Padne párný počet bodiek.).
- Presvedčiť sa, že všetky steny kocky *padajú približne rovnako často*. Spočítajú koľkokrát padla na kocke jedna, dve, tri, štyri, päť a šesť bodiek, napíšu *tabuľku rozdelenia početností*. Podobne to urobíme s mincou.

Deti pritom necháme používať svoj vlastný jazyk a nemusíme im všetky odborné názvy ani prezradiť. Na dosiahnutie didaktického cieľa ich navádzame vhodnými otázkami.

Didaktické ciele hry u študentov:

- Voviesť študentov do základov pravdepodobnosti – naučiť ich základné pojmy náhodný pokus, výsledok náhodného pokusu, množina výsledkov náhodného pokusu, náhodný jav, početnosť nastania výsledku resp. náhodného javu pri nezávislom opakovaní pokusu. Pre študentov uvedieme aj pojem pravdepodobnosti náhodného javu ako čísla, okolo ktorého kolíšu relatívne početnosti tohto javu – tu už môžeme využiť počítačovú simuláciu hodu kockou resp. mincou.
- Nakoniec uvedieme, že tieto náhodné pokusy možno popísať klasickým pravdepodobnostným priestorom.
- Ďalej možno poznamenať, že ak pri hode kockou za množinu výsledkov vezmeme len dva výsledky – *padne párný počet bodiek* a *padne nepárny počet bodiek* (je dôležité, aby si študenti uvedomili, že za elementárne javy berieme najjemnejšie výsledky, ktoré ešte potrebujeme rozlišovať), tak dostávame klasický pravdepodobnostný priestor izomorfný tomu, ktorý popisuje hod mincou.

- Prvotnú tabuľku zaznamenaných počtov padnutých bodiek môžeme využiť na tvorbu tabuliek a grafov, prípadne výpočet mier polohy a variability, ktoré tvoria základ popisnej štatistiky.
- Okrem toho môžeme výsledkom hodu mincou priradiť 0, ak padne číslo a 1, ak padne znak, čím sme definovali náhodnú premennú na množine výsledkov a definovať alternatívne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $p = \frac{1}{2}$. Náhodná premenná s týmto rozdelením reprezentuje základný súbor, ktorý si možno predstaviť ako „nekonečnú množinu, v ktorej je polovica núl a polovica jednotiek“. Pri zaznamenaní výsledkov opakovaného hodu mincou dostaneme konečnú postupnosť núl a jednotiek – *výberový súbor*. Tento dobre reprezentuje základný súbor, ak sú v ňom nuly a jednotky zastúpené približne v rovnakom počte. Študenti sa majú možnosť presvedčiť, že výberový súbor väčšieho rozsahu je lepším reprezentantom základného súboru ako výberový súbor malého rozsahu (teda, že neplatí zákon malých čísel).

LITERATÚRA

- [1] Anděl, J.: *Matematika náhody*. Matfyzpress, Praha, 2000, ISBN 80-85863-52-9.
- [2] Estepa, A.: *The training of primary school teachers in stochastics and in stochastics education in Europe*. Prístupné 12.7. 2010. http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic3/T3P6_Estepa.pdf.
- [3] Godino, J. D. – Cañizares, M. J. – Diaz, C.: *Teaching Probability to Pre-service Primary School Teacher through Simulation*. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/2989.pdf>. Prístupné 12. 7. 2010.
- [4] Płocki, A.: *Pravdepodobnosť okolo nás*. PF KU Ružomberok, 2007, ISBN 978-80-8084-260-4
- [5] Tatsis, K. – Kafoussi, S. – Skoumpourdi, Ch.: *Discussing of the fairness of probabilistic games: The creation of a discursive community with kinderg arten children*. In: *Language and communication in mathematics*, s. 167-173. Prístupné na webe 12. 7. 2010.
- [6] Zvára, K. – Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Matfyzpress, Praha 2001, VEDA, Bratislava 2002, ISBN 80-2240736-4.
- [7] http://onlinestatbook.com/stat_sim/index.html

RNDr. Július Jenis
 Centrum informačných a komunikačných
 technológií
 Univerzita Konštantína Filozofa
 Trieda A. Hlinku 1
 SK – 949 01 Nitra
 e-mail: jjenis@ukf.sk

Doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
 Katedra matematiky
 Fakulta prírodných vied
 Univerzita Konštantína Filozofa
 Trieda A. Hlinku 1
 SK – 949 01 Nitra
 e-mail: mvrabelova@ukf.sk

METÓDA PROBLEM SOLVING V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

IVETA KOHANOVÁ

ABSTRACT. In this paper we focus on last reform in Slovak education, particularly on development of key competencies within mathematics teaching. We present the Problem solving approach as one of the proper methods to develop these competencies. In the last part of the paper we give some examples of mathematical problems, which were introduced by teacher students in the course of Didactics of Mathematics, in order to experience the problem-solving approach during their university preparation.

Úvod

V mnohých krajinách sveta bolo v poslednej dobe vzdelávanie často kritizované z viacerých sektorov, edukátori museli rozmýšľať nad reformou vyučovania, učenia sa, i kurikulí. Odtrhnutie obsahu vzdelávania od jeho aplikácie v praxi nepriaznivo ovplyvnilo výsledky mnohých školských systémov, na ktoré poukazujú medzinárodné porovnania, a to nielen v predmete matematika. Vyučovanie matematiky na slovenských školách sa orientovalo skôr na mechanické počítanie, memorovanie vzorcov a preberanie matematického obsahu bez toho, aby bola zohľadnená jeho užitočnosť pre život. (Kubáček, et al., 2004). Národný program výchovy a vzdelávania na Slovensku (MILÉNIUM, 2002) sa snažil pripraviť žiaka na jeho budúcu aktívnu účasť v spoločnosti a preto v rámci vyučovania všetkých predmetov zdôrazňuje potrebu rozvoja týchto kľúčových kompetencií človeka:

- komunikačné schopnosti,
- personálne a interpersonálne schopnosti,
- schopnosti tvorivo a kriticky riešiť problémy,
- schopnosť pracovať s modernými informačnými technológiami,
- schopnosti potrebné na udržanie zdravého života,
- schopnosť formovať občiansku spoločnosť.

Školská reforma na Slovensku z roku 2008 sa nesie v podobnom duchu, podľa Štátneho vzdelávacieho programu učebný predmet matematika sa v rámci nižšieho i vyššieho sekundárneho vzdelávania zameriava na rozvoj matematickej kompetencie tak, ako ju formuloval Európsky parlament:

„Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Vychádzajúc z dobrých numerických znalostí sa dôraz kladie na postup a aktivitu, ako aj na vedomosti. Matematická kompetencia zahŕňa na rôznych stupňoch schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).“

Cieľom matematiky v rámci sekundárneho vzdelávania je, aby žiak získal schopnosť používať matematiku v svojom budúcom živote. Vyučovanie matematiky by malo byť

vedené tak, aby žiaci získavali nové vedomosti prostredníctvom riešenia úloh s rôznorodým kontextom, aby tvorili jednoduché hypotézy a skúmali ich pravdivosť, vedeli používať rôzne spôsoby reprezentácie matematického obsahu, rozvíjali svoju schopnosť orientácie a algoritmického myslenia (ŠPÚ, 2008).

Stále viac a viac ľudí musí byť schopných myslieť na seba v rýchlo meniacom sa prostredí, obzvlášť keď nám technológie uľahčujú prístup k mnohým informáciám. A taktiež vedieť sa prispôbiť neznámym, nepredvídateľným situáciám. Vyučovanie matematiky má v sebe zahŕňať zručnosti a funkcie, ktoré sú súčasťou každodenného života (čítanie mapy na nájdenie cesty; porozumenie ekonomickým indikátorom, splateniu pôžičky; vypočítať, či najlacnejšia vec je naozaj najlepšia kúpa; ...). V poslednej dobe je teda snahou nielen tvorcov učebníc, ale aj politikov, zlepšiť žiacke postoje k matematike a to napríklad formou didaktických hier (Vankúš, 2007), používať na vyučovaní rôzne didaktické softvéry (Slavičková, 2007) a tiež rozvíjať ich kompetencie týkajúce sa *riešenia problémov z reálneho života*. To znamená, že žiaci by mali byť schopní:

- porozumieť daným informáciám,
- identifikovať dôležité znaky a ich vzájomné prepojenie,
- skonštruovať alebo použiť nejakú externú reprezentáciu,
- vyriešiť problém,
- overiť a zdôvodniť svoje riešenie,
- oznámiť (komunikovať) svoje riešenie.

Ukazuje sa, že najvhodnejšími metódami na rozvoj týchto kľúčových kompetencií sú:

- projektové vyučovanie,
- kooperatívne vyučovanie,
- problémové vyučovanie (problem solving).

Charakteristika metódy problem solving

Kým Turek (1999) považuje problémové vyučovanie za inovatívnu výchovno-vzdelávaciu koncepciu, v pedagogickom slovníku je problémové vyučovanie charakterizované ako vyučovacia metóda, resp. typ výučby, ktorý predpokladá riešenie problémov samotnými žiakmi. Ide o prostriedok intelektuálneho rozvoja (Průcha, Walterová, Mareš, 1995). Podľa Lestera a kol. (1994) je táto vyučovacia metóda charakteristická tým, že učiteľ pomáha žiakovi konštruovať a pochopiť matematické pojmy a postupy prostredníctvom riešenia problémov. Žiaci sú tak zahrnutí do činnosti, v rámci ktorej tvoria, odhadujú, objavujú, testujú a verifikujú a tak sa skutočne venujú matematike. Dôraz je tak presunutý z učenia riešenia problémov na *učenie sa* pomocou riešenia problémov. Van de Walle (2001) tiež zdôrazňuje, že dôležité matematické pojmy a postupy sa najlepšie učia prostredníctvom problémového vyučovania, v rámci ktorého sú žiakovi predkladané úlohy alebo problémy na riešenie, ktoré ich nútia premýšľať a rozvíjať si matematické poznatky, ktoré sa potrebujú naučiť.

Jednotlivé kroky riešenia daného problému možno zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- vymedzenie a porozumenie problému/úlohe,
- vypracovanie plánu riešenia,
- realizácia plánu, riešenie a vyriešenie,
- reflexia nad spôsobom riešenia a výsledkom,

s ktorými súvisia základné vlastnosti metódy problem solving:

- interakcie medzi študent-študent a učiteľ-študenti,
- matematický dialóg a konsenzus medzi študentmi,
- učiteľ poskytne len toľko informácií, koľko je minimálne potrebných pre vytvorenie problému; študenti následne vysvetľujú, interpretujú a snažia sa nájsť jeden alebo viacero spôsobov riešenia,
- učiteľ akceptuje správne/nesprávne odpovede a nehodnotí ich,
- učiteľ iba usmerňuje, pýta sa „základné“ otázky, vie kedy je vhodné zasiahnuť, kedy sa vrátiť krok späť a kedy nechať žiakov počítat' svojim spôsobom.

Vyučovanie pomocou riešenia problémov môže žiakom zlepšiť zvládanie širokej škály emócií pri jednotlivých fázach procesu riešenia. Taktiež môže pomôcť žiakom prispôbiť sa zmenám a neočakávaným problémom v ich budúcej kariére, či v iných aspektoch ich života. Problémové vyučovanie vyžaduje od žiakov schopnosť prostredníctvom logickej dedukcie rozhodnúť sa, aký algoritmus/postup si daná situácia pýta (ak nejaký) a v situáciách, kedy sa algoritmus nedá priamo aplikovať, aj schopnosť vytvoriť vlastné pravidlá pre riešenie problému. Žiaci sa tak v budúcnosti budú vedieť efektívne a tvorivo zapájať do spoločnosti.

Podľa Margaret Taplin možno problémové úlohy rozdeliť do týchto typov:

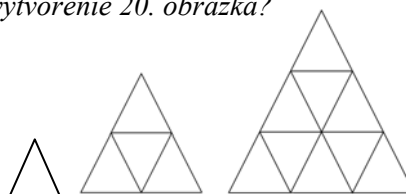
- **slovné úlohy**, v ktorých sú pojmy zasadené do bežnej situácie. Od žiaka sa očakáva rozpoznanie a aplikácia vhodného algoritmu/pravidla, čím sa žiaci pripravujú na úlohy zo života.

Babka napiekla svojim 4 vnúčatám spolu 52 buchiet. Koľko buchiet má dostať každé vnúča?

Laura a Filip začali v pondelok čítať tú istú knihu. Laura prečíta za deň 19 strán, Filip 4. Na akej strane bol Filip, keď Laura bola na strane 133?

- **neobvyklé úlohy**, ktoré si vyžadujú vyššiu úroveň interpretácie a organizáciu informácií, nielen rozpoznanie a aplikáciu algoritmu. Ide teda o rozvoj všeobecných vedomostí a „sedliackeho rozumu“.

Koľko trojuholníkov potrebujeme na vytvorenie 20. obrázka?



- **reálne úlohy**, zamerané na skúmanie, ktoré nie vždy musia mať fixné riešenie a matematika je v nich nástrojom na nájdenie riešenia, čím žiakov zapájame do služby pre spoločnosť.

Nedávno sa zistilo, že čistý motor spotrebuje menej paliva. Lietadlo spotrebovalo 4700 litrov paliva. Po tom, ako ho vyčistili, spotrebovalo na tej istej ceste 4630 litrov. Ak cena paliva za liter je 59 centov, o koľko je čisté lietadlo ekonomickejšie?

- **úlohy s údajmi navyše**, ktorých cieľom je, aby žiaci vybrali vhodné a relevantné údaje.
Jakub sa rozhodol prečítať 580 stranovú knihu. Prvé tri dni prečítal po 80 strán, potom si dal jednodňovú prestávku a počas nasledujúcich dní prečítal denne 68 strán, až pokým knihu neprečítal. Koľko strán Jakub prečítal?
- **úlohy s nedostatkom informácií**, ktoré podnecujú žiakov byť vynaliezaví. Riešenie takýchto úloh úplne závisí od ich vedomostí a skúseností.
Koľko litrov vody sa spotrebovalo dnes v našom meste?
Koľko eur by ušetril Viktor za mesiac, keby si namiesto ochutených ovocných jogurtov kupoval biely jogurt a ovocie, ktoré by si do neho krájal?

Príprava budúcich učiteľov

V rámci kurzu Didaktika matematiky 2 na FMFI UK v Bratislave, ktorý je určený pre študentov (budúcich učiteľov) prvého ročníka magisterského štúdia, je jednou z preberaných tém aj problémové vyučovanie, o ktorom si myslíme, že by malo byť súčasťou vyučovania matematiky na základných a stredných školách. Študenti sa o tejto metóde dozvedia na prednáške a následne na cvičení prezentujú úlohy, ktoré sami vymysleli, našli v učebniciach alebo na internete. Ich úlohou je potom prezentované úlohy predložiť žiakom v rámci ich pedagogickej praxe a získať tak na ne spätnú väzbu a tiež nadobudnúť skúsenosť (aspoň malú), ako žiaci na takéto (zatiaľ netypické) úlohy reagujú. Získané skúsenosti/postrehy opäť prezentujú na cvičení z Didaktiky matematiky, kde sa často zrodí bohatá diskusia, ktorá veríme má pozitívny a motivujúci prínos pre ich budúcu prácu učiteľa. Na ukážku uvedieme niekoľko študentmi prezentovaných úloh, ktorých obsah spĺňa charakteristiky problémového vyučovania:

- *Z Bratislavy odíde vlak do Prahy. O hodinu neskôr odíde vlak z Prahy do Bratislavy. Oba vlaky idú rovnakou rýchlosťou. Ktorý vlak bude bližšie k Bratislave, keď sa stretnú?*
- *Vieme, že každý má dvoch rodičov, tí majú svojich dvoch rodičov, atď. Ak by sme sledovali rodokmeň 40 generácií, teda okolo 1000 rokov, tak dostaneme, že celkový počet niekoho predkov je 2^{40} , čo je však viac ľudí, ako ich za posledných 1000 rokov na Zemi žilo. Je to možné?*
- *Barbara býva v Kalifornii a v New Yorku má kamarátku Zitu, ktorej škola končí o tretej poobede. Barbare končí škola už o pol druhej a tak sa dohodli, že si po škole zavolajú. Zita však ide o piatej na volejbalový tréning. Ako najdlhšie môžu po škole spolu volať?*
- *Na každej mape je vyznačená mierka, tú čo máme my má mierku 1 : 25 000. Koľko takýchto máp by bolo potrebných na to, aby sme týmito mapami „vykachličkovali“ celé územie, ktoré vyznačujú?*
- *Praženicu pripravujeme u nás obyčajne zo slepačích vajec. Čo tak predstaviť si, že by sme ju robili z pštrosích vajec? Koľko slepačích vajec potrebujeme na takú veľkú praženicu ako z jedného pštrosieho vajca?*

- Viktor si kúpil čerstvo narúbané drevo na kúrenie. Dozvedel sa ale, že ho musí najprv vysušiť na vlhkosť 20%, aby ním mohol kúriť. Čerstvé drevo má vlhkosť 50% (z danej váhy je polovica voda). Ako pomocou váhy zistí, či už je drevo suché?
- Tomáš si pozval na oslavu 11 ľudí. Pripíjať by si chcel s Martini. Koľko fliaš Martini potrebuje Tomáš na oslavu kúpiť, aby mu vystačili na prípitok pre každého? Koľko fliaš by mal Tomáš kúpiť, ak sa rozhodol vložiť do každého pohára pred naliatím jednu olivu?
- Maliar nemá k dispozícii žiadne predlžovacie násady, iba 2m rebrík. Bezpečnostné normy hovoria, že na rebríku nemôže stáť vyššie ako na tretej priečke zhora a strana rebríka nemôže zvierat' so zemou uhol väčší ako 70° . Aký vysoký strop dokáže maliar za takýchto podmienok namaľovať?

Záver

Problémové vyučovanie je už niekoľko rokov celosvetovo považované za prostriedok, ktorý žiakom umožní konštruovať, vyhodnocovať a vylepšovať ich vlastné teórie o matematike a tiež teórie iných (NCTM, 1989). Má všetky predpoklady na to, aby jeho používanie na hodinách matematiky žiakom pomohlo získať kompetencie, ktoré sú potrebné pre ich budúce pôsobenie v spoločnosti a tiež odráža zmeny v osnovách a v celkovej filozofii vyučovania matematiky na školách v súvislosti s ostatnou školskou reformou na Slovensku. Preto sa tejto metóde venujeme v príprave budúcich učiteľov matematiky na FMFI UK, v rámci kurzov Didaktický seminár zo školskej matematiky (Regecová, 2009) a Didaktika matematiky. Samotní študenti si na vlastnej koži vyskúšali použitie problémového vyučovania na školách v rámci ich pedagogickej praxe. Potvrdili, že to nebolo jednoduché na prípravu, ale žiakov zaujali a zanechali v nich dojem, že matematika vie byť aj užitočná a zábavná.

LITERATÚRA

- [1] Kubáček, Z., et al.: *SK 2003: Matematická gramotnosť*, Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2004, ISBN 80-85756-88-9
- [2] Lester, F.K.Jr., Masingila, J.O., Mau, S.T., Lambdin, D.V., dos Santon, V.M. and Raymond, A.M.: *Learning how to teach via problem solving*, in Aichele, D. and Coxford, A. (Eds.) *Professional Development for Teachers of Mathematics*, Virginia, NCTM, 1994
- [3] National Council of Teachers of Mathematics: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston - Virginia, NCTM, 1989
- [4] Štátny pedagogický ústav: *Štátny vzdelávací program, Matematika, príloha ISCED 3A*, Bratislava, ŠPÚ, 2008
- [5] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J.: *Pedagogický slovník*, Praha, Portál, 1995, IBSN 80-7178-029-4
- [6] Regecová, M.: *Návrh kurzu finančnej matematiky pre študentov odboru učiteľstvo akademických predmetov: prieskum finančnej gramotnosti študentov*, Komárno,

- Univerzita J. Selyeho, 2009, In: Vzdelávanie - veda - spoločnosť: sekcia matematické vedy (CD ROM), ISBN 978-80-89234-84-4
- [7] Slavičková, M.: *Using educational software during mathematical lessons at lower secondary school*, Bratislava, Comenius University, 2007, In: Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, Issue 7
- [8] Taplin, M.: *Teaching Values Through A Problem Solving Approach to Mathematics*, [cit. 2010-08-10] dostupné na internete: <http://www.mathgoodies.com/articles/teaching_values.html>
- [9] Turek, I.: *Tvorivé riešenie problémov*, Bratislava, Metodické centrum v Bratislave, 1999, ISBN 80-8052-054-2
- [10] Van de Walle, J. A.: *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, 4th ed*, New York, Addison Wesley Longman, 2001
- [11] Vankúš, P.: *Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics and process of its teaching*, Larnaca, University of Cyprus, 2007, In: European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, ISBN 978-9963-671-25-0

PaedDr. Iveta Kohanová, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: kohanova@fmph.uniba.sk

PROČ JE DŮLEŽITÉ UVĚDOMOVAT SI VZTAH MEZI PRAVDĚPODOBNOSTMI OPAČNÝCH JEVŮ

RADEK KRPEC

ABSTRACT. The paper is concerned with a relation between the probability of a random event A and the probability of the complement of the event A . The focus is in a problems of an using this relation in solutions of exercises from probability.

Úvod

V tomto článku bych chtěl zdůraznit důležitost jedné z vlastností pravděpodobnosti, která se zdá na první pohled jednoduchá a každému jasná. Přesto při řešení úloh ať už složitých či jednodušších na tuto vlastnost studenti často zapomínají. Mnoho úloh je vhodné řešit užitím této vlastnosti a jsou úlohy jejichž řešení přímo užití této vlastnosti vyžaduje. Touto vlastností je vztah mezi pravděpodobností náhodného jevu A a jevu opačného k jevu A . V celém článku budeme zkráceně používat místo pojmu náhodný jev pouze jev a budeme tím mít vždy na mysli, že jde o náhodný jev.

1. Vztah mezi pravděpodobnostmi jevu A a pravděpodobností jevu opačného k jevu A

Nechť $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ je pravděpodobnostní prostor, kde Ω je prostor všech elementárních jevů spjatých s daným náhodným pokusem, $\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω a P je funkce pravděpodobnosti definovaná na množině $\mathcal{A}$.

Pak součet pravděpodobnosti jevu $A \in \mathcal{A}$ a pravděpodobnosti jevu $\bar{A} \in \mathcal{A}$, kde $\bar{A}$ je jev opačný k jevu A , je roven jedné, tedy

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Z toho vyplývá

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (*)$$

Tento vztah je na první pohled jednoduchý a jasný.

2. Problémy s představami míry pravděpodobnosti opačných jevů

I když je tento vztah (*) zcela zřejmý, studenti si zpravidla neuvědomují jeho důsledky, co se týče velikostí pravděpodobností těchto jevů. U zkoušky z úvodu do teorie pravděpodobnosti pokládám našim studentům učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ následující typ otázky:

Nechť pro jev A platí $\frac{1}{4} \leq P(A) \leq \frac{3}{4}$. Co bude platit pro pravděpodobnost $P(\bar{A})$, kde

$\bar{A}$ je jev opačný k jevu A .

Z dlouhodobého průzkumu mi vychází, že zhruba čtvrtina dovede odpovědět správně, tedy že $\frac{1}{4} < P(\bar{A}) < \frac{3}{4}$.

Přibližně čtvrtina odpovídá, že $\left(P(\bar{A}) < \frac{1}{4}\right) \vee \left(P(\bar{A}) > \frac{3}{4}\right)$. Přibližně třetina nedovede odpovědět vůbec. Ostatní odpovědi jsou pak nějakým výstřelem do tmy, kdy odpoví něco bez jakéhokoli přemýšlení.

Přitom právě tyto představy nám mohou sloužit k odhadům a výpočtům mnoha pravděpodobností. Definujme si například tyto typy jevů:

1. Jev A nazýváme *prakticky jistý*, jestliže $P(A) > 0,95$.
2. Jev B nazýváme *prakticky nemožný*, jestliže $P(B) < 0,05$.

Toto pojmenování jevů souvisí více s teorií statistiky, ale protože pravděpodobnost a statistika jsou úzce propojeny, pak je zcela na místě použití tohoto pojmenování i v teorii pravděpodobnosti. Z výše uvedeného vztahu pravděpodobností jevu a jevu k němu opačnému vyplývá, že jev prakticky nemožný je jev opačný k jevu prakticky jistému, což si studenti málokdy uvědomí. Studenti si neuvědomí, že pokud je prakticky jisté, aby daný jev A nastal, pak je prakticky nemožné, aby nastal jev opačný k jevu A . Tzn. že si vůbec neuvědomí, že když jev A má velkou pravděpodobnost, že nastane, pak jev k němu opačný má tuto pravděpodobnost malou a obráceně.

Taktéž si neuvědomí, že pokud se pravděpodobnost daného jevu A blíží k jedné polovině, pak pravděpodobnost jevu opačného k jevu A se bude také blížit k jedné polovině. Na příkladu s mincí to zpravidla bývá všem studentům jasné, že pokud pravděpodobnost padnutí líce je jedna polovina, pak pravděpodobnost padnutí rubu je také jedna polovina. Pokud se ovšem přesuneme ke složitějším jevům, pak na tento vztah zcela zapomenou.

3. Využití vztahu pravděpodobností opačných jevů k řešení úloh

Když už si studenti tento vztah docela osvojí, pak pokud jej pravidelně při řešení úloh z teorie pravděpodobnosti nepoužívají, tak na něj velká část zcela zapomene. Když pak narazí na úlohy, jejichž řešení je užitím vztahu (*) jednodušší nebo jej přímo vyžaduje, tak jdou složitější a zdlouhavější cestou a často ani nedojdou k cíli vzhledem k obtížnosti řešení bez užití tohoto vztahu.

V další části bych chtěl nastínit pár úloh, k jejichž řešení je vhodné anebo přímo nutné využít vztahu (*).

1. úloha: *Ve studijní skupině je 30 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva slaví narozeniny téhož dne? (Předpokládejme, že rok má 365 dnů)*

První problém, se kterým se setkávám při řešení této úlohy je ten, že studenti nevědí, zda *záleží* či *nezáleží na pořadí* při přiřazování dnů jednotlivým studentům. Neodvedou si představit realitu a často argumentují, že je jedno, jestli má Pavel narozeniny 3. června a Petr 4. září nebo obráceně. Podle nich záleží pouze na tom, zda jde o stejný den či nikoli. Tak jim položím otázku, kolik je ve skutečnosti všech možností, jak může slavit 30 studentů narozeniny během roku a v té chvíli si uvědomí, že na pořadí skutečně záleží.

Nyní se ovšem dostáváme k problému řešení úlohy bez pomoci vztahu (*). Při řešení úlohy by většina (asi 70 %) postupovala určením pravděpodobnosti toho, že slaví narozeniny týž den dva studenti z třiceti, pak totéž pro tři, pro čtyři a tak dále až pro všech třicet studentů. Jak vidíme, museli bychom provést celkem 29 výpočtů pravděpodobností a pak je sečíst. Přestože tento výpočet by většina zvládla, je tato cesta poměrně zdlouhavá.

Jen asi 30 % studentů si uvědomí, že lepší je jít cestou užitím vztahu (*). Tj. určit pravděpodobnost toho, že žádní dva neslaví narozeniny téhož dne:

$$P(A) = \frac{365!}{365^{30}} \doteq 0,29.$$

A nyní použijeme vztahu (*) a dostaneme:

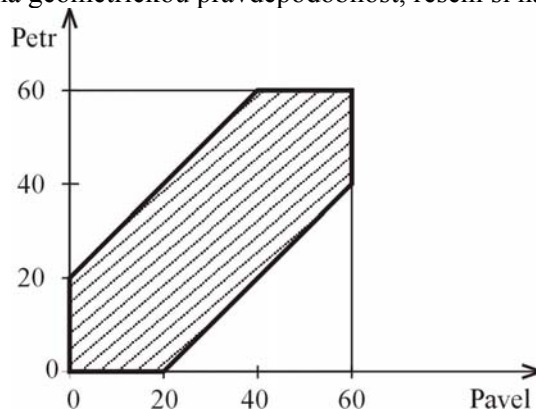
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \doteq 1 - 0,29 \doteq 0,71.$$

Vidíme, že výpočet pomocí výše uvedeného vztahu (*) je podstatně jednodušší.

Dalším typem úloh na použití výše uvedeného vztahu (*) jsou např. úlohy často nazývané *úlohy na setkání*:

2. úloha: *Petr a Pavel se dohodli, že si půjdou spolu zaběhat a že se tedy sejdou na určitém místě v době od 16 do 17 hodin. Ten, kdo přijde první, počká na druhého 20 minut, a nedočká-li se, odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se oba kamarádi za těchto podmínek setkají, jestliže předpokládáme stejnou možnost příchodu každého z nich v kterémkoli okamžiku stanoveného časového intervalu a okamžiky příchodu jsou nezávislé?*

Jelikož jde o úlohu na geometrickou pravděpodobnost, řešení si načrtne do grafu:



Z grafu je určíme, že všechny možnosti příchodu Pavla a Petra vyplňuje čtverec o obsahu 60 x 60 minut. Příznivé jevy, tedy případy, kdy se setkají, značí vyšrafovaná část. Pravděpodobnost toho, že se setkají tedy určíme jako podíl obsahů vyšrafované části a obsahu čtverce. Ze zkušeností asi 80 % studentů začne počítat obsah vyšrafovaného obrazce pomocí obsahů částí tohoto obrazce. Jen asi 20 % studentů si spočte obsah nevyšrafované části čtverce, což je čtverec o straně 40. A pak si spočte pravděpodobnost toho, že se setkají:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{40^2}{60^2}.$$

Řešení úlohy pomocí pravděpodobnosti jevu opačného je opět snazší.

Další úloha patří mezi úlohy, které použití vztahu (*) přímo vyžadují.

3. úloha: *Při losování sportky se táhne 6 základních čísel plus jedno dodatkové číslo. Chceme určit, jaká je pravděpodobnost, že mezi šesti taženými čísly jsou alespoň dvě libovolná čísla vedle sebe (jako například 9 a 10 nebo 22 a 23, apod.)?*

K čemu je takováto úloha dobrá? Cílem je ukázat, že tato pravděpodobnost, ač se to nezdá, je poměrně vysoká. Když před řešením úlohy provádím mezi studenty anketu, zpravidla více než polovina odpovídá, že pravděpodobnost bude malá, tedy menší než cca 0,25. Po anketě si na modelu tažení šesti základních čísel sportky provedeme několik (zpravidla 200-250) náhodných pokusů. A studenti začnou zjišťovat, že tato pravděpodobnost se blíží k jedné polovině a tedy je vyšší než by očekávali. Nyní mají motivaci k tomu, aby se snažili tuto úlohu vyřešit.

Jak postupují studenti:

1. varianta: Řeší úlohu tak, že se snaží určit, jaká je pravděpodobnost toho, že vedle sebe budou právě dvě ze šesti tažených základních čísel. Pak pravděpodobnost, že vedle sebe budou právě tři ze šesti tažených základních čísel, pak právě čtyři, pět a šest a všechny tyto pravděpodobnosti sečtou. Zpravidla na výpočtu první z pravděpodobností většina z nich skončí. Neumí určit pravděpodobnost, že právě dvě z šesti tažených čísel jsou vedle sebe.

2. varianta: Studenti se snaží určit všechny možnosti, že alespoň dvě ze šesti tažených čísel jsou vedle sebe, tzn., že započítávají i možnosti, že jsou vedle se tři a více ze šesti tažených čísel. V tomto případě je výpočet ještě složitější než v 1. variantě, neboť se v jednotlivých výběrech započtou dané varianty vícekrát.

Jak na to užitím vztahu (*) pro pravděpodobnost jevu opačného k jevu A :

Určíme si, kolik je všech možností, že žádné dvě z šesti tažených čísel nejsou vedle sebe. Případy si rozdělíme na dva případy:

(i) Mezi 6 taženými čísly z 49 je jednička. Tzn. že před každým dalším taženým číslem musí být číslo netažené, tedy pokud bude tažena 5 nebude tažena 4, apod. Vybíráme celkem 5 čísel, ke každému taženému číslu připojíme předchozí číslo netažené do dvojice jako by to bylo jedno číslo. Z toho nám pak vyplývá, že vybíráme 5 čísel (dvojice tažené-netažené) z 43. Těchto možností je $\binom{43}{5} = 962598$.

(ii) Mezi 6 taženými čísly z 49 není jednička. Pak před každým z šesti tažených čísel je číslo netažené. Opět postupujeme jako v případě (i). Pak tedy vybíráme 6 čísel (dvojice tažené-netažené) z 44. Těchto možností je $\binom{44}{6} = 7059052$.

Celková pravděpodobnost, že mezi šesti základními taženými čísly nejsou žádné dvě vedle sebe, pak vychází

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{962598 + 7059052}{13983826} = 1 - 0,57 = 0,43.$$

Na závěr bych uvedl ještě jeden případ, kdy užití vztahu (*) se přímo nabízí a studenti přesto často počítají dlouze a oklikou.

4. úloha: Podnik vyrábí součástky do automobilu ve třech dílnách, jejichž produkce tvoří 25 %, 35 %, resp. 40 % produkce celkové. Jednotlivé dílny produkují v uvedeném pořadí průměrně 0,5 %, 0,4 %, resp. 0,2 % zmetků. Určete:

- pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka je zmetek;
- pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka není zmetek.

Při řešení části a) studenti zjistí (někteří sami, někteří až po nápovědě nebo ukázce na tabuli), že mají použít vzorec pro celkovou pravděpodobnost. Určí si jednotlivé dílčí a podmíněné pravděpodobnosti, dosadí do vzorce a vypočtou celkovou pravděpodobnost, že náhodně vybraná součástka je zmetek.

Nyní se přesunou k části b) této úlohy. Mohu říct, že téměř dvě třetiny studentů, aniž by uvažovali, začne řešit část b) stejným způsobem jako část a). Pouze třetina studentů si uvědomí, že jev uvedený v otázce b) je jevem opačným k jevu uvedenému v otázce a) a tedy pro výpočet použijí vztah $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, čímž si zkrátí dobu výpočtu na minimum.

Závěr

Několik let jsem se potýkal při výuce pravděpodobnosti s výše uvedenými problémy. Přemýšlel jsem, jak docílit toho, aby si tento jednoduchý vztah zafixovali tak, aby jej uměli kdykoli používat. Jedním z problémů je asi ten, že studenti se dosti často snaží zafixovat nějaké postupy a algoritmy k řešení úloh, aniž by se nad zadáním pořádně zamysleli. V hodinách pravděpodobnosti se snažím vést studenty k tomu, aby se snažili používat hlavně rozum, protože spousta kombinatorických úloh lze řešit, aniž bychom znali vzorečky. A podobně je to i s některými dalšími typy úloh z pravděpodobnosti, kdy řešení rozumem může být mnohem rychlejší než pomocí daného algoritmu či vzorečku.

Zařazení do cvičení více takovýchto úloh na použití vztahu pro pravděpodobnost jevu opačného k danému jevu sice zvýšilo procento těch, kteří se naučili tento vztah ve vhodné chvíli používat. Vzhledem k malým počtům studentů v posledních ročnících však nelze zatím vyvodit závěry, zda došlo ke zlepšení či nikoli.

LITERATÚRA

- [1] Křivý Ivan: *Úvod do teorie pravděpodobnosti*, skriptum, Ostrava, Pedagogická fakulta v Ostravě, 1983
- [2] Krpec Radek: *Úvod do teorie pravděpodobnosti*, distanční text, Ostrava, Pedagogická fakulta OU, 2006
- [3] Płocki Adam: *Dydaktika stochastyki*, kniha, Płock, Wydawnictwo naukowe NOVUM, 2005, ISBN 83-89416-79-4
- [4] Płocki Adam, Tlustý Pavel: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*, kniha, Praha, Prometheus, 2007, ISBN 978-80-7196-330-1

RNDr. Radek Krpec, Ph.D.
 Katedra matematiky s didaktikou
 Pedagogická fakulta
 Ostravská univerzita
 Mlýnská 5
 CZ – 701 03 Ostrava
 e-mail: radek.krpec@osu.cz

FROM RESEARCHES UPON SOLVING STEREOMETRIC TASKS BY STUDENTS

JOANNA MAJOR, ZBIGNIEW POWĄZKA

ABSTRACT. The paper presents results of researches upon solving mathematical tasks by students of teaching studies, carried on by us at Pedagogical University of Cracow in the academic year 2009/2010. The goal of researches was to seek answer to the question: are students able to find subjectively new theorems on the ground of reflection on the obtained solution to appropriately constructed mathematical tasks?

1. Introduction

At Sixth Nitrianska Mathematical Conference in 2009 we presented paper about finding properties of pyramids during solving of mathematical tasks (see [4]). It was distinguished a group of attitudes and behaviors observed while solving mathematical tasks by students. The matter was to sight by learners – in afterthought on gained solution - new theorems which not occur strictly in the solution to the task but which may be implied from different associations occurring in the solution. For example, the task goes for designate volume of cuboid, while formulated theorem is relevant to dependence between values of angles which are built by diagonal and edges of cuboid.

By *finding the theorem (finding the properties of mathematical object)* we mean the result of mathematical activity aimed at solving the given mathematical task and the subsequent reflection on the obtained solution. The discussion on gained solutions pursues Polya's recommendation to "look back" (see [3]). We believe that carrying out such considerations with students and pupils is important part of mathematical education because it creates an opportunity to develop mathematical creativity. It may also play very important role in mathematical education because – as it is shown by our researches – operative using of concepts gives a lot of difficulties to students (see [1]).

2. Methodological issues of the paper

In present paper we going to recount researches made at Pedagogical University of Cracow. The goal of these researches was to find even partial answer to the following question: *if and what mathematical facts can be found by students on the ground of reflection on the obtained solution to appropriately constructed mathematical tasks?*

By analyzing the collected research material we try to determine students ability to finding different regularities which occur while solving mathematical tasks and to formulating those regularities as theorems. We also pay attention to difficulties and mistakes made by respondents. The obtained results of observation may be helpful in assessing the various aspects of mathematical activity of investigated individuals.

Researches were conducted in the summer semester of the academic year 2009/2010 at four annuals of teaching major mathematical studies. They included 141 persons (66 students of first year, 20 student of second year, 28 students of third year and 27 students of fifth year of the studies).

For researches there were chosen, among others, issues related with properties of regular pyramids built on the base of square and equilateral triangle. In the survey there was e. g. the following task:

Task

- a) In regular pyramid the edge of the base amounts a . Calculate the volume of the pyramid if the angle built by lateral edge and the base edge outgoing from the same vertex amounts α .
- b) Using obtained formula adjudicate if the angle α can be any of acute angle. Justify your answer.
- c) How will the answers in a) and b) change if, instead of regular pyramid built on the base of square, we consider the regular pyramid built on the base of equilateral triangle? Here is the outline of the solution.

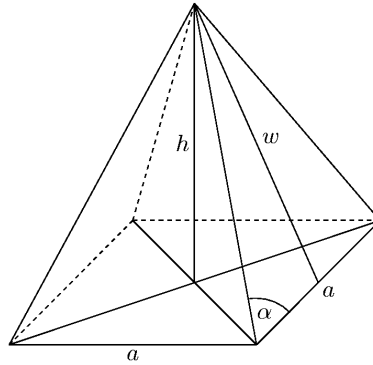


Figure 1

For the solution, let w be the value of the pyramid lateral face height and let h be value of pyramid height (vide pic. 1). Then, $w = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Using the Pythagorean Theorem for right-angled triangle, assigned by the pyramid height h , the lateral face height w and the segment congruent to the half of pyramid base edge, we get the equation:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

wherefrom

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

Therefore, the volume of the pyramid is expressed by the formula

$$V = \frac{a^3}{6} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

This formal solution require the assumption that the value under the root is non-negative. It results that angle α should have such value that $\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 > 0$. As from the task conditions the angle α is acute, therefore this inequality is equivalent to inequality $\operatorname{tg} \alpha > 1$, which implicates $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (see [4]). Finding allowable values of angle α was the goal of the task b).

In solution to task c) reasonings from tasks a) and b) should be repeated for the triangle regular pyramid.

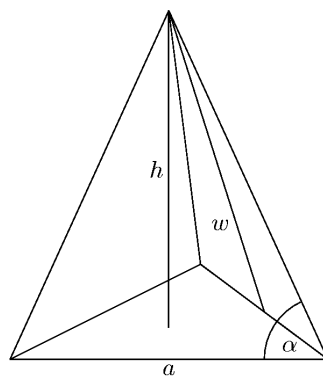


Figure2

Let a be the length of the this pyramid base edge and let α designate value of the angle built by lateral edge and the edge of the base. Let us assumpt in analogy to solution to task 1 that h designate value of the pyramid height and w is the value of lateral face height. Then, $w = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Now, let us consider right-angled triangle, assigned by the pyramid height h , lateral face height w and the segment which connect the foot of pyramid height with the middle of the base edge. This segment is one-third of the height of equilateral triangle which is the base of the pyramid. Using the Pythagorean Theorem to this triangle, we get:

$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)^2.$$

Thence

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3}},$$

thus

$$V = \frac{a^3}{24} \sqrt{3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{3}}.$$

Condition for the existence of the solution is that $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0$, which implicates $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$.

As a result of reflection on gained solution we can formulate following theorem.

Theorem 1

Let α be the angle built by lateral edge of right regular pyramid with edge of the base.

- a) If the base of the pyramid is the square, then $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$;*
- b) If the base of the pyramid is the equilateral triangle, then $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$.*

3. Recount of researches results

In this part of the paper we will disclose selected remarks on solutions presented by the students. We not going to cover particular solutions in details but we aim to present methods of work chosen by the student and we recount characteristic errors and difficulties which occur.

At the beginning it is worthy to accentuate that lot of individuals did not take an effort of solving particular parts of the task – for part a) it was 19 persons which is about 14% of respondents (including 11 students of I year, 3 students of II year, 1 student of III year and 4 students of V year). In case of part b) the count of student was much bigger and amounted 74; it is about 53% of surveyed (including 40 students of I year, 6 students of II year, 20 students of III year and 4 students of V year). 92 persons did not work on part c) of the task which is 66 % of investigated population (including 54 students of I year, 10 students of II year, 16 students of III year and 12 students of V year). It is necessary to mention that in case of parts a) and c) of the task 60% of surveyed returned empty tests and on the others there were drawings of pyramids and were written data from the task.

Properly solutions were gained by 54 persons in part a), which is about 39% of surveyed (22 students of I year, 6 students of II year, 11 students of III year and 15 student of V year), 6 persons in part b), which is about 4% of population (including 2 students of III year and 4 students of V year) and 13 respondents in part c), which is about 9% of surveyed (6 students of III year and 4 students of V year).

Methods of computing the volume of solids were quite homogeneous in investigated group. Students mostly (similar as in solution presented above) were using the Pythagorean Theorem to compute values of pyramids height, then they attempted to express volumes of solids using given length of side of the regular polygon which occurred in the base and trigonometric function of angle α . A small number of people succeeded in solving this part of the task. Surveyed were often committing computing errors. Few of surveyed (3 individuals) were trying to estimate volumes of solids using the law of cosines but they failed. 3 persons (2 students of I year and 1 student of III year) were trying to compute the volume of regular rectangular pyramid without using the information about value of angle α . Two of them did not mark the angle at drawings they had made and they were trying to compute the volume by putting down the set of equations which derived from using the Pythagorean Theorem to right triangles which surveyed had pointed by themselves.

It is worth remarking that few from the surveyed (7 persons), while computing the volume of pyramids, considered as a final solution results in which the volume was expressed by quantities unknown to the surveyed, e.g. length of the pyramid lateral edge (non-estimated in solution), value of lateral face height or length of the radius of the pyramid base circumcircle. It is worthy to mention that these surveyed (if they had attempted to solve both parts of the task) gave analogical answers in parts a) and c), i.e. they tried to make the volume dependent on the same quantities.

We should also point the group of 5 students of III and V year who solved properly part a) of the task but in part c) they resigned to making adequate computes and e.g. just wrote: *the volume will be estimating in the same way, only the area of the base will change, the angle will be the same or the answer will be the same, the angle will be the same*. Those answers, nevertheless they are incorrect, in our opinion show that students are aware of fact that while solving the task it is possible and necessary to make use of already gained results.

Recounting solutions presented by surveyed it is worth mentioning that a lot of them (25 persons, including: 14 students of I year, 10 students of II year and 1 student of III

year) marked improperly the angle α on the draws which they had made. Surveyed marked this angle between the plane of lateral face and the plane of the base or between lateral edge and the plane of the base. Among the surveyed, there can be found 3 persons who conceded that angles hinted above are equal to the angle α .

Surveyed students also did not manage with the answer to the question whether the angle can α have unrestricted value. Respondents tried to answer questions by writing down conditions which derived from range of applicability of formulas for pyramids volume which were given by students (e.g. condition of non-negativity of the value under the root, etc.). All of surveyed contrive with it. Difficulties were appearing as students tried to solve formulated conditions. For example, one of students claimed that the interval $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ was the solution to inequality $\operatorname{tg} \alpha > 1$. That statement could proof his deficiencies in mathematical knowledge. It also happened that the respondents as a solution to inequality $\operatorname{tg} \alpha > 1$ gave $\alpha \in \left(0 + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, where $k \in \mathbf{Z}$.

It can indicate that these students were giving answers without afterthought on meaning of gained solution, in particular that the angle must be acute. We can also assume that possible cause of errors is students attitude to solving nothing but only particular inequality. We can formulate hypothesis that students do not keep in their mind whole task and its solution but they just remember to solve the inequality. Their goal becomes to solve the inequality and when they gain it they consider that task is finished; in particular they do not verify the solution on the ground of the question contained in the task.

4. Summary

In conclusion we can claim that surveyed had a lot of difficulties on solving discussed task. At the same time, we can noticed major disproportion between the number of correct solutions to part a), b) and c) of the task, precisely – between the number of correct answers related with estimating the volume of solids. There is much more correct answers for the part a) of the task than for other parts. We can assume that the part of examined individuals do not takes an effort of resolving part c) because they consider those two parts as analogical (the same solution, the same answer). Some conversations we had made with students of III year (just after they returned finished surveys) justify such conclusion. Reasonings of shape: *pyramids have identical volume because in all cases we consider regular pyramids in which the angle between lateral edge and the base edge outgoing from the same vertex amount α* , we find as incorrect analogies. Such statements also show major deficiencies in mathematical knowledge of surveyed.

Lot of students who worked on part a) of the task did not take an effort of solving part c). The cause of such situation can be the fact that students do not notice the common structure of particular parts of the task and they do not see mutual affiliations between parts – the research tool. We affirm that it is related with more general tendency to developing “local solution”. Respondents focus all their energy on solving the particular task and they do not see it in more general structure of already solved tasks. We can notice lack of willingness to using already gained solutions.

Examined students did not give full answers to questions of the questionnaire. At the same time, only 5 of surveyed formulated conditions on the amount of the angle α .

It is worthy to mention that surveyed did not show a willingness to formulate mathematical theorems. Obviously, in the content of the task there was not literal command to formulate such theorems. However, according to the nature of the education

of students in our university such an attitude is desirable. In our opinion this attitude in working on the task is indeed caused by “mathematical immaturity” of examined individuals. In our opinion it is highly anxious signal whereas that some respondents will be (or already are) math teachers, who should be sensitive to doing this type of observations, that is e.g. formulating conclusions based on performed reasonings.

It is also very worrying that examined students have a deficiencies in solving trigonometric equations and inequalities and difficulties in accurate transformation of algebraic formulas and transforming formulas in which occur trigonometric functions. In our opinion the cause of this status quo is that students (as pupils of the secondary school) had expended to little time to learning and improving their skills in using trigonometric functions. It result from the structure of teaching curriculum in which a rather difficult math section is provided for relatively quick realization.

Let us notice that one of conditions to proper functioning in the reality around us is a smooth moving in three-dimensional world. Concepts of the spatial geometry which we used to describing our reality are shaped during the whole period of mathematical education or even earlier. Germs of spatial geometry concepts, including orientation in the pattern of our own body starts to form in infancy. In secondary school we often use trigonometric functions to describing three-dimensional space. Researches shows that students have a great difficulties in using these functions At the same time, insufficient ability of the use of these concepts impoverishes the mathematical experiences of learners – the future teachers, which can have negative influence to the way of communicating and presenting stereometric content to learners.

REFERENCES

- [1] J. Major, *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej*, Dydaktyka Matematyki 29(2006), 296-310.
- [2] J. Major, Z. Powązka, *Uwagi dotyczące pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*, Ann. Acad. Paed. Cracov. 36, Studia ad Didacticam Math. Pertinentia 1(2006), 163-185.
- [3] G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa, 1964.
- [4] Z. Powązka, J. Major, Finding properties of prisms and pyramids while solving stereometric problems, Acta Math. (Nitra) 12(2009), 215-220.

Joanna Major
Zbigniew Powązka
Pedagogical University of Cracow
Institute of Mathematics
Podchorążych 2
PL - 30-084 Cracow
e-mail: jmajor@up.krakow.pl
e-mail: powazka@up.krakow.pl

DÔKAZY VZŤAHOV PRE SÚČTY HODNÔT FUNKCIÍ ARCUS

DANA LENGYELFALUSYOVÁ, TOMÁŠ LENGYELFALUSY

ABSTRACT. In this contribution we would like to present a unique proof of formulas for addition of arcus function values although these functions are not a compulsory part of the subject matter of Mathematics at the secondary level. However, we suppose that a gifted student should not have any problems with understanding the proof. This proof and the like can be used within the after-school Mathematics circles or as the extension of the subject matter at grammar schools.

Úvod

Často sa stáva, že na hodinách matematiky niektorí šikovnejší študenti, ktorí vidia a rozmýšľajú v súvislostiach, sa nás pýtajú na také súvislosti alebo dôsledky preberaného učiva, ktoré jednoducho nie je možné zaradiť priamo do vyučovacieho procesu, resp. priamo ani nesúvisia s preberaným učivom. V takom prípade máme možnosť tento problém riešiť na matematických seminároch, cvičeniach alebo krúžkoch. Je pri tom dôležité podporovať záujem študentov o vedomosti nad rámec povinného učiva a v žiadnom prípade im neodpovedať v duchu “načo sa tým zaoberáš, veď to teraz nepreberáme!”. V ďalších riadkoch predstavíme jeden dôkaz, ktorý sa pri troche pozornosti a dôvtipu dá aplikovať aj na ďalšie podobné prípady.

Vzťahy pre súčty hodnôt funkcií arcus

Pri riešení rovníc s funkciami arkus často potrebujeme aplikovať nasledujúce tri vzťahy:

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi n + (-1)^n \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \quad (1)$$

kde

- a) $xy \leq 0 \vee x^2 + y^2 \leq 1$ pre $n = 0$,
- b) $x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 > 1$ pre $n = 1$,
- c) $x < 0 \wedge y < 0 \wedge x^2 + y^2 > 1$ pre $n = 1$.

$$\arccos x + \arccos y = 2\pi n + (-1)^n \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}), \quad (2)$$

kde

- a) $x + y \geq 0$ pre $n = 0$,
- b) $x + y < 0$ pre $n = 1$.

$$\arctan x + \arctan y = \pi n + \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \quad (3)$$

kde

- a) $xy < 1$ pre $n = 0$,
- b) $x > 0 \wedge xy > 1$ pre $n = 1$,
- c) $x < 0 \wedge xy > 1$ pre $n = -1$.

V odbornej literatúre sa nachádza len málo poznámok o horeuvedených vzťahoch a podrobný analytický dôkaz vzťahu vôbec nie. Preto sa v ďalšom sústreďíme na podrobný, metodicky premyslený dôkaz vzťahu (1), nakoľko predpokladáme, že ostatné dôkazy urobí čitateľ na základe prezentovaných úkonov. Aj keď samotná problematika nespadá do oblasti stredoškolskej matematiky, pri dôkaze horeuvedených vzťahov nepoužívame žiadne vedomosti, ktorými by nedisponoval študent gymnázia, ktorý sa zaujíma o matematiku. Teda dôkazy tohto typu by sa mohli zaradiť aj do oblasti práce s nadanou mládežou, do prípravy na riešenie úloh matematickej olympiády, resp. do oblasti záujmovej činnosti v matematike.

Dôkaz vzťahu (1)

V súvislosti s dôkazom vzťahu (1) zavedieme nasledujúce označenie:

$$z = \arcsin x + \arcsin y, \quad (4)$$

kde (ako čitateľ ľahko vie zistiť)

$$z \in \langle -\pi, \pi \rangle. \quad (5)$$

Zo vzťahu (4) vyplýva, že

$$\sin z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}. \quad (6)$$

Označme veľkosť uhla, ktorý vyhovuje rovnici (6) nasledovne:

$$z^* = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}). \quad (7)$$

Potom podľa definície

$$z^* \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right\rangle, \quad (8)$$

a všeobecný tvar riešenia rovnice (6) bude:

$$z = (-1)^n z^* + \pi n, \text{ kde } n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

V prvom rade sa pokúsime určiť hodnotu parametra n v rovnici (9), ak chceme, aby bola splnená podmienka (5). Potom zistíme, čo je podmienkou toho, aby sme mohli určiť, aké hodnoty má nadobudnúť parameter n , aby platil vzťah (1) za predpokladu, že poznáme hodnoty argumentov x, y .

A) Ak $n = 0$, potom z rovnice (9) vyplýva, že

$$z = z^*, \quad (10)$$

z čoho dostaneme, že

$$z \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right\rangle \subset \langle -\pi, \pi \rangle. \quad (11)$$

To znamená, že pre z platí vzťah:

$$-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{1}{2}\pi. \quad (12)$$

V ďalšom budeme skúmať, aké hodnoty môžu nadobudnúť vo vzťahu (12) tie dva členy. Z toho dôvodu najprv skúmame, pre aké hodnoty $\arcsin y$ bude pravdivá nerovnosť (12), ak $\arcsin x$ nadobúda hodnoty:

$$-\frac{1}{2}\pi; \quad 0; \quad \frac{1}{2}\pi.$$

Nerovnica (12) platí

$$\text{a) pre } \arcsin x = -\frac{1}{2}\pi \text{ práve vtedy, ak } \arcsin y \in \langle 0; \pi \rangle, \quad (13)$$

$$\text{b) pre } \arcsin x = 0 \text{ práve vtedy, ak } \arcsin y \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi \right\rangle, \quad (14)$$

$$\text{c) pre } \arcsin x = \frac{1}{2}\pi \text{ práve vtedy, ak } \arcsin y \in \langle -\pi; 0 \rangle. \quad (15)$$

Podľa formúl (13) a (14) vidíme, že nerovnica (12) platí pre všetky hodnoty

$$\arcsin x \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi; 0 \right\rangle \quad (16)$$

1. vždy, ak

$$\arcsin y \in \left\langle 0; \frac{1}{2}\pi \right\rangle, \quad (17)$$

2. v niektorých prípadoch aj vtedy, ak

$$\arcsin y \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi; 0 \right\rangle. \quad (18)$$

Analogické výsledky dostaneme aj pre hodnoty

$$\arcsin x \in \left\langle 0; \frac{1}{2}\pi \right\rangle. \quad (19)$$

Zo vzťahov (16), (17) a z hodnôt $\arcsin x$ na úsečke (19) vyplýva, že nerovnosť (12) platí v prvom rade pre tie prípustné hodnoty x, y , ktoré majú rôzne znamienka, teda ak

$$xy \leq 0. \quad (20)$$

V druhom rade zo vzťahov (16), (18) a z hodnôt $\arcsin x$ na úsečke (19) vyplýva aj jedna postačujúca podmienka toho, že pre niektoré hodnoty x, y platí nerovnosť (12). Podľa toho nerovnosť (12) platí aj v niektorých tých prípadoch, ak x, y majú rovnaké znamienka, za predpokladu, že platí

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad (21)$$

čo vyplýva z toho, že

$$\cos z = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy \geq 0$$

pre všetky hodnoty argumentu z z úsečky (11).

Z disjunkcie postačujúcich podmienok (20) a (21) pre hodnoty x, y funkcie arkusínus vyplývajú nutné a postačujúce podmienky platnosti vzťahu (12).

B) Ak $n = 1$, potom z rovnice (9) vyplýva, že

$$z = -z^* + \pi, \quad (22)$$

a teda

$$z \in \left\langle \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right\rangle. \quad (23)$$

Nakoniec podľa vzťahov (5) a (23) platí, že

$$z \in \left(\frac{1}{2}\pi; \pi \right). \quad (24)$$

To znamená, že musí platiť nasledujúca dvojité nerovnosť:

$$\frac{1}{2}\pi < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi. \quad (25)$$

Určme aj v tomto prípade, pre aké hodnoty x, y platí vzťah (25). Vidíme, že to platí za predpokladu, že:

a) $\arcsin x = -\frac{1}{2}\pi$ práve vtedy, ak

$$\arcsin y \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi \right). \quad (26)$$

To je však pre hodnoty funkcie arcus sínus nemožné.

b) $\arcsin x = 0$ práve vtedy, ak

$$\arcsin y \in \left(\frac{1}{2}\pi; \pi \right), \quad (27)$$

čo je taktiež nemožné.

c) $\arcsin x = \frac{1}{2}\pi$ práve vtedy, ak

$$\arcsin y \in \left(0; \frac{1}{2}\pi \right). \quad (28)$$

Podľa vzťahov (26) a (27) vidíme, že nerovnosť (25) nemôže platiť v prípade, že $\arcsin x \in \left(-\frac{1}{2}\pi; 0 \right)$, lebo vtedy $\arcsin y \notin \left(\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$. Na druhej strane z formúl (27) a (28) vidíme, že nerovnosť (25) platí v prípade

$$\arcsin x \in \left(0; \frac{1}{2}\pi \right) \quad (29)$$

pre všetky hodnoty formuly

$$\arcsin y \in \left(0; \frac{1}{2}\pi \right). \quad (30)$$

Na základe vzťahov (29) a (30) nutnou podmienkou platnosti nerovnosti (25) je, aby súčasne platilo, že

$$x > 0, y > 0, \quad (31)$$

a

$$x^2 + y^2 > 1, \quad (32)$$

čo vyplýva z toho, že

$$\cos z = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} - xy < 0$$

pre všetky hodnoty argumentu z intervalu (24).

Z konjunkcie nutných podmienok (31) a (32) vyplývajú nutné a postačujúce podmienky pre argumenty súčtu funkcií arkussínus, čiže platnosť vzťahu (25).

C) Dôkaz pre prípad $n = -1$ je úplne analogický s dôkazom pre prípad $n = 1$.

D) Ak $|n| > 1$, potom zo vzťahu (9) vyplýva, že

$$z \notin \left(-\pi; \pi \right),$$

a teda vo formule (1) $|n| > 1$ nie je možné.

Tým sme dôkaz vzťahu (1) kompletne urobili.

Analogicky by sa mohli urobiť dôkazy vzťahov (2) a (3), ktoré prenecháme čitateľom, pedagógom, resp. študentom s analytickým myslením.

Záver

Cieľom nášho príspevku bolo poukázať na to, že aj učivo, ktoré priamo nie je zaradené do obsahu matematického vzdelávania na gymnáziách môže byť zaujímavé a pútavé. Závisí to vždy len na učiteľovi matematiky, akým spôsobom a či vôbec dokáže spestriť vyučovanie matematiky pre nadaných študentov, rozvíjať ich myslenie, ukázať im krásu matematiky a v neposlednom rade ich priťahnúť k štúdiu matematiky.

LITERATÚRA

- [1] Fulier, J., Šedivý, O. : *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Nitra, UKF v Nitre, 2001, ISBN 80-8050-445-8
- [2] Hora, J.: *Gosperův algoritmus pro určení součtu řady*, České Budějovice, University of South Bohemia, Department of Mathematics, Report Series Vol.8, 2000.
- [3] Kontrová, L.: *Aj vyučovanie exponenciálnej funkcie môže byť atraktívne a pútavé*, In: 6. žilinská didaktická konferencia s medzinárodnou účasťou, Zborník príspevkov z konferencie, Žilina, Žilinská univerzita v Žiline, 2009, ISBN 978-80-554-0050-1
- [4] Lengyelfalusy, T.: *Prečo sa nedá? Zbierka netradičných úloh z matematiky*, In: XXVI. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu, Zborník abstraktov a elektronických verzií príspevkov na CD-ROMe, Brno, 2008, ISBN: 978-80-7231-511-6
- [5] Odvárko, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh*, Praha, SPN, 1990.

Mgr. Dana Lengyelfalusyová
Fakulta prírodných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 010 26 Žilina
e-mail: dana.mitrengova@fpv.uniza.sk

doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, CSc.
Fakulta prírodných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 010 26 Žilina
e-mail: tomas.lengyelfalusy@fpv.uniza.sk

C.a.R A METÓDA GENEROVANÝCH PROBLÉMOV

MAREK MOKRIŠ

ABSTRACT. The article deals with the use C.a.R. and the problem solving method into the teaching geometry in the training of primary school teachers.

1 Úvod

Pre život človeka v 21. storočí je jednou z dôležitých zložiek celkovej gramotnosti aj počítačová erudovanosť. Podľa J. Maňáka (2003) s nástupom modernej didaktickej technológie a zvlášť počítačov sa zmenili tiež funkcie učiteľa a žiaka vo vyučovaní, nie však dramaticky, ako sa pôvodne predpokladalo. Ako preukázali výskumy, niektoré učiteľove funkcie sa v týchto podmienkach oslabujú (napr. priame vysvetľovanie učiva študentom učiteľom, opakovanie a kontrola študentových vedomostí, atď.), iné zosilneli (napr. plánovanie a príprava vyučovania, analýza učiva, individuálna práca so žiakmi, diagnóza a poradenská služba, atď.). Objavujú sa aj nové funkcie učiteľa (J. Maňák, 2003, s. 62):

- organizátor a manažér vyučovacieho procesu,
- partner žiaka, jeho pomocník a poradca,
- didaktický programátor,
- technolog vyučovacích prostriedkov,
- výskumník v odbore didaktiky.

V silnejúcom prostredí informatizácie sa elektronicky podporované vzdelávanie stáva perspektívnou zložkou vysokoškolskej prípravy učiteľov pre mladší školský vek. V súčasnosti sú veľmi intenzívne snahy o zlepšenie matematického vzdelávania pomocou moderných technických prostriedkov. Podľa P. Hanzela (2008) sa ukazuje významné predovšetkých využívanie PC techniky v univerzitnom vzdelávaní. Východiskom je na jednej strane využiť informačné technológie a technické prostriedky a na druhej strane zmeniť prístup ku koncipovaniu didaktického systému v matematike. Úlohou súčasnej didaktiky matematiky je tieto skutočnosti podchytiť a vhodne využiť, aby sa vyučovanie stalo efektívnejším a primeranejším dnešnej dobe a jej požiadavkám.

V tomto kontexte je našou ambíciou implementovať do profesijnej prípravy budúcich učiteľov na primárnom stupni aj systémy dynamických geometrií. Ako najvhodnejší softvér sa javí voľne šíriteľný program Compass and Ruler (C.a.R.), ktorý je aj podľa K. Žilkovej (2010) z hľadiska užívateľského rozhrania veľmi prehľadný a ľahko ovládateľný. Okrem možnosti jednoduchého publikovania vytvorených virtuálnych výkresov na webové stránky je zatiaľ neprekonanou prednosťou možnosť tvorby „C.a.R. zadani“ a ich zverejňovania v celosvetovej sieti. Výrazne efektným, ale zároveň aj užitočným prvkom v systéme C.a.R. je zachovanie vlastností animovaných útvarov aj po webovom exporte, čo tiež nie je celkom bežnou záležitosťou pre iné systémy dynamickej geometrie.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu Implementácia Learning Management System do matematickej a odborovodidaktickej prípravy budúcich učiteľov preelementaristov a elementaristov (MŠ KEGA 009PU-1/2010).

Jedným z cieľov pri príprave učiteľov elementaristov je nadobudnutie takých kompetencií, aby boli schopní vyučovať všetky predmety na 1. stupni ZŠ. K napĺňaniu tejto požiadavky sme v predmete Praktikum – geometria, v téme Množiny bodov danej vlastnosti, použili ako vyučovaciu metódu, metódu generovaných problémov.

Je to metóda, pri ktorej postupne vytvárame súbor navzájom príbuzných problémov. J. Kopka (1999) pre túto metódu používa termín „metóda vytváření hroznů problému“. Metóda je založená na voľbe vhodného základného problému, ktorí majú žiaci riešiť využitím heuristických stratégií (preformulovanie, analógia, zovšeobecnenie, cesta späť, systematické experimentovanie, konkretizácia, zavedenie pomocného prvku, opakovanie určitého postupu). Úlohou učiteľa je žiakom poskytnúť len nutné minimum pomoci pri dostatočnom časovom priestore pre riešenie problému.

2 Aplikácia metódy generovaných problémov v elementárnej geometrii

Úloha č. 1 (úvodný problém):

a) Daný je bod S . Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú od bodu S vzdialené 5 cm.

Riešenie:

Na sprístupnenie riešenia tejto úlohy využívame prostredie C.a.R., ktoré umožňuje prezentovať dynamiku vzniku hľadaných bodov v rovine. Na tento účel využívame nástroj Sledovať stopu bodu (Obr. 1).

Úloha je na prvý pohľad triviálna, ale z našej skúsenosti vyplýva, že nie pre všetkých študentov učiteľstva pre primárny stupeň vzdelávania. Prostredníctvom C.a.R. je možné efektívne odhaliť, že hľadanou množinou bodov je kružnica so stredom v bode S a polomerom 5 cm.



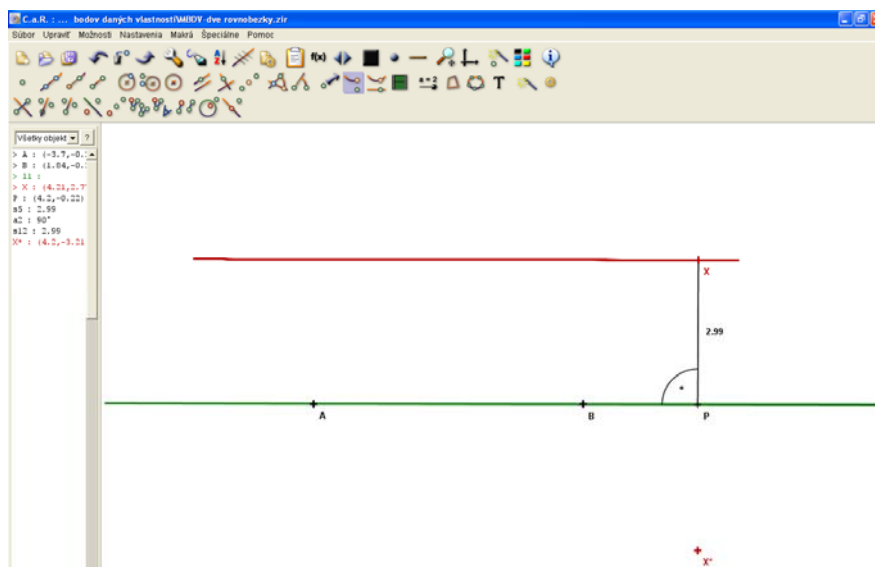
Obr. 1

b) Daná je priamka AB . Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú od priamky AB vzdialené 3 cm.

Riešenie:

Aj pri tejto úlohe využívame prednosti informačných technológií. Dynamický softvér nám umožňuje sledovať pohyb bodu, ktorý má požadovanú vlastnosť (je od priamky AB vzdialený 3 cm), pričom zanechávaná stopa nám predstavuje hľadanú množinu bodov.

Nedostatkom však je, že je vykresľovaná len jedna z dvojice hľadaných rovnobežiek (Obr. 2).



Obr. 2

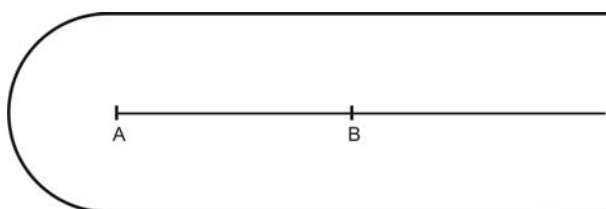
Pri riešení nasledujúcich úloh využívame len tradičné pomôcky (ceruza, kružidlo, rysovací trojuholník) pretože chceme, aby študent vlastným experimentovaním našiel riešenie.

Úloha č. 2 (základný problém):

a) Daná je polpriamka AB . Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú od polpriamky AB vzdialené 3 cm.

Riešenie:

Hľadanou množinou je čiara (Obr. 3), ktorá je zložená z dvoch rovnobežných polpriamok a polkružnice so stredom v bode A . V niektorých študentských riešeniach polkružnica chýba.

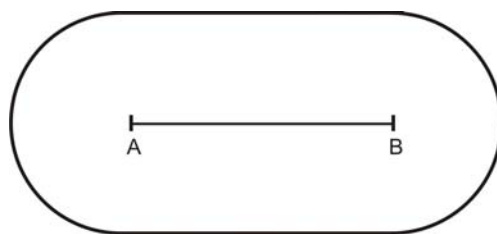


Obr. 3

b) Daná je úsečka AB . Nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú od úsečky AB vzdialené 3 cm.

Riešenie:

Hľadanou množinou je čiara (Obr. 4), ktorá je zložená z dvoch rovnobežných úsečiek a dvoch polkružníc so stredom v bode A , resp. v bode B .



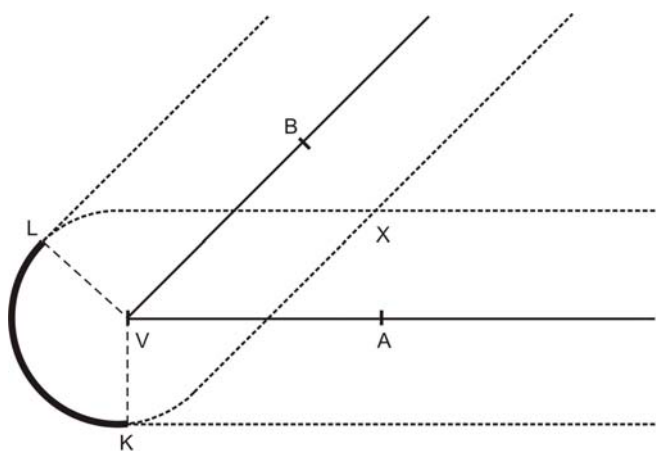
Obr. 4

Úloha č. 3:

Daný je uhol AVB nájdite množinu všetkých bodov v rovine, ktoré sú od ramien uhla AVB vzdialené 3 cm.

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy očakávame, že študenti objavia podobnosť riešenia s riešením úlohy č. 2a. Hľadanou množinou je zjednotenie kružnicového oblúku KL a bodu X (Obr. 5).



Obr. 5

Záver

Nemyslíme si, že dynamické softvérové prostredia (napr. C.a.R.) sú univerzálnym modelom na sprístupňovanie učiva geometrie. V našom prípade sú len jedným z nástrojov, ktoré pri vybraných elementoch zefektívňujú vyučovací proces. Naopak využívanie tradičných rysovacích pomôcok (ceruza, kružidlo, pravítko, ...) má podľa nás pri príprave učiteľov pre 1. stupeň ZŠ veľmi dôležitú funkciu.

C.a.R. by sa mohol využívať aj pri rozvíjaní matematickej gramotnosti študentov Učiteľstva pre primárny stupeň vzdelávania. Analýzou geometrickej zložky matematickej gramotnosti vysokoškolských študentov sa zaoberá I. Scholtzová – M. Mokriš (2010). Námety na aplikáciu geometrických úloh na rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov 1. stupňa ZŠ sú spracované v práci I. Scholtzovej – V. Zeľovej (2007). A. Prídavková (2008) uvádza analýzu riešiteľských stratégií vybraných úloh z geometrie.

V rámci riešenia projektu MŠ KEGA 009PU-1/2010 Implementácia Learning Management System do matematickej a odborovodidaktickej prípravy budúcich učiteľov

preelementaristov a elementaristov je našou ambíciou spracovať vybrané problémy z elementárnej geometrie v dynamickom prostredí C.a.R. a následne ich implementovať do elektronického kurzu venovanému geometrii, ktorý je spracovávaný v prostredí LMS Moodle.

REFERENCES

- [1] Hanzel, P.: Dynamické prvky vo vyučovaní geometrie. In *MATEMATIKA 3. Matematické vzdelávaní z pohľadu žaka a učiteľa primárnej školy: zborník príspevků z konferencie z mezinárodní účasti*. Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, 2008, s. 108, ISBN 978-80-244-1963-3.
- [2] Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem, Univerzita J. E. Purkyně Ústí nad Labem, 1999, ISBN 80-7044-247-6.
- [3] Prídavková, A.: Didaktické spracovanie riešiteľských stratégií matematických úloh. In *ACTA MATHEMATICA 11. Zborník zo VI.Nitrianskej matematickej konferencie*. Nitra: FPV UKF, 2008. ISBN 978-80-8094-396-7. s.193-197
- [4] Maňák, J. – Švec, V.: *Výukové metody*. Brno, Paido, 2003, ISBN 80-7315-039-5.
- [5] Scholtzová, I. – Mokriš, M.: Geometry in elementary teacher training. In *17th Czech-Polish-Slovak Mathematical Conference*. Ústí nad Labem, PF UJEP in Ústí nad Labem, 2010. [v tlači]
- [6] Scholtzová, I. – Zeľová, V.: Jeden pohľad na diagnostikovanie matematickej gramotnosti. In *Inovácia v matematickej príprave žiakov na 1. stupni základnej školy: zborník z vedecko-odbornej konferencie, Trnava 2007*. Trnava, PdF Trnavskej univerzity v Trnave, 2007. ISBN 978-80-8082-158-6.
- [7] Žilková, K.: Komparácia vybraných DGS s akcentom na aplikácie rovinných izometrií. In *Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných a stredných a vysokých školách*. Žilina, Fakulta prírodných vied Žilinskej univerzity v Žiline, 2010, ISBN 978-80-554-0216-1. [elektronický zdroj]

Mgr. Marek Mokriš, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra č. 1
SK – 081 16 Prešov
e-mail: mokrism@unipo.sk

ALTERNATÍVNE ZAVEDENIE OBORU VŠETKÝCH NEZÁPORNÝCH REÁLNYCH ČÍSEL

OLEG PALUMBÍNÝ

ABSTRACT. The paper deals with alternative establishing of the set of all nonnegative real numbers into mathematical analysis.

Pojem reálneho čísla možno do vyučovania matematickej analýzy na vysokých školách zaviesť rôznym spôsobom. Najčastejšie sa to robí pomocou cauchyovských postupností (Cantor), alebo pomocou rezov (Dedekind). Zriedkavejšie sa tiež používa konštrukcia pomocou filtrov. Všetky tieto spôsoby zavedenia možno nájsť napríklad v publikácii [1].

Na strednej škole sa však reálne čísla intuitívne chápu ako nekonečné desatinné zlomky. Sledujúc túto ideu, zavedieme reálne čísla do univerzitného vyučovania matematiky ako nekonečné postupnosti decimál. Poznamenávame, že text tejto práce je založený na istej modifikácii úvah z [2]. Kvôli jednoduchosti sa budeme zaoberať len nezápornými reálnymi číslami.

Množinu všetkých kladných celých čísel (resp. všetkých celých čísel) označíme ako $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$). Ak je na množine M daná taká relácia R , že je trichotomická (t.j. $\forall a, b \in M$ platí práve jedna z troch možností $a = b$, aRb , bRa) a tranzitívna, hovoríme, že M je **lineárne usporiadaná** pomocou R . Lineárne usporiadaná množina je **husto usporiadaná**, ak na nej daná relácia lineárneho usporiadania má tú vlastnosť, že medzi jej dvoma ľubovoľnými, navzájom rôznymi, prvkami sa nachádza aspoň jeden tretí. Prvok $s \in N$ je **horné ohraničenie** podmnožiny M husto usporiadanej množiny N , ak pre všetky $x \in M$ platí $x \leq s$. Prvok $s \in N$ je **suprémum** podmnožiny M husto usporiadanej množiny N , ak s je najmenšie horné ohraničenie podmnožiny M v množine N . Označenie: $\sup_N M$. Husto usporiadaná množina M je **spojito usporiadaná**, ak každá jej neprázdna zhora ohraničená podmnožina má v množine M suprémum. Uvažujme množinu $\mathbf{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Potom každé číslo z množiny $\mathbf{D}$ budeme nazývať **decimála**.

Definícia 1. Množinu všetkých takých postupností $p: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}, z \mapsto p_z$, že pre ne existuje (od p závislý) index $z_0 \in \mathbf{Z}$ tak, že pre všetky $z \in \mathbf{Z}, z \geq z_0$ platí $p_z = 0$, označíme symbolom $\mathbf{P}$.

Dohovor. Dohodneme sa, že ak nejaké písmeno predstavuje postupnosť z $\mathbf{P}$, tak na označenie jeho decimál použijeme to isté písmeno opatrené pravým dolným indexom. Tiež budeme pre prvky z množiny $\mathbf{P}$ používať symboliku

$$x = (\dots, 0, \dots, 0, x_k, x_{k-1}, \dots, x_m, \dots), \quad y^{(z)} = (\dots, 0, \dots, 0, y_k^{(z)}, y_{k-1}^{(z)}, \dots, y_m^{(z)}, \dots)$$

a podobne.

Definícia 2. Pod *nezáporným reálnym číslom* budeme rozumieť každú takú postupnosť $p \in \mathbf{P}$, že pre ňu neexistuje index z_1 tak, že pre všetky $z \leq z_1$ platí $p_z = 9$. *Množinu všetkých nezáporných reálnych čísel* označíme ako $\mathbf{R}$.

Na množine $\mathbf{P}$ teraz zadefinujeme relácie rovnosti a usporiadania. Tým budú zavedené aj na $\mathbf{R}$. Následne na $\mathbf{R}$ zadefinujeme aj operácie súčet a súčin.

Definícia 3. O dvoch postupnostiach $r, s \in \mathbf{P}$, hovoríme, že sa *rovnajú*, ak pre každé $z \in \mathbf{Z}$ platí $r_z = s_z$. Označenie: $r = s$.

Veta 1. Relácia „rovná sa“ z definície 3 je základná rovnosť na množine $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Ľahko overíme že uvažovaná relácia „rovná sa“ je na $\mathbf{P}$ reflexívna, symetrická a tranzitívna, z čoho vyplýva, že je na $\mathbf{P}$ reláciou ekvivalencie. Zároveň je vidieť, že triedy tejto ekvivalencie sú jednoprvkové množiny, **q.e.d.**

Definícia 4. Postupnosť $r \in \mathbf{P}$ je *menšia* ako postupnosť $s \in \mathbf{P}$, ak existuje $z_0 \in \mathbf{Z}$ tak, že pre všetky $z > z_0$ platí $r_z = s_z$ a $r_{z_0} < s_{z_0}$. Označenie: $r < s$.

Veta 2. Relácia „menší“ z definície 4 je lineárne usporiadanie na množine $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Pre každé $r, s \in \mathbf{P}$ platí buď $r = s$ alebo $r \neq s$. Ak $r \neq s$, potom existuje také $z_0 \in \mathbf{Z}$, že pre všetky $z > z_0$ platí $r_z = s_z$, $r_{z_0} \neq s_{z_0}$. Ak $r_{z_0} < s_{z_0}$, potom podľa definície 4 platí $r < s$. Ak $r_{z_0} > s_{z_0}$, potom podľa definície 4 platí $r > s$. Teda relácia „menší“ je trichotomická na $\mathbf{P}$. Nech $r, s, t \in \mathbf{P}, r < s, s < t$. Potom existuje také $z_0 \in \mathbf{Z}$, že pre všetky $z > z_0$ platí $r_z = s_z, r_{z_0} < s_{z_0}$. Podobne existuje také $z_1 \in \mathbf{Z}$, že pre všetky $z > z_1$ platí $s_z = t_z, s_{z_1} < t_{z_1}$. Sú tri možnosti: 1) $z_0 < z_1$. Potom $r_{z_1} = s_{z_1}, s_{z_1} < t_{z_1}$. Preto $r_{z_1} < t_{z_1}$ a tiež $r_z = t_z, z > z_1$. Odtiaľ $r < t$. 2) $z_0 = z_1$. Potom $r_{z_0} < s_{z_0} < t_{z_0}$ a $r_z = s_z = t_z, z > z_0$. Preto platí $r < t$. 3) $z_0 > z_1$. Potom $r_{z_0} < s_{z_0}, s_{z_0} = t_{z_0}$. Odtiaľ $r_{z_0} < t_{z_0}, r_z = t_z, z > z_0$, čo dáva $r < t$. Teda relácia „menší“ je na $\mathbf{P}$ tranzitívna, **q.e.d.**

Veta 3. Relácia „menší“ z definície 4 je lineárne usporiadanie na množine $\mathbf{R}$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z toho, že relácia „menší“ na množine $\mathbf{R}$ je zúžením relácie „menší“ na množine $\mathbf{P}$, **q.e.d.**

Veta 4. Relácia „menší“ z definície 4 nie je husté usporiadanie na $\mathbf{P}$.

Dôkaz. Nech $r, s \in \mathbf{P}$ a nech $z_0 \in \mathbf{Z}$ je také, že $r_z = s_z, z > z_0, r_{z_0} < 9, r_z = 9, z < z_0, s_{z_0} = r_{z_0} + 1, s_z = 0, z < z_0$. Potom $r < s$. Nech existuje $t \in \mathbf{P}$ tak, že platí $r < t < s$. Potom $t_z = r_z = s_z, z > z_0$. Ak $t_{z_0} > r_{z_0}$, tak $t_{z_0} \geq s_{z_0}$. Odtiaľ $t \geq s$, čo nemôže byť. Ak $t_{z_0} = r_{z_0}$, potom $t_z \leq r_z, z < z_0$, čo dáva $t \leq r$. To však je spor. Ak $t_{z_0} < r_{z_0}$, potom $t < r$, čo opäť protirečí predpokladu, **q.e.d.**

Veta 5. Relácia „menší“ z definície 4 je husté usporiadanie na $\mathbf{R}$.

Dôkaz. Nech $r, s \in \mathbf{R}, r < s$. Potom existuje také $z_0 \in \mathbf{Z}$, že platí $r_{z_0} < s_{z_0}, r_z = s_z, z > z_0$. Pretože $r \in \mathbf{R}$, existuje taký index $z_1 < z_0$, že $r_{z_1} < 9$. Položme $t_z = r_z, z \neq z_1, t_{z_1} = r_{z_1} + 1$. Potom zrejme $r < t < s$, **q.e.d.**

Veta 6. Relácia „menší“ z definície 4 je spojité usporiadanie na $\mathbf{R}$.

Dôkaz. Podľa vety 5 je relácia „menší“ husté usporiadanie na $\mathbf{R}$. Nech M je neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbf{R}$. Z toho, že M je ohraničená, vyplýva existencia najmenšieho takého $z_1 \in \mathbf{Z}$, že $\alpha \in \mathbf{R}$ tvorené decimálami $\alpha_{z_1} = 1$, $\alpha_z = 0$, $z \neq z_1$, je horné ohraničenie množiny M . Položme $s_z = 0$ pre $z \geq z_1$. Čísla s_{z_1-n} , $n \in \mathbf{N}$, budeme definovať indukciou takto: s_{z_1-1} zvolíme ako najväčšiu takú decimálu, že číslo $s^{(z_1-1)} = (\dots, 0, \dots, 0, s_{z_1-1}, 0, \dots, 0, \dots)$ nie je horným ohraničením množiny M . Ak už máme zostrojené reálne číslo $s^{(z_1-n)} = (\dots, 0, \dots, 0, s_{z_1-1}, s_{z_1-2}, \dots, s_{z_1-n}, 0, \dots, 0, \dots)$, potom za ním nasledujúce reálne číslo $s^{(z_1-n-1)} = (\dots, 0, \dots, 0, s_{z_1-1}, s_{z_1-2}, \dots, s_{z_1-n}, s_{z_1-n-1}, 0, \dots, 0, \dots)$ skonštruujeme tak, aby decimála s_{z_1-n-1} bola najväčšia možná, pričom číslo $s^{(z_1-n-1)}$ nie je horným ohraničením množiny M . Všetky takto určené decimály s_z , $z \in \mathbf{Z}$ potom vymedzujú nejakú postupnosť $s \in \mathbf{P}$. Môžu nastať dve možnosti: 1) $s \in \mathbf{R}$. Ukážeme, že v tomto prípade je s hľadané suprérum. Ak by existovalo $x \in M$ tak, že $s < x$, potom by existovalo také $z_2 \leq z_1$, že $s_{z_2} < x_{z_2}$, $s_z = x_z$, $z > z_2$. Keďže $s \in \mathbf{R}$, z toho vyplýva, že aspoň jedna decimála $s_{z_3} < 9$, pre vhodné $z_3 < z_2$. Z konštrukcie reálnych čísel $s^{(z)}$ vyplýva platnosť týchto nerovností: $s^{(z_3)} \leq s < x \leq (0, \dots, 0, \dots, s_{z_1}, \dots, s_{z_3} + 1, 0, \dots, 0, \dots) = S$. Avšak $x > S$, lebo platí $s_{z_2} < x_{z_2}$, $s_z = x_z$, $z > z_2$. Z tohto protirečenia vyplýva, že s je horné ohraničenie množiny M . Ak by existovalo reálne číslo $y < s$, y je horné ohraničenie množiny M , potom by existoval index $z_4 < z_1$, že $y_{z_4} < s_{z_4}$, $y_z = s_z$, $z > z_4$. Potom tiež $y < s^{(z_4)}$. Z konštrukcie čísla $s^{(z_4)}$ by vyplývalo, že existuje také $t \in M$, že $s^{(z_4)} < t$ a následne $y < t$, čo je spor. Preto $s = \sup_{\mathbf{R}} M$. 2) $s \notin \mathbf{R}$. Potom existuje také $z_5 \leq z_1$, že $s = (\dots, 0, \dots, 0, s_{z_1}, \dots, s_{z_5}, 9, 9, \dots, 9, \dots)$, $s_{z_5} \neq 9$. Ukážeme, že hľadané suprérum je $t = (\dots, 0, \dots, 0, s_{z_1}, \dots, s_{z_5} + 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Z konštrukcie čísla s_{z_5} vyplýva, že t je horné ohraničenie množiny M . Nech $y \in \mathbf{R}$, $y < t$. Z dôkazu vety 4 vyplýva, že neexistuje také $u \in \mathbf{P}$, aby $s < u < t$. Preto platí, že $y \leq s$. Ale $y \in \mathbf{R}$, teda $y < s$. Potom existuje $z_6 < z_1$ tak, že $y_{z_6} < s_{z_6}$, $y_z = s_z$, $z > z_6$. Následne $y < s^{(z_6)}$. Z konštrukcie čísla $s^{(z_6)}$ vyplýva, že existuje $v \in M$, $v > s^{(z_6)}$. Z toho máme $y < v$. Teda y nie je horné ohraničenie množiny M . Preto $t = \sup_{\mathbf{R}} M$, **q.e.d.**

Definícia 5. Nech $r: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}$, $z \mapsto r_z$ je reálne číslo. Potom každé reálne číslo $r^{[u]}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{D}$, $z \mapsto r_z^{[u]}$, $r_z^{[u]} = r_z$, $z \geq u$, $r_z^{[u]} = 0$, $z < u$, $u \in \mathbf{Z}$ nazývame **dolná aproximácia** reálneho čísla r .

Definícia 6. Nech $(..., 0, ..., 0, r_{z_1}, ..., r_{z_2}, 0, ..., 0, ...), (..., 0, ..., 0, s_{z_3}, ..., s_{z_4}, 0, ..., 0, ...)$ sú postupnosti z $\mathbf{R}$. Potom pod **súčtom** týchto postupností (v danom poradí) rozumieme takú postupnosť $(..., 0, ..., 0, t_{z_5}, ..., t_{z_6}, 0, ..., 0, ...) \in \mathbf{R}$, že platí

$$\sum_{z=z_5}^{z_6} t_z \cdot 10^z = \sum_{z=z_1}^{z_2} r_z \cdot 10^z + \sum_{z=z_3}^{z_4} s_z \cdot 10^z.$$

Označenie: $(..., 0, ..., 0, r_{z_1}, ..., r_{z_2}, 0, ..., 0, ...) + (..., 0, ..., 0, s_{z_3}, ..., s_{z_4}, 0, ..., 0, ...)$.

Definícia 7. Pod **súčtom** reálnych čísel r, s (v tomto poradí) budeme rozumieť reálne číslo $\sup_{z \in \mathbf{Z}} \{r^{[z]} + s^{[z]}\}$, kde $r^{[z]}, s^{[z]}$ sú dolné aproximácie čísel r, s . Označenie: $r + s$.

Definícia 8. Nech $(..., 0, ..., 0, r_{z_1}, ..., r_{z_2}, 0, ..., 0, ...), (..., 0, ..., 0, s_{z_3}, ..., s_{z_4}, 0, ..., 0, ...)$ sú postupnosti z $\mathbf{R}$. Potom pod **súčinom** týchto postupností (v danom poradí) rozumieme takú postupnosť $(..., 0, ..., 0, t_{z_5}, ..., t_{z_6}, 0, ..., 0, ...) \in \mathbf{R}$, že platí

$$\sum_{z=z_5}^{z_6} t_z \cdot 10^z = \left(\sum_{z=z_1}^{z_2} r_z \cdot 10^z \right) \cdot \left(\sum_{z=z_3}^{z_4} s_z \cdot 10^z \right).$$

Označenie: $(..., 0, ..., 0, r_{z_1}, ..., r_{z_2}, 0, ..., 0, ...) \cdot (..., 0, ..., 0, s_{z_3}, ..., s_{z_4}, 0, ..., 0, ...)$.

Definícia 9. Pod **súčinom** reálnych čísel r, s (v tomto poradí) budeme rozumieť reálne číslo $\sup_{z \in \mathbf{Z}} \{r^{[z]} \cdot s^{[z]}\}$, kde $r^{[z]}, s^{[z]}$ sú dolné aproximácie čísel r, s . Označenie: $r \cdot s$.

Definícia 10. Nech predpis $f(u_1, ..., u_n)$ pozostáva len z (vhodne uzátvorkovaných) operácií súčet a súčin. Potom pre každé $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ kladieme

$$f(x_1, ..., x_n) = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{f(x_1^{[z]}, ..., x_n^{[z]})\}.$$

Poznámka 1. Definícia 10 je korektná, lebo, ako ľahko možno ukázať, pre každé $x_1^{[z]}, ..., x_n^{[z]}$ existuje $f(x_1^{[z]}, ..., x_n^{[z]})$. Podobne možno ukázať, že operácie súčet a súčin (sú zavedené v definíciách 6 a 8) pre čísla $x_1^{[z]}, ..., x_n^{[z]}$ sú asociatívne, komutatívne a platí pre ne distributívny zákon. Je to dôsledok toho, že všetky tieto vlastnosti platia pre nezáporné celé čísla.

Poznámka 2. Operácie v definíciách 7 a 9 sú zrejme špeciálne prípady operácií zavedených v definícii 10, keď v prvom prípade je $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, v druhom prípade je $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

Veta 7. Operácie súčet a súčin na $\mathbf{R}$ majú neutrálne prvky, sú asociatívne a komutatívne, pričom násobenie je distributívne vzhľadom na sčítanie. Najmenším prvkom je neutrálny prvok operácie súčet.

Dôkaz. Najmenším prvkom je zrejme postupnosť, ktorej členy sú samé nuly. Zároveň je táto postupnosť neutrálnym prvkom operácie súčet. Postupnosť ktorá má na nultom mieste jednotku a všade inde samé nuly, je zrejme neutrálny prvok vzhľadom na násobenie.

Asociatívnosť oboch operácií vyplýva z rovností

$$(a + b) + c = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ (a^{[z]} + b^{[z]}) + c^{[z]} \} = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ a^{[z]} + (b^{[z]} + c^{[z]}) \} = a + (b + c),$$

$$(a \cdot b) \cdot c = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ (a^{[z]} \cdot b^{[z]}) \cdot c^{[z]} \} = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ a^{[z]} \cdot (b^{[z]} \cdot c^{[z]}) \} = a \cdot (b \cdot c).$$

Podobne komutatívnosť dostaneme zo vzťahov

$$a + b = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ a^{[z]} + b^{[z]} \} = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ b^{[z]} + a^{[z]} \} = b + a,$$

$$a \cdot b = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ a^{[z]} \cdot b^{[z]} \} = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ b^{[z]} \cdot a^{[z]} \} = b \cdot a.$$

Distributívnosť vyplýva z rovností

$$(a + b) \cdot c = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ (a^{[z]} + b^{[z]}) \cdot c^{[z]} \} = \sup_{z \in \mathbf{Z}} \{ a^{[z]} \cdot c^{[z]} + b^{[z]} \cdot c^{[z]} \} = a \cdot c + b \cdot c,$$

pričom sme sa pri týchto rovnostiach opierali o definíciu 10 a poznámku 1, **q.e.d.**

Poznámka 3. Podobne by sa dokázali zákony monotónie pre operácie súčet a súčin na $\mathbf{R}$, veta o vnorení množiny všetkých nezáporných racionálnych čísel do $\mathbf{R}$ a ďalšie vlastnosti.

LITERATÚRA

- [1] ŠALÁT, T.: *Reálne čísla*, ALFA, Bratislava 1982.
- [2] VILENKIN, N. J. a kolektív : *Matematika*, PROSVEŠČENIE, Moskva, 1977 (rusky).

doc. RNDr. Oleg Palumbíny, PhD.
Katedra matematiky,
Ústav aplikovanej informatiky a matematiky,
Materiálovotechnologická fakulta,
Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Hajdóczyho 1,
917 24 Trnava
 e-mail: oleg.palumbiny@stuba.sk

ON EXISTENCE OF OSCILLATORY SOLUTIONS OF BINOMIAL FOURTH-ORDER LDEs

OLEG PALUMBÍNY, RÓBERT VRÁBEL

ABSTRACT. The paper deals with a criterion of oscillation of an integral type for binomial fourth-order linear differential equations with quasiderivatives.

1. Introduction

The paper deals with existence of oscillatory solutions of the binomial linear differential equation

$$(L) \quad L_4 y + r(t)y = 0,$$

where a function $L_k y(t)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ is so called k -th quasiderivative of the function $y(t)$ defined as follows

$$\begin{aligned} L_0 y(t) &= y(t), \\ L_1 y(t) &= p_1(t)y'(t) = p_1(t) \cdot \frac{dy(t)}{dt}, \\ L_2 y(t) &= p_2(t)(L_1 y(t))', \\ L_3 y(t) &= p_3(t)(L_2 y(t))', \\ L_4 y(t) &= (L_3 y(t))'. \end{aligned}$$

Through out the article we can assume $r(t)$, $p_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ are real-valued continuous functions defined on an semi-closed real interval $I_a = [a, \infty)$, where $a \in (-\infty, \infty)$. We shall take into account the following two conditions:

(A) $r(t) \leq 0$, $p_k(t) > 0$, $k = 1, 2, 3$ on I_a and $r(t)$ is not identically zero in any subinterval of I_a ;

(B) $\int_a^\infty -r(t)dt = \int_a^\infty \frac{1}{p_k(t)}dt = \infty$, $k = 1, 2, 3$.

We say that a solution $y(t)$ of (L) on I_a is *P-monotone* on I_b , $b \geq a$ if it holds that $L_k y(t) > 0$ on I_b , $k = 0, 1, 2, 3$. A solution $y(t)$ of (L) on I_a is *P-monotone* if there exists some $b \geq a$, such that $y(t)$ is P-monotone on I_b . A solution $y(t)$ of (L) on I_a is *Kneser* on I_b , $b \geq a$ if it holds that $(-1)^k L_k y(t) > 0$ on I_b , $k = 0, 1, 2, 3$. A solution $y(t)$ of (L) on I_a is *Kneser* if there exists some number $b \geq a$, such that $y(t)$ is Kneser on I_b .

A nontrivial solution $y(t)$ of (L) on I_a is called *oscillatory*, if its set of zeros is not bounded from above. Otherwise, $y(t)$ is *nonoscillatory*. The equation (L) is *oscillatory*, if (L) admits at least one oscillatory solution.

The main aim of the paper is to establish the criterion, which assures (L) to be oscillatory (see Theorem below). If we put $p_k(t) = 1$ on I_a , $k = 1, 2, 3$, we obtain a differential equation with classic derivatives (see Example 1). We note that the functions $p_k(t)$, $k = 1, 2, 3$ are not assumed to be differentiable. From this it follows that we cannot use on (L) oscillatory criteria derived for four-order linear differential equations with classic derivatives (see Example 2).

2. Results

We note that the symbol $\mathbf{N}$ resp. $\mathbf{N}_0$ denotes the set of all positive integers resp. the set of all nonnegative integers; $\mathbf{R}$ is the set of all real numbers.

Lemma 1. Let the conditions (A), (B) hold. Let $y(t)$ be a positive solution of (L) on I_b , $b \geq a$. Then $y(t)$ is either P-monotone or Kneser.

Proof. Let $y(t)$ be a positive solution of (L) on I_b , $b \geq a$. From (A) for this solution $y(t)$ it implies that $L_4 y(t) = -r(t)y(t) \geq 0$ on I_b and $L_4 y(t)$ is not identically zero in any subinterval of I_b . From this it follows that $L_3 y(t)$ is increasing on I_b and, consequently, $L_k y(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$, are strongly monotone on some I_c , $c \geq b$. The following eight possibilities may now occur:

- (1) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) > 0$, $L_2 y(t) > 0$, $L_3 y(t) > 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (2) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) > 0$, $L_2 y(t) > 0$, $L_3 y(t) < 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (3) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) > 0$, $L_2 y(t) < 0$, $L_3 y(t) > 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (4) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) > 0$, $L_2 y(t) < 0$, $L_3 y(t) < 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (5) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) < 0$, $L_2 y(t) > 0$, $L_3 y(t) > 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (6) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) < 0$, $L_2 y(t) > 0$, $L_3 y(t) < 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (7) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) < 0$, $L_2 y(t) < 0$, $L_3 y(t) > 0$ on proper I_d , $d \geq c$,
- (8) $y(t) > 0$, $L_1 y(t) < 0$, $L_2 y(t) < 0$, $L_3 y(t) < 0$ on proper I_d , $d \geq c$.

Let (2) or (4) hold. Then the function $y(t) > 0$ is increasing on I_d , because $L_1 y(t) > 0$ on I_d . Then (B) yields

$$\begin{aligned}
 L_3 y(t) &= L_3 y(d) + \int_d^t L_4 y(s) \, ds \\
 &= L_3 y(d) + \int_d^t -r(s) y(s) \, ds \\
 &\geq L_3 y(d) + y(d) \int_d^t -r(s) \, ds \\
 &\rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

which is a contradiction with $L_3 y(t) < 0$ on I_d . Thus (2), (4) are not valid.

Let (3) or (7) hold. As we know, the function $L_3 y(t) > 0$ is increasing on I_d . Then (B) yields

$$\begin{aligned}
 L_2 y(t) &= L_2 y(d) + \int_d^t \frac{L_3 y(s)}{p_3(s)} \, ds \\
 &\geq L_2 y(d) + L_3 y(d) \int_d^t \frac{1}{p_3(s)} \, ds \\
 &\rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

which is a contradiction with $L_2 y(t) < 0$ on I_d . Thus (3), (7) do not hold.

Let (5) be valid. Then $L_2 y(t) > 0$ is increasing on I_d , because $L_3 y(t) > 0$ on I_d . This and (B) then yield

$$\begin{aligned}
 L_1 y(t) &= L_1 y(d) + \int_d^t \frac{L_2 y(s)}{p_2(s)} \, ds \\
 &\geq L_1 y(d) + L_2 y(d) \int_d^t \frac{1}{p_2(s)} \, ds \\
 &\rightarrow \infty \text{ as } t \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

which is a contradiction with $L_1 y(t) < 0$ on I_d . This exclude the possibility (5).

Let (8) be valid. Then $L_1 y(t) < 0$ is decreasing on I_d , because $L_2 y(t) < 0$ on I_d . This and (B) then yield

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y(d) + \int_d^t \frac{L_1 y(s)}{p_1(s)} \, ds \\
 &\leq y(d) + L_1 y(d) \int_d^t \frac{1}{p_1(s)} \, ds \\
 &\rightarrow -\infty \text{ as } t \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

which is a contradiction with $y(t) > 0$ on I_d . This exclude (8). From this it follows that (1) or (6) hold, **q.e.d.**

Lemma 2. Let (A) hold. If every positive solution of (L) on I_b , $b \geq a$ is either P-monotone or Kneser, then the equation (L) is oscillatory.

Proof. Let the functions $y_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$ form the fundamental system of solutions of (L) on I_a such that $L_k y_m(a) = \delta_{km}$, where δ_{km} is the Kronecker symbol. It is obvious that there exist real numbers u_n, v_n such that $u_n^2 + v_n^2 = 1$, $u_n y_0(n) + v_n y_3(n) = 0$ for all positive integers $n > a$. Let us put for all these n $x_n(t) = u_n y_0(t) + v_n y_3(t)$. Because of the boundedness of u_n, v_n there exist real numbers u, v such that $u_{n_k} \rightarrow u, v_{n_k} \rightarrow v$ as $k \rightarrow \infty$, $u^2 + v^2 = 1$. If we put $x(t) = u y_0(t) + v y_3(t)$, then it can be easily seen that $x(t)$ is nontrivial solution of (L) on I_a . Now we prove its oscillation. Let $x(t)$ be nonoscillatory. Without loss of generality, we can assume $x(t)$ is positive on some I_b , $b \geq a$ (if it were not so, we take into account the solution $-x(t)$ of (L) on I_a). Then $x(t)$ is either P-monotone or Kneser. If it is P-monotone, then there exist $c \geq b$ such that $L_k x(t) > 0$ on I_c , $k = 0, 1, 2, 3$ and $m \in \mathbf{N}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $m > \tau > c$ such that $L_i x_{n_k}(\tau) > 0$ for all $n_k > m$, $i = 0, 1, 2, 3$. If n_k is any fixed number satisfying the condition $n_k > m$ then [2, Lemma 4] yields $x_{n_k}(n_k) > 0$. However, this is a contradiction, because $x_{n_k}(n_k) = 0$. If $x(t)$ is a Kneser solution of (L), then there exists a real number $d > a$ such that $(-1)^k L_k x(t) > 0$ as $t \geq d$, $k = 0, 1, 2, 3$. Then from [2, Lemma 5] it implies that $(-1)^k L_k x(t) > 0$ on the interval $[a, d)$. In particular, $L_1 x(a) < 0$. However, the construction of $x(t)$ it yields that $L_1 x(a) = u L_1 y_0(a) + v L_1 y_3(a) = 0$, which is a contradiction, **q.e.d.**

Theorem. Let (A), (B) hold. Then the equation (L) is oscillatory.

Proof. According to Lemma 1, it holds that every positive solution of (L) on I_a is either P-monotone or Kneser. Then Lemma 2 yields the assertion of the theorem, **q.e.d.**

Example 1. Let us consider the equation (L) in the form

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Here $p_k(t) = -r(t) = 1$ on I_1 , $k = 1, 2, 3$. Because the hypotheses (A), (B) hold, then foregoing Theorem yields that (L) is oscillatory. Indeed, an oscillatory solution of (L) on I_1 is, for example, the function $y(t) = \sin t$.

Remark 1. Example 1 shows that the hypotheses of our Theorem are satisfiable, i.e. they are consistent.

Example 2. Let us consider the equation (L), where $p_1(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ and the functions $f_k(t) \geq 0$, $k \in \mathbf{N}_0$ are periodic on $I_0 = [0, \infty)$ with the period $\pi_k = 10^{-2k}$ such that

$$f_k(t) = \begin{cases} 10^k t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} 10^{-2k} \\ 10^{-k} - 10^k t, & \frac{1}{2} 10^{-2k} \leq t \leq 10^{-2k} \end{cases},$$

$$f_k(t + \pi_k) = f_k(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

$p_2(t) = 1 + t$, $p_3(t) = 5t$, $r(t) = -(2 + t^2)$ on I_0 . According to [1, Theorem 96], the function $p_1(t)$ is positive and continuous on I_0 . Moreover,

$$1 \leq p_1(t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} 10^{-n} = \frac{14}{9} \text{ for all } t \in I_0.$$

It implies $\int_0^{\infty} \frac{1}{p_1(s)} ds \geq \int_0^{\infty} \frac{9}{14} ds = \infty$. Then Theorem yields (L) to be oscillatory.

Remark 2. We note that (L), considered in Example 2, cannot be rewritten into the form $a(t)y^{(4)} + b(t)y''' + c(t)y'' + d(t)y' + r(t)y = 0$ (with classic derivatives), because a derivative of $p_1(t)$ exists in no point of I_0 , as it implies from [1, Theorem 96], too.

REFERENCES

- [1] Jarník, V.: *Diferenciální počet II*, NČSAV, Praha 1956.
- [2] Rothová, M., Palumbíny, O.: *On monotone solutions of the fourth order ordinary differential equations*, Czech. Math. J., 45 (1995), 737–746.

doc. RNDr. Oleg Palumbíny, PhD.

Mgr. Róbert Vrábel, PhD.

Katedra matematiky,

Ústav aplikovanej informatiky a matematiky,

Materiálovotechnologická fakulta,

Slovenská technická univerzita v Bratislave,

Hajdóczyho 1,

Sk - 917 24 Trnava

e-mail: oleg.palumbiny@stuba.sk

ANALÝZA RIEŠENIA VYBRANÝCH ÚLOH V TESTOVANÍ ŽIAKOV 5. ROČNÍKA ZŠ

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ

ABSTRACT. In this article we concern about testing of pupils in Slovakia. We focus on our project KEGA in which we try to influence student's mathematical knowledge by solution special problems according to ISCED 2. We analyze two of problems in the test with emphasis on the pupil's ability to solve them in the 5th class at the elementary school.

Úvod do testovania žiakov na Slovensku

V SR sa s testovaním vedomostí začali žiaci aj ich učitelia častejšie stretávať v súvislosti s medzinárodnými meraniami úrovne vedomostí žiakov PISA a TIMSS a tiež v súvislosti s realizáciou merania výsledkov vzdelávania na národnej úrovni Monitor 9, ktorý pokračoval ako Testovanie 9. Monitor 9 bol prvýkrát realizovaný v roku 2003, jeho cieľom bolo testovanie deviatakov, monitorovanie úrovne a kvality výchovy a vzdelávania v poslednom ročníku ZŠ, získanie výstupu, ktorý by bol rozhodujúcim kritériom prijatia žiaka na strednú školu. Prax ukázala, že tieto výsledky slúžia ako jedno z kritérií pre prijatie uchádzača na strednú školu. Význam realizácie Testovania 9 spočíva aj v tom, že zriaďovatelia, školy, rodičia i žiaci získavajú spätnú väzbu o dosiahnutých výsledkoch, čo môže prispieť ku skvalitneniu, korigovaniu a zefektívneniu výchovno-vzdelávacej práce. Školy získavajú možnosť porovnať zistené individuálne výsledky s interným hodnotením žiakov. Žiaci sú externe hodnotení, majú možnosť porovnať sa s priemerom a zistiť, na akej úrovni sú v porovnaní s populáciou deviatakov na Slovensku. Taktiež rodičia majú možnosť porovnať výsledky svojho dieťaťa a hodnotenie interné s hodnotením externým. Nadobudnuté poznatky môžu ďalej využívať napríklad pri usmerňovaní v príprave na vyučovanie.

Medzinárodná štúdia PISA (Programme International Student Assessment) skúma od roku 2000 v trojročných cykloch úroveň pripravenosti 15-ročných žiakov a študentov členských a partnerských krajín OECD na ich občiansky a profesionálny život, na schopnosť vysporiadať sa s požiadavkami súčasnej informačnej spoločnosti. Monitoruje výsledky vzdelávania a hodnotí efektívnosť školských systémov zúčastnených krajín. V poslednom období sa v hodnotení začína klásť oveľa väčší dôraz na zisťovanie a hodnotenie úrovne matematickej gramotnosti. Štúdia OECD PISA 2003 ukázala, že vo vyučovaní matematiky je potrebné zamerať sa na riešenie úloh prepojených s reálnym svetom, riešenie problémov a poskytnúť žiakom viac priestoru na argumentáciu. V roku 2006 sa Slovensko zúčastnilo testovania OECD PISA druhýkrát. Dosiahnuté výsledky v matematickej gramotnosti a aj celkové výsledky boli porovnateľné s výsledkami na Slovensku v roku 2003, ale v porovnaní s priemerom krajín OECD sa postavenie Slovenska významne zhoršilo, umiestnilo sa významne pod priemerom krajín OECD.

Ďalším významným medzinárodným výskumom je TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), Trendy v medzinárodnom výskume matematiky a prírodovedných predmetov. TIMSS skúma podstatu, príčiny a rozdiely vo výsledkoch

vzdelávania v medzinárodnom porovnaní. SR sa do tejto medzinárodnej evalvácie vzdelávacích výsledkov zapája od roku 1990. Jednotlivé štúdie boli realizované v rokoch 1995, 1999, 2003 so žiakmi 8. ročníka ZŠ a 1. ročníka osemročných gymnázií a v roku 2007 boli testovaní aj žiaci 4. ročníka ZŠ. Štátny pedagogický ústav analyzoval testové položky a navrhol „aby sa na vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov v čoraz väčšej miere objavovali úlohy, ktoré od žiakov vyžadujú: čítať a interpretovať údaje z obrázkov, tabuliek, grafov, diagramov a máp, zaznamenávať údaje z jednoduchých štatistických zisťovaní do tabuliek a grafov, tvoriť závery, argumentovať a analyzovať informácie“. [1]

Testovanie žiakov v projekte KEGA

V rámci projektu KEGA: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií - alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA, bol realizovaný vstupný a výstupný test žiakov 5. ročníka ZŠ. Približne 900 žiakov základných škôl je zapojených do projektu, pričom sú rozdelení na kontrolnú a experimentálnu skupinu. V experimentálnej skupine boli v priebehu školského roka 2009/2010 zaraďované do výučby matematiky úlohy zostavené riešiteľským kolektívom, ktoré sú zamerané na zvyšovanie matematických kompetencií žiakov v piatich tematických oblastiach určených v ISCED 2:

- Čísla, premenná, počtové výkony s číslami
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
- Geometria a meranie
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
- Logika, dôvodenie, dôkazy

Úlohy uvedené v článku boli pripravené ako úlohy na testovanie výstupných vedomostí a zručností žiakov v tematickej oblasti *Čísla, premenná, počtové výkony s číslami*. Vybrali sme dva problémy, ktorých výsledné riešenie v teste sme spracovali v zmysle matematických kompetencií a úrovni ako ich uvádza štúdia OECD PISA. [2]

Žiak, ktorý je schopný úspešne používať matematiku v rôznych situáciách, má isté *matematické schopnosti*, ktorých súhrn možno považovať za jeho celkovú matematickú kompetenciu. Na určenie a zhodnotenie týchto schopností používa štúdia OECD PISA tieto matematické kompetencie:

- rozmyšľanie a usudzovanie,
- argumentácia,
- komunikácia,
- modelovanie,
- polozenie otázky a riešenie problému,
- reprezentácia,
- použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania operácií,
- použitie nástrojov a prístrojov.

OECD PISA opisuje aktivity obsahujúce tieto kompetencie pomocou troch úrovní:

1. Úlohy merajúce *kompetencie na reprodukčnej úrovni* si vyžadujú reprodukciu naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr a riešenie rutinných problémov.

2. *Kompetencie na úrovni prepojenia* umožňujú riešenie úloh, ktoré nie sú úplne rutinné, ale obsahujú známe alebo pomerne známe prvky. Úlohy spojené s touto úrovňou

kompetencií vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými navzájom rôznymi reprezentáciami daného problému. Sú pre ne charakteristické integrácia, prepojenie a nenáročné rozšírenie pre žiaka známeho materiálu, modelovanie a spojenie viacerých pre žiaka známych metód.

3. *Kompetencie na úrovni reflexie* obsahujú prvok uvažovania o procesoch potrebných k vyriešeniu úlohy. Vzťahujú sa k žiakovým schopnostiam plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v úlohách, ktoré obsahujú viacej súčastí a môžu byť originálnejšie (menej zvyčajné) v porovnaní s úlohami zodpovedajúcimi kompetenciám na úrovni prepojenia. Charakterizuje ich potreba rozvinutého uvažovania, argumentácie, abstrakcie, zovšeobecnenia a modelovania použitého v nových (neznámych) kontextoch, originálneho matematického prístupu, spojenia viacerých zložitejších metód a vniknutia do problému.

Analýza riešenia vybraných úloh v teste

Ďalej uvádzame dva z piatich problémov, ktoré riešili žiaci v prezentovanom teste v 5. ročníku ZŠ.

1 Požičovňa bicyklov

Ondrej je na letnej dovolenke na Liptove. Ide si požičať horský bicykel na 3-hodinovú cyklotúru. V požičovni bicyklov je tento cenník:

1 hodina	2 eurá 50 centov
Pol dňa (asi 4 hodiny)	7 eur
1 deň	10 eur

Úloha 1. Zisti, ktorá ponuka z cenníka je pre Ondreja najvýhodnejšia.

Riešenie: 1 hodina...2 eurá 50 centov, 3 hodiny...3.2 eurá 50 centov = 7 eur 50 centov

7 eur (pol dňa) < 7 eur 50 centov (3 krát 1 hodina) < 10 eur

Správna odpoveď: Pre Ondreja je najvýhodnejšie požičať si bicykel na pol dňa.

Úloha 2. Bicyklovať sa chcú aj Dávid a Adam. Dávid sa chce zúčastniť výletu na bicykloch, ktorý začína ráno a končí na obed. Adam sa chce zúčastniť na dvojhodinovom popoludňajšom výlete. Dávid navrhne Adamovi: „Ja si požičiam bicykel na celý deň, popoludní ti ho dám a ty mi dáš 5 eur.“ Napíš, koľko Dávid ušetrí.

Riešenie: Dávid zaplatí za celý deň 10 eur. Adam mu dá 5 eur. Dávidove náklady na zapožičanie bicykla budú... $10 - 5 = 5$ (eur), ak bude Adam súhlasiť s jeho návrhom. Ak by si požičiaval bicykel na pol dňa, platil by 7 eur. Rozdielom $7 - 5 = 2$ (eurá) získame sumu, ktorú môže ušetriť.

Správna odpoveď: Dávid ušetrí 2 eurá.

Vyhodnotenie

Úloha 1: Správna odpoveď...2 body

Správny výpočet sumy za zapožičanie bicykla na 3 hodiny (7 eur 50 centov)...1b

Úloha 2: Správna odpoveď...3 body

Neúplné riešenie: - výpočet sumy za zapožičanie bicykla na 2 hodiny (5 eur)...1b

- výpočet rozdielu $10 - 5 = 5 \dots 1$ b

Požičovňa	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov				
	N	0 bodov	1 bod	2 body	3 body
Úloha 1	902	30,82	8,76	60,42	
Úloha 2	902	43,51	29,74	4,77	21,98

Analýza riešenia:

1. úloha bola zameraná na zistenie matematických kompetencií na úrovni prepojenia. Riešenie nebolo numericky náročné, dôležité bolo porovnanie jednotlivých súm. Úspešnosť riešenia nebola na očakávanej úrovni. Podľa údajov z tabuľky môžeme zistiť, že až 87,34 % žiakov, ktorí pochopili text úlohy a úlohu začali riešiť, tak ju aj správne doriešili.

2. úloha bola zameraná na zistenie kompetencií na úrovni reflexie. Zadanie úlohy bolo náročnejšie na čítanie s porozumením a vysoké percento žiakov s dosiahnutými 0 bodmi poukazuje na to, že mnohí žiaci riešenie ani nezačali. Takmer tretina žiakov si zo zadania vybrala iba informáciu o dvojhodinovom Adamovom výlete a túto správne riešili, ďalej však nepokračovali. Podľa údajov z tabuľky môžeme zistiť, že až 82,16 % žiakov, ktorí pokračovali v riešení úlohy, túto úlohu správne vyriešilo.

2 Návšteva divadla

Šimon a Lucia idú s rodičmi na predstavenie *Neberte nám princeznú* do divadla Nová scéna.



Predstavenie	Cenové kategórie		
	A	B	C
Boyand	20€	17€	17€
Neberte nám princeznú	13€	12€	10€
Fidlikant na streche	14€	13€	11€

Úloha 1. Vypočítaj, koľko € zaplatili za všetky lístky, ak si ich kúpili v cenovej kategórii A.

Riešenie: Kúpili 4 lístky po 13 eur (Neberte nám princeznú / A)... $4 \cdot 13 = 52$ (eur)

Správna odpoveď: Za lístky v cenovej kategórii A zaplatili 52 eur.

Úloha 2. Vypočítaj, koľko eur by ušetrili, ak by si kúpili lístky v cenovej kategórii C?

Riešenie: V kategórii C by platili $4 \cdot 10 = 40$ (eur); ušetrili by... $52 - 40 = 12$ (eur)

Správna odpoveď: Ušetrili by 12 eur.

Vyhodnotenie

Úloha 1: Správna odpoveď...2 b

- Správny postup, ale numerická chyba, alebo nesprávna odpoveď...1 b
 Úloha 2: Správna odpoveď...3 b
 Neúplné riešenie: - iba výpočet ceny lístkov v kategórii C (40 eur)...1 b
 - výpočet ceny lístkov v kategórii C (40 eur) a výpočet rozdielu, ale numerická chyba, alebo nesprávna odpoveď...2 b

Divadlo	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov				
	N	0 bodov	1 bod	2 body	3 body
Úloha 1	874	36,38	3,78	59,84	
Úloha 2	874	38,79	5,38	2,06	53,78

Analýza riešenia:

1. úloha bola zameraná na zistenie kompetencií na úrovni prepojenia. Správne riešenie spočívalo vo vyhľadání údajov z cenníka, pričom bolo potrebné brať do úvahy súčasne predstavenie a kategóriu a zároveň, ak idú dve deti s dvomi rodičmi, tak rátať štyri osoby. Úspešnosť riešenia nebola na očakávanej úrovni. Podľa údajov z tabuľky môžeme zistiť, že až 94,06 % žiakov, ktorí pochopili text úlohy a úlohu začali riešiť, tak ju aj správne doriešili.

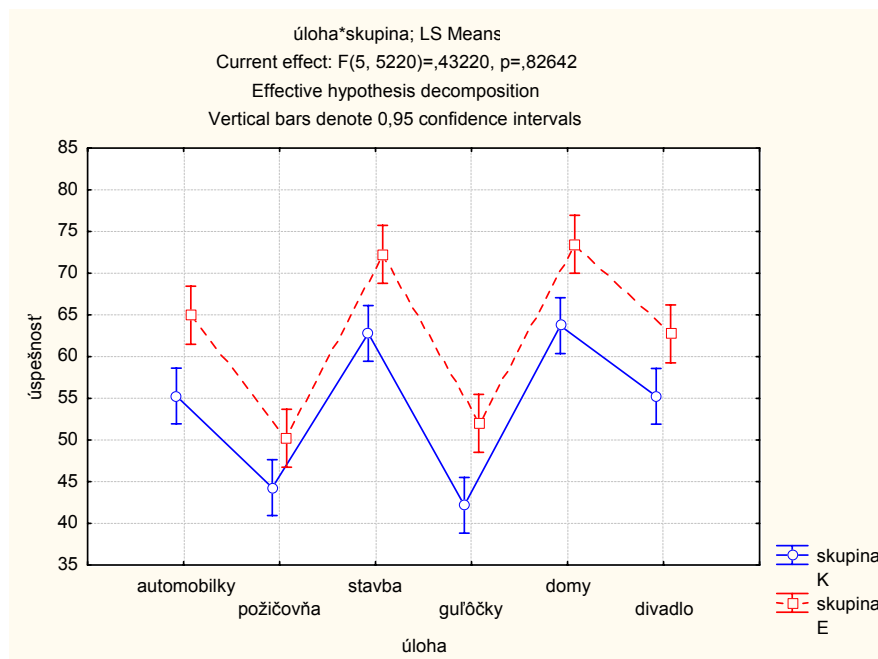
2. úloha bola zameraná na zistenie kompetencií na úrovni prepojenia. Text úlohy bol stručný, vysoké percento žiakov s 0 bodmi vyplýva z nízkej úspešnosti riešenia 1. úlohy. Podľa údajov z tabuľky môžeme zistiť, že až 87,85 % žiakov, ktorí pochopili text úlohy a úlohu začali riešiť, tak ju aj správne doriešili.

Dosiahnutá úspešnosť riešenia jednotlivých úloh poukazuje na problémy žiakov, ktorí boli testovaní, s čítaním s porozumením a s nadobudnutím „vhl'adu“ do podstaty úlohy.

Porovnanie výsledkov kontrolnej a experimentálnej skupiny

Početnosť a percentuálna úspešnosť riešenia čiastkových úloh vzhľadom na príslušnosť k skupine (K – kontrolná, E - experimentálna).

Úloha	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov					
	skupina	N	0 bodov	1 bod	2 body	3 body
Požičovňa Úloha 1	K	458	37,77	8,95	53,28	
	E	444	23,65	8,56	67,79	
Požičovňa Úloha 2	K	458	42,25	32,16	2,40	23,19
	E	444	44,81	27,25	7,20	20,74
Divadlo Úloha 1	K	455	40,65	3,53	55,82	
	E	419	31,74	4,06	64,20	
Divadlo Úloha 2	K	456	42,32	5,28	1,53	50,87
	E	418	34,92	5,52	2,63	56,93



Obrázok : Vyhodnotenie všetkých úloh v teste vzhľadom na kontrolnú K a experimentálnu skupinu E

Porovnaním výsledkov experimentálnej a kontrolnej skupiny sme zistili, že experimentálna skupina dosiahla štatisticky významne lepšie výsledky ako kontrolná skupina, z čoho vyplýva, že riešenie našich úloh, zameraných na zvyšovanie kompetencií, pozitívne ovplyvnilo výsledky žiakov experimentálnej skupiny.

Záver

V učive matematiky je neustále potrebné riešiť úlohy z reálneho života, aby sa prelínali matematické poznatky s ich praktickým využitím. Aj takto možno naplniť jeden z cieľov vyučovania matematiky na 2. stupni ZŠ v súlade s ISCED 2, t. j. aby žiaci nadobudli schopnosť používať matematiku vo svojom budúcom živote.

LITERATÚRA

- [1] KURAJ, J., KURAJOVÁ STOPKOVÁ, J. 2006. *Národná správa TIMSS. 2003*. Dostupné: http://www.statpedu.sk/buxus/docs//publikacie/Kuraj-Stopkova_Narodna_sprava_TIMSS2003.pdf
- [2] *Národná správa PISA 2006*. Dostupné: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie/pisa2006nsprava.pdf
- [3] *Štátny vzdelávací program Matematika ISCED 2*. 2010. Dostupné: http://www.statpedu.sk/documents//16/vzdelavacie_programy/statny_vzdelavaci_program/prilohy/Matematika_ISCED_2-3.pdf
- [4] www.kega.fss.ukf.sk

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.,
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.,
RNDr. Ľubomír Rybanský
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk
jzahorska@ukf.sk
lubomir.rybansky@ukf.sk

BUDOUcí UČITELÉ A ROZVOJ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI ŽÁKŮ

JAROSLAV PERNÝ, JANA HANKOVÁ, TEREZA NOVÁKOVÁ, TEREZA VOTRUBCOVÁ

ABSTRACT. The contribution describes options and themes for development of pupil's spatial imagination, which were prepared by our students - future teachers. The mental manipulation with plane and space objects is utilized for solving problems, mainly those dealing with assembling and disassembling of figures and solids and with views of solids. The task presentation is completed by suitable graphics.

1 Úvod

Jednou z významných kompetencí člověka užitečnou pro běžný život a zvláště pak pro některá povolání je geometrická představivost, jejíž úroveň u naší populace klesá. Jedním z důvodů je menší pozornost této problematice při výuce našich žáků na školách. Možné příčiny: upřednostňování jiných témat v důsledku snížení časové dotace na vyučování matematiky, menší připravenost učitelů v této oblasti, ale i mínění, že geometrická představivost je vrozená a někdo ji tedy má a jiný ne. I když poslední důvod má své určité opodstatnění, přesto je možno představivost rozvíjet u všech žáků.

2 Hlavní část

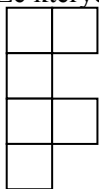
Mezi možnostmi, jak úroveň geometrické představivosti zvýšit, je např. zařazovat některé prvky formou her již na 1. stupni ZŠ a obdobně je zařazovat do opakování do matematiky na 2. stupni ZŠ i na SŠ. Tyto hry a úlohy jsou žáky pozitivně přijímány, ale vyžaduje to tvořivost učitele.

Proto je velice důležité již při vysokoškolské přípravě budoucích učitelů zaměřit se na tuto problematiku, nabízet studentům ukázky a náměty takovýchto problémových úloh a herních činností a vést je k vlastní tvořivosti v této oblasti. Do didaktických předmětů zařazujeme úlohy z tzv. spontánní geometrie, která studenti zpracovávají jako semestrální práce. Snažíme se získat zejména studenty primární školy pro tuto „jinou“ geometrii, aby napomohli zlepšit zmíněný stav.

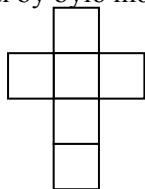
Předkládám ukázky práce našich studentek v oblasti rozvoje geometrické představivosti žáků na školách, které provádějí během svých praxí a v rámci Studentské grantové soutěže TUL a dále je sami rozvíjejí. Jsou převážně ze „spontánní geometrie“ a jsou rozděleny do několika typových skupin: Sítě těles, Skládání a rozkládání obrazců a těles (zejména krychlových), Zobrazování těles, Skrývačky obrazců.

2.1 Ukázka testu na geometrickou představivost (Jana Hanková)

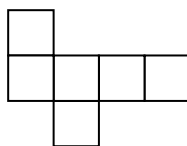
1. Ze kterých sítí by bylo možné složit krychli? Zakroužkuj ANO nebo NE.



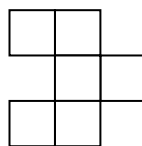
ANO NE



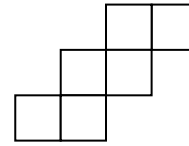
ANO NE



ANO NE

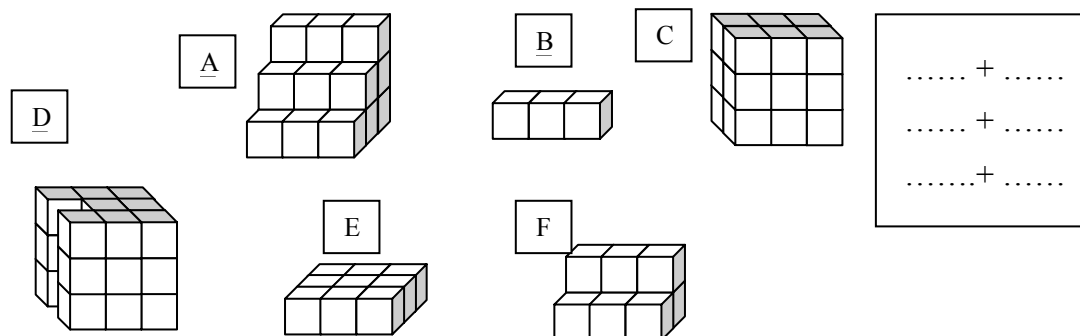


ANO NE

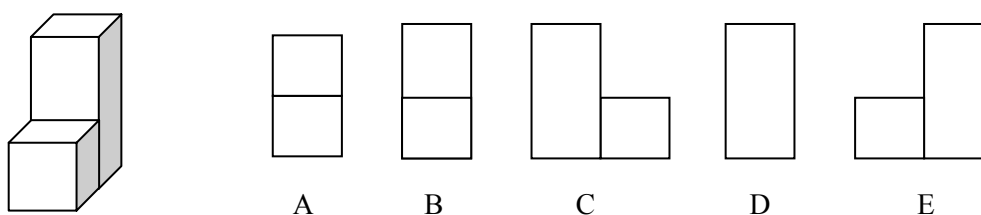


ANO NE

2. Která krychlová tělesa tvoří dohromady krychli?



3. Na obrázcích je pět pohledů na sestavu těles před tebou. Přiřaď k obrázkům správná označení: **zepředu, zezadu, zprava, zleva, ze shora**

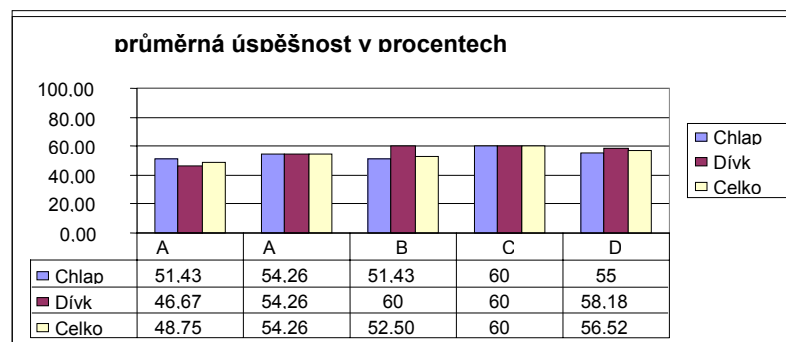


zepředu zezadu zprava zleva ze shora

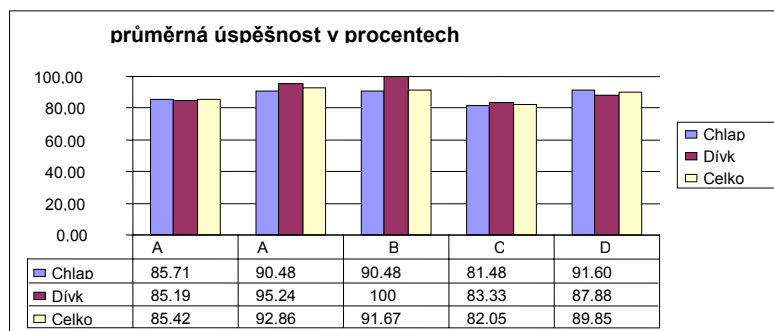
Test byl zadán na čtyřech školách. Škola A v menším městě, škola B malotřídka, škola C s výukou dle Montessori, škola D úplná vesnická.

2.2 Výsledky testů na geometrickou představivost

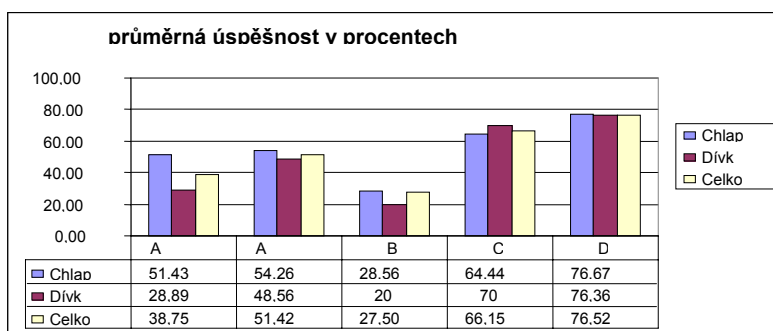
Úloha 1:



Úloha 2:



Úloha 3:

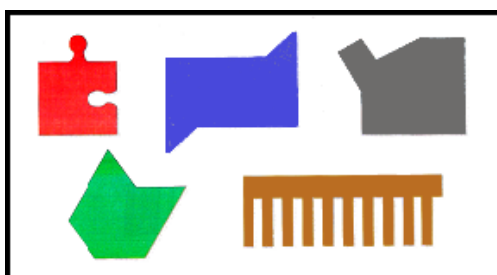


3 Závěr

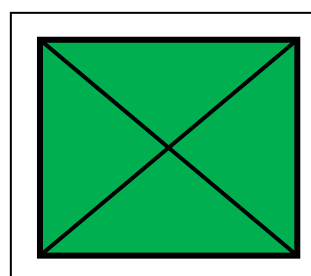
Domnívám se, že předložené ukázky práce studentek ukazují možnosti získávání studentů učitelství 1. stupně ZŠ, ale i dalších stupňů škol pro výuku geometrie. Spolu s dostatečnou nabídkou námětů je možnou cestou ke zlepšení úrovně geometrické představivosti našich žáků. Takto připravení tvořiví učitelé dokáží úspěšně náměty rozpracovat při vyučování a vytvářet z nich další, tak aby žáky vhodně motivovali a rozvíjeli jejich představivost i další požadované kompetence.

Přílohy: (Tereza Nováková – ukázky pracovních listů pro rozvoj představivosti)

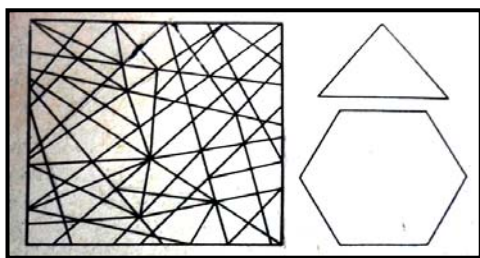
1. Rozděl obrazce jedním řezem tak, aby se z takto vzniklých částí dal sestavit čtverec.



2. Rozstříhni čtverec a sestav: ze 2 dílů: čtverec, trojúhelník; ze 4 dílů: trojúhelník, čtyřúhelník



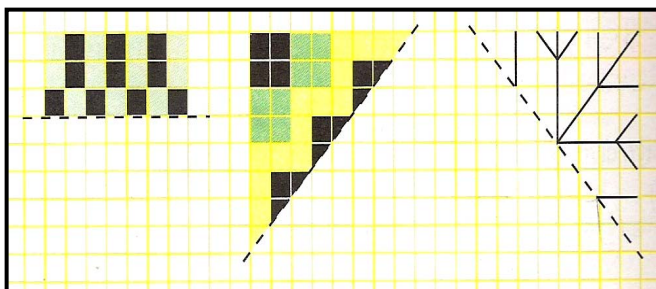
3. Ve spleti čar uvnitř čtverce jsou skryty 2 obrazce, které vidíte vedle čtverce vpravo. Najděte je.



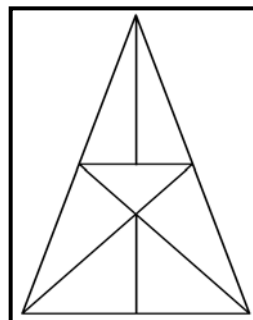
4. Vyhledej shodné obrazce.



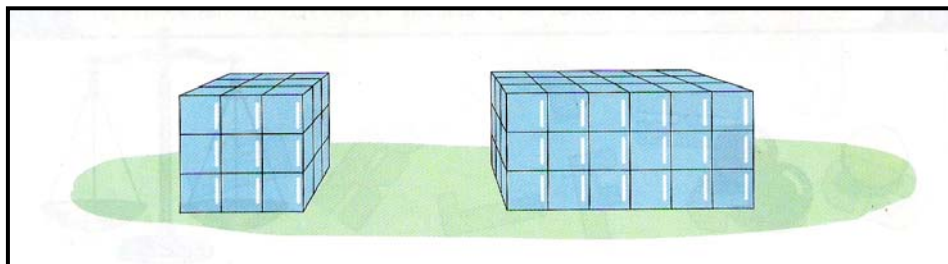
5. Dokreslete obrázky, aby byly souměrné podle osy



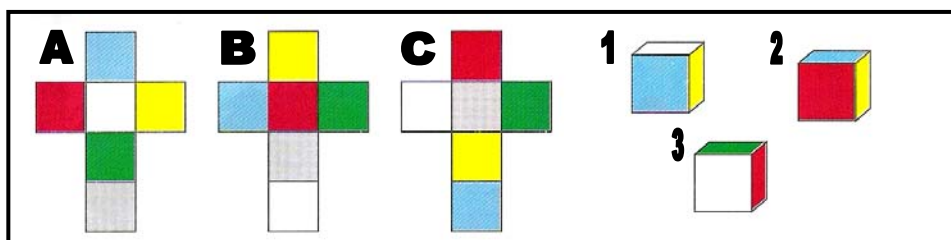
6. Kolik je tu trojúhelníků?



7. Kolik skleněných tabulek bylo použito na stavbu těchto skleníků?



8. Která krychle je složena z které sítě?



(Tereza Votrubcová – ukázky pracovních listů pro rozvoj představivosti pro SŠ)

Úloha „Pyramida“

Cheopsova pyramida je 138 m vysoká. Půdorys je čtvercový s délkou strany přibližně 230 m. Vypočítejte sklon stěny Cheopsovy pyramidy.



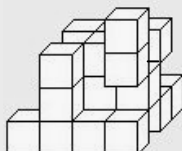
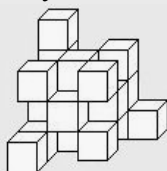
Řešení:

$v=138 \text{ m}$
 $a=115 \text{ m}$

$\text{tg } \alpha = \text{tg } \frac{138}{115}$
 $\alpha = 50^\circ 3'$

Úloha „Krychlová tělesa“

Na obrázcích máte pohledy na tutéž stavbu sestavenou z krychlí. Doplňte budovu na úplnou krychli o rozměrech 4x4x4 kostky. Kolik bude potřeba kostek?



(Nápověda: Dobře se kostky dopočítávají po jednotlivých poschodích.)

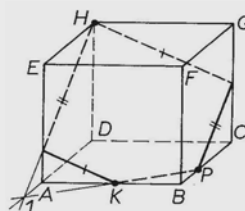
Řešení: 1. patro 15 2. patro 11 3. patro 11 4. patro 8
Bude třeba **45** kostek.

Úloha „Řez budovy“

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou HKP určenou následovně:

$K = S_{AB}$; $P \in BC$; $|BP| : |PC| = 1 : 2$.

Řešení:



Úloha „Studentské modely měst“

Na základě řezu tělesa rovinou, který již studenti sestrojovali sami, vyrobili model budovy.



REFERENCES

- [1] PERNÝ, J.: *Tvořivost k rozvoji prostorové představivosti*. TU Liberec 2004. ISBN 80-7083-802-7.
- [2] HANKOVÁ, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti*. Diplomová práce, TU Liberec 2010.
- [3] NOVÁKOVÁ, T.: *Prostorové vnímání žáků primární školy*. Diplomová práce, TU Liberec 2010.
- [4] VOTRUBCOVÁ, T.: *Geometrie v architektuře – projekt*. Diplomová práce, TU Liberec 2010.

doc. PaedDr. Jaroslav Perný, PhD.

Department of Mathematics and Didactics of Mathematics

Faculty of Science, Humanities and Education

Technical University of Liberec

Studentská 2,

CZ – 461 17 Liberec

e-mail: jaroslav.perny@tul.cz

OVĚŘOVÁNÍ HYPOTÉZ A MATEMATIZACE VE STOCHASTICE PRO UČITELE

ADAM PŁOCKI

ABSTRACT. The paper concerns the stochastic education of teachers of mathematics. Organization of the following three phases of verification of conjectures is investigated: mathematization, calculation, interpretation.

Úvod

Předmětem práce je stochastický aspekt vzdělávání učitele matematiky. Práce se týká rozhodování pomocí stochastiky, zda určitá skutečnost je výsledkem náhody. Jde o ověřování jistých hypotéz. Jedná se o ukázání určité specifiky stochastických závěrů, které pro praxi vyplývají z vypočítané pravděpodobnosti. Stochastické závěry jsou nyní důležitým prvkem jak matematické, tak i obecné kultury současného člověka.

V práci uvedené úlohy se týkají světa „kolem nás“, a tedy nematematických situací a problémů. Jsou to mimo jiné otázky:

— Zda určitá skutečnost je výsledkem vědomosti, talentu, jistých schopností nebo hádání (tedy náhody)?

— Zda známka z testové zkoušky je věrohodná? Jaké je riziko (nebezpečí), že žák uspěje v testu, i když nemá žádné znalosti a odpovědi pouze hádá?

Hledání odpovědi na tyto otázky se začíná překladem problému do jazyka matematiky, tj. vytvořením jisté matematické úlohy.

Problematika této práce se vztahuje na

- ilustrace procesu aplikace matematiky (jde o autentické a správné pro učitele příklady řešení pomocí matematiky smysluplných reálných problémů);
- ukazování co, jak a proč se matematizuje, konstruování způsobů simulace náhodných událostí;
- zvláštní prezentace teorie ověřování hypotéz (jde o prezentace metodologie stochastiky v rámci matematiky „pro každého“, o adaptace této teorie na půdu školské matematiky);
- prezentace jistých paradoxů a jejich používání pro matematickou aktivizaci (paradox jako prostředek jisté argumentace spojené z ověřováním správnosti jistých usuzování); používání matematických faktů i vyplývajících z nich úsudků jako kritéria důkazu, že intuitivní soud není správný (protože kdyby byl, pak by z něho vyvozené důsledky byly nesmyslné, jde tedy o jisté logické argumentace);
- usuzování pomocí analogií, jejichž podstatou je společný tvar simulačního schématu.

Jedním z cílů této práce je pokus o ukázání, že tvoření úloh z počtu pravděpodobnosti, hledání jejich řešení a samotné řešení je široce chápánou matematickou činností obsahující kromě výpočtu a dedukce také aktivity, jako je

— převod nematematického problému do matematického jazyka, konstrukce matematického modelu jisté součásti skutečnosti a také

— interpretace výsledků výpočtů.

Jedná se proto nejen o počítání pravděpodobností, ale také o formulování věrohodných úsudků, jaké pro praxi vyplývají z její velikosti, a též důkaz této věrohodnosti.

1 Kompendium ze stochastiky

Předmětem počtu pravděpodobnosti je konstruování a zkoumání *pravděpodobnostních prostorů*. K tomuto zkoumání patří formulování různých vlastností těchto prostorů. Velikost pravděpodobnosti jevu je jistou vlastností takového prostoru.

V matematice „pro každého“, a tedy rovněž ve stochastice pro učitele, je pravděpodobnostní prostor matematickým modelem náhodného pokusu, který má nanejvýš spočetnou množinu výsledků a který se objevuje v pozadí situace spojené s hrou, s hodnocením jistého rizika, s rozhodováním v riskantních podmínkách, s verifikací jistých hypotéz atd.

Diskrétním náhodným pokusem nazýváme každý experiment δ (reálný nebo myšlenkový, viz [1], s. 16-17 a [4], s. 13), o jehož průběhu a výsledku rozhoduje výhradně náhoda a přitom:

- množina výsledků tohoto pokusu je konečná nebo spočetná a
- pro každý výsledek je možno určit *a priori* pravděpodobnost toho, že se pokus δ skončí tímto výsledkem.

Hod korunovou mincí je reálným náhodným pokusem, hod symetrickou mincí je abstraktním náhodným pokusem. Matematika se zabývá jen abstraktními pokusy. W. Feller je v [1] (s. 2) nazývá *myšlenkovými experimenty (conceptual experiment)*. Ve stochastice pro učitele budeme také rozebírat reálné náhodné pokusy, budeme pro ně konstruovat matematické modely. Tento přechod od reality do světa matematiky ukážeme jako matematickou činnost. Dobrou ilustrací této cesty je tvoření stochastického modelu náhodného křížení jedinců (*panmixe*). O tomto reálném náhodném pokusu (jeho výsledkem je potomkův genotyp) se hovoří v genetice (viz [5], s. 120-121).

1.1 Stochastický model náhodného pokusu

Jestliže Ω je množina všech výsledků diskrétního náhodného pokusu δ a funkce p přiřazuje ke každému výsledku pravděpodobnost, s jakou může pokus δ skončit tímto výsledkem, tak dvojici (Ω, p) nazýváme stochastickým modelem pokusu δ .

Funkce p je nezáporná a splňuje podmínku $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Model náhodného pokusu

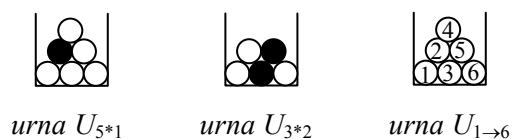
δ , a tedy dvojice (Ω, p) , je už matematický pojem.

Nechť dvojice (Ω, p) je stochastickým modelem náhodného pokusu δ . Každý jev A spojený s tímto pokusem δ můžeme ztotožňovat s množinou příznivých mu výsledků pokusu δ , a tedy s podmnožinou množiny Ω . Množina $\mathcal{Z}$ všech podmnožin množiny Ω (jako množina všech jevů spojených s pokusem δ) je σ -algebrou podmnožin množiny Ω . Nechť P je funkce určená na množině $\mathcal{Z}$ s hodnotami v množině $\mathbb{R}$ reálných čísel následujícím předpisem:

$$(*) \quad P(A) = \begin{cases} 0, & \text{když } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{když } A = \{\omega\}, \\ \sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{když } A \text{ je množina nejméně dvouprvková.} \end{cases}$$

Funkce P přiřazuje ke každému jevu jeho pravděpodobnost. Snadno lze dokázat, že funkce P je pravděpodobností, a tedy trojice $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ je pravděpodobnostním prostorem ve smyslu axiomatické definice (viz [9], s. 261-262). Je to tzv. *diskrétní pravděpodobnostní prostor*.

Urnu, ve které je b bílých koulí a c černých, označíme U_{b*c} . Urnu, v které je s koulí očíslovaných od 1 do s označíme $U_{1 \rightarrow s}$.



Obr. 1 Tři urny

1.2 Model losování dvou koulí z urny U_{b*c}

Nechť $b \in \mathbb{N}_2$ a $c \in \mathbb{N}_2$. Současné losování dvou koulí z urny U_{b*c} je náhodným pokusem δ_{b*c}^2 . Jsou tři možné výsledky tohoto pokusu:

- ω_0 : obě vylosované koule budou bílé,
- ω_1 : jedna vylosovaná koule bude bílá, jedna černá,
- ω_2 : obě vylosované koule budou černé.

Lze dokázat (viz [5], s. 49), že stochastickým modelem náhodného pokusu δ_{b*c}^2 je dvojice (Ω, p) , přičemž

$$p(\omega_0) = \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)}, \quad p(\omega_1) = \frac{2bc}{(b+c)(b+c-1)}, \quad p(\omega_2) = \frac{c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)}.$$

Jev $A = \{\text{obě vylosované koule budou mít stejnou barvu}\}$ je v modelu (Ω, p) množinou $A = \{\omega_0, \omega_2\}$, a tedy pravděpodobnost jevu A je číslo

$$P(A) = P(\{\omega_0, \omega_2\}) = p(\omega_0) + p(\omega_2) = \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)} + \frac{c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)}.$$

Tvoření pravděpodobnostního prostoru jako objektu světa matematické abstrakce, ale zároveň jako modelu konkrétní situace, je v [7] ukázáno jako široce chápáná matematická tvorba.

Jev spojený s náhodným pokusem δ nazýváme *prakticky nemožný*, pokud je jeho pravděpodobnost menší než 0,05. Jev nazýváme *prakticky jistý*, pokud je jeho pravděpodobnost větší než 0,95. Číslo $\alpha = 0,05$ nazýváme *hladina významnosti*.

Úsudky týkající se procesu rozhodování a verifikace jistých hypotéz se opírají o následující pravidlo praktické jistoty:

Jestliže je jev prakticky nemožný, můžeme si být prakticky jistí, že nenastane.

1.3 Náhodná veličina s Bernoulliho rozdělením

Nechť $n \in \mathbb{N}_2$ a $u \in \mathbb{R}$, přičemž $0 < u < 1$. Říkáme, že S_n je *náhodnou veličinou s Bernoulliho rozdělením* $b(n, u)$, právě tehdy, když

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Počet rubů padlých v n -násobném hodu mincí (o tomto počtu hovoříme dříve než tento pokus nastane) je náhodnou veličinou z rozdělením $b(n, \frac{1}{2})$.

1.4 Počet spojení jako náhodná veličina

Nechť δ_s je s -násobným losováním bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$. O spojení mluvíme, když je číslo koule stejné jako číslo etapy, ve které bylo vylosováno. Počet spojení v náhodném pokusu δ_s je náhodná veličina Y_s . Lze dokázat, že

$$P(Y_s = s) = \frac{1}{s!}.$$

1.5 De Moivreův paradox

Jestliže S_{2n} je počtem rubů padlých v $2n$ -násobném hodě mincí, pak

$$P(S_{2n} = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Číslo $P(S_{2n} = k)$ je pravděpodobností jevu

$$\{S_{2n} = k\} = \{\text{v } 2n\text{-násobném hodě mincí padne právě } k \text{ rubů}\}.$$

Zdá se, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{2n} = n) = 1$. Lze dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_{2n} = n) = 0. \quad (1)$$

Hodnota n je modem (tedy nejvíce pravděpodobnou hodnotou) náhodné veličiny S_{2n} . Odtud plyne, že pro dostatečně velká n je

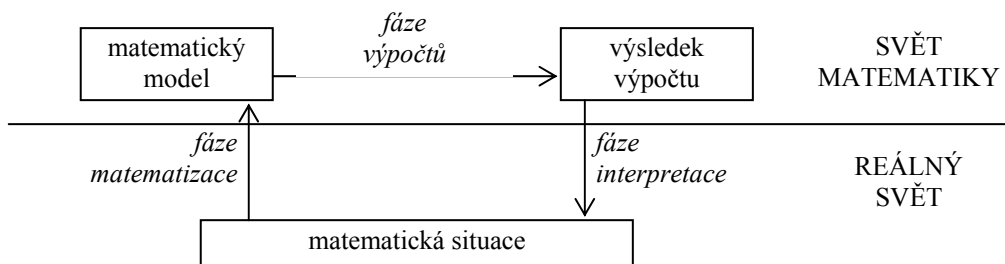
$$P(S_{2n} = k) < \alpha = 0,05 \quad \text{pro každé } k = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (2)$$

2 Proces používání matematiky

Řešení v práci uvedených úloh obsahuje:

- přechody od skutečnosti do světa matematické abstrakce, to je etapa konstruování pravděpodobnostního prostoru jako modelu výchozí mimomatematické situace, etapa schematizace a matematizace, tedy etapa popisu této situace v kontextu urnových schémat typických pro počet pravděpodobnosti; to je *fáze matematizace*;
- činnost čistě matematickou uvnitř pravděpodobnostního prostoru (jedná se zde o matematické uvažování a o počítání); to je *fáze výpočtů a dedukcí*;
- návrat do skutečnosti, formulování závěrů, které na téma výchozí mimomatematické situace vyplývají např. z velikosti dříve vypočítané pravděpodobnosti (tedy např. z faktu, že uvažovaný jev je prakticky nemožný); tato etapa je *fází interpretace* (je to „projekce“ výsledků výpočtů „do roviny reality“).

Říkáme, že úloha zobrazuje *proces používání matematiky*, pokud její řešení obsahuje fázi matematizace, fázi výpočtů a fázi interpretace (viz obr. 2). V této práci ukazujeme příklady procesu používání matematiky adresované učitelům matematiky.



Obr. 2 Tři fáze procesu používání matematiky

Dedukce a výpočty jsou důležitým (avšak ne jediným a vůbec ne nejdůležitějším) stádiem řešení úlohy. Organizace fáze matematizace a fáze interpretace je také považována za matematickou činnost.

3 Matematizace ve stochastice pro učitele

Podle Hanse Freudenthala *učit matematizovat* je hlavním cílem vyučování matematice a matematického vzdělávání ([2]), přitom teorie pravděpodobnosti vedle geometrie poskytuje nejlepší příklady ukazující, jak se matematizuje.

Freudenthal chápe *matematizaci* jako popisování (uspořádání) reality pomocí pojmů a jazyka matematiky. Z hlediska didaktiky matematiky „matematizovat“ fragment reality znamená nahlížet tento fragment přes „matematické brýle“. Přes tyto „brýle“ vidíme jen nejdůležitější fakta, naopak zanikají fakta druhořadá. Přes tyto „matematické brýle“ krabička zápalek vypadá jako pravouhlý rovnoběžnostěn, o kterém se mluví v geometrii, železniční spojení mezi Přerovem a Olomoucí jako úsečka, a zápalka při losování pomocí zápalek (viz [5], s. 26) jako koule. Plán železničních tratí v České republice je výsledkem procesu matematizace. V této práci ukazujeme co, jak a proč se matematizuje na základě stochastiky.

3.1 Znamení zvěrokruhu 12 náhodně se setkaných lidí a matematizace

Z abecedního seznamu studentů na své přednášce stochastiky (na sekci učitelské) vyberu prvních dvanáct. Držím v ruce 12 mincí o hodnotě 1 euro a uzavírám sázku z těmito studenty, a to takovou: — *Jestliže se každý z vás narodil v jiném znamení zvěrokruhu, dám každému euro. Ale jestli jsou mezi vámi alespoň dvě osoby narozené ve stejném znamení zvěrokruhu, dá mi každý z vás 1 euro.*

Opakuji tuto sázku ve skupině dalších 12 studentů v tomto seznamu. V situaci, kdy je na přednášce 120 studentů tuto sázku opakuji desetkrát. Ještě nikdy jsem takovou sázku neprohrál (nikdy jsem také nevzal vyhrané částky od studentů). Vzniká tedy otázka:

— Proč prakticky v každé skupině 12 náhodně se setkaných lidí jsou aspoň dvě osoby, které se narodily ve stejném znamení zvěrokruhu? Jak vysvětlit tento překvapivý empirický fakt pomocí matematiky?

Jde o reflexi *a posteriori* (viz [4], s. 158 a 271), která inspiruje úlohu na vypočítání pravděpodobnosti některého jevu. Ale tyto výpočty předchází matematizace (jde o konstrukci pravděpodobnostního prostoru, ve kterém se budou provádět tyto výpočty).

Očíslujme znamení zvěrokruhu čísla od 1 do 12. Zajímá-li nás znamení zvěrokruhu osoby, kterou náhodně potkáme, pak je tato osoba koulí vylosovanou z urny $U_{1 \rightarrow 12}$. Skupina 12 náhodně se setkaných lidí se stává výsledkem 12-násobného losování s vrácením koulí z této urny. Tento náhodný pokus δ_{12}^Z (už jako objekt stochastiky) je simulačním schématem jisté nematematické situace. Je to příklad procesu matematizace. Jev

$$A = \{\text{každá koule vylosovaná v pokusu } \delta_{12}^Z \text{ bude s jiným číslem}\}$$

je prakticky nemožný, neboť ve stochastickém modelu pokusu δ_{12}^Z máme

$$P(A) = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,000\,053\,723 \text{ (viz [5], s. 197).}$$

Tento matematický fakt má svou interpretaci v „rovině reality“. Je prakticky nemožné, aby ve skupině dvanácti náhodně se setkaných osob se každá narodila v jiném znamení zvěrokruhu.

Předmětem práce je mezi jiným organizace fáze matematizace a fáze interpretace. V dalších úvahách je možná matematizace díky předpokladu, že je pravdivá některá hypotéza H_0 . Problém se týká ověřování této hypotézy. Jde o:

- odkrývání prostředků této verifikace,
- určení podmínek, za kterých o hypotéze nutno pochybovat, jde tedy o konstruování tzv. *kritického oboru*,
- objevování chyb, kterých se většinou dopustíme při konstrukci tohoto oboru (jde tedy o chyby spojené s organizací fáze výpočtů a dedukce),
- objevování specifiky stochastických úsudků (jejichž základem je fakt, že se stalo něco, co je prakticky nemožné).

Matematizace je v uvedené situaci určením pravděpodobnostního prostoru jako modelu nematematické události. Při předpokladu, že hypotéza H_0 je pravdivá, lze považovat touto událost jako jisté urnové schéma, nebo jako hod kostkami, nebo jako n -násobný hod mincí. Tyto (pro stochastiku typické) náhodné pokusy jsou *simulačními schématy* výchozích událostí, pokud je pravdivá hypotéza H_0 . Základem její verifikace je to, že nastal některý jev (to je empirický fakt). Jestliže (při předpokladu, že hypotéza H_0 je pravdivá) je výskyt tohoto jevu prakticky nemožný, tak jsou důvody hypotézu H_0 zamítnout.

Otázka, jaké prakticky nemožné jevy (spojené z výchozí situací) dávají dostatečný důvod k zamítnutí hypotézy H_0 , se týká kritického oboru. Jak ukážeme dále, intuice nám nabízí chybné odpovědi. Mluvíme tedy o *stochastických intuicích* jako důležitém aspektu stochastické kultury učitele matematiky (viz [4], s. 437-455 a [7], s. 486-487).

3.1 Vědel celník o pašerácích

Prezentací uvedených problémů je následující příklad. Ze zahraničí se vracela skupina s turisty a mezi nimi byli dva pašeráci. Na hranici vzal celník k osobní prohlídce dva turisty, a ukázalo se, že oba dva jsou pašeráci. Vyskytlo se podezření, že je někdo udal. Oprávněně? Jak se to dá řešit pomocí stochastiky v případě, že $s = 5$? Jak, když $s = 40$?

Předpokládejme, že je nikdo neudal. Když přijmeme tuto hypotézu H_0 , znamená to, že celník turisty vybral náhodně (losoval). Událost na hranici je v takové situaci losováním dvou koulí z urny $U_{(s-2)*2}$ (dvě černé koule jsou pašeráci). Toto losování je simulačním schématem události na hranici, za předpokladu, že je pravdivá hypotéza H_0 . Je to fáze matematizace.

Jestliže je hypotéza H_0 pravdivá, pak pravděpodobnost, že celník náhodně vybere oba pašeráky je rovna pravděpodobnosti toho, že v losování dvou koulí z urny $U_{(s-2)*2}$ budou obě vylosované koule černé. Vypočítání této pravděpodobnosti je fáze výpočtů.

1° Jestliže $s = 5$ a hypotéza H_0 je pravdivá, pak pravděpodobnost, že celník náhodně vybere oba pašeráky je rovna $\frac{1}{10}$. Není tedy tak malá $\frac{1}{10} > 0,05$. Lze tedy náhodou vybrat oba pašeráky. Nejsou tedy žádné důvody k podezření někoho z udavačství. Zmíněný fakt (celník vybral oba pašeráky) nedává důvody pro zpochybnění hypotézy H_0 .

2° Náš vztah k hypotéze H_0 o náhodném odhalení dvou pašeráků by se musel změnit, kdyby tito dva pašeráci byli ve skupině s dalšími 38 poctivými turisty. V takové situaci ($s = 40$) pravděpodobnost náhodného výběru obou pašeráků je rovna $\frac{2 \cdot 1}{40 \cdot 39}$, tedy $\frac{1}{780}$.

Všimněme si, že $\frac{1}{780} \approx 0,00128 < 0,05$. Náhodou vybrat oba pašeráky je tedy prakticky nemožné. Fakt, že celník vybral oba pašeráky, dává dostatečné důvody k tomu, aby byla

zpochybněna hypotéza H_0 . Tato skutečnost je (nejpravděpodobněji) výsledkem udavačství, a nikoli náhody.

Formulování těchto úsudků na téma události na hranici, které vyplývají z fáze vypočtů, je fáze interpretace. Ukazaný příklad ověřování jisté hypotézy je tedy ilustrací procesu používání matematiky.

4 Některé druhy testových forem kontroly znalostí

Rozhodování pomocí stochastiky, zda určitá skutečnost je výsledkem vědomosti, talentu, jistých schopností nebo hádání, tedy náhody, budeme ilustrovat na příkladech známých testových zkoušek.

Test T1. Na hodině chemie žák dostává soubor s názvů chemických sloučenin. Mezi nimi jsou dva aldehydy, které je třeba podtrhnout. Při správném označení obou aldehydů žák dostane pozitivní známku (jako ohodnocení jeho znalostí z chemie).

Test T2. Při prověrce z češtiny jsou použity dva seznamy: seznam s spisovatelů a seznam s jejich citátů. Je třeba rozhodnout, který ze spisovatelů je autorem kterého z citátů. Za všechna správná spojení autora s jeho textem žák dostává pozitivní známku.

Test T3. V písemce ze zeměpisu žák dostal n otázek. Ke každé jsou připojeny dvě odpovědi ano nebo ne a žák má podtrhnout správnou. Pozitivní známku žák dostává za podtrhnutí všech správných odpovědí.

Test T4. Test z biologie obsahuje n otázek, kde je ke každé připojeno s odpovědí, z nichž je jen jedna správná. U každé otázky má žák podtrhnout správnou odpověď.

Nazývejme úspěchem správné označení jednoho aldehydu v případě testu **T1**, správné spojení autora z jeho citátem v případě testu **T2**, ukázání správné odpovědi na jednu otázku v případě testů **T3** a **T4**. Za předpokladu, že žák hádá (poněvadž nic neumí – to je hypotéza H_0), je počet žákem získaných úspěchů (pokud o něm mluvíme než se začne vyplňování testu) náhodnou veličinou.

5 Věrohodnost pozitivní známky, matematizace a ověřování jistých hypotéz

Každá ze zmíněných forem kontroly znalostí inspiruje otázky:

1. Zda pozitivní známka v situaci, kdy žák získal jen úspěchy, je věrohodná?
2. Od kolika správně ukázaných odpovědí (úspěchů) můžeme usuzovat, že žák má znalosti, a tedy které počty úspěchů svědčí proti platnosti hypotézy H_0 ?

Jde tady o určení pravidla věrohodného ohodnocení výsledků jistých testových forem kontroly znalostí. řešení tohoto nematematického problému je ilustrací procesu používání matematiky, obsahuje totiž (jak to ukážeme dále) všechny tři fáze tohoto procesu.

V případě každého testu předpokládejme, že žák hádá. Jde o (nulovou) hypotézu H_0 : *Žák z látky obsažené v testu nic neumí*. Smysl tohoto rozhodnutí spočívá v tom, že:

- a) v této situaci žák nemá získat pozitivní známku,
- b) díky předpokladu, že hypotéza H_0 je pravdivá, je možná organizace fáze matematizace.

O počtu úspěchů hovoříme než se započne s vyplňováním testu. Hypotéza H_0 říká, že žák hádá, a tedy vyplňování testu je – z hlediska stochastiky:

— losováním dvou koulí z urny $U_{(s-2)*2}$, počet získaných úspěchů je počtem černých koulí mezi dvěma vylosovanými, je to náhodná veličina X_s ;

— s -násobným losováním bez vracení koulí z urny $U_{1 \rightarrow s}$, počet získaných úspěchů je počtem spojení, a tedy náhodnou veličinou Y_s ;

— n -násobným hodem mincí, počet úspěchů je počtem padlých rubů, je to náhodná veličina Z_n a $Z_n : b(n, \frac{1}{2})$;

— n -násobným losováním s vracením koulí z urny $U_{(s-1)*1}$, počet úspěchů je počtem černých koulí vylosovaných v tomto pokusu. Je to náhodná veličina $S_n : b(n, \frac{1}{s})$.

Odpovědi na 1. otázku vyplývají z velikostí pravděpodobností:

$P(X_2^s = 2)$, v případě testu **T1** (je to zlomek $\frac{2}{s(s-1)}$);

$P(Y_s = s)$, v případě testu **T2**, (je $P(Y_s = s) = \frac{1}{s!}$);

$P(Z_n = n)$, v případě testu **T3**, (je $P(Z_n = n) = (\frac{1}{2})^n$);

$P(S_n = n)$, v případě testu **T4**, (je $P(S_n = n) = (\frac{1}{s})^n$).

Nechť $s = 40$ v případě zkoušky **T1**. Máme

$$P(X_2^{40} = 2) = \frac{2}{40 \cdot 39} = \frac{1}{780} \approx 0,00128,$$

a tedy při správném označení obou aldehydů v testu **T1** pozitivní známka je věrohodná. Správné ukázání obou aldehydů (a tedy jistá empirická skutečnost) svědčí o znalosti (dává důvod pro zpochybnění hypotézy H_0).

Všimněme si analogie mezi ověřováním této hypotézy H_0 (žák *nic neumí z chemie*) a hypotézy, že *nikdo neudal na hranici* v případě skupiny 40 turistů.

Přepokládejme, že na prověrce z češtiny (test **T2**) $s = 13$. V této situaci je

$$P(Y_{13} = 13) = \frac{1}{13!} = \frac{1}{6\,227\,020\,800}.$$

Pozitivní známka za všechna správná spojení autora s jeho textem je věrohodná.

Vraťme se k testu **T3**. Nechť $n = 20$. Všimněme si, že

$$P(Z_n = 20) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{1\,048\,576} \approx 0,000\,000\,9.$$

Pokud žák ukáže 20 správných odpovědí, může dostat pozitivní známku. Získání takového množství úspěchů cestou hádání je totiž prakticky nemožné. Takový počet úspěchů svědčí proti hypotéze H_0 .

Tyto úsudky patří k fázi interpretace při řešení problému věrohodnosti pozitivní známky z testové zkoušky..

6 Fáze interpretace a chyby spojené s určením kritického oboru jako didaktické zvláštnosti

Vraťme se k otázce 2. Pro každou ze zmíněných náhodných veličin v množině jejich hodnot je potřebné vyznačit ty, které hovoří proti hádání (a tedy proti hypotéze H_0). Je samozřejmé, že tady jde o ty největší hodnoty. Musíme tedy určit, jaký je minimální počet úspěchů, abychom si byli prakticky jisti, že to není výsledek hádání, ale znalostí.

Množinu těchto počtů úspěchů, které svědčí proti hypotéze H_0 označme Λ_n^α , kde α je hladinou významnosti. Tato množina se nazývá kritickým oborem. Rozhodli jsme, že

- v případě testu **T1** a $s = 40$ je $2 \in \Lambda_2^{0,05}$,
- v případě testu **T2** a $s = 13$ je $13 \in \Lambda_{13}^{0,05}$,
- v případě testu **T3** a $n = 20$ je $20 \in \Lambda_{20}^{0,05}$.

Vraťme se k testu **T3**. Rozhodujeme-li, zda je možné považovat za připraveného i žáka, který má 19 úspěchů, slyšíme nejčastěji návrhy, že budeme postupovat analogicky jako v případě 20 úspěchů, tj. určíme $P(S_{20} = 19)$. Je-li $P(S_{20} = 19) < \alpha = 0,05$, pak hypotézu H_0 zamítáme.

Z (2) vyplývá, že při dostatečně velkém počtu otázek ve zmiňovaném testu každý počet úspěchů by svědčil proti hypotéze H_0 , a to je nesmyslné.

Interpretace řešení úlohy zformulované nejprve ve fázi výpočtů vede k závěrům, které jsou v rozporu se zdravým rozumem. Fáze výpočtů zde byla organizovaná nesprávně (zformulována chybná úloha). Fázi výpočtů musíme tedy organizovat jinak (musíme ji začít znovu). Hledáme nyní nové, správné kritérium (podmínku) určení kritického oboru. Hovoříme tady o zvláštní matematické aktivitě.

Vraťme se k testu **T3**. Ke zjištění, zda $19 \in \Lambda_{20}^{0,05}$, musíme rozhodnout, zda $P(S_{20} \geq 19) < \alpha = 0,05$, a nikoli, zda $P(S_{20} = 19) < \alpha = 0,05$.

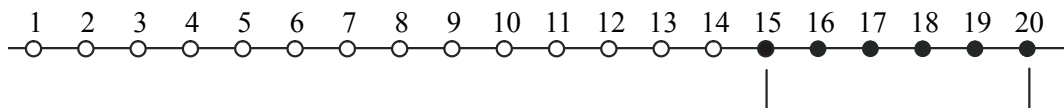
Kritický obor je množinou $\Lambda_{20}^{0,05} = \{k_{0,05}, k_{0,05} + 1, \dots, 20\}$, přičemž $k_{0,05}$ splňuje soustavu podmínek:

$$P(S_{20} \geq k_{0,05}) < 0,05 \text{ a } P(S_{20} \geq k_{0,05} - 1) \geq 0,05 \text{ a } S_{20} : b(20, \tfrac{1}{2}).$$

Lze dokázat, že

$$P(S_{20} \geq 15) \approx 0,0207 < 0,05 \text{ a } P(S_{20} \geq 14) \approx 0,0577 > 0,05,$$

a tedy $\Lambda_{20}^{0,05} = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.



Obr. 3 Kritický obor $\Lambda_{20}^{0,05}$ k testování hypotézy H_0 , že žák hádá

Pokud na prověrce ze zeměpisu žák uvede k správných odpovědí a $k \geq 15$, můžeme mu dát pozitivní známku. Označit tak velký (protože nejméně rovný číslu $k_{0,05} = 15$) počet správných odpovědí cestou hádání je totiž prakticky nemožné.

Vraťme se k testu **T1**. Necht' $s = 40$ a X_2^{40} je počtem správně označených aldehydů, a tedy počtem černých koulí mezi dvěma vylosovanými z urny U_{38*2} . Necht' $\Lambda_2^{0,05}$ je množinou těch hodnot náhodné veličiny X_2^{40} , které svědčí proti hypotéze H_0 . Dokázali jsme, že $2 \in \Lambda_2^{0,05}$.

Máme

$$P(X_2^{40} \geq 1) = \frac{2 \cdot 38 \cdot 2}{40 \cdot 39} + \frac{2}{40 \cdot 39} = \frac{76}{780} + \frac{1}{780} = \frac{77}{780} \approx 0,1 > 0,05,$$

a tedy $1 \notin \Lambda_2^{0,05}$. Za správné označení jen jednoho aldehydu v testu **T1** pozitivní známka není věrohodná.

Lze dokázat (viz [10]), že v případě testu **T3** číslo k_α určující kritický obor, je funkce čísla n , kde:

n	30	40	50	60	70	80	90	100
$k_{0,05}$	21	26	32	37	43	48	54	59

Úsudky vyplývající z této tabulky to jsou další závěry týkající se fáze interpretace.

Stanovení pravidel pro hodnocení výsledků testů je vyjádřením statistické *metody ověřování hypotéz*. Výše jsme utvořili tzv. *test jistoty* k ověření hypotézy, že žák hádá.

7 Analogie jako podstata stochastických úsudků

Evidování a využívání analogií se řadí v [3] k důležitým matematickým aktivitám. Podle Stefana Banacha percepce analogií a jejich používání je skutečným mechanismem matematické tvořivosti. Další příklady ukazují, jak díky analogii řešení jedné úlohy se stává řešením jiné. Podstatou analogie je společný tvar simulačního schématu událostí, o kterých se hovoří v těchto úlohách.

Příklad 7.1 Policie chce zaměstnat pracovníka, který dokáže určit charakterové rysy člověka na základě jeho rukopisu. Přihlásil se kandidát, ale musí udělat test. Kandidát dostal 13 popisů charakterových rysů 13 různých osob a na jiném papíru části rukopisů těchto osob. Kandidát spojil všechny popisy charakterových rysů se správnými vzorky písma. Může být zaměstnán u policie? Může se na základě získaného výsledku mluvit o jisté schopnosti (o talentu)?

Příklad 7.2 Ředitelství městských kaváren hledá pracovníka, který by kontroloval, zda v kavárnách číšníci správně účtují příslušnou cenu za podávaný druh kávy. V těchto kavárnách je podávána káva dvou druhů. Šálek každého druhu má jinou cenu. Přihlásila se paní Nováková, která tvrdí, že má schopnost rozlišovat podle chutě druh kávy. ředitelství se rozhodlo ověřit schopnost této paní. Byly jí podány dva šálky kávy, přičemž v každém byla káva jiného druhu. Paní Nováková správně určila druh kávy v těchto šálkách. Tento pokus byl opakován 20 krát. Paní Nováková 20 krát správně určila druh kávy. Dává tento fakt dostatečný důvod, aby bylo možné tvrdit, že paní Nováková má schopnost potřebnou pro tuto práci?

Rozhoduje se tedy, zda fakt, že paní Nováková 20 krát správně ohodnotila druh kávy je výsledkem její schopnosti nebo hádání, a teda náhody. Jde o analogický problém s problémem spojeným s testem **T3**.

Příklad 7.3 Hraniční strážníci nabídli psa, který (podle jeho majitele) má schopnost hledat narkotika. Psa podrobili testu. Do dvou z 20 kusů batohů umístili narkotika. Pes očuchal batohy a správně ukázal na dva s narkotiky. Je možné na základě této skutečnosti tvrdit, že pes má schopnost (talent) na hledání narkotik?

Příklad 7.4 V kulturní části sobotních novin jsou umístěné fotografie známých herců. Je jich 13 a jsou rozdělené na dvě části. V první části jsou fotografie současné, v druhé jejich fotografie z dětství. Čtenáři mají ke každému herci přiřadit jeho fotografii z dětství. Pro ty, kteří pospojují všechny fotografie správně, je připravena odměna. V denníku je napsané, že v případě této soutěže je odměněna schopnost poznávání tváře dospělého člověka z jeho vzhledu v dětství. Dále je napsané, že je odměněna schopnost rozpoznat charakterové rysy tváře herců z jejich fotografií z dětství.

a) Jak mnoho je pravděpodobné správné spojení všech dvojic v situaci, kdy oba druhy fotek se vybírají „čistou“ náhodou? Jaká je tedy šance pro obyčejného člověka získat uvedenou odměnu?

b) čtenář správně spojil 10 dvojic fotografií. Nedostal tedy odměnu. Napsal do redakce denníku odvolání, v kterém tvrdil, že jemu odměna patří, protože počet 10 zásahů svědčí o jeho talentu. Jaký je tvůj vztah k tomuto názoru čtenáře? Měl by mít tento čtenář podle tebe nárok na odměnu?

8 Příklady rozhodování, zda určitá skutečnost je výsledkem náhody

Příklad 8.1 Dítě při hraní s 12 kostkami s písmeny $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, q, u, w, v, z, x$, složilo slovo *plavec*. Můžeme usoudit, že již umí číst a psát?

Jedná se tedy o rozhodování na základě počtu pravděpodobnosti, zda určitá skutečnost (dítě složilo smysluplné slovo) je výsledkem talentu, vědomosti, schopnosti (čtení a psaní) nebo také náhody. K rozhodnutí o tom je třeba vypočítat pravděpodobnost složení slova *plavec* náhodou.

Jestliže předpokládáme, že dítě neumí číst a psát (hypotéza H_0), pak pravděpodobnost složení slova *plavec* náhodou je rovna $\frac{1}{127\,512\,000}$, a tedy je velice malá. Tento fakt (dítě složilo smysluplné slovo) hovoří proti hypotéze H_0 (dává dostatečný důvod pro zamítnutí hypotézy H_0).

Příklad 8.2 Test na získání řidičského průkazu sk. B v Polsku obsahuje 25 otázek, ke každé z nich jsou přiřazeny čtyři odpovědi, z kterých je jen jedna správná. Je 10 souborů otázek. Před zkouškou se losuje jeden soubor. Zkouška je považovaná za úspěšně absolvovanou, jestliže počet chyb není větší než 3. Najdi pravděpodobnost úspěšného absolvování zkoušky uchazeče, který se na test nepřipravil a nezná dopravní předpisy. Závisí tato pravděpodobnost na počtu souborů?

Příklad 8.3 Pan Novák dostal 12-krát pokutu za nesprávné parkování auta v noci. Všechny pokuty byly uloženy v pondělí a úterý. Vyplývá z toho, že v těchto dnech týdne jsou kontroly přísnější, takže v těchto dnech by se vyplatilo používat placené parkoviště?

Příklad 8.4 Pan Novák tvrdí, že má schopnost předvídat, který symbol padne v hodu mincí. Aby se zjistilo, zda mluví pravdu, byl hod mincí opakován 20 krát. Před každým hodem předvídal, co padne, a 12 krát byl úspěšný. Nakolik je pravděpodobné, že pomocí hádání (tj. při nedostatku talentu, o kterém je tedy

zmínka) bude počet tref rovný nejméně 12? Dovoluje nám velikost této pravděpodobnosti zaujmout stanovisko k tvrzení pana Nováka (a jaké)?

Příklad 8.5 Ve čtyřech po sobě následujících rozdáních karet v bridži jistý hráč ani jednou nedostal eso. Prohlásil tedy, že dnes mu karta nejde. Má důvody k tomu, aby se vymlouval na smůlu?

O smůle (nebo štěstí) mluvíme, když se stane něco, co je prakticky nemožné. Počet těchto rozdání (ze čtyř), ve kterých hráč získá alespoň jedno eso, označme S . V úloze se jedná o $P(S = 0)$.

Příklad 8.6 V pekárně byla zveřejněna denní nabídka: *Dnes prodáváme rohlíky s hrozkami. Dohromady bylo upečených s stejných rohlíků z těsta, do kterého jsme vložili k hrozinám.* Koupil jsi si jeden rohlík, ale žádná hrozinka v něm nebyla. Můžeš se cítit podvedený v situaci, kdy $s = k = 6$?



Obr. 4 Zenerovy obrazce

Příklad 8.7 Ve výzkumech telepatie se provádí následující důkaz. V jedné místnosti se ukazují v náhodném pořadí tzv. *Zenerovy obrazce* (obr. 4). Je možné hovořit o jejich pětinasobném losování bez vracení. Osoba, tvrdící, že má telepatické schopnosti, hádá v druhé místnosti v jakém pořadí jsou obrazce ukázány. Při jakém počtu uhodnutých případů by bylo možné hovořit o telepatických schopnostech osoby, která se účastní v popsané seanci? Jak se změnila odpověď na tuto otázku, když se Zenerovy obrazce losují pětkrát s vracením?

Předpokládejme, že tato osoba nemá telepatické schopnosti. Je to hypotéza H_0 . Počet správných spojení v 5 pokusech je tedy náhodnou veličinou Y_5 . Lze dokázat, že

$$P(X = 0) = \frac{44}{120}, \quad P(X = 1) = \frac{45}{120}, \quad P(X = 2) = \frac{20}{120},$$

$$P(X = 3) = \frac{10}{120}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{120}.$$

Jak tuto informaci použít při řešení poslední úlohy?

Předcházející příklady ilustrují co, jak a proč se matematizuje, a tedy proč některé reálné situace interpretujeme jako losování koulí z urny, vykládání karet do řady (po zamíchání balíčku), hody kostkami anebo hody mincemi.

LITERATURA

- [1] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc, New York, London, Sydney 1966.
- [2] Freudenthal H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Klett Verlag, Stuttgart 1973.

- [3] Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki 6 (1968).
- [4] Płocki A., *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.
- [5] Płocki A., *Pravdepodobnost okolo nás. Stochastika v úlohách a problémech*, Universitas Catholica Rosenbergae, Ružomberok 2008.
- [6] Płocki A., *Spór o treści i forme stochastycznego kształcenia nauczyciela matematyki*, Dydaktyka Matematyki 17 (1995), s. 135-165.
- [7] Płocki A., *Stochastyka dla nauczyciela*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2007.
- [8] Płocki A., *Zvláštní matematické objekty, nástroje a postupy v počtu pravděpodobnosti*, Matematika-Fyzika-Informatika, 4-1988 (s. 193-201) i 5-1999 (s. 257-263).
- [9] Płocki A., Tlustý P., *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*, PROMETHEUS, Praha 2007.
- [10] Riečan B., Komorník J., *Pravdepodobnostné modely reálnych situácií*, Pedagogická fakulta KU, Ružomberok 2005.

Prof. zw. dr hab. Adam Płocki
Instytut Badan Pedagogicznych i Edukacyjnych SWPW Płock
Institut Matematyki Uniwersytet Pedagogiczny Krakow
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: adplocki@ap.krakow.pl

FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ GEOMETRICKOU PŘEDSTAVIVOST ŽÁKŮ ZŠ

MAREK POMP, ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

ABSTRACT. In this paper, there will be described the skills of primary school students for solving selected part in solid geometry and the influence of projecting methods to this skills with regard to the student's age.

Úvod

Správná představa o prostoru a geometrických zákonitostech v něm je nezastupitelná pro celou řadu činností člověka. Přesto, že stereometrie je zařazována až do výuky dětí staršího školního věku, měla by být prostorová představivost rozvíjena co nejdříve, alespoň na jednoduchých problémech, případně formou didaktických her. Jednou z klíčových dovedností, z nichž se skládá prostorová představivost je schopnost interpretovat rovinný náčrt prostorových situací. Tato schopnost nabývá na důležitosti obzvláště s rostoucími grafickými možnostmi výpočetní techniky.

Přestože lidské vidění je perspektivní, je nejstarším způsobem zobrazování prostorových situací *rovnoběžné promítání*. *Perspektiva* se sice objevuje již v antice, ale komplikace při objevování, teoretickém a fyzikálním zdůvodnění jejich principů a obtížnost konstrukcí brzdily její využití, takže v plném rozsahu se v malířství prosadila až počátkem 15. století.

Současný trend ve výpočetní technice preferuje zobrazování prostorových situací pomocí (lineární) perspektivy, tzv. fotorealisticky. Naskytá se tedy otázka zda a do jaké míry je vhodné používat fotorealistické obrázky při tvorbě didaktických pomůcek pro různé věkové kategorie žáků.

Test

Testování subjektivního vnímání obrázků a prostorové představivosti s ohledem na dva různé typy obrázků jsme provedli na žácích 3., 4., 5. a 6. tříd základní školy.

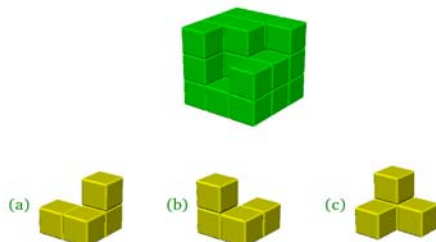
Celkem 12 úkolů, zaměřených na stereometrii, bylo rozděleno na 8 úkolů věnovaných počítání kostiček ve stavbě z krychlí a 4 úkoly na doplňování tetramina do stavby z krychlí.

Test byl dětem předložen v elektronické interaktivní podobě, zvolená varianta odpovědi se označila myší na monitoru počítače. Dvě varianty testu se lišily pouze typem obrázků.

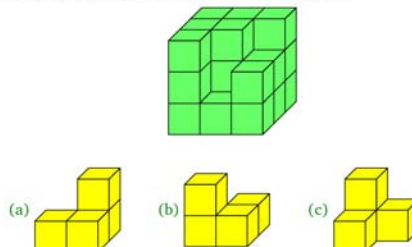
V jedné variantě testu byly obrázky fotorealistické (vytvořeny programem POV-Ray). Protože jsme očekávali, že interpretace perspektivy může být obtížná, bylo zkrácení obrázků přiměřeně potlačeno tím, že vrcholový úhel zorného kužele byl zvolen pouze 12° (pokud předpokládáme, že zobrazovaný předmět se nachází těsně za průmětnou, pak distance, vzdálenost středu promítání od průmětny, byla zvolena přibližně desetkrát větší, než rozměry zobrazovaného útvaru). Pro zvýšení fotorealistického efektu byly jednotlivé stěny příslušně osvětleny.

Ve druhé variantě bylo použito volné rovnoběžné promítání (obrázky byly vytvořeny programem METAPOST) přičemž krychle byly zobrazeny běžným způsobem, kdy jedna ze stěn krychle je v průčelné poloze a volné rovnoběžné promítání má parametry (45° , $1/2$). Pro větší názornost byla stavba vždy monochromaticky vybarvena. Srovnání obou typů obrázků můžeme vidět na obrázku 1 (jedná se o poslední úlohu testu).

12. Který z dílků stavebnice doplní stavbu na krychli?



12. Který z dílků stavebnice doplní stavbu na krychli?



Obrázek 1: Srovnání testových úloh s různými typy obrázků.

Při prvním seznámení s testem děti (i přihlízející vyučující) okamžitě reagovali na variantu obrázků v testu, přičemž fotorealistické obrázky posoudili jako pěknější a zajímavější a pérové kresby často považovali za počítačovou chybu v zobrazení testu.

Test sledoval tyto aspekty:

1. závislost schopnosti řešit vybrané stereometrické úlohy na věku žáka, s hypotézou že s rostoucím věkem tato schopnost roste,
2. závislost schopnosti řešit vybrané stereometrické úlohy na typu obrázku a na věku žáka s hypotézou, že s rostoucím věkem se závislost bude zmenšovat, jelikož starší žáci jsou schopni lepší abstrakce,
3. závislost schopnosti řešit vybrané stereometrické úlohy na typu obrázku a na náročnosti úlohy s hypotézou, že u jednoduchých úloh nebude závislost tak patrná (nevyžadují hlubší představivost).

Test byl konstruován motivačně tak, aby i děti ve třetí třídě vyřešili správně více než polovinu otázek, přičemž jako komplikovanější otázky byly myšleny otázky 5,6,7,8,12. Zastoupení jak jednodušších tak komplikovanějších otázek nám zároveň sloužilo k ověření předpokladu, že u méně náročných úloh by vliv zobrazovací metody neměl být výrazný.

Výsledky testu

Testu se účastnilo 68 respondentů, přičemž rozložení v jednotlivých třídách bylo následující:

3. třída	4. třída	5. třída	6. třída	Celkem
28	11	17	12	68

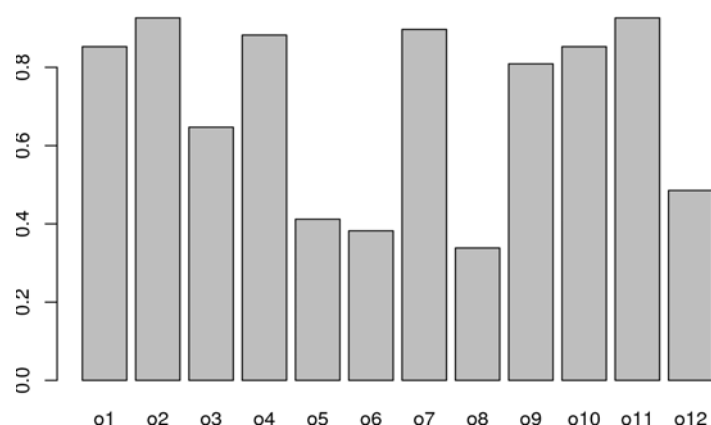
Tabulka 1. Počet testovaných žáků.

Celková úspěšnost žáků při řešení jednotlivých otázek je uvedena v tabulce 2.

Otázka	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12
Úspěšnost (%)	85	93	65	88	41	38	9	34	81	85	93	49

Tabulka 2. Procentuální úspěšnost respondentů v jednotlivých otázkách.

Srovnáme-li výsledky bez rozdílů v typu obrázků (viz obrázek 2 a tabulka 2), je vidět, že zmíněné otázky 5, 6, 8 a 12 byly opravdu náročnější. Překvapivě úspěšně byla řešena otázka č. 7.



Obrázek 2. úspěšnost v řešení jednotlivých úloh celkově za všechny respondenty.

Závislost schopnosti řešit vybrané stereometrické úlohy na věku žáka

Průměrný počet správných odpovědí v testu roste s rostoucím věkem žáků (viz tabulka 3, 4 a obrázek 2).

Třída	Průměr. počet vyřešených úloh	Úspěšnost (%)
3	7,1	59
4	8,5	71
5	9,6	80
6	9,6	80

Tabulka 3: Úspěšnost při řešení testu v jednotlivých třídách.

Pokud vyjádříme závislost počtu správných odpovědí na ročníku dostáváme, že tato závislost se dá vyjádřit lineární rovnicí

$$x = 0,92(x - 2) + 6,3,$$

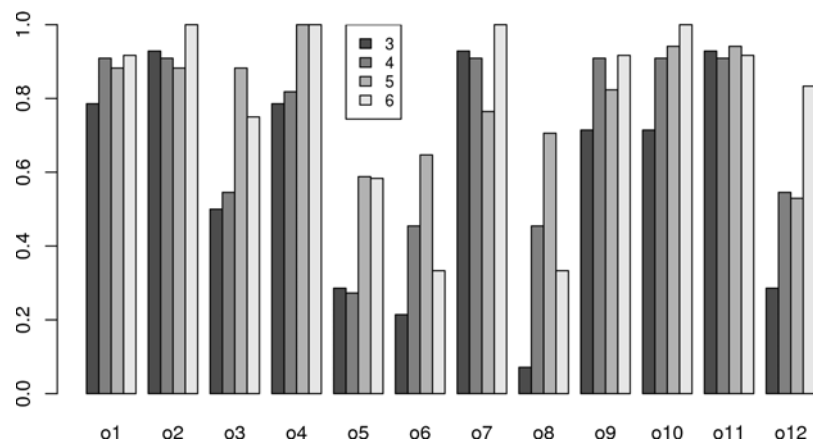
kde proměnná x je ročník respondentů. Pro koeficient $a = 0,92$ je p -hodnota t -testu $p = 0,00012$, pro koeficient $b = 6,3$ je p -hodnota t -testu, $p < 2 \cdot 10^{-16}$ při 66 stupních volnosti. Nulovou hypotézu: *úspěšnost řešení testu nezávisí na věku respondentů*, můžeme zamítnout.

Interpretace: Děti ve třetí třídě vyřešili alespoň polovinu otázek a každá vyšší třída je o jednu vyřešenou otázku lepší.

Pokud se podíváme podrobně na procentuální úspěšnost v jednotlivých třídách (viz tabulka 4, obrázek 3) je zřejmé, že výrazné rozdíly vznikají především u otázek obtížnějších (5, 6, 8 a 12) a u otázky 3. V ostatních otázkách jsou výkony u všech věkových kategorií vyrovnané.

Třída\Otázka	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12
3	79	93	50	79	29	21	93	7	71	71	93	29
4	91	91	55	82	27	45	91	45	91	91	91	55
5	88	88	88	100	59	65	76	71	82	94	94	53
6	92	100	75	100	58	33	100	33	92	0	92	83

Tabulka 4: Procentuální úspěšnost při řešení úloh v jednotlivých třídách.



Obrázek 3: Úspěšnost při řešení úloh v jednotlivých třídách.

Závislost schopnosti řešit vybrané stereometrické úlohy na typu obrázku

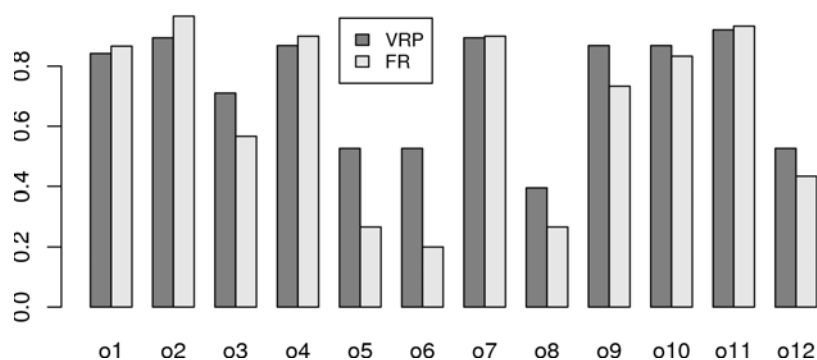
Zhodnotíme-li výsledky u jednotlivých odpovědí s ohledem na typ obrázku použitý v testu (viz tabulka 5, obrázek 4) vidíme, že v obtížných otázkách, je velký rozdíl v tom jak je řešili respondenti vzhledem k typu obrázku, který byl do testu zařazen, zatímco u jednoduchých úloh tento rozdíl je minimální. Grafy takové ukazují, že fotorealistické zobrazení obrázků znamená pro mladší děti značnou překážku při řešení testu.

Pokud testujeme F -testem zda typ obrázku ovlivňuje úspěšnost při řešení testu ve všech otázkách, dostáváme p -hodnotu F -testu $p = 0,0957$ při 66 stupních volnosti, a tedy nulovou hypotézu: *typ obrázku neovlivňuje výsledek testu*, bychom mohli zamítnout na hladině významnosti 0,1. Ovšem tento výsledek není příliš statisticky průkazný.

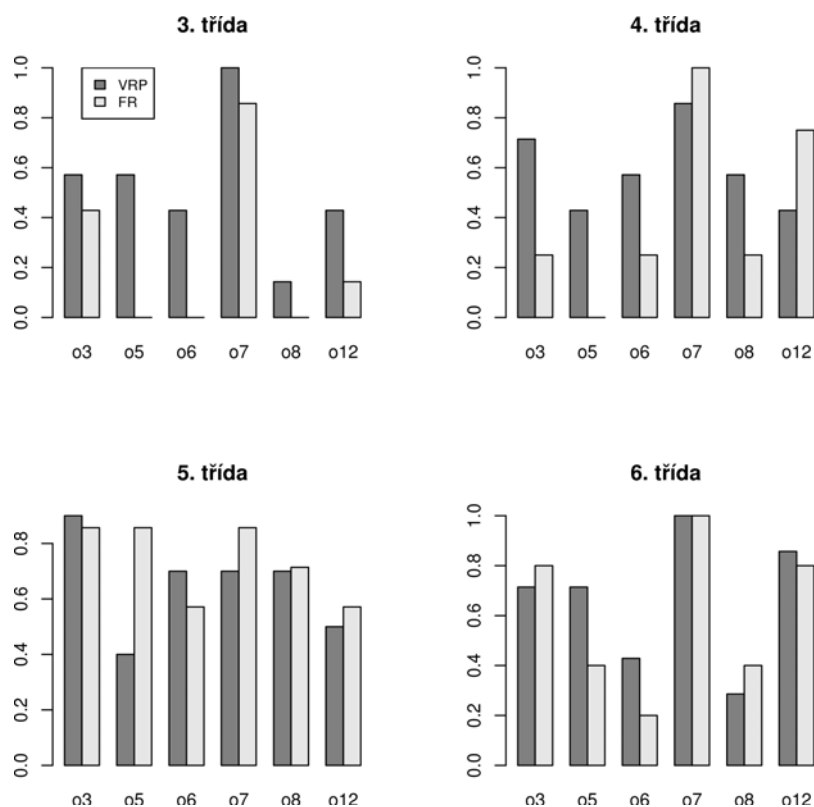
Pokud se ovšem soustředíme na otázky obtížné dostáváme výsledky silnější. Pokud testujeme zda typ obrázku ovlivňuje úspěšnost při řešení těch úloh, které jsme při sestavování testu považovali za obtížné, tj. úlohy 5,6,7,8,12, a pokud navíc přidáme otázku 3, která se jevila obtížná respondentům, je závislost výsledku u těchto otázek na použitém typu obrázku vysoká ve 3. a 4. třídě (viz obrázek 5).

Typ \ Otázka	o1	o2	o3	o4	o5	o6	o7	o8	o9	o10	o11	o12
VRP	84	89	71	87	53	53	89	39	87	87	92	53
FR	87	97	57	90	27	20	90	27	73	83	93	43

Tabulka 5: Procentuální úspěšnost při řešení úloh v závislosti na typu obrázku (VRP – volné rovnoběžné promítání, FR – fotorealistické zobrazení)



Obrázek 4: Úspěšnost v řešení úloh v závislosti na typu obrázku (VRP – volné rovnoběžné promítání, FR – fotorealistické zobrazení).



Obrázek 5: Závislost úspěšnosti při řešení vybraných otázek na typu obrázku v jednotlivých třídách (VRP – volné rovnoběžné promítání, FR – fotorealistické zobrazení).

Při F -testu závislosti úspěšnosti řešení vybraných otázek ve třetí a čtvrté třídě na typu obrázku p -hodnota vychází $p = 0,001357$ při 37 stupních volnosti. Nulovou hypotézu: úspěšnost řešení testu ve 3. a 4. třídě ve vybraných otázkách nezávisí na typu obrázku, můžeme zamítnout na hladině významnosti 0,001.

Pokud testujeme tutéž závislost v páté a šesté třídě, p -hodnota F -testu vychází $p = 0.7876$ při 27 stupních volnosti. Nulovou hypotézu: *úspěšnost řešení testu ve 5. a 6. třídě ve vybraných otázkách nezávisí na typu obrázku* nemůžeme zamítnout.

Interpretace:

1. U jednoduchých úloh úspěšnost při řešení nezávisí na typu obrázku, bez ohledu na věk.
2. U složitějších úloh závisí úspěšnost při řešení na typu obrázku u testovaných žáků ze 3. a 4. třídy.
3. U žáků ve vyšších třídách se neprokázala žádná závislost úspěšnosti řešení úloh na typu obrázku ani u úloh složitějších.

Závěr

Dětem ve třetí až šesté třídě ZŠ *Prima škola* byly předloženy dvě varianty elektronického testu zaměřeného na prostorovou představivost. Testování prokázalo závislost při úspěšnosti řešení předloženého testu na věku dítěte. Dále se prokázalo, že úspěšnost při řešení testu ve 3. a 4. třídě závisí na typu obrázků použitých v testu a tato závislost se neprojevuje u starších dětí.

Jednoduché pérové kresby, ve kterých je jako zobrazovací metoda použito volné rovnoběžné promítání, umožňují mladším dětem lepší interpretaci a vhled do prostorového uspořádání objektů než fotorealistické obrázky, přestože fotorealistické obrázky jsou přijímány jako zajímavější, poutavější a pěknější.

LITERATÚRA

- [1] Hniličková, J., Josífk, M., Tuček, A.: *Didaktické testy a jejich statistické zpracování*, SNP, Praha 1972.
- [2] Perný, J.: *Zobrazování prostorových útvarů a představivost v primární škole*, Acta Mathematica, 11, Nitra 2008.
- [3] Košč, L.: *Psychológia matematických schopností*. SPN, Bratislava, 1974.
- [4] Molnár, J.: *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. UP Olomouc 2004.

RNDr. Marek Pomp, Ph.D.
Katedra matematiky s didaktikou
Pedagogická fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Mlýnská 5
701 03, Ostrava
e-mail: marek.pomp@osu.cz

RNDr. Zuzana Václavíková, Ph.D.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
30. dubna 22
701 03, Ostrava
e-mail: zuzana.vaclavikova@osu.cz

KONCEPCE TVORBY INTERAKTIVNÍCH ÚLOH A TESTŮ V MATEMATICE

MAREK POMP, ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

ABSTRACT. In this paper, there will be described the specificity of conception of making interactive tests and exercises particularly in mathematics.

Úvod

V současné době spolu s rozvojem e-learningového vzdělávání se nabízí také možnost samostatného vzdělávání nejen pro studenty vysokých škol, nebo žáky základních a středních škol, ale prakticky pro každého kdo projeví o danou oblast zájem. K dispozici je stále větší množství „distančních“ textů a materiálů vhodných k samostudiu. Pro studenty je v těchto materiálech klíčové, aby měli možnost procvičit danou látku a ujistit se, že tématu správně porozuměli do všech detailů. Distanční texty jsou tedy většinou doplněny o cvičení, různé úkoly a testovací úlohy, jejichž výsledky, či celý návod k vyřešení obvykle nalezne čtenář na konci textu.

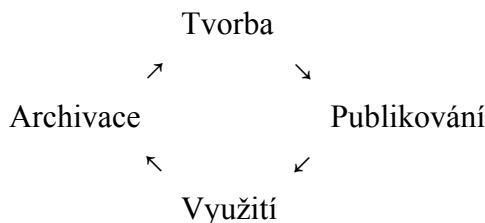
Jednou z možností jak zatraktivnit výuku, a nejen distanční, jsou interaktivní testy. Pro samostudium žáka mají význam především testy *průběžné (formativní)*, které obvykle poskytují lepší zpětnou vazbu, než testy *závěrečného (finálního)* hodnocení. Dobře zpracovaný test aktivizuje studujícího, dokáže dostatečně motivovat a dát prostor a inspiraci k dalšímu studiu.

Příprava testu je nepochybně dlouhodobá záležitost. Chceme-li vytvořit didaktický test, musíme mít ujasněno, k jakému účelu má test sloužit, o jaký test by mělo jít, jaká je cílová skupina testovaných osob, jaký typ úloh by měl test obsahovat, jakým způsobem budou testovaní odpovídat a musíme také brát ohled na validitu a reliabilitu testu.

V průběžném interaktivním testu určeném pro procvičení látky je nutné dodržet několik zásad:

- A. Je jasně uvedeno, které znalosti, vědomosti a dovednosti se procvičují.
- B. Otázky jsou jasně a přehledně formulované.
- C. Otázky mají stupňovanou obtížnost. Test obsahuje na začátku několik opravdu jednoduchých úloh pro povzbuzení sebedůvěry testovaného. Obtížné úlohy a úlohy problémové je třeba zařadit na konec testu.
- D. Je předem určeno, zda otázky mají jednoznačnou správnou odpověď, nebo je správných odpovědí více.
- E. Výkon studenta je okamžitě a objektivně vyhodnocen.
- F. Studentům je po vyhodnocení odpovědi nabídnuto správné řešení.
- G. Mezi odpovědí na otázku a hodnocením, zobrazením správné odpovědi je, alespoň zpočátku, bezprostřední vazba, aby student s fatálními nedostatky neztrácel čas a mohl se ihned vrátit k probírané látce.

Všechny edukační materiály, procházejí následujícím cyklem



ve kterém se navzájem ovlivňují všechny čtyři složky. Položku *využití* jsme diskutovali výše, a tato položka primárně ovlivňuje všechny ostatní fáze tohoto cyklu.

Publikování

Jako primární způsob publikování je zvolena elektronická forma, tak ať je možné dokumenty šířit prostřednictvím internetu, popřípadě přenášet jinými médii. Samozřejmě, že uživateli by mělo být umožněno dokumenty používat nejen v elektronické podobě, ale využít jejich tištěnou podobu, ve které sice ztrácí možnosti interaktivity, ale získá příležitost k soustředění na samotnou práci, přičemž rozptýlení pozornosti je jeden ze závažných problémů využití počítače v edukačních procesech.

Pokud pomineme marginální specializované formáty elektronického publikování, jsou interaktivní elektronické dokumenty v současnosti publikovány především ve dvou formátech,

4. HTML (HyperText Markup Language a něj vycházející jazyky),
5. PDF (Portable Document Format).

Přes veškerý současný pokrok ve formátu MathML a podobných klonech HTML formátu, je HTML pro publikování matematických textů stále ještě nevhodný. Jako jediný dostupný a vyhovující formát pro publikování matematiky v elektronické a interaktivní formě se jeví PDF.

Současné verze prohlížečů PDF (především Adobe Reader®) jsou schopny interpretovat JavaScripty uložené v dokumentu a proto není problém do formátu PDF začlenit animace, video anebo zvuk.

Protože formát PDF je kompaktní a dobře komprimovaný, je možné jej používat nejen on-line, jako HTML, ale také off-line, přičemž přenášet PDF soubory je možná na jakémkoli elektronickém médiu.

Tvorba

Tvorba PDF dokumentů ve kterých je plně využita interaktivita a další možnosti tohoto formátu vyžaduje buďto komerční nástroje, jako je Adobe Distiller®, jejichž možnosti jsou však úměrné jejich ceně, což při současném stavu financování školství je závažná překážka ve využití. Další možností je využít typografického sázecího systému TeX. Tento systém a většina jeho rozšíření jsou distribuovány pod některou ze svobodných licencí. Navíc je tento systém multiplatformní, takže uživateli neklade žádné překážky ve využití. Pro tvorbu testů systémem TeX je navíc výhodné, že lze napsat jednoduchá makra, která propojí TeX s nějakým databázovým systémem obsahujícím rozsáhlejší soubory úloh a je potom možné automaticky vytvářet různorodé testy podle potřeby vyučujícího anebo podle potřeb studentů, případně testy vytvářet hromadně.

Archivace

Archivace samotného dokumentu ve formátu PDF je běžnou záležitostí díky vysoké kompresi samotného souboru. Navíc protože tomu, že firma Adobe®, která je tvůrcem formátu PDF a výrobcem nejrozšířenějšího prohlížeče PDF (Adobe Reader®), předala dohled nad standardem formátu PDF do rukou ISO (International Standards Organization, ISO 32 000), je vysoce pravděpodobné, že soubory ve formátu PDF budou využitelné i za mnoho let po vytvoření.

Výhodou využití typografického systému TeX pro tvorbu dokumentů je, že zdrojové kódy k dokumentům jsou ve formátu prostého textu, který sice kvůli kódování diakritiky není plně kompatibilní s ASCII, ale který je možné velmi dobře uchovávat, případně konvertovat do jiných standardů pro text s kódováním diakritiky. Vzhledem k vývoji standardů kódování diakritiky v textu je asi nejvhodnějším kandidátem kódování UTF-8 (Universal character set Transformation Format). Zpracování strukturovaných dokumentů v textovém formátu není závislé na platformě (operačním systému) ve kterém zpracovávání probíhá a v případě TeXu díky stabilitě tohoto systému a jeho licenční politice je možné počítat, že i v daleké budoucnosti budou snadné revize, doplnění, úpravy a reedice výsledných dokumentů.

Realizace

Pro tvorbu interaktivních testů a formulářů vytvořil dr. D. P. Story LaTeXovský balík AcroTeX (Acrobat® + LaTeX). Dokumenty produkované systémem AcroTeX mohou mít formu testu výběrového (z libovolného množství alternativ), případně formu testu doplňovacího. Testy se mohou, díky integraci JavaScriptu do PDF, *automaticky vyhodnocovat*. U výběrového testu lze použít více správných alternativ, u doplňovacích testů rozpozná správnou odpověď ve více variantách (např. „J. A. Komenský“, „Jan Ámos Komenský“, „Komenský“). V testu je možné uvádět správné odpovědi, pro bezprostřední vazbu zkoušeného. Správné odpovědi je možné buďto zobrazit ihned po zodpovězení úlohy, což je vhodné pro testy sloužící k průběžnému procvičení látky. Ve zkušebních testech mohou být zobrazeny správné odpovědi až po vyplnění testu a jeho vyhodnocení. Ukázka testu, včetně vyhodnocení je na obr. 1.

Pro zkoušejícího je velmi výhodné, že vyhodnocení testu je možné *on-line odeslat* (pokud je počítač na kterém vyplnění testu probíhá je připojen k internetu) a zpracovat skriptem uloženým na serveru. Pro servery které dokáží zpracovat ASP (Active Server Pages, skriptovací jazyk firmy Microsoft®) je sada skriptů připravena přímo v balíku AcroTeX. Pro ostatní platformy je možné si tyto skripty připravit poměrně jednoduchým způsobem, protože odesílané informace o testu jsou ve formátu FDF (Forms Data Format) vyvinutém firmou Adobe®, který je velmi dobře strukturován a je možné jej zpracovávat například pomocí skriptů PHP (PHP: Hypertext Preprocessor). Informace z FDF souborů je potom možné ze serveru odesílat e-mailem, ukládat do databází, archivovat atd. Velmi jednoduchý soubor FDF je na obr. 2.

Kvůli bezprostřední zpětné vazbě pro studenty a možnosti na dálku sledovat výsledky jejich práce jsou testy vytvořené pomocí balíku AcroTeX vhodným doplňkem distančních kurzů.

Určitě nikoliv poslední výhodou použití (Acro)TeXu k tvorbě testů, je možnost jednoduchou volbou parametrů vyrábět testy nejen elektronické, ale také ve formě vhodné pro kvalitní tisk.

Obrázek 1: Ukázka jednoduchého testu, včetně několika možností vyhodnocení.

```
%FDF-1.2
...
<</FDF
  <</Field[
    <</Kids[ <</T(Rocnik)/V(3)>> ]/T(IdInfo)>>
    <</T(CourseName)/V(AlgebraII)>>
    <</T(quizName)/V(Okruhy)>>
    <</Kids[ <</T(Responses)/V(b, a, b, b, c, c, , c)>>
      <</T(numCorrect)/V(4)>>
      <</T(numQuestions)/V(8)>>
    ]/T(test_AlgebraII)>>
  ]>>
>>
...
%EOF
```

Obrázek 2: Ukázka struktury FDF souboru. V testu bylo políčko „Ročník“ vyplněno hodnotou „3“, test obsahoval 8 otázek, 4 byly zodpovězeny správně, odpovědi studenta jsou zaneseny u položky „Responses“.

LITERATURA

- [1] Petty G.: *Moderní vyučování*, Portál Praha, 2008 ISBN 978-80-367-427-7.
- [2] Story D. P.: *AcroTeX, eDucation System Tools*. <http://www.acrotex.net/> 2010.

- [3] Mařík R., Tihlaříková M.: *Pojďte pane, budeme si hrát (... s PDF)*. In Proceedings of 7th International Conference APLIMAT 2008 - Part IV Open source Software in Research and Education. 2008. ISBN 978-80-89313-04-4.
- [4] Hniličková, J., Josíčko, M., Tuček, A.: *Didaktické testy a jejich statistické zpracování*, SNP, Praha 1972.
- [5] *PDF Reference*, Sixth Edition, version 1.7. http://www.adobe.com/devnet/pdf/pdf_reference_archive.html. 2006.

RNDr. Marek Pomp, Ph.D.
Katedra matematiky s didaktikou
Pedagogická fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Mlýnská 5
701 03, Ostrava
e-mail: `marek.pomp@osu.cz`

RNDr. Zuzana Václavíková, Ph.D.
Katedra matematiky
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
30. dubna 22
701 03, Ostrava
e-mail: `zuzana.vaclavikova@osu.cz`

PRÍSTUPY K RIEŠENIU JEDNEJ MATEMATICKEJ ÚLOHY V PRÍPRAVE UČITEĽOV ELEMENTARISTOV

ALENA PRÍDAVKOVÁ

ABSTRACT. Mathematical tasks are instruments development thinking of future primary school teachers. The contribution presents results of qualitative analysis of solutions one mathematical task. The future teachers of primary school were solving the task.

Úvod

Matematika ako vzdelávacia oblasť poskytuje nemalé množstvo príležitostí na rozvíjanie schopnosti riešiť problémy, ktorá je jednou z kľúčových kompetencií vymedzených v Štátnom vzdelávacom programe (2008). Rozvíjanie uvedenej kompetencie je súčasťou vzdelávania na všetkých jeho stupňoch, pričom sa začína už na primárnom stupni. Jedným z cieľov vyučovania matematiky je vytvárať, prezentovať a vyberať postupy riešenia problémov a úloh. Nutnou podmienkou na to, aby mohlo vyučovanie matematiky prispievať k plneniu tohto cieľa, je prítomnosť učiteľa, u ktorého sú rozvinuté odborovodidaktické kompetencie týkajúce sa, okrem iného, aj schopnosti riešiť matematické úlohy využitím rôznych stratégií.

V uvedenom kontexte súhlasíme s názorom Šedivého (2008, s. 26): „*Ak chceme zvýšiť efektivitu vyučovania matematiky a splniť požiadavky pri rozvoji matematických kompetencií (ale aj nematematických kompetencií) je potrebné do vyučovania matematiky zaviesť konštruktivistické prístupy, zbaviť sa formalizmu, zlepšiť mechanizmus poznávacieho procesu, zmeniť komunikačné a interakčné stratégie učiteľa, zmeniť názor na „chyby“ v práci žiaka a iné.*“

Podľa autorov Hejný – Kuřina (2001) neformálny prístup vo vyučovaní matematiky vedie k rozvoju kognitívnych schopností žiakov a zároveň formuje postoje žiakov – hodnotenie myšlienok, práca s chybou a pod.

Matematika nepochybne rozvíja kogníciu každého žiaka a svojimi metódami, prostriedkami je predurčená na to, aby sa stala nástrojom na rozvíjanie funkcií konštruovania poznatkov. Tieto skutočnosti by mali byť prezentované učiteľom matematiky aj primárnej školy už v ich pregraduálnej príprave.

Na Pedagogickej fakulte PU v Prešove je v bakalárskych študijných programoch zaradený predmet *Stratégie riešenia matematických úloh* (povinne voliteľný). Obsahová náplň výučby je zameraná aj na prípravu študentov v oblasti rozvoja myslenia žiakov využitím rôznych stratégií riešenia matematických úloh. Prezentované sú stratégie riešenia matematických úloh, u študentov je rozvíjaná schopnosť didaktického spracovania postupu riešenia úloh, v dôsledku čoho je rozvíjaná aj úroveň myslenia samotných študentov. Súčasťou práce na seminároch je prezentácia rôznych postupov riešenia úloh, pričom dôraz sa kladie na precízny prepis myšlienkových procesov. Zámerom činnosti je, aby študenti vystupovali v pozícii administrátora schopného formulovať v procese riešenia úlohy pomocné inštrukcie a nápovedné otázky, vedúce ku komplexnému zvládnutiu danej stratégie riešenia úlohy. Ide o prezentáciu konceptu sprostredkovaného učenia od Feuersteina, kde cieľom je odhaliť deficitné kognitívne funkcie žiaka, ktoré sú rozvíjané

pomocou mediátora – učiteľa (Jensen, 2009). Samostatná formulácia jednotlivých elementov procesu riešenia úlohy núti študentov postupovať systematicky, analyzovať úlohu a pomáha tak rozvíjať u nich také funkcie konštruovania poznatkov, ako napríklad: systematické bádateľské správanie, precízny prístup k riešeniu úlohy, analýza, syntéza, koncentrácia pozornosti (Jensen, 2009). Získané skúsenosti budú môcť využiť priamo v pedagogickej praxi a to nielen na vyučovaní matematiky. Podstatné je, aby si uvedomili dôležitosť správnej formulácie pomocných krokov prezentovaných vo forme otázok, inštrukcií, návodných úloh, ktoré dovedú žiaka k riešeniu a k zvládnutiu stratégie riešenia úlohy, resp. úloh analogického typu. Využívajú sa pritom aj modelové situácie, kde študenti vystupujú v úlohe žiaka, ktorému sú zadávané vytvorené inštrukcie, podľa ktorých postupuje v procese riešenia úlohy. Samozrejme je dovolené pracovať s chybou, čo vytvára ďalší priestor na diskusiu a analýzu úlohy.

V ďalšej časti uvádzame výsledky analýzy písomných riešení úlohy jedného typu, ktorá bola zaradená do vstupného a výstupného testu.

Prístupy k riešeniu jednej matematickej úlohy

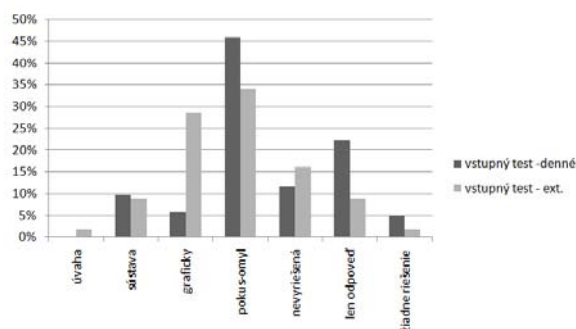
Súčasťou hodnotenia študijných výsledkov v spomínanom predmete je absolvovanie vstupného testu, vypracovanie seminárnej práce a výstupný test. Vstupný test obsahuje 5 úloh prevzatých z učebných textov matematiky pre 1. stupeň ZŠ. Úlohy môžu študenti riešiť akýmkoľvek spôsobom, pričom úspešnosť riešenia úloh nie je skórovaná (s touto skutočnosťou sú vopred oboznámení). Úlohy analogického typu sú postupne zaradené do obsahu seminárov a nakoniec aj vo výstupnom teste.

Analyzovali sme písomné riešenia úloh vo vstupnom a vo výstupnom teste z pohľadu výskytu rôznych stratégií ich riešenia. V článku prezentujeme výsledky analýzy jednej úlohy typu *Slovná úloha, ktorej riešenie využíva sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi*. Zadanie úlohy vo vstupnom teste bolo: *Na lúke sú bažanty a zajace. Spolu majú 10 hláv a 26 nôh. Koľko zajacov a bažantov je na lúke?*

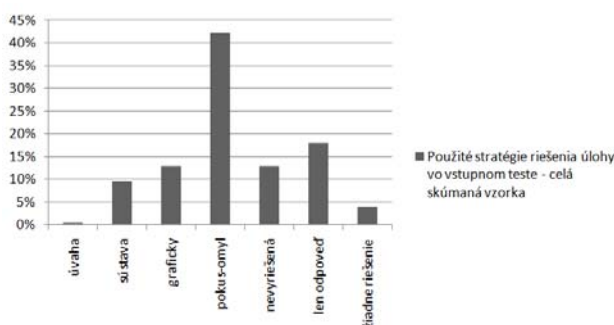
Analyzované boli písomné riešenia študentov dennej a externej formy štúdia, získané za obdobie troch akademických rokov, v ktorých bola výučba predmetu realizovaná. Spolu bolo analyzovaných 178 vstupných testov (122 – denné štúdium, 56 – externé štúdium). Na základe kvalitatívnej analýzy sme jednotlivé riešenia úlohy roztriedili do siedmich kategórií:

1. logická úvaha,
2. využitie sústavy dvoch lineárnych rovníc – algebrické riešenie,
3. grafické znázornenie riešenia,
4. využitie metódy pokus – omyl a zápisy pokusov vo forme tabuľky,
5. nevyriešená úloha, kde písomné zápisy obsahovali výpočty, ktoré boli nedokončené,
6. v riešení sa vyskytovala len odpoveď bez akýchkoľvek výpočtov,
7. žiadne riešenie, bez akýchkoľvek písomných záznamov.

Na obrázku 1 uvádzame prehľad využitých stratégií študentmi dennej a externej formy štúdia. Obrázok 2 prezentuje výsledky analyzovaných písomných riešení v celej skúmanej vzorke.



Obrázok 1: Použité stratégie riešenia úloh vo vstupnom teste – denné a externé štúdium



Obrázok 2: Použité stratégie riešenia úloh vo vstupnom teste – celá skúmaná vzorka

Z prezentovaných výsledkov vidieť, že vo vstupnom teste bola najviac využitá stratégia pokus – omyl, kde boli postupne overované náhodne zvolené vstupné údaje. Žiadne z analyzovaných riešení neobsahovalo slovný komentár vysvetľujúci zápisy v tabuľkách, riadkoch, stĺpcoch a pod. V skupine študentov externej formy štúdia využilo takmer 30 % testovaných grafický spôsob riešenia úlohy, ale aj tu absentovalo písomné vysvetlenie postupu tvorby grafického názoru. Algebrické riešenie využilo približne 9% z oboch skupín študentov. Predpokladáme, že to boli absolventi gymnázia. Len odpoveď uviedlo 22% študentov dennej formy štúdia a takmer 9% externých študentov. Nedokončená úloha, s náznakom zápisov a „výpočtov“ sa vyskytla u 14 študentov dennej a v riešeniach deviatich študentov externej formy štúdia.

Ako už bolo spomínané, úlohy analogického typu, spolu s rôznymi stratégiami riešenia sú obsahom práce na seminároch. V skupine študentov denného štúdia je realizovaný aj výstupný test. Uvedieme výsledky získané z kvalitatívnej analýzy písomných riešení 120 testov, ktoré absolvovali študenti dennej formy štúdia (v období troch akademických rokov). Analyzovaná bola úloha so zadáním: *Na parkovisku sú zaparkované autá a motorky. Všetkých ich je 10 a spolu majú 34 kolies. Koľko áut a koľko motoriek je na parkovisku?* Pre výstupný test bol vytvorený aj druhý rovnocenný variant, v ktorom bola úloha naformulovaná: *Predavačka v kvetinárstve pripravila 10 kytíc. Niektoré boli vytvorené z troch kvetín a niektoré z piatich kvetín. Spolu použila 42 kvetín. Koľko kytíc bolo vytvorených z troch a koľko z piatich kvetín?*

V najväčšej miere bola využitá metóda grafického znázornenia situácie opísanej v úlohe. Tento prístup k riešeniu úloh daného typu považujeme za najvhodnejší na použitie vo vyučovaní matematiky na 1. stupni základnej školy. Pozitívne hodnotíme skutočnosť, že budúci učitelia zvolili práve túto stratégiu riešenia, pričom súčasťou náčrtov, obrázkov,

znázornení bol aj komentár, týkajúci sa procesu tvorby názoru. V niektorých prípadoch riešenie obsahovalo niekoľko náčrtov, ktoré naznačovali dynamiku v procese hľadania riešenia. Viac ako 26% riešení obsahovalo algebrický prístup, kde sa využíva sústava dvoch lineárnych rovníc. V porovnaní s prístupmi vo vstupnom teste sa zvýšil počet riešení využívajúcich logickú úvahu, s podrobným písomným opisom myšlienkového postupu. Ani v jednom z analyzovaných testov sa nevyskytla situácia, kde by úloha nebola vyriešená, resp. obsahovala len odpoveď.

V ďalšej časti sú uvedené ukážky prepisu niektorých písomných riešení úlohy z výstupného testu, spolu s vysvetlením procesu riešenia.

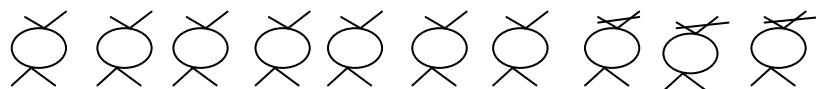
Grafické znázornenie riešenia úlohy

Riešenie 1: Predstavíme si, že na parkovisku sú len autá. 10 aut. 4 kolesá = 40 kolies.

Ale my vieme, že na parkovisku je spolu 34 kolies.

To znamená, že (40-34) 6 kolies je navyše.

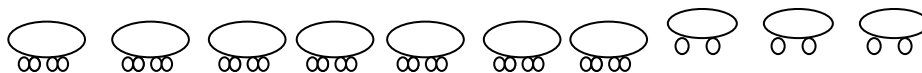
Musíme 6 kolies odobrať a zistíme, že nám vyjdú 3 motorky, lebo majú po dve kolesá.



Riešenie 2: Každý z dopravných prostriedkov má aspoň dve kolesá a zároveň na parkovisku je 10 dopravných prostriedkov. Nakreslíme si ich:



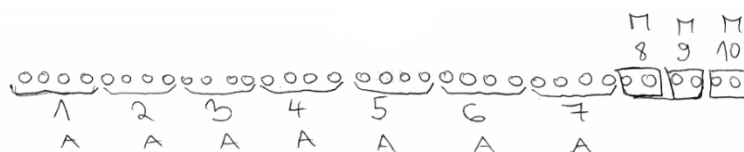
Keď ale spočítame všetky kolesá na tomto parkovisku, vyjde nám súčet iba 20 kolies a na parkovisku je podľa zadania až 34 kolies. Zľava preto začneme dopravným prostriedkom dokresľovať kolesá tak, že z nich „robíme“ autá; dokresľujeme po 2 kolesá zo zvyšných 14 kolies (34-20=14)



$$2+2+2+2+2+2+2=14$$

$$\text{Teraz sčítame všetky kolesá } 4+4+4+4+4+4+4+2+2+2=34$$

Riešenie 3:

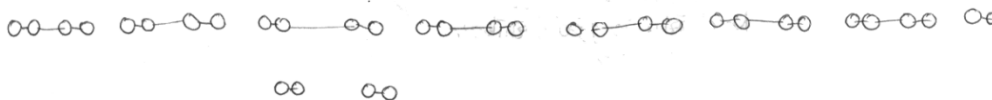


1. spôsob: zakreslím si 34 kolies, postupne priradujem po štyroch kolesách k autám. Keďže viem, že ich je spolu 10 a keď dôjdem po 7. auto vidím, že sa mi zvýši 6 kolies, logicky to budú kolesá 3 motoriek, keďže má byť dokopy áut a motoriek 10.



2. spôsob: zakreslíme si 10 áut. Keďže teraz mám až 40 kolies a viem, že mám až 34 kolies a dokopy 10 áut s motorkami, odrátam kolesá tak, aby mi vyšlo na motorky po 2 kolesá s tým, že musím mať áut aj motoriek 10.

Riešenie 4:



Najprv si nakreslíme 34 kolies.

Teraz si pospájame kolesá do dvojíc ($34:2=17$), lebo aj motorka aj auto majú určite aspoň 1 pár kolies.

Teraz nám vzniklo 17 motoriek, ale my vieme, že na parkovisku je 10 vozidiel, preto odrátame $17-10=7$ a toľko „motoriek“ pospájame do dvojíc.

Takto nám vznikne 7 štvoríc, čo je vlastne 7 áut.

Na parkovisku je 7 áut a 3 motorky.

Logická úvaha

Riešenie 1: Postupne dosádzam napr. na miesto motoriek číslice od 1-9 a zvyšný počet je počet áut.

1. 1 motorka – 2 kolesá
 $9 \text{ áut} - 9 \cdot 4 = 36 \text{ kolies}$ $36 + 2 = 38 \text{ kolies}$ a keďže je všetkých kolies 34, je toto riešenie nesprávne.
2. 2 motorky – $2 \cdot 2 = 4$ kolesá
 $10 - 2 = 8 \text{ áut}$ aj motoriek je 10 a keďže motorky sú 2, áut bude 8.
 $8 \text{ áut} - 8 \cdot 4 = 32 \text{ kolies}$
 $32 + 4 = 36$ je to tiež nesprávne riešenie
3. 3 motorky – $2 \cdot 3 = 6$ kolies
 $10 - 3 = 7 \text{ áut} - 7 \cdot 4 = 28 \text{ kolies}$
 $6 \text{ kolies} + 28 \text{ kolies} = 34 \text{ kolies}$ – správne riešenie, pretože keď 3 motorky majú spolu 6 kolies a 7 áut má 28 kolies, súčet kolies je $6 + 28 = 34$ a súčet áut a motoriek je $3 + 7 = 10$

Riešenie 2: Vydelíme počet kolies číslom 4 (koľko kolies má auto).

$34:4=8$, zv. 2 (motorka). Nevyhovuje, lebo $8 \text{ áut} + 1 \text{ motorka}$ je 9. Potrebujeme 10, takže odoberieme ďalšie 4 kolesá – čiže skúsime dať o 1 auto menej.

$7 \text{ áut} - 7 \cdot 4 = 28$

$34 - 28 = 6$ ostalo nám 6 kolies, ktoré vydelíme 2 – počtom kolies motorky:

$6:2=3$ – 3 motorky

$3 \text{ motorky} + 7 \text{ áut} = 10 \text{ DP}$ – výsledok je teda správny

Riešenie 3: Ak si predstavíme, že na parkovisku je 1 motorka, tak to znamená, že zvyšných 32 kolies musím rozdeliť medzi štvorkolesové autá. Čiže 8 áut, ale $8+1 \neq 10$.

Ak si predstavíme, že na parkovisku stoja 2 motorky, zvyšných 30 kolies nemôžem rozdeliť na štvorkolesové autá.

Ak si predstavíme, že na parkovisku sú 3 motorky, tak zvyšných 28 kolies viem rozdeliť medzi 7 štvorkolesových áut a keďže platí, že $7+3=10$, tak výsledok je 7 áut a 3 motorky.

Metóda pokus – omyl, zápis údajov vo forme tabuľky

Riešenie 1:

M	2 kol	A	4 kol.	spolu
1	$1.2=2\text{kol}$	9	$9.4=36\text{kol}$	$2+36=38\text{kol}$
2	$2.2=4\text{kol}$	8	$8.4=32\text{kol}$	$4+32=36\text{kol}$
3	$3.2=6\text{kol}$	7	$7.4=28\text{kol}$	$6+28=34\text{kol}$
4	$4.2=8\text{kol}$	6	$6.4=24\text{kol}$	$8+24=32\text{kol}$

V tomto riešení absentoval slovný komentár

Riešenie 2: Metóda pokus – omyl: túto metódu si môžem zapísať do tabuľky

AUTÁ	MOTORKY	SPOLU	POČET KOLIES
1	9	10	$1 \times 4 + 9 \times 2 = 4 + 18 = 22$
2	8	10	$2 \times 4 + 8 \times 2 = 8 + 16 = 24$
3	7	10	$3 \times 4 + 7 \times 2 = 12 + 14 = 26$
4	6	10	$4 \times 4 + 6 \times 2 = 16 + 12 = 28$
5	5	10	$5 \times 4 + 5 \times 2 = 20 + 10 = 30$
6	4	10	$6 \times 4 + 4 \times 2 = 24 + 8 = 32$
7	3	10	$7 \times 4 + 3 \times 2 = 28 + 6 = 34$
8	2	10	$8 \times 4 + 2 \times 2 = 32 + 4 = 36$
9	1	10	$9 \times 4 + 1 \times 2 = 36 + 2 = 38$

Do tabuľky som si zapísala počet áut a motoriek, ktorý mohol byť na parkovisku. Počet áut sa nadol zvyšoval a počet motoriek znižoval. Maximálne ich mohlo byť na parkovisku 9 a minimálne 1, lebo v zadaní je, že na parkovisku boli autá aj motorky.

Počet áut aj motoriek som postupne vynásobila s počtom kolies, ktoré majú (autá – 4, motorky – 2) a keď som výsledky v jednotlivých riadkoch sčítala, vyšlo mi, koľko kolies bolo na parkovisku.

Počítala som až, kým mi nevyšiel súčet 34, ako bolo v zadaní.

Odpoveď: Na parkovisku bolo 7 áut a 3 motorky.

Riešenie 3:

Spolu kytíc	10	10	10	10
Z 3 kvetov	1	2	3	4
Z 5 kvetov	9	8	7	6
Spolu kvetov	$3+5.9=48$	$2.3+5.8=46$	$3.3+5.7=43$	$4.3+6.5=42$
	nevyh.	nevyh.	nevyh.	vyh.

Vypisujem možnosti, ak bude len 1 kytica z 3 kvetov a 2. kytica bude z 5 kvetov, až kým nedôjdem k počtu kvetov 42.

Kvetinárka urobila 4 kytice z 3 kvetov a 6 kytíc z 5 kvetov.

Riešenie 4: Do tabuľky postupne dopĺňame získané údaje. Keď počet áut bude 10, motoriek na parkovisku môže byť 0. A postupne pokračujeme. Pri každom počte kusov spočítame počet kolies a jednotlivito zráťame všetky kolesá na parkovisku. Správna odpoveď: na parkovisku je 7 áut a 3 motorky.

Rýchlosť a kolesá

Autá		Motorky		Spolu á	Spolu počet kolies
Prát á	Prát kolies	Prát á	Prát kolies		
0	0.4 = 0	10	10.2 = 20	10	20
1	1.4 = 4	9	9.2 = 18	10	22
2	2.4 = 8	8	8.2 = 16	10	24
3	3.4 = 12	7	7.2 = 14	10	26
4	4.4 = 16	6	6.2 = 12	10	28
5	5.4 = 20	5	5.2 = 10	10	30
6	6.4 = 24	4	4.2 = 8	10	32
7	7.4 = 28	3	3.2 = 6	10	34
8	8.4 = 32	2	2.2 = 4	10	36
9	9.4 = 36	1	1.2 = 2	10	38
10	10.4 = 40	0	0.2 = 0	10	40

Riešenie 5:

AUTÁ	10.4	9.4	8.4	7.4	6.4	5.4	4.4	3.4	2.4	1.4
MOTORKY	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2	9.2
SPOLU	40+0	36+2	32+4	28+6	24+8	20+10	16+12	12+14	8+16	4+18
KOLIES	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22

Do tabuľky budeme postupne dosadzovať počet kusov automobilov a motoriek, autá budeme násobiť 4 kolesami a motorky 2 kolesami. Ich výsledný súčet porovnáme s celkovým počtom kolies.

Iné prístupy k riešeniu úlohy

Riešenie 1: Skúšam taký počet áut a dám krát 4 kolesá, aby mi súčet áut a motoriek vyšiel 10. Teda ak dám $6.4=24$ kolies a 34 kolies – 24 kolies je 10, tak potom $10:2$ kolesá sa rovná 5 motoriek. Ale $6+5$ je jedenásť a v zadani máme, že spolu je motoriek a áut 10. Takže musím hľadať ďalej.

$$7.4=28$$

$$28 + 6 = 34 \text{ kolies}$$

$$3.2=6$$

$$7 + 3 = 10 \text{ dopr. prostr.}$$

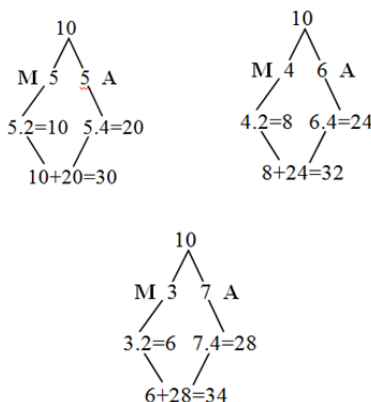
Odpoveď: Áut je na parkovisku 7 a motorky sú 3.

Riešenie 2: Metóda pokus – omyl (tabuľka)

Odhadnem, že polovica je 5-kvetových a polovica 3-kvetových kytíc. Do tabuľky si zapisujem typy a násobím počtom kvetov. Potom sčítavam a skúšam, kedy mi vyjde správny výsledok.

	5 a 5	6 a 4	4 a 6
3 kvety	$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$4 \times 3 = 12$
5 kvetov	$5 \times 5 = 25$	$4 \times 5 = 20$	$6 \times 5 = 30$
spolu	40	38	42

Riešenie 3: Pokus a omyl



Viem, že spolu ich bolo 10. Vyskúšala som ich rozdeliť na polovicu. 5 a 5 a násobila autá.4 (kolesá), motorky.2 (kolesá). Ak mi to nevychádzalo, skúšala som autá pridávať a motorky uberať, aby sedel počet, kým mi nevyšiel správny počet všetkých kolies.

Riešenie 4:

x/2 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34

y/4 4,8,12,16,20,24,28,32,36

POSTUP: vypíšeme si všetky násobky 2 a 4 (keďže motorky majú 2 kolesá a autá 4). Potom hľadáme vhodné dvojice z 1. a 2. radu tak, aby bol ich súčet 34 (počet všetkých kolies). Potom si to budeme roznásobovať v tvare 2. ____ + 4. ____ = 34, až kým súčet čísel na prázdnych miestach nebude 10, ktoré znázorňujú vozidlá.

Z prezentovaných ukážok písomných riešení danej úlohy je vidieť, že nie všetky sú na prvý pohľad dostatočne zrozumiteľné a opis myšlienkového postupu nie je precízny. Pozitívum je však to, že študenti sa aspoň pokúsili o didaktickú interpretáciu procesu riešenia úlohy. V mnohých prípadoch to bola ich prvá skúsenosť s prácou daného typu. Z výpovedí študentov je zrejmé, že si uvedomili dôležitosť poznania rôznych prístupov a stratégií riešenia matematických úloh takého typu, ktoré sa javia nad rámec schopností žiakov mladšieho školského veku. Zmenil sa ich pohľad na proces riešenia úloh, čo je prvotným predpokladom na konštruktivistický prístup k vyučovaniu matematiky.

Záver

Obsah predmetu *Stratégie riešenia matematických úloh* je spracovaný aj vo forme elektronického podporného kurzu v prostredí LMS Moodle. V kurze sú prezentované niektoré stratégie riešenia úloh jednotlivých typov, ktoré sú postupne zaraďované na prácu na seminároch. V najbližšom období je plánované doplnenie jednotlivých častí o ďalšie stratégie, vytvorené študentmi, pričom prezentované budú aj kópie písomných zápisov, ku

ktorým budú študenti vytvárať slovné komentáre, opis postupu riešenia a pod. Nevyhnutnou súčasťou aktivít bude aj formulácia pomocných inštrukcií, ktoré pomáhajú zvládnuť žiakovi proces riešenia úlohy. Vytvorí sa tak priestor na rozvíjanie funkcií konštruovania poznatkov jednak u budúcich učiteľov elementaristov, ale aj u žiakov primárnej školy.

LITERATÚRA

- [1] Hejný, M., Kuřina, F. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha, Portál, 2001, ISBN 80-7178-581-4
- [2] Jensen, M.: *Dynamic Assessment, Learning, Culture and Cognition*. Roswell, ICML Training Institute, 2009.
- [3] Prídavková, A.: Didaktické spracovanie riešiteľských stratégií matematických úloh. In *Acta Mathematica 11. Zborník príspevkov zo VI. Nitrianskej matematickej konferencie*, Nitra, FPV UKF v Nitre, 2008, s. 193-197. ISBN 978-80-8094-396-7
- [4] Šedivý, O.: Pomáha vyučovanie matematiky rozvíjať kľúčové kompetencie žiakov? In *Acta Mathematica 11. Zborník príspevkov zo VI. Nitrianskej matematickej konferencie*, Nitra, FPV UKF v Nitre, 2008, s. 25-29. ISBN 978-80-8094-396-7
- [5] Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy v Slovenskej republike. ISCED 1 – Primárne vzdelávanie, 2008 (dostupné na www.minedu.sk)

doc. RNDr. Alena Prídavková, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra 1
SK – 081 16 Prešov
e-mail: pridavkova.a@gmail.com

ROZVOJ LOGICKÉHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ

JANA PŘÍHONSKÁ

ABSTRACT. The contribution deals with the development of pupils' logical thinking. It outlines the possibility of using problems with magic shapes (a magic square, a magic chessboard) in an interactive SMART Board environment.

1 Úvod

Jedním z důležitých aspektů vyučování matematice v dnešní době je neustále překonávat formalismus ve výuce, tj. neorientovat se pouze na memorování naučených početních spojů, vzorců a algoritmů, ale rozvíjet myšlení žáků a studentů a současně procvičovat jejich logické uvažování. Schopnost provádět logicko-matematické operace se objevuje již při nejobecnější činnosti v kojeneckém věku a postupně se rozvíjí v prvním a druhém desetiletí života.

Jak říká prof. Rosický z Přírodovědecké fakulty MU: „*Matematika má vychovávat k logickému a korektnímu myšlení*“. Aby však mohla tuto svoji úlohu plnit, je nutné u žáků vzbudit o matematiku zájem. Matematika pak dává možnost tvůrčí práce – rozvíjí schopnost logického a analytického myšlení, fantazii, ale i jistá estetická kritéria. Určitý estetický moment může v matematickém uvažování hrát jistou roli. Matematik si musí umět vytvořit mentální představu situace, kterou se zabývá, a pracovat s ní jako s realitou. Jinými slovy představit si ten svět, který se pak ve finále zobrazí nějakými vzorečky a formulkami. Většinou přitom platí, že výsledná řešení jsou jednoduchá, elegantní a krásná. Je to samozřejmě estetika, která není přístupná každému – podobně jako hudba také vyžaduje určitou přípravu.

2 Logika a logické myšlení v matematice

Proces myšlení se opírá o určité myšlenkové operace. K základním operacím myšlení patří srovnávání a analogie (podobnost), rozlišování, generalizace (zevšeobecnění) a abstrakce (myšlenková činnost, při níž se cestou analýzy určitých jevů či pojmů vytvářejí obecné poznatky). Schopnost provádět logicko-matematické operace se objevuje již při nejobecnější činnosti v kojeneckém věku a postupně se rozvíjí v prvním a druhém desetiletí života, až obsáhne poměrně velký počet nervových center, která pracují ve vzájemné shodě. I když dojde k poškození některého centra, logicko-matematické myšlení to většinou nezasáhne. Bližší vymezení a vysvětlení psychologických záležitostí logicko-matematického myšlení a schopností můžeme nalézt v rozsáhlém díle Jeana Piageta.

Matematické myšlení vychází ze znalosti matematických pojmů (definice, věta, axiom, předpoklad a tvrzení věty, věta obrácená, důkaz věty, výrok, výroková forma, množina, relace, operace, rovnice, rovnost, nerovnice, nerovnost, atp.), ze znalostí matematických teorií (matematická logika, teorie množin, statistika, pravděpodobnost, teorie řešení rovnic, infinitesimální počet, geometrie, teorie algebraických struktur, atp.), matematické frazeologie a znalostí matematické symboliky. Logické myšlení je pak v psychologickém

slovníku charakterizováno jako vývojově vyšší forma myšlení, které je založeno na správném usuzování podle zákonů formální logiky. Slovník cizích slov vymezuje formální logiku jako učení o zákonech a pravidlech nutných pro získávání pravdivých závěrů při usuzování. Za jejího zakladatele je považován Aristoteles.

Oč cennější je správné řešení problému získané usuzováním podle daných pravidel oproti náhlému nápadu – vzhledu, i když nelze výsledek logicky zdůvodnit? Právě díky druhé variantě řešení problému přeci vzniklo mnoho slavných vynálezů, které lidstvo používá dodnes. Dnešní věda i školství vyžadují řešit problémy pružně, rychle, přesně, dle daných pravidel postupů. Kdo to neumí, mívá při studiu a potom i v mnoha směrech v praktickém životě problémy. Z toho vyplývá, že je prospěšné logické myšlení rozvíjet.

3 Logické úlohy

Logická úloha je úloha, k jejímuž vyřešení lze dospět rozumovou (logickou) úvahou s uplatněním elementárních znalostí jazykových, matematických a vědomostních. Logickou úvahou se rozumí nalezení vhodného algoritmu řešení nebo aplikace zadaného algoritmu na skloubení či kombinování zadaných prvků. Rovněž se touto úvahou rozumí vyhledávání nejlepších z možných variant řešení. Logikou v tzv. logických úlohách se rozumí určitý postup myšlení, schopnost správně myslet nebo usuzovat, tedy vyvozovat závěry z daných poznatků či myšlenek. Ne každý způsob (postup) usuzování však musí být nutně logicky správným: z pravdivých předpokladů lze dospět k nepravdivým závěrům. Za logické je proto považováno takové uvažování, které od pravdivých předpokladů vede k pravdivým závěrům. V logických úlohách je za pravdivý závěr považováno takové řešení, které vyplývá ze zadání úlohy, respektuje všechny vazné podmínky a není v rozporu s žádným z prvků tohoto zadání.

K tomu lze ještě dodat, že u pravých logických úloh je řešení odvoditelné sledem navazujících myšlenkových kroků, které vyplývají jeden z druhého. K řešení lze dospět algoritmem, který je buď předem dán, nebo jej řešitel musí sám sestavit. V těchto úlohách jde zejména o hledání a analýzu uspořádání prvků, hledání vztahu (souvislosti) mezi jednotlivými prvky zadání, hledání systému, jehož součástí jsou prvky zadání, ale také hledání chyb (poruch systému), doplňování nových prvků apod. Jednou z možností, jak rozvíjet logické myšlení žáků, je využití tzv. algebrogramů (resp. anagramů) a řešení magických čtverců, případně jiných „magických“ útvarů.

4 Algebrogramy a anagramy

Algebrogramem nazýváme rébus, v němž řešení spočívá v doplnění čísel (0-9) místo písmen v naznačené číselné operaci tak, aby byl správný výsledek zapsaných početních úkonů. Hlavním pravidlem při výměně je, že za různá písmena musíme dosadit různá čísla a za stejná písmena stejná čísla. Dále se může v některých zápisech algebrogramů vyskytovat hvězdička, která značí umístění libovolného čísla. Složitost těchto rébusů roste s počtem cifer použitých čísel a případnými kombinacemi početních operací. Obecně je dále snadnější vyřešit algebrogramy s naznačeným sčítáním nebo odčítáním než algebrogramy, v jejichž zápise se vyskytuje násobení nebo dokonce dělení. Anagram neboli přesmyka je slovo (skupina slov) vzniklé přeskupením písmen v původním slově nebo větě. Proto je velmi důležité zařazovat již od útlého věku do výuky např. různé kombinatorické úlohy, [3]. Následující ukázka demonstruje proces logických úvah a rozvoj chápání základních kombinatorických pravidel. Zakončena je řešením na úrovni střední školy.

Ukázka anagramu a jeho řešení

Určete počet anagramů, které lze získat z písmen slova ACONCAGUA (nejvyšší hora Jižní Ameriky).

1. řešení - logická úvaha

Metoda výpisu všech možností není vhodná pro větší počet prvků. Proto tento příklad vyřešíme logickou úvahou.

Slovo ACONCAGUA má 9 písmen: 3xA, 2xC, ostatní písmena jsou po jednom. Vezmeme v úvahu, že žádné písmeno se neopakuje. Na prvním místě vybíráme jedno písmeno z 9 možností, na druhé místo z 8 možností, na třetí místo ze 7 možností atd. Užitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme 362 880 možností. Uvažujme nyní A, které se opakuje třikrát. Zvolíme $A = A_1 = A_2 = A_3$. V Tab. P6: AAA jsou vybrané dvě možnosti, na kterých je vidět, že anagram se nezmění. Užitím kombinatorického pravidla součinu zjistíme, že těchto možností je celkem 6: na první místo vybíráme ze tří možností (A_1, A_2, A_3) na druhé ze dvou a na třetí zůstane jedna možnost, tj. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností. Proto součet 362 880 vydělíme 6 a získáme 60 480 anagramů. Stejnou úvahu provedeme pro C, které se ve slově opakuje dvakrát. Celkový počet anagramů je tedy $60\,480 : 2 = 30\,240$.

Tab. P6 AAA

A ₁	A ₁	A ₃	C	C	N	O	G	U
A ₃	A ₂	A ₁	C	C	N	O	G	U
...								

2. řešení - permutace s opakováním

Jedná se o permutaci 9 prvků s opakováním z daných 6 prvků, přičemž se první prvek opakuje 3-krát, druhý 2-krát a třetí, čtvrtý, pátý a šestý prvek jsou po jednom.

$$P'_{3!2!1!1!1!1!1!}(9) = \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{60480}{2} = 30240$$

5 Magické čtverce¹

Magické čtverce patří k nejstarším početním hříčkám. Byly objeveny v knize z 5. tisíciletí před naším letopočtem v Číně. Evropané se problémem magických čtverců začali zabývat v 15. století. V literatuře má pojem „magický čtverec“ nejrůznější významy. Nejobvyklejší definice hovoří o čtvercovém schématu o n řádcích a n sloupcích, v němž jsou vepsána čísla 1, 2, ..., n^2 tak, že všechny řádky, sloupce a obě úhlopříčky dávají stejný součet který je roven číslu

$$\frac{1}{2} \cdot [n \cdot (1 + n^2)]$$

Z matematického hlediska patří magický čtverec do aditivní teorie čísel. Jsou známy i magické čtverce tvořené podle jiných zásad (sestavené například z prvočísel). Nejstarší

¹ <http://profuvsvet.ic.cz/view.php?cisloclanku=2007020007>

doklad o znalosti magického čtverce ve střední Evropě je na mědirytině Melancholie I, jejímž autorem je A. Dürer (1514).²

Obraz Melancholie I je renesanční mědirytina, vzniklá roku 1514. Dodnes platí o tomto obraze Vasariho soud: Je jedním z těch uměleckých děl, che feciono stupire il mondo, „která zanechávají celý svět v údivu“. Magický čtverec v pravém horním rohu, jehož číslíčky dávají vždy stejný součet 34, ať je sčítáme vodorovně, svisle nebo úhlopříčně, pravděpodobně v horní řadě vyjadřují den, měsíc a rok smrti Dürerovy matky. Jisté je, že dvojice čísel uprostřed spodní řady, 15 a 14, jsou datem zhotovení rytiny.



Obrázek 1a,b: Albrecht Dürer – Melancholie I; detail čtvercové tabulky

Mezi magické čtverce se řadí i známá hra SUDOKU. Cílem hry je doplnit chybějící čísla 1 až 9 v předem dané předvyplněné tabulce. Tato tabulka je rozdělená na 9x9 polí, která jsou seskupena do 9 čtverců (3x3). K předem vyplněným číslům je potřeba doplnit další čísla tak, aby platilo, že v každé řadě, v každém sloupci a v každém z devíti čtverců byla použita vždy všechna čísla jedna až devět. Pořadí čísel není důležité. Čísla se nesmí opakovat v žádném sloupci, řadě nebo v malém čtverci.

V posledních letech se vymyslelo mnoho důmyslných metod na sestrojování magických čtverců a pravidla utváření jsou tak dobře známa, že není problém sestrojit čtverce libovolných rozměrů. My se v našem příspěvku soustředíme na řešení magických čtverců v interaktivním prostředí. Ne všechny děti mají dostatečnou trpělivost řešit magické čtverce, a proto se snažíme problém zpracovat tak, aby se stal zajímavým již možností aktivního zapojení žáka do procesu řešení.

6 Magické čtverce v interaktivním prostředí

V rámci seminářů, zaměřených na řešení matematických problémů na PF TU v Liberci jsou zpracovávány různé problémy zaměřené na rozvoj logického myšlení a řešitelských strategií žáků. Tyto problémy jsou dále zpracovány pro využití v interaktivním prostředí SMART Board, [2]. V následujícím textu uvádíme ukázkou práce s magickými čtverci, resp. magickou šachovnicí. Úvodní problém je zpracován jako motivační (Obr. 2a). Učitel

² http://cs.wikipedia.org/wiki/Melancholia_I

ho využije k vysvětlení problému magického čtverce. Následují nové zadané problémy (Obr. 2b).

Interativní prostředí SMART Board umožňuje žákům volbu vlastní nápovědy, když ji potřebují. Řešení problému je rozfázováno a je na uživateli, zda jednotlivé kroky přeskočí nebo je využije. Žákům přináší interaktivní tabule více zábavy a interaktivity do vyučování. Učitelům přináší možnost, jak snadno udělat jejich výklad zajímavější a snadno zapamatovatelný. Příjemci se mohou stát spoluvůdci scénáře vyučovací jednotky, vytvářejí hypotézy a mají možnost jejich následné verifikace, korekce, rozvíjení. Otvírají se tak nové možnosti pro spolupráci, interakci, tvorbu a realizaci vlastních nápadů a myšlenek.

Magické čtverce

Na obrázku je nakreslený magický čtverec s 25 čísly. Přesvědčte se o jeho magičnosti. Součet čísel v každém řádku, v každém sloupci i v každé úhlopříčce magického čtverce musí být stejný.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Řešení

Magické čtverce

Doplňte čtverec, aby byl magický. To znamená, aby součet čísel v řádkách, v úhlopříčkách i ve sloupcích byl stejný.

	113	47
	59	
71		

Ukázka

Řešení

Obrázek 2a,b: Magický čtverec

Jistou alternativou pro řešení magického čtverce je problém magické šachovnice (Obr. 3a,b; Obr. 4a,b). V prostředí SMART Board jsou umístěny volné prostory pro přímé řešení žáků s možností odkrití nápovědy v případě potřeby (otazník), návrat do základního MENU (domeček) či možnost postupu k dalšímu kroku řešení nebo problému (šipka).

Použité ikonky:  návrat do základního MENU,  nápověda,  další krok řešení

Magická šachovnice

Toto je naše magická šachovnice. Pro názornost ještě jednou zadání. Všechna pole šachovnice vyplníme čísla od 1 – 10, každé jen jednou. Číslo ve žlutém políčku je součtem čísel v sousedních bílých políčkách.

Menu

Magická šachovnice

Toto je naše magická šachovnice. Pro názornost ještě jednou zadání. Všechna pole šachovnice vyplníme čísla od 1 – 10, každé jen jednou. Číslo ve žlutém políčku je součtem čísel v sousedních bílých políčkách.

Číslo 10 musí být někde na žlutých políčkách.



Obrázek 3a,b: Magická šachovnice

Magická šachovnice

Logické řešení – pokud do šachovnice dosadíme místo čísel písmena dostaneme tento zápis:
Čísla 1, 2,... 5 musí být v bílých polích, vyšší čísla ve žlutých.

A+B	B	B+C+D	D	D+E
A	A+B+C	C	C+D+E	E

Magická šachovnice

Logické řešení – Několika pokusy pak dojdete ke správnému výsledku

6	5	10	3	7
1	8	2	9	4

Obrázek 4a,b: Magická šachovnice-řešení

7 Závěr

Ve spolupráci se studenty učitelství FP TU v Liberci zpracováváme v rámci seminárních prací celý soubor problémů, her a námětů pro práci se žáky na 1., resp. 2. stupni základní školy, [1]. Problémy jsou dále upravovány pro využití v prostředí SMART Board. Z průzkumu na základních a středních školách vyplývá, že v případě využití informačních a komunikačních technologií využívají učitelé z velké části již hotových produktů. Domníváme se proto, že vytvořený soubor problémů se stane pro vyučující matematiky dobrou pomůckou a odrazovým můstkem pro další doplnění vlastními náměty.

LITERATURA

- [1] Příhonská, J.: *Prezentační software v přípravě budoucích učitelů*. In: Žilková, K.: *Potenciál prostředí IKT v školské matematice*. (CD), UK v Bratislavě, 2009, s.44-53. ISBN 978-80-223-2754-1
- [2] Příhonská, J., Vilimovská, L., Čálková, T.: *Aktivizující metody ve výuce s využitím IKT technologií na základní škole*. In: Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas paedagogica, Mathematica 4., sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí „Mathematical Education in Context of Changes in Primary School“. Olomouc, 2010, s. 245-250. ISBN 978-80-244-2511-5, ISSN 0862-9765.
- [3] Scholtzová, I.: *Prvé dotyky s kombinatorikou – prečo, kedy a ako*. In: *Od činnosti k poznatku*. Zborník z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou. Plzeň: Západočeská univerzita, 2003. s. 39 - 42. ISBN 80-7082-955-9

Doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
 Katedra matematiky a didaktiky matematiky
 Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
 Technická Univerzita v Liberci
 Voroněžská 13
 ČR– 461 17 Liberec
 e-mail: jana.prihonska@tul.cz

ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKOV VÝSTUPNÉHO TESTU PRE 5. ROČNÍK PROJEKTU KEGA 3/7001/09

ĽUBOMÍR RYBANSKÝ, MARTA VRÁBELOVÁ

ABSTRACT. The paper deals with statistical processing of outcoming test results. Outcoming test was written as part of a project KEGA and its aim was to compare knowledge level of 5. year attended school pupils in the experimental and control group and to verify next hypothesis as are comparing the level of boy knowledge and the level of girl knowledge, the knowledge of pupils from school with Hungarian and Slovak teaching language, the pupils with and without a failure learning. The validity and the reliability of the outcoming test and the item analyse of test are performed.

Úvod

Článok sa týka riešenia projektu KEGA 3/7001/09 s názvom *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií - alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA*. Informácie o tomto projekte ako aj znenie vstupného testu sa nachádzajú na internetovej stránke www.kega.fss.ukf.sk. V rámci tohto projektu prebieha experiment, ktorý začal náhodným rozdelením škôl zapojených do výskumu na experimentálne a kontrolné, vypracovaním a napísaním vstupného testu v dvoch verziách. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu tvorí obsah tohto príspevku.

Cieľom výskumu v školskom roku 2009-2010 je príprava učebných materiálov predmetu matematika pre žiakov 5. ročníka ZŠ a overenie efektívnosti vyučovania pomocou týchto materiálov v školskej praxi. Ide hlavne o zvýšenie matematických kompetencií žiakov pri riešení úloh týkajúcich sa bežných životných situácií a o ich prípravu na medzinárodné testovanie vedomostí.

Hlavná hypotéza výskumu a výskumná vzorka

Hlavnou hypotézou výskumu je hypotéza

H0: *Pripravené materiály efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 5. ročníka ZŠ.*

Výskumnú vzorku tvorí 877 žiakov 5. ročníka základných škôl zo štyroch okresov Nitrianskeho kraja. Niektoré školy sú školy s vyučovacím jazykom maďarským.

Metodológia a nástroje výskumu

Ako metóda výskumu sa používa experiment. To znamená, že školy boli náhodne rozdelené do dvoch skupín a to na školy experimentálne a školy kontrolné. Experimentálnu skupinu tvorí 18 škôl, v kontrolnej skupine je 16 škôl. Ako výskumné nástroje sa používajú didaktické testy - vstupný test a výstupný test. Vstupný test bol použitý iba na začiatku experimentu, jeho výsledky sú štatisticky spracované v článku [5]. Výstupnými

testami sa porovná úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej a kontrolnej skupine na konci každého školského roku.

Výstupný test a ďalšie hypotézy výskumu

Výstupný test obsahoval 6 úloh (položiek) obsahujúcich niekoľko podúloh. Všetky úlohy boli otvorené. Obsahová validita testu bola posúdená učiteľmi 5. ročníka ZŠ. Test bol odskúšaný na jednej z experimentálnych škôl a po jeho odskúšaní boli niektoré úlohy testu mierne upravené. Úlohy boli bodované. Každému žiakovi bol pridelený celkový počet bodov za test (Súčet). Žiak mohol získať maximálne 30 bodov.

Na základe výsledkov výstupného testu sa overuje nasledovná hypotéza:

H1: *Úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej skupine je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v kontrolnej skupine v prospech experimentálnej skupiny.*

Okrem tejto hypotézy sme si stanovili overiť aj tieto ďalšie hypotézy:

H2: *Úroveň vedomostí žiakov v školách s vyučovacím jazykom slovenským nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v školách s vyučovacím jazykom maďarským.*

H3: *Úroveň vedomostí chlapcov nie je významne odlišná od úrovne vedomostí dievčat.*

H4: *Úroveň vedomostí žiakov s poruchou učenia je významne odlišná od úrovne vedomostí ostatných žiakov.*

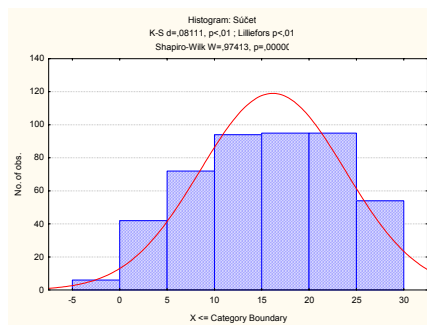
H5: *Úroveň vedomostí žiakov v školách s experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom slovenským nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v školách s experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom maďarským.*

Výsledky výstupného testu a verifikácia hypotéz

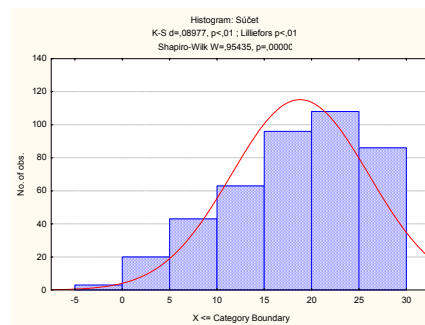
Histogramy rozdelenia početností počtu bodov s testami normality pre experimentálnu skupinu (E) a kontrolnú skupinu (K), pre skupinu škôl s vyučovacím jazykom slovenským (SJ) a maďarským (MJ), pre skupinu dievčat (Z) a chlapcov (M), s poruchou učenia (Ano) a bez poruchy učenia (Nie) vidíme na obrázkoch 1a a 1b, 2a a 2b, 3a a 3b, 4a a 4b. Rozdelenie počtu bodov v základnom súbore nemožno považovať za normálne v žiadnej skupine, p-hodnoty testov normality (Kolmogorovho–Smirnovho, Shaphirovho–Wilkovho) sú menšie ako 0,05. Vzhľadom na veľký rozsah náhodného výberu môžeme na testovanie rovnosti stredných hodnôt v základných súboroch použiť dvojvýberový t-test.

Popisné štatistiky sme zhrnuli do tabuľky 1 spolu s hodnotami *t-testu* a *F-testu* a to pre skupinu 1 a skupinu 2, pričom porovnávame tieto skupiny: experimentálnu (E) a kontrolnú (K), s vyučovacím jazykom slovenským (SJ) a maďarským (MJ), dievčat (Z) a chlapcov (M), s poruchou učenia (Ano) a bez poruchy učenia (Nie).

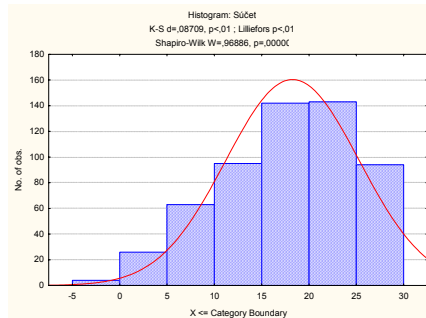
Z vypočítaných priemerov i grafov na obrázkoch 1a-1b je zrejmé, že rozdiel medzi priemerom v experimentálnej skupine (18,78) a v kontrolnej skupine (16,15) je štatisticky významný v prospech experimentálnej skupiny ($t = -5,18$, $p = 0,000$). Variabilita vedomostí v experimentálnej a kontrolnej skupine nie je významne odlišná ($F = 1,12$, $p = 0,239$). Veľký rozdiel medzi priermi je v skupine žiakov zo škôl s vyučovacím jazykom slovenským a maďarským a tento rozdiel je štatisticky významný (hodnota *t-testu* z tabuľky 1 je rovná $-4,54$, *p*-hodnota je menšia ako 0,001). V skupine s vyučovacím jazykom maďarským sa preukázala aj vyššia variabilita vedomostí meraná smerodajnou odchýlkou, čo potvrdzuje aj hodnota *F-testu* ($F = 1,42$, $p = 0,000$).



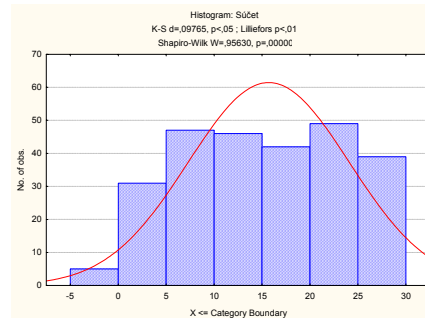
Obrázok 1a: Rozdelenie počtu bodov v skup. K



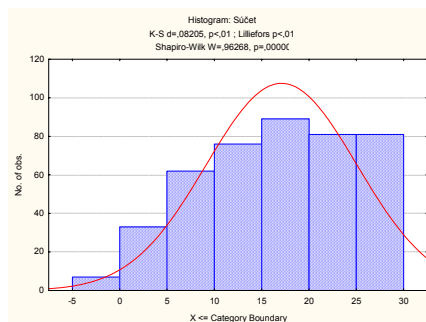
Obrázok 1b: Rozdelenie počtu bodov v skup. E



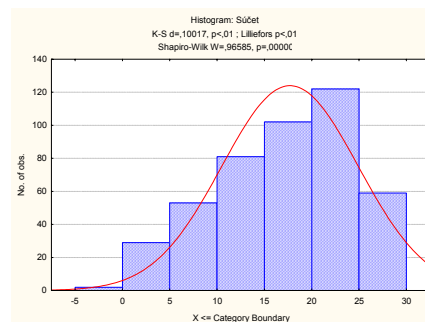
Obrázok 2a: Rozdelenie počtu bodov v skup. SJ



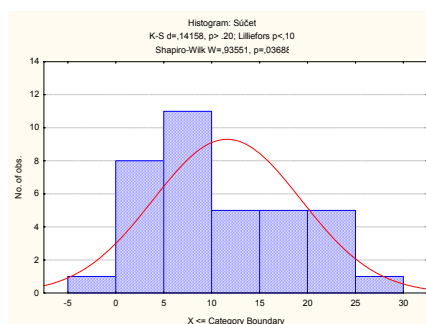
Obrázok 2b: Rozdelenie počtu bodov v skup. MJ



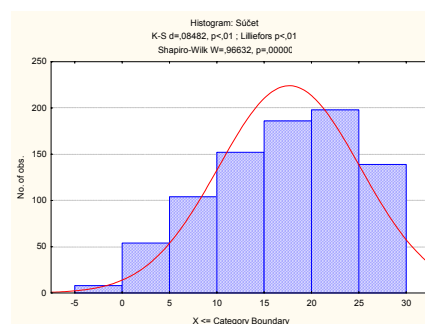
Obrázok 3a: Rozdelenie počtu bodov v skup. M



Obrázok 3b: Rozdelenie počtu bodov v skup. Z



Obrázok 4a: Rozdelenie počtu bodov v skup. Ano

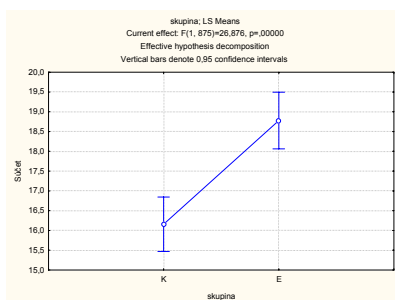


Obrázok 4b: Rozdelenie počtu bodov v skup. Nie

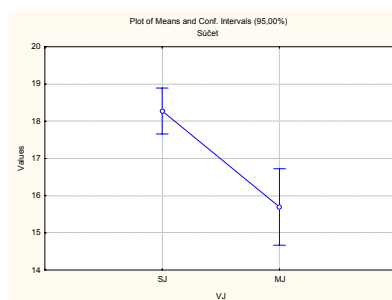
Skup.1,skup.2	Popisné štatistiky – aritmetický priemer počtu bodov (Priem), smerodajná odchýlka (Sm.o.), počet platných hodnôt (Počet.), hodnota t-testu (t) a jeho P-hodnota (p), hodnota F-testu (F) a jeho P-hodnota (p)									
	Priem skup. 1	Priem skup. 2	Sm.o. skup. 1	Sm.o. skup. 2	Počet skup. 1	Počet skup. 2	t	p	F	p
E, K	18,78	16,15	7,67	7,26	419	458	-5,18	0,000	1,12	0,239
SJ, MJ	18,27	15,69	7,12	8,41	567	259	-4,54	0,000	1,42	0,000
Z, M	17,70	17,09	7,20	7,96	448	429	1,19	0,234	1,22	0,037
Ano,Nie	11,61	17,65	7,71	7,48	36	841	4,78	0,000	1,06	0,745

Tabuľka 1

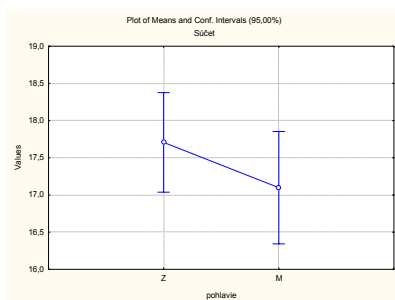
Priemery počtu bodov spolu s 95 % intervalmi spoľahlivosti sú pre naše štyri skupiny znázornené na obrázkoch 5a-5d.



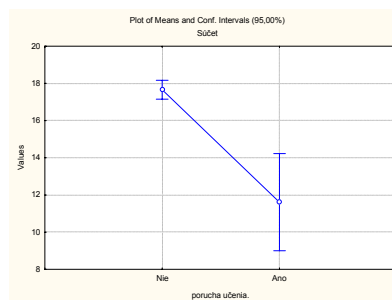
Obrázok 5a: Graf priemerov pre E a K



Obrázok 5b: Graf priemerov pre SJ a MJ



Obrázok 5c: Graf priemerov pre Z a M



Obrázok 5d: Graf priemerov pre Nie a Ano

Podobne je vysoko štatisticky významný rozdiel aj medzi priemerom v skupine detí s poruchami učenia a bez porúch učenia ($t = 4,78$, $p < 0,01$), ale variabilita vedomostí v týchto skupinách nie je významne odlišná ($F = 1,06$, $p = 0,745$). Len nepatrný (a nesignifikantný) rozdiel je medzi priermi a smerodajnými odchýlkami skupiny dievčat a skupiny chlapcov.

Vzhľadom na to, že rozdelenie počtu bodov nemožno považovať v základných súboroch za normálne, a vyskytla sa aj významná odlišnosť rozptylov, na overenie hypotéz H1 – H4 sme použili aj neparametrický *Mannov-Whitneyov U test* (pričom sme zo skupiny žiakov bez poruchy učenia vybrali náhodnú vzorku 36 žiakov, aby sme neporovnávali výberové súbory s veľmi odlišným rozsahom). Vo všetkých štyroch

prípadoch sme dostali podobné výsledky ako sú výsledky získané *t*-testom. Výsledky Mannovho-Whitneyovho U testu sú zapísané v tabuľke 2.

Skup.1, skup.2	Mannov-Whitneyov U test (KEGA)								
	Súč. por. skup.1	Súč. por. skup.2	U	Z	p	Z uprav	p	Počet skup.1	Počet skup.2
E, K	203261,0	181742,0	76631,0	-5,16	0,000	-5,16	0,000	419	458
SJ, MJ	246919,5	94631,5	60961,5	-3,92	0,000	-3,92	0,000	567	259
Z, M	200168,5	184834,5	92599,5	0,93	0,351	0,93	0,351	448	429
Ano, Nie	1020,5	1607,5	354,50	-3,31	0,001	-3,31	0,001	36	36

Tabuľka 2

Z výsledkov vyplýva platnosť hypotézy H1, pretože *p*-hodnota pre *t*-test aj *U*-test je rovná 0,000 a je menšia ako nami zvolená hladina významnosti 0,05 a teda štatistickú hypotézu *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v základných súboroch rovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov za test v základných súboroch skupín E a K je identické* zamietame. Platí alternatívna štatistická hypotéza *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v základných súboroch nerovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov za test v základných súboroch skupín E a K nie je identické*. Možno teda tvrdiť, že priemer počtu bodov za test je v experimentálnej skupine významne vyšší ako v kontrolnej skupine. *P*-hodnoty pre skupiny SJ a MJ, Ano a Nie sú tiež takmer nulové, $p = 0,000 < 0,05$, čo znamená zamietnutie štatistickej hypotézy *Rozdelenie počtu bodov za test v základných súboroch skupín SJ a MJ, Ano a Nie je identické*. Teda medzi výsledkami v týchto skupinách je signifikantný rozdiel. To znamená, že hypotéza H2 sa nepotvrdila, žiaci v školách s vyučovacím jazykom slovenským dosiahli významne lepšie výsledky ako žiaci v školách s vyučovacím jazykom maďarským. Hypotéza H4 sa potvrdila, vedomosti žiakov s poruchou učenia sú významne slabšie ako vedomosti ostatných žiakov. Hypotéza H3 sa potvrdila, pretože *p*-hodnota pre *U*-test je rovná 0,351, čo je viac ako nami zvolená hladina významnosti 0,05 a teda štatistickú hypotézu *Rozdelenie počtu bodov za test v základných súboroch skupín Z a M je identické* nezamietame. Medzi výsledkami testov dievčat a chlapcov nie je signifikantný rozdiel.

Po rozklade súboru na štyri skupiny (E,SJ), (K,SJ), (E,MJ), (K,MJ) sme však zistili, že nie je významný rozdiel medzi priermi skupín (E,SJ) a (K,SJ), čo vidieť v tabuľke 3, ktorá obsahuje *p*-hodnoty pre viacnásobné porovnanie priemerov ($p = 0,077$). A nie je významný rozdiel medzi skupinami (E, SJ) a (E, MJ). Hypotéza H5 sa teda potvrdila. Žiaci experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským a experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom slovenským dosiahli veľmi podobné výsledky ($p = 0,984$). Po kontrole dotazníkov zasielaných učiteľmi o odučení nami zadaných úloh sa ukázalo, že učitelia škôl s vyučovacím jazykom maďarským venovali týmto úlohám vo vyučovaní väčší priestor.

skupina	LSD test viacnásobného porovnania priemerov			
	K,MJ - 12,89	K,SJ - 17,68	E,MJ - 18,78	E,SJ - 18,77
K,MJ		0,000	0,000	0,000
K,SJ			0,166	0,077
E,MJ				0,984

Tabuľka 3

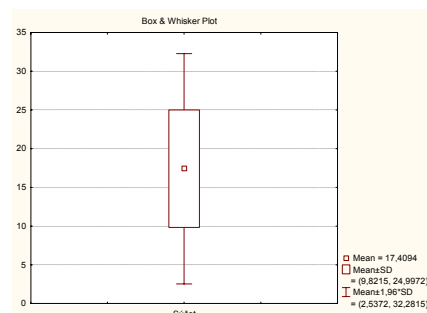
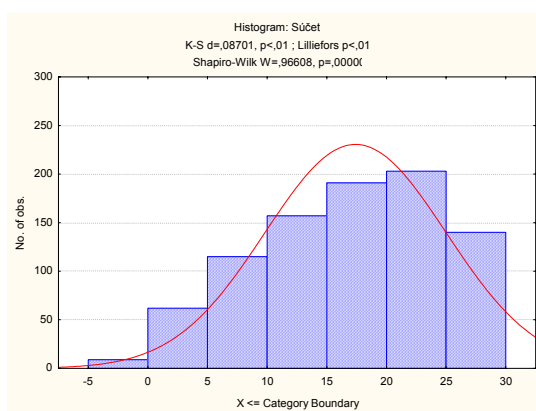
Analýza kvality vstupného testu

Teraz vypočítame popisné štatistiky počtu bodov za test bez ohľadu na skupiny, posúdime súbežnú validitu výstupného testu na základe korelácie počtu bodov za výstupný a vstupný test, vypočítame koeficient reliability testu a urobíme položkovú analýzu testu. Reliabilita testu by mala byť aspoň 0,65. Reliabilita nad 0,85 sa považuje za postačujúcu na to, aby bolo možné na základe jednej skúšky prijať rozhodnutie (Rosa, 2007, s. 34).

Popisné štatistiky sú uvedené v tabuľke 4, histogram rozdelenia počtu bodov je na obrázku 6 a na obrázku 7 je nakreslený krabicový graf pre priemer, smerodajnú odchýlku a 1,96 násobok smerodajnej odchýlky.

Premenná	Popisné štatistiky (Kega)							
	N platných	Priemer	Medián	Modus	Početnosť modusu	Minimum	Maximum	Sm. odch.
Súčet	877	17,40	19,00	19,00	52	0,0	30,0	7,58

Tabuľka 4



Obrázok 6: Rozdelenie počtu bodov v celom súbore Obrázok 7: Krabicový graf počtu bodov

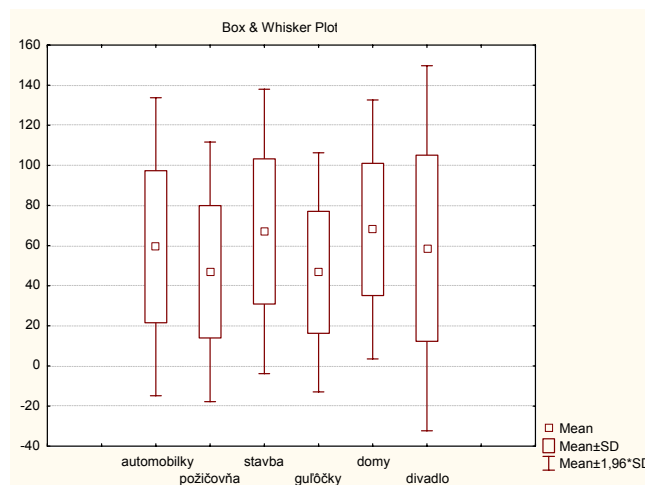
Pretože rozdelenie počtu bodov v základnom súbore nemožno považovať za normálne (p -hodnota testu normality je menšia ako 0,05), validitu testu sme overili koeficientom korelácie premenných počet bodov z výstupného testu - *Súčet* a počtu bodov zo vstupného testu - *Body vstupný test*, ktorý je rovný 0,628 a tiež pomocou Spearmanovho koeficientu korelácie. Jeho hodnota je rovná 0,603. Výstupný test považujeme za validný, lebo 0,603 > 0,4.

Tabuľka 5 obsahuje položkovú analýzu testu, teda charakteristiky počtu bodov za úlohy – aritmetický priemer, medián, modus, smerodajnú odchýlku, ďalej percento žiakov, ktorí dosiahli maximálnu úspešnosť riešenia (úloha je podozrivá, ak je týchto žiakov aspoň 80 %), percento žiakov, ktorí získali z úlohy 0 bodov (úloha je podozrivá, ak je týchto žiakov aspoň 80 %). Vidíme, že ani jedna úloha nie je podozrivá. Modus počtu bodov je rovný 2 za úlohy *Požičovňa bicyklov* a *Gulôčky* a modusy počtu bodov za zvyšné úlohy sú rovné maximálnemu počtu bodov za danú úlohu. Úloha *Návšteva divadla* je zaujímavá tým, že percento žiakov, ktorí dosiahli maximálny počet bodov za túto úlohu je najvyššie zo všetkých úloh a to isté platí pre minimálny počet bodov.

Premenná	Popisné štatistiky (KEGA)								
	Priemer	Sm.odc h.	Medián	Modus	Početn. modusu	Min.	Max.	Percent o žiakov s max. počtom bodov	Percent o žiakov s 0 bodmi
automobilky	2,972	1,896	3	5	333	0	5	36,877	13,953
požičovňa	2,347	1,650	2	2	212	0	5	17,184	18,514
stavba	3,354	1,810	4	5	404	0	5	44,789	11,973
guľôčky	2,335	1,521	2	2	254	0	5	11,764	13,873
domy	3,402	1,647	4	5	338	0	5	37,472	8,093
divadlo	2,935	2,321	5	5	456	0	5	52,054	35,388

Tabuľka 5

Napriek tomu, že úlohy sú rovnako bodované (za každú bolo možné získať 5 bodov), vypočítali sme percentuálnu úspešnosť riešenia každej úlohy u každého žiaka a nakreslili sme krabicové grafy pre priemernú percentuálnu úspešnosť, smerodajnú odchýlku percentuálnej úspešnosti a 1,96 násobok smerodajnej odchýlky percentuálnej úspešnosti (obr. 8). Najvyššiu percentuálnu úspešnosť (68,04 resp. 67,07 bodu) dosiahli žiaci pri riešení úlohy *Domy a ich čísla* resp. *Stavba*. Najťažšími úlohami s percentuálnou úspešnosťou (46,70% resp. 46,94%) boli úlohy *Guľôčky* resp. *Požičovňa bicyklov*.



Obrázok 8: Krabicové grafy percentuálnej úspešnosti úloh

Vypočítali sme koeficient reliability *Cronbachovu alfu*, rovná sa 0,784, čo svedčí o dostatočnej reliabilite výstupného testu. V tabuľke 6 sa nachádzajú hodnoty tohto koeficientu po odstránení jednotlivých úloh. Ak sa hodnota *Cronbachovej alfy* zväčší po odstránení danej úlohy, táto úloha znižuje reliabilitu testu. Vidíme, že žiadna úloha reliabilitu testu neznižuje. Po rozdelení testu na dve polovice (párne a nepárne úlohy) sme dostali *Spearmanov-Brownov* koeficient reliability 0,807 a *Guttmanov* koeficient reliability 0,806, čo tiež potvrdzuje reliabilitu testu.

Body	automobilky	požičovňa	stavba	gulôčky	domy	divadlo
Alfa po odstránení	0,731	0,766	0,767	0,750	0,737	0,759

Tabuľka 6

Záver

Na základe výsledkov výstupného testu možno konštatovať, že materiály pripravené pre učiteľov ZŠ efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 5. ročníka ZŠ. Výstupný test je dostatočne validný aj reliabilný. Ukázalo sa tiež, že školy s vyučovacím jazykom maďarským trochu zaostávajú za školami s vyučovacím jazykom slovenským, nepreukázal sa signifikantný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na pohlavie žiakov, žiaci s poruchami učenia dosiahli významne slabšie výsledky ako žiaci bez porúch učenia.

LITERATÚRA

- [1] Anděl, J.: *Statistické metody*. Praha: Matfyzpress, 2003, ISBN 80-86732-08-8.
- [2] Gavora, P.: *Úvod do pedagogického výskumu*. Bratislava: UK, 2001, ISBN 80-223-1628-8.
- [3] Kaňová, E.: *Tvorba didaktických testov z pravdepodobnosti a ich analýza*. In: Zborník zo VI. Vedeckej konferencie doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov, Nitra: Edícia Prírodovedec č. 159, 2005, ISBN 80-8050-813-5.
- [4] Rosa, V.: *Metodika tvorby didaktických testov*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2007
- [5] Rybanský, E. - Vrábelová, M.: *Štatistické spracovanie výsledkov vstupného testu KEGA 3/7001/9*. In: Zborník príspevkov z vedeckej konferencie Pedagogická veda a školská prax v historickom kontexte (28. január 2010), Katedra pedagogiky Filozofickej fakulty Univerzity sv. Cyrila a Metoda v Trnave, 2010 (v tlači)
- [6] Zvára, K. – Štěpán, J.: *Pravdepodobnosť a matematická statistika*. Praha: Matfyzpress, Bratislava: VEDA, 2001, ISBN 80-2240736-4.

RNDr. Rybanský Lubomír
Univerzita Konštantína Filozofa,
Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky,
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
email: lubomir.rybansky@ukf.sk,

Doc. RNDr. Vrábelová Marta, CSc.
Univerzita Konštantína Filozofa,
Fakulta prírodných vied, Katedra matematiky,
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra
email: mvrabelova@ukf.sk

PRVÉ KROKY K MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI

IVETA SCHOLTZOVÁ

ABSTRACT. Acquisition of mathematical literacy is a long process. It starts already in the development of mathematical concepts in preschool age. Systematic mathematical education at the primary stage of primary school should create space for the first steps towards numeracy.

Úvod

Medzinárodná štúdia OECD PISA (Programme for International Student Assessment) definuje matematickú gramotnosť ako *“schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmyšľajúceho občana”*. (Kubáček a kol., 2004, s. 7) Výsledky 15-ročných slovenských žiakov v medzinárodnom porovnaní PISA 2003 a PISA 2006 ukazujú, že priemer Slovenska sa znížil o 6 bodov. Nie je to štatisticky významné zníženie výkonu v matematickej gramotnosti, ale predstavuje to zmenu pozície v celkovom hodnotení. Pozícia Slovenska klesla z priemeru krajín OECD medzi krajiny pod priemerom krajín OECD. (Koršňáková – Kováčová, 2007)

Medzinárodná štúdia IEA TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) sa zameriava na zisťovanie vedomostí a zručností z matematiky a prírodných vied žiakov 4. ročníka základnej školy (populácia 1) a 8. ročníka ZŠ alebo 4. ročníka osemročných gymnázií (populácia 2). V rokoch 1995, 1999 a 2003 sa na Slovensku testovania zúčastnili žiaci 8. ročníka ZŠ a 4. ročníka osemročných gymnázií (populácia 2). V roku 2007 boli testovaní žiaci 4. ročníka základných škôl (populácia 1). Výsledky slovenských žiakov z matematiky v jednotlivých rokoch: 1995 – nad medzinárodným priemerom, 1999 – signifikantne vyššie nad medzinárodným priemerom, 2003 – signifikantne vyššie nad medzinárodným priemerom, 2007 – na úrovni priemeru zúčastnených krajín, ale signifikantne pod priemerom krajín OECD. (Beaton, A. E. et al., 1995; Jelemenská, 2009; Kuraj – Kurajová Stopková, 2006; Mullis, I.V.S. et al., 1999)

Výsledky slovenských žiakov dosiahnuté v PISA 2006 a hlavne v TIMSS 2007 naznačujú, že by bolo potrebné vo zvýšenej miere venovať pozornosť procesu matematickej edukácie na základnej škole a to už od primárneho stupňa.

Matematika v primárnom vzdelávaní

Štátny vzdelávací program. Matematika. Príloha ISCED 1. 2. upravená verzia pre 1. až 4. ročník ZŠ (2009) medzi cieľmi učebného predmetu matematika uvádza (s. 3):

- *riešením úloh a problémov postupne budovať poznatky žiakov o vzťahu medzi matematikou a realitou;*
- *systematicky viesť žiakov k získavaniu skúseností s významom matematizácie reálnej situácie, tvorby matematických modelov a tým aj k poznaniu, že realita je zložitejšia ako jej matematický model, približovať žiakom dennú prax.*

Tieto ciele, uvedené v kurikulárnom dokumente, korešpondujú s definovaním matematickej gramotnosti v medzinárodných štúdiách. Ich naplnenie by mohlo byť

realizované hlavne v rámci výučby tematického celku *Riešenie aplikačných úloh a úloh rozvíjajúcich špecifické matematické myslenie*.

Sonda do matematických schopností žiakov 1. ročníka základnej školy

Na konci školského roka 2008/2009 bola realizovaná sonda do matematických schopností žiakov 1. ročníka základnej školy (Tóthová, 2010). Prieskum prebiehal na mestských aj vidieckych školách – mesto 118 žiakov (61 chlapcov a 57 dievčat), vidiek 94 žiakov (41 chlapcov a 53 dievčat). Cieľom bolo získať obraz o tom, ako žiaci dokážu použiť matematiku pri riešení problémov, ktoré môže prinášať reálny svet.

Aplikované úlohy svojim obsahom a spôsobom zadania možno zaradiť do tematického celku *Riešenie aplikačných úloh a úloh rozvíjajúcich špecifické matematické myslenie*.

1. Program kina

- identifikácia číselných údajov v texte úlohy z reálnej situácie
- sčítanie prirodzených čísel v obore do 20
- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie najlacnejšieho vstupného

2. Hodiny

- identifikácia číselných údajov v texte úlohy z reálnej situácie a z grafického zobrazenia (ciferník hodín)
- sčítanie/odčítanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie dĺžky časového intervalu

3. Oznam na pošte

- identifikácia číselnej informácie nachádzajúcej sa v texte úlohy z reálnej situácie
- sčítanie/odčítanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie dĺžky otváracích hodín v zvolený deň
- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie dňa, kedy je pošta najdlhšie otvorená

4. Hľadanie Kláry

- konjunkcia výrokov – identifikácia hľadanej osoby

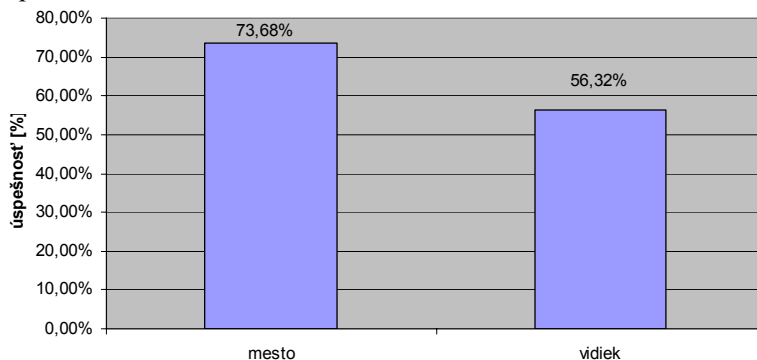
5. Hračky v obchode

- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie najdrahšej hračky
- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie najlacnejšej hračky
- sčítanie prirodzených čísel v obore do 20 – určenie sumy peňazí
- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 – porovnanie sumy peňazí a ceny hračky (možnosť nákupu)

Cieľom kvantitatívno-kvalitatívnej analýzy žiackych riešení bolo:

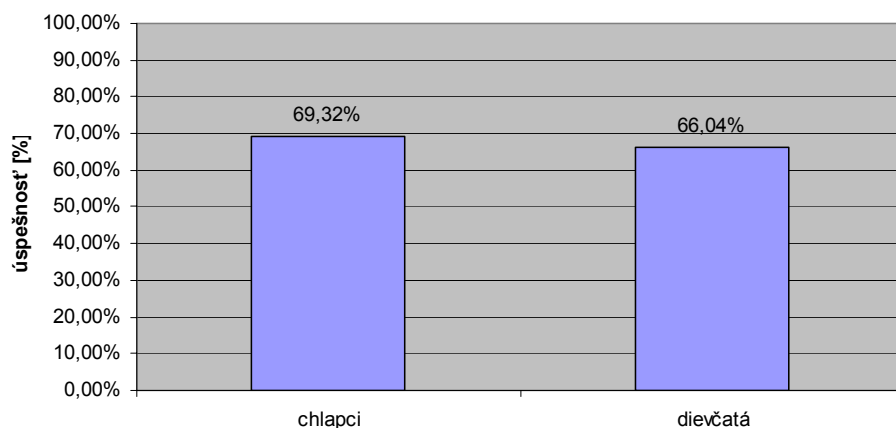
- zistiť úspešnosť žiakov z vidieka a z mesta, chlapcov a dievčat;
- identifikovať nedostatky v schopnostiach žiakov z pohľadu matematickej gramotnosti.

Výsledky žiakov z mestského prostredia boli výrazne lepšie ako výsledky žiakov z vidieckeho prostredia.



Smerodajná odchýlka pre výsledky žiakov v meste bola $s = 2,78$ a na vidieku $s = 4,09$. To ukazuje, že medzi výsledkami vidieckych žiakov boli väčšie rozdiely ako u žiakov v meste.

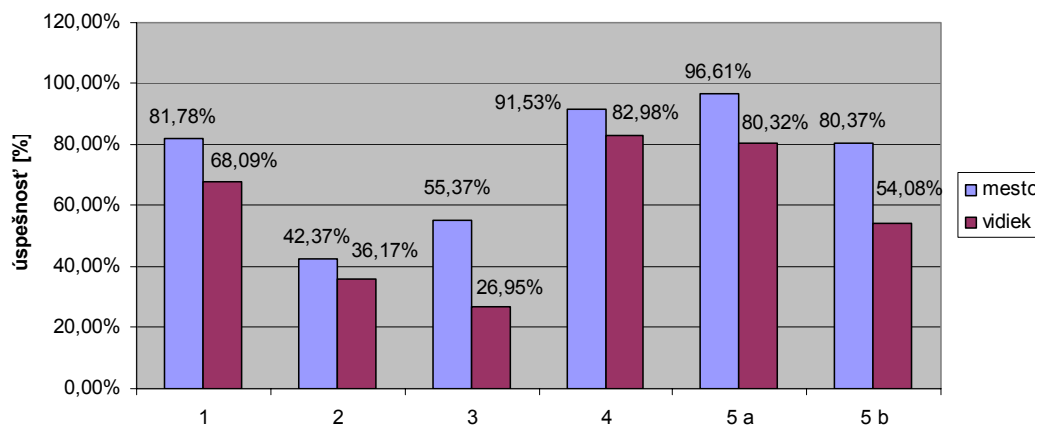
Porovnanie výsledkov, ktoré dosiahli chlapci a dievčatá, naznačuje, že rod výrazne neovplyvňuje úspešnosť žiakov.



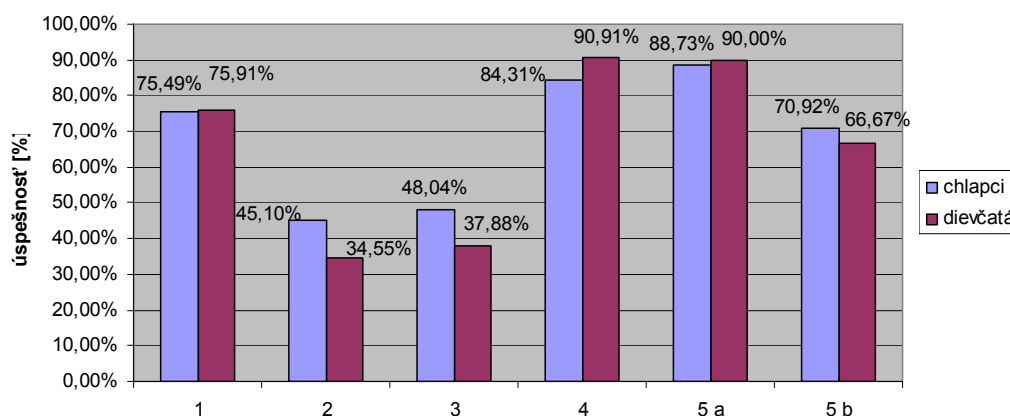
Podrobnejšia analýza ukazuje, že:

- chlapci z mesta (79,73%) dosiahli výrazne lepšie výsledky ako chlapci z vidieka (53,8%);
- dievčatá z mesta (73,27%) dosiahli značne lepšie výsledky ako dievčatá z vidieka (58,27%).

Úspešnosť riešenia jednotlivých úloh medzi súborom žiakov z mesta a súborom žiakov z vidieka ukazuje, že žiaci z mesta boli úspešnejší v riešení každej úlohy.



Porovnanie úspešnosti riešenia jednotlivých úloh medzi chlapcami a dievčatami ukazuje, že v riešení niektorých úloh boli lepší chlapci, v iných dievčatá.



Detailnejšia analýza žiackych riešení jednotlivých úloh priniesla nasledovné informácie:

1. úloha – Program kina

- lepšia úspešnosť žiakov z mestského prostredia pravdepodobne vyplýva zo životnej skúsenosti žiakov, žiaci z mesta navštevujú kino častejšie a reálne riešia podobnú situáciu;
- chlapci (mesto-81,97%, resp. vidiek-66,46%) a dievčatá (mesto-82,02%, resp. vidiek-69,34%) dosiahli porovnateľné výsledky.

2. úloha – Hodiny

- najproblematickejšia úloha pre žiakov;
- zaujímavé výsledky pri porovnaní z hľadiska rodu: chlapci z mesta (54,10%) dosiahli výrazne lepšie výsledky ako dievčatá z mesta (36,59%), chlapci (33,33%) a dievčatá (35,58%) z vidieka boli na približne rovnakej úrovni;
- z pohľadu matematiky mala úloha dve riešenia: 4 hodiny, resp. 16 hodín, nakoľko ale v texte bola otázka, ako dlho čakáme u lekára, správne vyhodnotenie reálnej situácie malo viesť k riešeniu 4 hodiny;
- najčastejšia chyba (takmer tretina žiakov) – žiaci neuviedli dĺžku časového intervalu (4 hodiny) ale 3 hodiny, čo bol údaj, ktorý bol na ciferníku hodiniek;
- mnohí žiaci úlohu neriešili.

3. úloha – Oznam na pošte

- opäť problematická úloha pre žiakov (časové údaje);
- životná skúsenosť žiakov v meste, častejšia konfrontácia s údajmi o otváracích hodinách v obchodoch, pravdepodobne spôsobila výrazný rozdiel v prospech úspešnosti respondentov z mesta oproti respondentom z vidieka, rozdiel medzi chlapcami z mesta a chlapcami z vidieka bol veľmi vysoký, viac ako 40%;
- zaujímavé výsledky pri porovnaní z hľadiska rodu: chlapci z mesta (65,57%) dosiahli výrazne lepšie výsledky ako dievčatá z mesta (46,20%), dievčatá (28,93%) z vidieka boli úspešnejšie ako chlapci (24,39%);
- žiaci nevedeli zo zadaných informácií určiť dĺžku otváracích hodín, resp. deň, kedy sú otváracie hodiny najdlhšie;
- veľa žiakov úlohu neriešilo, hlavne žiaci z vidieka.

4. úloha – Hľadanie Kláry

- chlapci (95,08%) a dievčatá (94,74%) v meste dosiahli porovnateľné výsledky, dievčatá (86,79%) z vidieka boli úspešnejšie ako chlapci (78,05%);

- žiaci, ktorých riešenia boli správne, vo väčšine prípadov postupovali systematicky: vyškrtávaním, označovaním symbolom, resp. podčiarknutím označovali tie prípady, ktoré nie sú vhodné v kontexte zadania.

5. úloha – Hračky v obchode

- životná skúsenosť žiakov v meste, častejšie nakupovanie, pravdepodobne spôsobila výrazný rozdiel v prospech úspešnosti respondentov z mesta oproti respondentom z vidieka;
- v meste chlapci (5.a-98,36%, 5.b-83,61%) dosiahli lepšie výsledky ako dievčatá (5.a-94,74%, 5.b-76,90%), na vidieku to bolo naopak, lepšie výsledky dosiahli dievčatá (5.a-84,91%, 5.b-55,66%) ako chlapci (5.a-74,39%, 5.b-52,03%)
- porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20 (najdrahšia/najlacnejšia hračka) žiaci zvládli na veľmi dobrej úrovni, najlepšie chlapci z mesta (98,36%), najslabšie chlapci z vidieka (74,39%);
- v úlohe 5.b) bolo potrebné analyzovať 6 možností a určiť, ktorá z nich je priaznivá, resp. nepriaznivá, niektorí žiaci neriešili úlohu systematicky, analyzovali iba jednu možnosť, tento nedostatok sa častejšie vyskytoval v riešeníach žiakov z vidieka;
- rozdiely medzi jednotlivými skupinami žiakov boli značné: chlapci-mesto (83,61%), dievčatá-mesto (76,90%), dievčatá-vidiek (55,66%), chlapci-vidiek (52,03%).

Niektoré informácie získané zo sondy do matematických schopností žiakov 1. ročníka základnej školy:

- žiaci na dobrej úrovni ovládajú porovnávanie prirodzených čísel v obore do 20, sčítanie/očítanie prirodzených čísel v obore do 20;
- žiaci na primeranej úrovni zvládajú elementárne učivo z logiky – konjunkcia výrokov;
- na nízkej úrovni žiaci riešia úlohy s časovými údajmi – identifikácia správnej časovej informácie zo zadaných údajov a určenie dĺžky časového intervalu;
- žiaci z mestských škôl dosiahli výrazne lepšie výsledky ako žiaci z vidieckych škôl;
- žiaci z mesta boli v riešení úloh sebavedomejší, v súbore mestských žiakov bolo menej tých, ktorí niektoré úlohy vôbec neriešili;
- úspešnosť riešenia jednotlivých súborov žiakov:

mesto – chlapci	79,73%
mesto – dievčatá	73,27%
vidiek – dievčatá	58,27%
vidiek – chlapci	53,80%
- pri zadávaní úloh sa vyskytli situácie, kedy žiaci požadovali informácie k riešeniu od administrátora ešte skôr, ako si prečítali zadanie úlohy, častejšie to bolo u žiakov v školách na vidieku;
- čas riešenia nebol exaktne sledovaný, ale z pozorovaní vyplynulo, že žiaci na vidieku potrebovali na riešenie úloh viac času ako žiaci v školách v meste.

Záver

Vo vyučovaní matematiky už na primárnom stupni vzdelávania by sa malo vychádzať z reálnych situácií, ktoré korešpondujú so svetom dieťaťa mladšieho školského veku. Ako sa ukázalo, je to potrebné hlavne v pedagogickom procese na základných školách na vidieku, kde pravdepodobne žiaci nemajú dostatočné skúsenosti s využívaním matematiky v bežných životných situáciách. Jednou z oblastí, ktorá je problematickou, sú časové

vzťahy. Nemenej dôležitou úlohou je viesť žiakov k samostatnosti a systematickosti pri riešení úloh – problémov.

Jednou zo základných súčastí tvorivej práce učiteľa (matematiky) je tvorba vhodných úloh. (Prídavková, 2004) Zaradenie vhodných typov úloh do matematickej edukácie je jedna z ciest smerujúca k formovaniu matematickej gramotnosti od primárneho stupňa vzdelávania. (Vašutová, 2010; Zeľová, 2008) Je to dlhodobý proces a vo významnej miere ho ovplyvňuje matematické vzdelávanie v školách. Prvé zreteľné stopy vytvára vyučovanie matematiky na primárnom stupni edukácie. Vzhľadom na to by bolo potrebné, aby učitelia už na 1. stupni základnej školy realizovali svoje pedagogické pôsobenie nielen v zmysle naplnenia cieľov stanovených štátnym vzdelávacím programom. Netreba zabúdať, že vyučovanie matematiky by malo ukázať aj prepojenie matematiky s realitou a následne použitie matematiky v každodennom živote.

Výhodou učiteľa – elementaristu je možnosť a schopnosť prepojenia jednotlivých predmetov, integrácia riešenia problémov a uchopenia vedomostí. (Tomková, 2006) S takýmto prístupom môžu mať problém začínajúci učitelia, u ktorých je nedostatočné prepojenie medzi odbornopredmetovými a didakticko-psychologickými kompetenciami. (Šimčíková, 2006) Niektoré prieskumy ukazujú, že schopnosti študentov – budúcich učiteľov aplikovať matematické poznatky v reálnych životných situáciách sú na nedostatočnej úrovni. (Mokriš, 2007)

Ako sa matematika vyučuje, to je vo veľkej miere v rukách učiteľa. Preto je potrebné u budúcich učiteľov „rozvíjať tri oblasti: porozumenie matematike, zvládnutie matematického remesla a aplikovanie matematiky v praxi.“ (Brincková, Haviar, Klenovčan, 2005. s. 83)

LITERATÚRA

- [1] Beaton, A. E. et al.: *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study*. [online] http://pirls.bc.edu/timss1995i/TIMSSPDF/C_full.pdf - timss 1995
- [2] Brincková, J. – Haviar, M. – Klenovčan, P.: Príprava učiteľov matematiky na PF UMB z pohľadu medzinárodnej spolupráce. In *História, súčasnosť a perspektívy učiteľského vzdelávania. Zborník príspevkov z medzinárodnej konferencie. 2. diel.* Banská Bystrica: PF UMB, 2004. s. 83 – 85. ISBN 80-8083-107-6.
- [3] Jelemenská, P.: *Výkony žiakov 4. ročníka základnej školy v matematike a v prírodovedných predmetoch. Národná správa z merania TIMSS 2007.* Bratislava: ŠPÚ a Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania, 2009. ISBN 978-80-89225-44-6.
- [4] Koršňáková, P. – Kováčová, J.: *Národná správa OECD PISA SK 2006.* Bratislava: ŠPÚ, 2007. ISBN 978-80-89225-37-8.
- [5] Kubáček, Z. a kol.: *PISA SK 2003. Matematická gramotnosť. Správa.* Bratislava: ŠPÚ, 2004. ISBN 80-85756-88-9.
- [6] Kuraj, J. – Kurajová Stopková, J.: *TIMSS 2003 – Trendy v medzinárodnom výskume matematiky a prírodovedných predmetov. Národná správa.* Bratislava: ŠPÚ, 2006. ISBN 80-89225-22-5.

- [7] Mokriš, M.: Elektronicky podporované vzdelávanie elementaristov. In *Matematika v škole dnes a zajtra. Zborník 7. ročníka konferencie s medzinárodnou účasťou*. Ružomberok: PF KU, 2007. s. 205 – 208. ISBN 978-80-8084-187-4.
- [8] Mullis, I.V.S. et al.: *TIMSS 1999 International Mathematics Report*. [online] http://pirls.bc.edu/timss1999i/pdf/T99i_Math_All.pdf
- [9] Prídavková, A.: Matematická úloha ako prostriedok rozvoja poznávacích funkcií. In *Acta Paedagogicae. Annus III. Prešov – Olomouc*. Prešov: PU PF, 2004. s. 132 – 141. ISBN 80-8068-254-2.
- [10] Šimčíková, E.: Matematické kompetencie začínajúceho učiteľa – elementaristu. In *Matematika 2. Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí*. Olomouc: UP, 2006. s. 262 – 266. ISBN 80-244-1311-6.
- [11] Tomková, B.: Problémy učiteľov elementaristov pri rozvíjaní matematických predstáv. In *Matematika 2. Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí*. Olomouc: UP, 2006. s. 267 – 271. ISBN 80-244-1311-6.
- [12] Tóthová, M.: *Vyučovanie matematiky v I. ročníku ZŠ v kontexte štátneho vzdelávacieho programu. Diplomová práca*. Prešov: PU PF, 2010.
- [13] Vašutová, A.: *Úloha ako prostriedok na rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov mladšieho školského veku*. In *DIDZA 7. Zborník príspevkov z konferencie, Žilina, 17. jún 2010*. Žilina: ŽU, FPV, 2010. ISBN 978-80-554-0216-1.
- [14] Zeľová, V.: Projekt „Matematika pre život“ ako jedna z možností rozvíjania matematickej gramotnosti 10-ročných žiakov. In *Matematika 3. Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí*. Olomouc: UP, 2008. s. 289 – 293. ISBN 978-80-244-1963-3.
- [15] *Štátny vzdelávací program. Matematika. Príloha ISCED 1. 2. upravená verzia pre 1. až 4. ročník ZŠ*. Bratislava: ŠPÚ, 2009.

doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita
17. novembra 15
SK – 081 16 Prešov
e-mail: scholtzi@unipo.sk

VYUČOVANIE MATEMATIKY V DRUHOM STUPNI ŠTÚDIA NA FAKULTE PEDAS ŽILINSKEJ UNIVERZITY V ŽILINE

MILAN STACHO, MÁRIA BRANICKÁ

ABSTRACT. Recently, the curriculum of many universities in Slovakia has undergone significant changes. These changes can also be seen in the teaching process at the faculty PEDAS of the University of Žilina. This phenomenon has started to affect mathematical subjects at second cycle degree programmes. In this contribution, we tried to map this situation and highlight possible problems and risks involved.

1. Úvod

Vo výučbe matematiky sa pravidelne zaoberáme úrovňou vedomostí prichádzajúcich študentov v snahe prispôbovať vyučovacie metódy [3] a čerpáme aj z poznatkov kolegov z iných fakúlt našej univerzity, napr. [5]. Vzhľadom k zvyšujúcemu sa podielu študentov vysokých škôl (70% maturantov) úroveň vedomostí v poslednom období poklesla. Tento trend sa prejavuje hlavne u tzv. neatraktívnych študijných programov, t.j. u takých, kde záujem o štúdium na našej fakulte je 1,5 až 2,5 krát väčší, ako sú možnosti prijatia na daný študijný program. Naopak v študijnom programe Ekonomika a manažment podniku, kde záujem o štúdium presahuje 9 až 10 násobok možností fakulty, je badateľne vyššia úroveň vedomostí prichádzajúcich študentov.

V roku 2009 fakulte PEDAS bola schválená komplexná akreditácia, ktorá postihla výraznými zmenami aj vyučovanie matematických predmetov [4], [6]. V prvom stupni vysokoškolského štúdia bol čiastočne menený rozsah matematických predmetov, no v druhom stupni vysokoškolského štúdia bol menený aj obsah s vylúčením matematickej analýzy a obmedzením pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Keďže prijímanie študentov do 2. stupňa štúdia (inžinierske štúdium) je vo väčšine študijných programoch formálita bez potrebnej selekcie, nemôžeme očakávať výrazné zvýšenie vedomostnej úrovne študentov v tomto stupni štúdia.

2. Príprava študentov v 1. stupni štúdia

V tomto stupni štúdia je rozsah výučby matematiky 2-4 (t.j. 2 hodiny prednášok a 4 hodiny cvičení týždenne) v zimnom semestri a 2-4 v letnom semestri, čo za semester predstavuje 52 hodín prednášok (o 26 hodín menej ako v predchádzajúcom období) a 104 hodín cvičení (o 13 hodín viac). V zimnom semestri sú to základy lineárnej algebry, riešenie systémov lineárnych rovníc a diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej. V letnom semestri sa vyučuje integrálny počet funkcie jednej reálnej premennej, základy funkcie viac (spravidla dvoch) premenných, diferenciálne rovnice prvého rádu a druhého rádu s konštantnými koeficientami, základy teórie pravdepodobnosti a matematická štatistika. Už z pomeru obsahu a rozsahu je zrejmé, že teória sa môže budovať len v obmedzenom rozsahu. Viac matematiky vo výučbe bakalára sa nepredpokladá s výnimkou študijného programu Elektronický obchod a manažment, kde

je zaradený výberový predmet Finančná a poisťovacia matematika, a študijného programu Poštové a telekomunikačné služby s povinnými predmetmi Teória grafov s rozsahom 2-2 a lineárne programovanie s rozsahom taktiež 2-2.

2. Obsah výučby v 2. stupni štúdia

V inžinierskom stupni vo väčšine študijných programov bol po akreditácii predmet Matematika 3 zrušený. V tomto predmete obsahom výučby boli viacrozmerné integrály, náhodný premenná a testovanie štatistických hypotéz. Zaradený bol predmet Operačná analýza 1 (OA1) v zimnom semestri v rozsahu 3-3 a Operačná analýza 2 (OA2) v letnom semestri v rozsahu 2-2. Spolu je to 65 hodín prednášok (celkovo o 26 hodín menej) a 65 hodín cvičení (celkovo o 13 hodín menej). V študijnom programe Manažment a ekonomika podniku sa v inžinierskom stupni vyučuje len povinný predmet Finančná a poisťovacia matematika rozsahu 3-2. V predmete OA1 sú obsahom základy lineárneho programovania, simplexová metóda a základy teórie grafov. V predmete OA2 sú aplikácie teórie grafov, toky v sieťach, dopravné úlohy, základy teórie hromadnej obsluhy a teória zásob. Tieto predmety nahradil predmet Teórie grafov a predmet Operačná analýza, ktorej obsahom bolo lineárne programovanie; teda pribudla len teória hromadnej obsluhy a teória zásob. Študijný program Poštové inžinierstvo obsahuje predmet Pravdepodobnosť a matematická štatistika rozsahu 3-2 a Teória hromadnej obsluhy s rozsahom 2-2. Na tomto študijnom programe nedošlo po komplexnej akreditácii k zásadným zmenám vo výučbe matematických predmetov.

Poznamenávame, že uvedené zmeny v obsahu vyučovaných predmetov vznikli najmä z požiadaviek profilových katedier, ktoré garantujú dané študijné programy.

3. Problémy

Rozsah a obsah štúdia matematiky schválený akreditačnou komisiou je samozrejme záväzný. I keď do prípravy študijných programov sú matematici našej fakulty zapojení, rozhodujúce a konečné slovo majú garanti študijných programov. Neustály trend znižovania rozsahu štúdia teoretického základu, aj keď s miernym navýšením aplikácií, nemôže pozitívne vplývať na všeobecné znalosti budúceho inžiniera. Dvojročný odstup základného kurzu matematickej analýzy, pravdepodobnosti a štatistiky nie je najvhodnejším modelom vzdelávania budúceho inžiniera. V predmetoch OA 1 a OA 2 sú potrebné znalosti z lineárnej algebry, diferenciálneho a integrálneho počtu, ale aj pravdepodobnosti a štatistiky. Niektoré metódy systémov hromadnej obsluhy majú ako nástroj na riešenie systémy diferenciálnych rovníc a preto nemôžu byť zahrnuté do teoretického základu tejto disciplíny, alebo sú uvádzané len informatívne. Takisto sa v 1. stupni štúdia nepreberá problematika testovania štatistických hypotéz.

Keď príslušný garant študijného programu vyhlási, že potrebuje „len“ chí kvadrát test zhody a systém hromadnej obsluhy M/M/1 s odmietaním, matematik musí dbať na to, aby tieto vedomosti boli podložené primeraným teoretickým základom, t.j. nemôžeme dopustiť, aby sa matematika dostávala na úroveň „kuchárskej knihy“. V súvislosti s rozvojom informačných technológií by bolo potrebné viac pozornosti venovať aj diskkrétnej matematike. Pre rozšírenie pohľadu inžiniera na matematické metódy je treba venovať určitý priestor aj teórii zložitosti. Napríklad veľmi často sa stretávame u inžinierov s mylným názorom, že ak bude počítač pracovať dostatočne dlho, vypočíta

nám presne všetko, čo chceme. Táto problematika je často obchádzaná, alebo podávaná zložito, i keď prílišné zjednodušovanie taktiež nie je najvhodnejší postup.

4. Záver

V súvislosti s nedávnou školskou reformou sa objavila aj tendencia obmedziť rozsah matematického vzdelávania už od základnej školy. Tým je samozrejme postihnutý aj obsah. V tomto článku sme sa pokúsili mapovať vznikajúcu situáciu a upozorniť na možné riziká a problémy. Chceli sme poukázať hlavne na súvisiace problémy, ktoré negatívne ovplyvňujú vzdelávací proces na vysokých školách, najmä u predmetov technického charakteru. K týmto patrí taktiež zaznamenaný pokles vzdelanostnej úrovne matematiky na základných a stredných školách, ako je napríklad možné vidieť z podpriemerných výkonov žiakov základných a stredných škôl v medzinárodných porovnaniach vzdelávacích výsledkov žiakov krajín OECD v projektoch PISA. V tomto kontexte je vhodné taktiež pripomenúť aj to, že dve z kľúčových kompetencií, ktorými Európska komisia charakterizuje požiadavky na vzdelanie, sú matematické myslenie a informatické zručnosti. Bezpochyby je nevyhnutná kvantitatívna i kvalitatívna revízia nášho súčasného obsahu vzdelávania, ale len bezhlavo obmedziť matematiku iste nie je rozumné.

Na znižovanie obsahu matematického vzdelávania inžinierov bolo už upozorňované posledné dve desaťročia. Tieto upozornenia formou príspevkov na konferenciách učiteľov matematiky sú dosť časté a niekedy aj primerane „ostré“, pozri napr. [1], [2]. S rozvojom informačných technológií sa zdanlivo potláča význam matematického vzdelávania inžinierov. V tomto ohľade je potrebný aj aktívnejší prístup nás, učiteľov, hlavne garantov matematických predmetov.

Argumenty, ktoré pravidelne odznievajú na konferenciách o vyučovaní matematiky na vysokých školách, by sa mali častejšie prezentovať aj nematematikom, najmä tým, ktorí o matematike často rozhodujú.

LITERATÚRA

- [1] Bálint, V. *Stav vyučovania matematiky na technikách*. Sborník 3. konferencie o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Vojenská akademie Brno 2003, str. 29-30, ISBN 80-85960-51-6
- [2] Bálint, V. *Inžinier a jeho matematická príprava*. Sborník 27. konferencie VŠTEZ Matematika v inženýrském vzdelávání Hejnice 2002, str. 7-12, ISBN 80-7015-864-6.
- [3] Branická, M.; Guttenová, D.; Stacho, M.; Vojteková, M. *Úroveň vedomostí z matematiky a ich ďalší vplyv na štúdium na fakulte PEDaS* Zborník príspevkov: Žilinská didaktická konferencia, 2005, ŽU vydavateľstvo EDIS, 2005, ISBN 80-8070—430-9
- [4] Stacho, M., Branická, M., *Nové trendy vo vyučovaní matematiky na fakulte PEDAS Žilinskej Univerzity v Žiline* 6. konferencie o matematice a fyzice na vysokých školách technických : s mezinárodní účastí : sborník příspěvků : Brno, 10. září 2009. Část 2. - Brno: Univerzita obrany, 2009. ISBN 978-80-7231-667-0.
- [5] Stachová, D.: *Príčiny problémov pri výučbe geometrie na VŠ technického zamerania*, In: Acta mathematica 11 : zborník zo VI. nitrianskej matematickej konferencie

organizovanej Katedrou matematiky dňa 18. septembra 2008. - V Nitre: Fakulta prírodných vied UKF, 2008. - ISBN 978-80-8094-396-7.

- [6] *Študijné programy Žilinskej univerzity v Žiline*
<http://vzdelavanie.uniza.sk/vzdelavanie/plany.php>

RNDr. Milan Stacho, PhD.

Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky

Fakulta PEDAS

Žilinská Univerzita v Žiline

Univerzitná 1

SK – 010 26 Žilina

e-mail: Milan.Stacho@fpedas.uniza.sk

RNDr. Mária Branická, PhD.

Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky

Fakulta PEDAS

Žilinská Univerzita v Žiline

Univerzitná 1

SK – 010 26 Žilina

e-mail: Maria.Branicka@fpedas.uniza.sk

GEOMETRICKÁ GRAMOTNOSŤ ŠTUDENTOV VŠ TECHNICKÉHO ZAMERANIA

DARINA STACHOVÁ

ABSTRACT. In the contribution, we discuss the decline in the amount of geometry classes in secondary schools and results of an entrance test from geometry undertaken by first-year students of the Faculty of Special Engineering of the University of Žilina in Žilina.

1 Úvod

V posledných rokoch prevažuje na základných a stredných školách trend vyučovať matematiku, a tým aj geometriu, spôsobom, ktorý je štandardný pre vzdelávanie na vysokých školách. Inštruktívny prístup v čoraz väčšej miere vytláča z vyučovania prístup konštruktívny. Vedúca je snaha o úplnú systematizáciu, o budovanie matematických teórií od základov, ktoré sa bez nadhľadu a hlbšieho porozumenia stávajú samoúčelné. Vytráca sa nielen praktický význam, ale aj porozumenie v širších súvislostiach a schopnosť použiteľnosti poznatku v odlišných súvislostiach a situáciách. Nepochopenie podstaty matematického problému potom núti žiakov naučiť sa riešiť úlohy schematicky.

2 Úroveň vstupných geometrických poznatkov študentov VŠ technického zamerania

Klesajúcu úroveň geometrických poznatkov absolventov stredných škôl potvrdí pravdepodobne každý učiteľ geometrie na vysokej škole technického zamerania [1]. Napriek tomu, že nikto nespochybňuje dôležitosť dobre rozvinutej priestorovej predstavivosti pre strojníkov a stavebných odborníkov, sa výučbe stereometrie na stredných školách venuje slabá pozornosť, čoho obrazom je aj alarmujúci rozsah a hĺbka nevedomostí študentov pri nástupe na vysokú školu. Znepokojujúce je predovšetkým to, že sa tento dlhotrvajúci trend v posledných rokoch veľmi zrýchľuje a dochádza k tomu, že sa výrazne znižuje počet študentov, ktorí sú po stránke geometrickej pripravení na štúdium na vysokej škole technickej. Prieskum tohto javu sme vykonali na troch fakultách a jeho výsledky opisujeme v tabuľke č. 1.

Fakulta	Počet oslovených študentov	Počet študentov, ktorí absolvovali výučbu v TK, DG, IG na strednej škole	%
FŠI	128	25	19,53
PEDAS	315	83	26,35
SvF	166	60	36,14

Tabuľka 1: percentuálny podiel študentov 1. ročníka, ktorí absolvovali geometrickú výučbu na SŠ

Úroveň vstupných poznatkov študentov vysokých škôl technického zamerania je v geometrii v mnohom odlišnejšia než v matematike, lebo vo výučbe geometrie, najmä stereometrie, sú na stredných a základných školách veľké rozdiely. Vyplývajú nielen z ich učebných plánov, ale aj z toho, že v prijímacom konaní ako na stredné, tak na vysoké školy

sú zo stereometrických úloh zaraďované hlavne výpočtové úlohy, najskôr z dôvodu, že ich možno ľahko opravovať. Navyše sa predpokladá ďalší pokles vedomostí (z matematiky), pretože v súčasnosti si učebné osnovy čiastočne tvoria základné a stredné školy samy, a tak sa rozdiely v úrovni vedomostí z geometrie môžu ešte zväčšiť.

3 Test úrovne vstupných geometrických poznatkov študentov VŠ

V prvom týždni semestra sme vykonali vstupnú previerku poslucháčov 1. ročníka na Fakulte špeciálneho inžinierstva Žilinskej univerzity v Žiline na predmete inžinierska geometria. Zúčastnilo sa jej 179 študentov. Ich kategorizáciu na základe typu absolvovanej strednej školy a ich poslednej známky z matematiky sumarizujeme v tabuľke č. 2.

Typ školy Známka	OA	Gymnázium	SOŠ	SOU
1	4	18	4	9
2	19	20	14	5
3	9	28	28	3
4	0	8	9	1
Spolu	32	74	55	18
Priemerná známka	2,16	2,35	2,76	1,78

Tabuľka 2: priemerné známky z matematiky získané na SŠ u testovaných študentov

Jednotlivé úlohy testu boli zamerané na tieto okruhy poznatkov³:

1. stredná priečka trojuholníka, obsahy podobných rovinných útvarov,
2. Talesova veta,
3. telesová uhlopriečka kvádra, pomery dĺžok hrán,
4. konštrukčná úloha o trojuholníku, obsah trojuholníka,
5. stredový a obvodový uhol,
6. Euklidove vety,
7. ťažnica rovnostranného trojuholníka, Pytagorova veta,
8. obsah lichobežníka, rozklad n-uholníka na trojuholníky,
9. množina bodov danej vlastnosti, os úsečky,
10. rez kocky, vlastnosti rovnobežných rovín,
11. sieť telesa, objem telesa,
12. sieť telesa, rekonštrukcia tvaru telesa,
13. vety o zhodnosti trojuholníkov,
14. rekonštrukcia telesa z troch daných priemetov.

Test bol zostavený z úloh tak z planimetrie, ktorá je do učebných plánov gymnázia zaradená do prvého ročníka v rozsahu 20 vyučovacích hodín a do druhého ročníka v rozsahu 40 vyučovacích hodín, ako aj zo stereometrie, ktorá v druhom. ročníku predstavuje 20 a v treťom 25 vyučovacích hodín. Z toho možno vidieť, že geometria na gymnáziách tvorí 23,2% z celkového objemu vyučovacích hodín matematiky. Na

³ Text testu v plnom znení uvádzame v prílohe A.

stredných odborných školách sa vyučovaniu matematiky necháva menší priestor v porovnaní s gymnázium a podobne je to aj s vyučovaním geometrie. Pomer počtu vyučovacích hodín venovaných planimetrii a stereometrii je však približne rovnaký, teda 3:2. V takomto pomere sú zastúpené aj tematické celky vyskytujúce sa vo vstupnom teste.

Úlohy tvoriace test možno začleniť do skupín podľa spôsobu ich riešenia na:

- a) teoretické (6, 13)
- b) výpočtové (1, 5, 7, 11)
- c) konštrukčné (9, 10)
- d) úsudkové (12, 14)
- e) kombinované (2, 3, 4, 8)

Pod pojmom kombinované úlohy rozumieme, že na vyriešenie úlohy je potrebné použiť výpočtové aj konštrukčné postupy. Za úsudkové úlohy považujeme také, ktoré sú riešené využitím teoretických poznatkov a priestorovej predstavivosti.

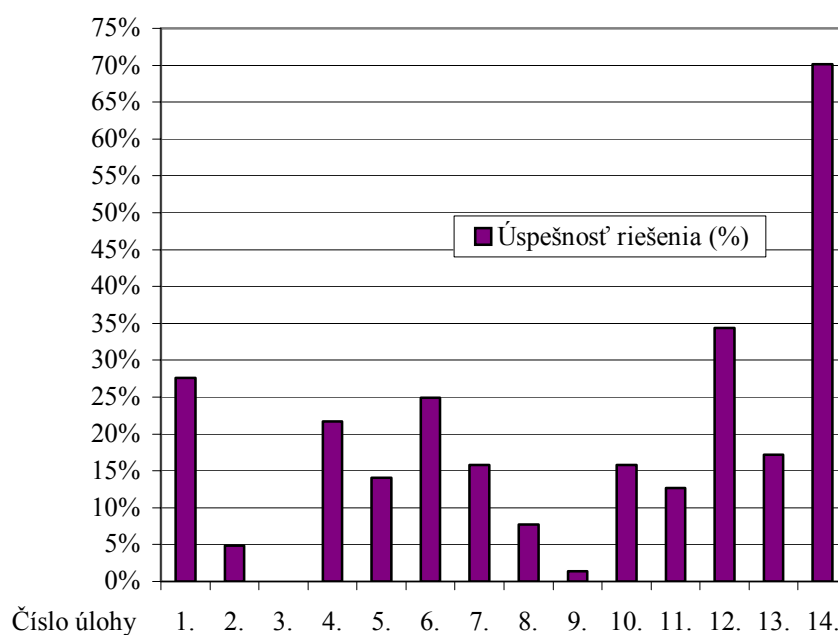
Na testovanie úrovne poznatkov z planimetrie boli zvolené úlohy 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, na testovanie úrovne zo stereometrie úlohy 2, 3, 10, 11, 12, 14. Úspešnosť riešenia úloh testu je opísaná v tabuľke č. 3 a pre porovnanie zobrazená aj v grafe č. 1.

Úspešnosť riešenia teoretických úloh je v prvom rade závislá od kvality teoretických poznatkov a tiež od uvedomelého čítania textu – tzv. čítania s porozumením. V priemere len 21% poslucháčov tieto úlohy vyriešilo správne. To znamená, že prevažná väčšina číta text bez porozumenia a tiež, že úroveň základných poznatkov je nízka.

Medzi výpočtové úlohy boli vybrané úlohy s konkrétnymi číselnými hodnotami, keďže skúsenosti nasvedčujú, že úlohy s parametrom vyžadujú formuláciu všeobecného riešenia a diskusiu o riešiteľnosti a počte riešení, čo hlavne u absolventov škôl odlišného typu, ako sú gymnáziá, predstavuje častejšie problémy, a tak by test neposkytol adekvátne výsledky. Táto skupina úloh bola poslucháčmi vyriešená správne v 17,5% prípadov.

Poradové číslo úlohy	Úspešnosť riešenia (%)
1.	27,60
2.	4,90
3.	0,00
4.	21,70
5.	14,03
6.	24,89
7.	15,83
8.	7,69
9.	1,36
10.	15,83
11.	12,67
12.	34,39
13.	17,19
14.	70,14

Tabuľka 3: vyhodnotenie úspešnosti riešenia testu po jednotlivých úlohách



Graf 1: grafické znázornenie úspešnosti riešenia testu

Konštrukčné úlohy boli zamerané na množiny bodov danej vlastnosti a rez na telese a 8,5% úspešnosť úloh tohto typu je zarážajúco nízka. Výsledky v riešení úsudkových úloh, ktoré dosiahli priemernú úspešnosť 53%, sú v porovnaní s ostatnými typmi úloh najlepšie.

Úlohy kombinovaného typu boli riešené s priemernou úspešnosťou 8,5%. Tu sa rovnako ako v konštrukčných úlohách prejavili nedostatky prameniace buď z neskúsenosti s riešením úloh takéhoto typu, alebo z iných dôvodov. Percento úspešnosti nasvedčuje o nerozvinutosti konštrukčného myslenia a o nízkej úrovni priestorovej predstavivosti, ale tiež aj o nízkej úrovni grafického prejavu maturantov. To sa podpísalo aj na výbere riešených úloh u poslucháčov, či už bol alebo nebol dosiahnutý správny záver. Úlohy nevyžadujúce grafický prejav – teoretické, úsudkové – boli vo vypracovaných testoch riešené vo väčšej miere ako ostatné. Taktiež úlohy z planimetrie, pri ktorých riešení nie je nutná priestorová predstavivosť, či už intuitívna alebo geometrická, boli riešiteľmi preferované viac než úlohy zo stereometrie. Naopak úlohám č. 2, 3, 10 zo stereometrie sa venoval len malý počet poslucháčov.

Prekvapujúcim zistením po vyhodnotení je to, že až 9,95% poslucháčov nevyriešilo správne ani jednu úlohu testu.

4 Záver

Pod významom pojmu gramotnosť sa zvyčajne rozumie schopnosť čítať a písať. Avšak pojem gramotnosť používame taktiež v mnohých iných kontextoch. Kompetencie žiakov samostatne pracovať s údajmi, ich schopnosť samostatne používať nástroje matematiky k riešeniu reálnych situácií z praktického života sú považované za významný prejav matematickej gramotnosti. Naopak geometrická gramotnosť sa prejavuje schopnosťou priestorovej predstavivosti, konštrukčným myslením a grafickým prejavom.

Z porovnania tabuľky č.2 a č.3 vyplýva, že o štúdium na VŠ technického zamerania sa zaujímajú študenti s dobrými známami, ale s nízkou geometrickou gramotnosťou. Predpoklad, že už na strednej škole získava maturant z geometrie solídne základy, na ktorých stavia v štúdiu na vysokej škole, sa ukazuje byť nereálny. Výsledky testu vypovedajú, že geometrické vedomosti u maturantov sú nedostatočné a veľmi formálne, nepochopené pojmy im robia problémy pri riešení úloh z planimetrie, neuspokojivá úroveň priestorovej predstavivosti im tvorí bariéru v snahe riešiť úlohy zo stereometrie, prevažne nízka úroveň grafického prejavu ich napokon zvádza k nesprávnym záverom. Prejavuje sa to buď v nesprávnom vyriešení, alebo vo vyhýbaní sa riešeniu najmä úloh zo stereometrie. Navyše test, ktorý sme vykonali na študentoch 1. ročníka VŠ, nám prezrádza tú skutočnosť, že vzhľadom na v posledných rokoch uplatňovanú formu maturitnej skúšky sa predmaturitná príprava sústreďuje na nácvik vyplňovania formulárov a konštruktívne riešenie úloh sa takto dostáva na vedľajšiu koľaj.

Pri náprave uvedeného stavu sa zrejme nemožno spoliehať na dobrovoľnosť a samostatnosť študentov v štúdiu, hlavne ak im chýba vhodná motivácia. Pre prvákov ani nie jednoduché dopĺňať si chýbajúce vedomosti a popritom nadobúdať vedomosti nové. Je potom úlohou učiteľov vysokých škôl navyše venovať pozornosť okrem plnenia vlastného plánu vzdelávania aj dopĺňaniu vedomostí, ktoré mali byť nadobudnuté už na strednej škole, a tomuto cieľu podriadiť vlastné vyučovacie metódy. Vo všeobecnosti je známe, že vedomosti maturantov z matematiky nie sú dobré. No s geometriou sú študenti na tom ešte horšie a tento úkaz nie je záležitosťou jediného školského roka a jedinej vysokej školy na Slovensku či v susedných štátoch [2].

LITERATÚRA

- [1] Malechová, I.: Rozpory v geometrickém vzdělávání, In: XXVII international colloquium on the management of educational process, Brno, Univerzita obrany, 2009, ISBN 978-80-7231-650-2
- [2] Malechová, I.: *Malá sonda do úrovně vstupních geometrických znalostí studentů Stavební fakulty ČVUT Praha*, In: XXVIII international colloquium on the management of educational process, Brno, Univerzita obrany, 2010, ISBN 978-80-7231-722-6993
- [3] Stachová, D.: *Výučba geometrie a vysokoškolské štúdium prírodovedného a technického zamerania*, Dizertačná práca, Nitra, 2008
- [4] Šedivý, O. 2001. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky/ Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia*. Nitra: Edícia prírodovedec č. 78, 2001. ISBN 80-8050-417-2
- [5] Šedivý, O., Fulier, J. 2004. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2004. ISBN 80-8050-700-7

RNDr. Darina Stachová, PhD.

Katedra matematiky

Fakulta prírodných vied

Žilinská univerzita v Žiline

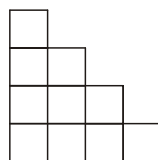
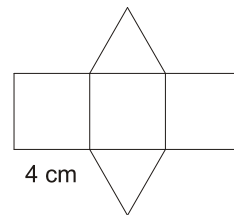
Univerzitná 1

SK – 010 26 Žilina

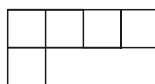
e-mail: darina.stachova@fpv.uniza.sk

Príloha A - Vstupný test

1. V trojuholníku ABC je EF stredná prieka rovnobežná so stranou AB . Obsah lichobežníka $ABFE$ je 24 cm^2 . Vypočítajte obsah trojuholníka EFC !
2. Nech S je stred hrany GH kvádra $ABCDEFGH$, v ktorom $|AB| = 30$, $|BC| = 9$. Aký vysoký je kváder, ak je trojuholník ABS pravouhlý?
3. Guľová plocha opísaná kvádru má polomer 7 cm . Obsahy stien kvádra sú v pomere $1:2:3$. Vypočítajte dĺžky hrán kvádra!
4. Aký najväčší obsah (v cm^2) môže mať trojuholník ABC , v ktorom má strana a dĺžku 7 cm a ťažnica t_a na stranu a dĺžku 16 cm ?
5. V pravidelnom 18-uholníku $A_1A_2\dots A_{18}$ určite v stupňoch veľkosť uhla $A_1A_9A_2$!
6. Výška v pravouhlého trojuholníka ABC s odvesnami a, b delí preponu c na úseky e, f . V tomto trojuholníku platí:
(A) $b^2 + v^2 = a^2$ (B) $2v^2 = c^2$ (C) $b^2 = c \cdot f$ (D) $a^2 = e \cdot f$
7. Aký polomer má najmenší kruh, ktorým možno úplne zakryť rovnostranný trojuholník so stranou dlhou 12 cm ?
8. V pravidelnom šesťuholníku $KLMNOP$ sú body A a B stredmi strán OP a MN . Akú časť obsahu šesťuholníka $KLMNOP$ tvorí obsah štvoruholníka $ABNO$?
9. Nech X je vnútorný bod štvorca $PQRS$. Znázornite množinu takých bodov X , pre ktoré je uhol PXS ostrý a zároveň platí $|XQ| \geq |XS|$!
10. Nech je daná kocka $ABCDEFGH$. Bod P leží na hrane AB , pričom $|PB| = \frac{1}{2} |PA|$ a bod Q je stred hrany HG . Čo tvorí rez tejto kocky rovinou prechádzajúcou bodmi E, P a Q ? (Vykonať konštrukciu rezu!)
11. Na obrázku je sieť telesa T pozostávajúca z troch štvorcov so stranou dĺžky 4 cm a dvoch rovnostranných trojuholníkov. Aký objem má teleso T ?
12. Jedna zo stien mnohostena má tvar päťuholníka. Aký najmenší počet stien môže mať tento mnohosten?
13. Dva trojuholníky sú zhodné, ak sa zhodujú
A) vo všetkých uhloch
B) v dvoch stranách a jednom uhle
C) v dvoch uhloch a jednej strane
D) v dvoch stranách a uhle oproti väčšej z nich
E) v dvoch stranách a uhle oproti menšej z nich
14. Na obrázkoch je istá stavba z kociek pri pohľade spredu, zhora a zľava. Koľko kociek tvorí túto stavbu?



SPREDU



ZHORA



ZĽAVA

OD VLČEJ KOSTI K FUZZY MNOŽINÁM

BEÁTA STEHLÍKOVÁ, ANNA TIRPÁKOVÁ

ABSTRACT This paper is devoted to numerical systems of antiquity. They are briefly characterized numerical systems of old cultures of the South Americas, Asia and Europe. In conclusion, it is mentioned binary system and the theory of fuzzy sets.

Úvod

Ak chceme zistiť kedy a za akých podmienok vznikali prvé matematické predstavy, musíme nazrieť hlboko do všeobecných dejín ľudstva. Zistili by sme, že matematika je tak dlho na svete ako samo ľudstvo. Prvé predstavy o číslach a geometrických útvaroch vznikli už v dobe kamennej. Domnievame sa, že v tomto období sa vynorili spolu s prvými myšlienkami aj prvé predstavy o počte vecí⁴. Zo staršej doby kamennej nepoznáme jediný zápis, ktorý by sa týkal abstraktného počtu alebo tvaru. Tisíce rokov uplynulo dovtedy, než došlo k prvým zápisom. Ani začiatky mladšej doby kamennej nám nepodávajú dôkazy o prejavoch prvých koncepcií pojmu čísla a tvaru. Ako už bolo spomenuté, z tohto obdobia neexistujú žiadne písomné pamiatky, ale nepochybne už v dobe kamennej si človek kládol otázku „koľko?“. Odpoveďou na túto otázku je *mnohosť*. Sú to prirodzené čísla a celé čísla. Mnohosť je základný fenomén matematických predstáv.

Ako sa človek vysporiadal s vyjadrením mnohosti?

Konkrétne chápanie číselného množstva už dobe kamennej človek vyjadroval mnohosť pomocou zárezov na paliciach, kostiach, pomocou uzlov, neskôr usporiadaných do skupín. Známa je vlčia kosť, dlhá približne 18 cm, stará asi 10 000 - 30 000 rokov, nájdená v roku 1936 vo Věstoniciach na Morave, s 55 zárezmi, pričom prvých 25 zárezov je usporiadaných do skupín po piatich (Obr. 1).



Obrázok 1: Vlčia kosť z Věstonic na Morave, Zdroj: Šedivý, O., Fulier, J. [6]

Od zoskupovania značiek bol už len krôčik k utvoreniu osobitného znaku – čísla pre celú skupinu. Čísla mali spočiatku skôr kvalitatívny charakter. Slúžili na rozlíšenie veľkosti skupín nahromadených predmetov. Praktické potreby každodenného života si však okrem iného vynútili aj rozvoj matematického myslenia. Charakter zápisu čísla podstatne ovplyvňoval možnosti rozvoja aritmetiky. V historickom vývoji číselnej sústavy môžeme pozorovať dve fázy:

- už spomínané vnímanie množstva, zápis množstva na základe bijekcie medzi množstvom objektov a značiek;

⁴ Táto problematika je podrobne študovaná v [6]

- zefektívnenie zápisu a tvorba systému – *číselnej sústavy*.

Proces tvorby v súčasnosti používanej desiatkovej sústavy trval tisícročia a mal množstvo „odbočiek a blúdení“.

Číselné sústavy

Číselné sústavy môžeme členiť z dvoch hľadísk:

- z hľadiska *základu sústavy* (najčastejšie používané základy sústav v histórii matematiky boli 60, 10, 5 a sústavy s viacerými základmi, napríklad päťkovo-desiatková sústava; v dnešnej dobe počítačov našla svoje uplatnenie dvojková sústava);
- z hľadiska *významu usporiadania čísel* môžeme číselné sústavy rozdeliť do dvoch veľkých skupín:
 - *pozičné sústavy*, kde záleží na poradí v akom píšeme znaky
 - *nepozičné sústavy*, kde tomu tak nie je (najčastejšie sa vyskytujú aditívne nepozičné sústavy, v ktorých namiesto skupiny znakov: / / / / píšeme napríklad písmeno H. Potom namiesto / / / / / môžeme písať H / / alebo / H / alebo / / H, pričom nie je rozhodujúce v akom poradí znak píšeme, podstatné je to, že každý znak má svoju dohodnutú hodnotu).

V histórii ľudstva sa však číselné sústavy najčastejšie nevyskytujú v čistej forme.

Matematika starých kultúr

1. Babylonská číselná sústava (1500 rokov pred n. l.)

Babylončania počítali pomocou pozičnej 60-tkovej pozičnej sústavy. Babylonská číselná sústava používala dva znaky: Y pre jednotku a < pre desiatku. Na rozlíšenie čísel 2 a 61 sa medzi znakmi robila medzera. Pri zapisovaní veľkých čísel nevytvárali nové znaky. Znak pre jednotku Y podľa veľkosti mohol predstavovať aj šesťdesiat aj tisícšesťsto. Rád čísla sa určoval z kontextu. Neskôr sa v babylonskej číselnej sústave vyskytla nula: > ako znak pre chýbajúci rad. Nepracovalo sa s ňou však dôsledne. Nikdy sa, napríklad, nevyskytla na konci zápisu. Dvoma znakmi sa pri šikovnom vytváraní skupín dalo napísať relatívne veľa čísel, pričom symbol s vyššou hodnotou bol umiestnený vždy naľavo. Členenie do riadkov šetrilo miesto, zvyšovalo prehľadnosť a navyše pôsobilo esteticky. Tabuľky na násobenie a tabuľky recipročných hodnôt, kvadratické a kubické rovnice, mocniny a odmocniny, znamienka pre odčítanie a sčítanie, rozdelenie času a uhlov a iné merné systémy, zlomky a plošné plány a napokon aj veľa praktických každodenných výpočtov sú zaznamenané klinovým písmom a vypálené v hline.

Dva číselné znaky však natrvalo nevystačovali. Vytvorila sa číselná sústava spočívajúca na základnom čísle 60 a vybudovaná na rádovom princípe – čiastočne desiatkovo-šesťdesiatková sústava s nedôsledným pozičným systémom, obsahujúca nulu s nedôsledným využívaním.

2. Čínska číselná sústava (500 rokov pred n. l.)

S najstaršími čínskymi zápismi čísel sa stretávame na magických kockách zo 14. – 11. storočia pred našim letopočtom, na keramických a bronzových predmetoch a minciach z 10. až 3. storočia pred našim letopočtom. V 3. storočí pred našim letopočtom sa v Číne používali hieroglyfické číslice. Tieto symboly sa textoch používajú dodnes. Z vedeckej literatúry ich vytlačili arabské. Od 4. storočia pred našim letopočtom, a možno aj skôr,

začali Číňania používať číslie - tyčinky. Udržali sa až do 13. storočia. Spôsob počítania pomocou číslie – tyčínok je najstaršou desiatkovou sústavou.

Jeden z najfascinujúcejších staročínskych objavov boli magické kocky. Išlo o útvar pozostávajúci z 9 čísel v tvare kocky, kde v každom riadku či stĺpci bol súčet čísel rovnaký (Obr. 2)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obrázok 2: Magický štvorec, Zdroj: Gunčaga, J. [3]

Číňania vedeli dokonca vypočítať aj zatmenie Slnka v roku 2700 p.n.l. Jednou z najznámejších čínskych matematických pomôcok sa stal Abakus. Tvoril ho drevený alebo hlinený rám, v ňom na bambusových tyčiach malé kamienky, dodnes známe ako kalkuly. Abakus sa v Číne používa dodnes. V čínskej číselnej sústave chýbal znak pre nulu. Vzhľadom na to, že výpočty sa robili na abaku, kde nevedelo, že neexistuje znak pre nulu, absencia nuly nespôsobovala ťažkosti. Odpovedajúce siesto zostávala jednoducho prázdne. Symbol nuly bol jednoducho prenesený zvonka.

Abakus však nepoužívali len Číňania. Bol rozšírený od Číny cez Indiu, Mezopotámiu až po Egypt. Každá z týchto krajín si abakus prispôbovala podľa vlastných potrieb a preto dnes poznáme asi 9 typov tohto nástroja, vrátane toho dnešného.

3. Grécka číselná sústava (400 rokov pred n. l.)

V starom Grécku (10. – 1. storočie pred n. l.) používali herodiánsku symboliku. Bola to rovnako egyptská, nepozičná aditívna sústava (Tab. 1.).

1	5	10	50	100	500	1000	5000
ι	π	Δ	⏊	Η	⏊	×	⏊

Tabuľka 1: Starogrécka herodiánska číselná sústava, Zdroj: Šedivý, O., Fulier, J. [6]

Starogrécka herodiánska sústava neskôr ustúpila abecednému zápisu čísel, ktorý sa pod fenickým vplyvom dostal z Orientu do gréckych osád Malej Ázie. V Grécku sa ujal aj jónsky systém. Jónsky spôsob číselnej sústavy sa rozšíril spolu s gréckym vplyvom v Byzantskej ríši, odkiaľ prenikol aj do východnej Európy. Podľa vzoru jónskej číselnej sústavy vznikli aj slovanské číslie.

4. Egyptská číselná sústava (3000 rokov pred n. l.)

Typickou predstaviteľkou aditívnej nepozičnej sústavy je egyptská číselná sústava. Egypťania používali desiatkovú sústavu, ale nebola to pozičná sústava, mali pre čísla 1, 10, 100, 1000, 10000 a 1000 000 vlastné symboly ako to vidíme v tabuľke symbolov egyptských čísel (Tab.2).

1	10	100	1000	10 000	100 000	1000 000
ι	∩	ϡ	ϩ	ϩ	ϩ	ϩ

palica päťová kost' povraz na meranie lotosový ukazovák žubrienka Boh (Heh)
polí kvet

Tabuľka 2: Symboly egyptských čísel, Zdroj: Šedivý, O., Fulier, J. [6]

Egyptania vedeli vypočítať aj výšku pyramídy veľmi zložitou metódou delenia a násobenia. Vedeli aj pomerne presne vypočítať obsah kruhu. Od priemeru odrátali $1/9$ a toto číslo umocnili na druhú a dostali by 64. To by znamenalo že hodnota egyptského π bola 3,1604, čo nie je od toho nášho 3,1416 až taká veľká odchýlka. Na meranie dĺžok používali lakeť. Boli však dva druhy lakťa: malý a kráľovský. Ten kráľovský bol pochopiteľne dlhší a delil sa na 7 piadi alebo 28 palcov. Malý lakeť sa delil na 6 piadi alebo 24 palcov. Egyptania mali aj symbol pre nekonečno: . Zápisy pomocou Egyptskej číselnej sústavy sú zdĺhavé, ale umožňovali pohodlné sčítavanie a odčítavanie. Horšie to bolo s násobením: ak chceli Egyptania niečo vynásobiť, číslo najskôr násobili po kúskoch. Tento systém sa im však nepáčil, zdal sa im moc fádny a nevznešený, preto vynali novy, pri ktorom každé číslo malo svoju hieroglyfickú podobizeň. Týchto čísel bolo 1000.

Egyptské obrázkové písmo, hoci podliehalo zmenám, malo po tisícročia aj v matematike rozhodujúcu úlohu a nahradilo ho až koptické písmo.

5. Rímska číselná sústava (200 rokov pred n. l.)

Známa rímska sústava je aditívno-subtraktívna (Tab. 3).

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	V	X	L	C	D	M	V	X

Zdroj: Šedivý, O., Fulier, J. [6]

Tabuľka 3: Rímska číselná sústava

V rímskej číselnej sústave IV znamená iné ako VI. Snaha o skrátenie zápisu pomocou subtraktívnosti ($IV = V - 1$; $VI = V + 1$) narušila čistotu systému. Dosiahol sa síce skrátený zápis, ale výpočtové možnosti sa zhoršili. Symboly boli zapisované od najväčšieho po najmenšie zľava doprava. Hodnota čísla bola súčtom hodnôt všetkých symbolov. Keď Rimania zapisovali čísla 4, 9, 40, 90, 400 alebo 900 používali systém odcitovania. Napríklad $XC = 100 - 10 = 90$, $CD = 500 - 10 = 40$ a pod. Uvedieme príklad zápisu čísla v rímskej číselnej sústave: počet narodených detí v apríli bol MMMCCLXXXIII (8283) a v máji MMMDCCCLXXVII (8877). V Európe sa rímska číselná sústava používala až do 16. storočia.

6. Číselná sústava Mayov (300 rokov pred n. l.)

Mayovia na rozdiel od Egyptanov používali pre čísla väčšie ako 19 pozičnú dvadsiatkovú sústavu, pričom čísla od 1 do 19 zapisovali v nepozičnej päťkovej sústave. Pozície boli zhora nadol, existovali v nich určité nepravidelnosti (Tab. 4).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
•	••	•••	••••	—	• —	•• —	••• —	•••• —	==	• ==

Zdroj: Gunčaga, J. [3]

Tabuľka 4: Číselná sústava Mayov

Nula mala zvláštny znak: .

7. Číselná sústava Inkov

Inkovia používali namiesto písma povrazy s uzlami, tzv. quipu. Výpočty robili na abakusoch a výsledky preniesli na quipu. Záznamy robili v desiatkovej pozičnej sústave. Hodnotu jedna mal uzol najvzdialenejší od hlavného motúza, ďalší mal hodnotu 10, nasledujúci hodnotu 100 atď. nulu predstavoval chýbajúci uzol.

8. Indická číselná sústava

Najstarší výskyt homogénnej pozičnej sústavy spadá do 6. až 8. storočia pred našim letopočtom. Je ňou desiatková indická sústava. Do vzniku pozičnej sústavy sa v Indii objavili rôzne číselné sústavy, ktoré postupne zanikli. Od 4. storočia pred n. l. do 3. storočia pred n. l. sa používali číslice *kharóṣṭhi*. Bola to nepozičná desiatková sústava so zvláštnymi znakmi pre 1, 4, 10, 20 a 100. Vyšší stupeň bolo počítanie *bráhmī*. Používalo sa viac ako 1000 rokov (do konca 19. storočia). V 8. storočí bola desiatková sústava založená na pozičnom princípe a skladala sa z deviatich číslic od 1 po 9 a nuly. Koncom 8. storočia sa indický číselný zápis stal známym v Bagdade a arabskí matematici rýchle ocenili prednosti počítania s indickými číslicami. Prvá známa práca, v ktorej je vysvetlená desiatková pozičná sústava a sú objasnené aritmetické operácie je AL Chwármího traktát (asi 825 strán).

K rozšíreniu indickej desiatkovej sústavy do Európy prispeli Arabi. Po nich boli pomenované číslice – arabské. Arabské číslice prenikli do Európy v polovici 10. storočia a trvalo viac ako 600 rokov, kým ich ľudia v Európe začali bežne používať. Medzi matematikmi sa ich používanie rozšírilo oveľa skôr. Už v roku 1202 Fibonacci v knihe *Liber abaci* propagoval výhody počítania v desiatkovej sústave. Naproti tomu skoro o sto rokov (1299) však mali kupci vo Florencii zakázané v účtovníctve používať nové číslice a bolo im doporučené písať čísla slovami. Nové číslice sa v Európe začali používať bez nuly. Symbol pre nulu v tvare krúžku sa začal používať neskôr. Nad číslami sa robili bodky, ktorých počet zodpovedal rádu číslice. Zapadoarabské číslice sa používajú dodnes v Maroku.

Dvojková sústava

Vznik a rozvoj počítačov dal „zelenú“ využívaniu dvojkovej číselnej sústavy. Dvojková sústava obsahuje iba dve čísla: 0 a 1. Tieto sú reprezentované fyzikálnymi stavmi prvkov počítača.

Fuzzy množiny

Zdalo by sa, že pri dvojkovej sústave zastaneme. Ale nie je tomu tak. Ak si uvedomíme, že počítač pozná iba nuly a jednotky a teda niečo je pravda - 1, alebo nepravda - 1. Ale ako máme povedať stroju napríklad aby vybral faktúru s nie príliš veľkou čiastkou asi v strede februára? Ako naučiť stroj rozpoznať aj pojmy *nie príliš veľká* a *asi v strede*? Na to aby počítače rozumeli aj takýmto relatívnym pojmom slúži fuzzy logika. Táto technológia vychádza z teórie fuzzy množín, ktorej základy položil profesor L. A. Zadeh (University of California, Berkley) v roku 1965. Napriek tomu svet okrem niekoľkých špecialistov nevenoval tejto teórii pozornosť. Významné pre jej ďalší rozvoj bolo jej použitie na automatické riadenie podzemnej dráhy v Sendai blízko Tokia (1987). Fuzzy regulačný systém priniesol výrazné zvýšenie bezpečnosti, pohodlia, zníženie spotreby energie či presnejšie zastavovanie na nástupištiach. Pozoruhodná výkonnosť systému bola taká pôsobivá, že v priebehu jedného roka pracovalo vývoji fuzzy

technológie viac ako 50 japonských spoločností. Už v roku 1992 bolo v Japonsku registrovaných vyše 2000 fuzzy patentov.

Záver

Ľudské myslenie, hodnotenie a rozhodovanie sa nezakladá iba na striktných hodnotách 0, 1 resp. nie, áno. Ukázalo sa, že práve teória fuzzy množín umožňuje pracovať s nejednoznačnými pojmami, často používanými v ľudskej reči.

Ak sa vrátíme k mnohosti ako základnému fenoménu matematických predstáv, práve pomocou fuzzy množín vieme popísať mnohosť, vyjadrenú slovami: veľký, málo a podobne. Môžeme teda skonštatovať, že trvalo niekoľko tisícročí, kým sme boli schopní exaktne popísať slová lovca mamutov: „Videl som niekoľko mamutov“.

Do dnešného dňa bolo napísaných nespočetné množstvo článkov o fuzzy množinách a boli aplikované v najrôznejších oblastiach nášho života od riadenia vysokých pecí po využitie zaostrenia fotoaparátov. Všade tam, kde je vyjadrenie pomocou nich prirodzenejšie. Týmto sa pred ľudstvom otvárajú nové obzory. A že je tomu tak, dokazuje aj Einsteinov výrok: „Matematika popisuje reálny svet presne. Ak niečo popisuje presne, nie je to reálny svet“.

LITERATÚRA

- [1] Čel'juska, D.: *Lahký úvod do Fuzzy*. 2000, www.kuzo.szm.com/fuzzy1.pdf
- [2] Gáborík, M., Bilka, A., Jančina, J.: *Teória čísel*. http://www.lsg.sk/www/data/01/projekty/2007_2008/innovators/teoria_cisel/teoria_cisel.doc.
- [3] Gunčaga, J.: *Iné číselné sústavy*. math.ku.sk/~guncaga/publikacie/GuncagaTrnovec.pdf
- [4] Mrázová, K.: *Matematika v antike*. <http://www.avozarm.sk/Egypt.htm>
- [5] Stehlíková, B.: *Úvod do fuzzy množín a fuzzy logiky*. SPU v Nitre, 2008, 106 s., ISBN 978-80-8069-976-5
- [6] Šedivý, O., Fulier, J.: *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. FPV UKF v Nitre, 2004, 246 s., ISBN 80-8050-700-7
- [7] *Číselné sústavy*. <http://sk.wikipedia.org/wiki/%C4%8C%C3%ADslica> [cit. 27-8-2010]

prof. RNDr. Beáta Stehlíková, CSc.
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK- 949 01 Nitra
e-mail: stehlikovab@gmail.com

prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK- 949 01 Nitra
e-mail: atirpakova@ukf.sk

POSTOJE V PRÍPRAVE ŠTUDENTOV UČITEĽSTVA MATEMATIKY - PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA

JÁN ŠUNDERLÍK

ABSTRACT. In this article we discuss the importance of beliefs as a variable in pre-service teacher education. We present one case study of Anna where we characterize Anna's beliefs about mathematics, mathematics education and how she put those beliefs in practice during her student teaching. We also describe Anna's development in implementation of innovative teaching strategies during her student teaching.

Postoje k vyučovaniu matematiky

Jednou z premenných, ktoré zohrávajú dôležitú úlohu vo vyučovaní matematiky ako aj v príprave študentov učiteľstva matematiky sú postoje. Učiteľov systém postojov odráža osobné teórie o vedomostiach a ovplyvňuje aj rozhodovanie učiteľa o výbere obsahu a spôsobe vyučovania (Hofer a Pintrich, 1997). Postoje reprezentujú predpokladanú domnienku o kurikule, vyučovaní, učení sa, študentoch a vedomostiach. Postoje teda pôsobia ako kognitívne a citové filtre, cez ktoré si vysvetľujeme a posudzujeme vedomosti a skúsenosti (Artzt a Armour – Thomas, 1996; Handal a Herrington, 2003).

Postoje vo vyučovaní matematiky môžeme chápať ako osobný prístup k matematickým úlohám (Schoenfeld, 1985) a spôsobu vyučovania. Z toho dôvodu považujeme postoje a ich vývoj za kľúčovú premennú v kontinuálnom vzdelávaní učiteľov ako aj v príprave študentov učiteľstva matematiky.

V súčasnosti sa v mnohých častiach sveta snažia krajiny uplatniť reformný prístup k vyučovaniu matematiky. Nové prístupy si vyžadujú zmenu postojov učiteľov k organizácii obsahu, spôsobu vyučovania, spôsobu hodnotenia. Tieto nové prístupy sú výsledkom dlhoročnej práce výskumných skupín. (National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM), 2000; OECD PISA 2003, (Koršňáková, Tomengová, 2004). Toto smerovanie vo vyučovaní matematiky sa do značnej miery odlišuje od tradičného spôsobu vyučovania. (Cobb, Wood, Yackel a McNeal, 1992). Nakoľko prostredie v triedach, ako aj spôsob výučby je organizovaný učiteľom matematiky, je na zodpovednosti a profesionalite učiteľa matematiky zapracovať a používať spomenuté inovatívne prístupy a prostriedky na hodinách matematiky. Keďže sa niekedy jedná o radikálnu zmenu postojov učiteľov, je tejto problematike venovaná väčšia pozornosť aj v súčasnom výskume v teórii vyučovania matematiky. Skúmajú sa prístupy, akým spôsobom môže zmena v postojoch u učiteľa matematiky k vyučovaniu nastať. Tento proces zmeny spôsobu vyučovania a zdôrazňovania matematického významu považujú viacerí autori za náročný proces (Clarke, 1997).

V prípade študentov učiteľstva matematiky treba brať do úvahy, že študenti prichádzajú už s postojmi k matematike ako aj k vyučovaniu matematiky. Vzhľadom na nové výskumy vo vyučovaní sa postoje študentov počas vysokoškolského štúdia vyvíjajú, menia. Táto zmena postojov a myslenia sa prejavuje nielen v zmene vyučovania, ale aj v zmene vlastného učenia sa ako vyučovať (Ebby, 2000; Frykholm, 1999). Viaceré štúdie

však potvrdili skutočnosť, že v konečnom dôsledku učitelia vyučujú spôsobom, akým boli sami učení.

Od začiatku reformy vyučovania matematiky v USA, od roku 1989, kedy bolo uverejnené nové kurikulum NCTM 1989, boli navrhnuté mnohé spôsoby ako pomôcť učiteľom matematiky zmeniť ich postoje k vyučovaniu matematiky, aby sa priblížili k novému pohľadu na vyučovanie matematiky (Lloyd, 2005). Viaceré štúdie potvrdili, že ak študenti učiteľstva vstúpia do triedy, tak neuplatňujú svoje novonadobudnuté presvedčenie o spôsobe vyučovania, ale vrátia sa k pôvodným predstavám o vyučovaní matematiky (Ebby, 2000; Frykholm, 1996).

Mnohé štúdie považujú pedagogickú prax za kľúčovú v procese vývoja postojov študentov učiteľstva na základe ich skúsenosti a reflexie na ne (Ebby, 2000; Mewborn, 1999). Študenti učiteľstva počas pedagogickej praxe nachádzajú zmysel v spôsobe vyučovania, a tak dotvárajú svoje predstavy. Veľkú úlohu zohráva reflexia na vlastné vyučovanie počas pedagogickej praxe. Výskum v tejto oblasti vyučovania matematiky sa odvíja od chápania, ktoré prezentoval Zeichner (Zeichner, 1996): „na pedagogickú prax študentov učiteľstva sa pozeráme ako na dôležitú príležitosť učenia sa a nie iba na čas, počas ktorého v škole prezentujú naučené vedomosti“.

Zmeny v postojoch študenta učiteľstva dlhotrvajúci proces. Liljedahl, Rolka a Rosken (Liljedahl, Rolka a Rosken, 2007) identifikovali rôzne metódy vedúce ku „zmene“ postojov učiteľov ako aj študentov učiteľstva matematiky:

- 1) „Provokovať“ ich postoje. Veľa presvedčení je implicitých, ale akonáhle sú reflektované v konkrétnej situácii, môžu sa stať explicitné, a tým aj subjektom reflexie, čo môže mať za následok zmenu.
- 2) Zapojiť ich do inovatívneho spôsobu učenia sa matematiky, zvyčajne pomocou konštruktivistického prístupu.
- 3) Poskytnúť učiteľom možnosť zažiť matematické objavovanie, ktoré má okamžitý efekt na jeho vzťah k matematike a môže ho transformovať smerom k pozitívnym postojom.

Postupný vývoj postojov je založený na systematickom reflektovaní na vlastnú činnosť. Rozvoj reflexie v praxi má potom za následok zmenu správania sa jednotlivca, v našom prípade študenta učiteľstva matematiky. Miestom pre reflexiu postojov študentov učiteľstva matematiky je jednak teoretická príprava na univerzite, ale hlavne ich pedagogická prax. Práve počas pedagogickej praxe sa študenti počas štúdia učiteľstva stretávajú so situáciami, kedy sú ich poznatky ako aj postoje konfrontované s realitou. Napätie, ktoré sprevádza tento zážitok môže byť využité ako základ pre rozvoj hlbšieho pochopenia učenia a vyučovania matematiky. Je potrebné aby sa študent učiteľstva učil robiť okamžité rozhodnutia v danej chvíli počas vyučovacej hodiny. Schön (Schön, 1987) predstavil model takzvaného „reflektujúceho profesionála“, ktorý vďaka reflexii po odučení vyučovacej hodiny, pozitívne sám seba ovplyvňuje smerom ku zodpovednejšiemu rozhodovaniu a skúsenému plánovaniu počas nasledujúcich vyučovacích hodín. Rozlišuje takzvanú reflexiu po udalosti (na odučenú hodinu) a reflexiu počas udalosti (v danej situácii na hodine), v momente rozhodnutia. A práve reflexia po udalosti pozitívne ovplyvňuje reflexiu počas udalosti, a teda aj samotné okamžité rozhodovanie sa v priebehu vyučovacej hodiny.

Samotná reflexia však ešte nie je účinná pokiaľ nie je spojená s vhodnou situáciou. Práve u začínajúcich učiteľov matematiky je ťažšie identifikovať kritickú situáciu počas vyučovacej hodiny a následne na ňu reflektovať. Preto je potrebné pri príprave študentov učiteľstva postupne zapájať reflexiu na odučenú hodinu a neposkytovať študentom iba formálnu spätnú väzbu zameranú na analýzu obsahu a úloh riešených na hodine, ale viesť

študenta učiteľstva k reflexii vlastného správania a reakcií, a tak napomáhať rozvoju postojov k vyučovaniu matematiky.

Ďalšou oblasťou výskumu postojov učiteľov je skúmanie nesúlady medzi učiteľovými osobnými teóriami učenia sa a jeho aktuálnou pedagogickou praxou, ktorá túto teóriu nepodporuje (Oliveira, Hannula, 2008). Problém s vyučovaním matematického obsahu bol od základu problém zmeny presvedčenia študentov učiteľstva o tom, čo rozumejú pod pojmom matematika ako aj vyučovanie matematiky.

Na lepšie pochopenie a porozumenie prípravy študentov učiteľstva matematiky sme zorganizovali niekoľko prípadových štúdií na Slovensku i v Anglicku (Šunderlík, 2010). Jednou zo skúmaných oblastí boli postoje študentov učiteľstva matematiky. Vzhľadom na rozsah tohto príspevku uvádzame iba jeden prípad študentky učiteľstva matematiky, zameraný na skúmanie jej postojov, ktorý sme nazvali „prípad Anny“.

Metódy

So študentkou učiteľstva bol realizovaný vstupný rozhovor pred súvislou pedagogickou praxou. Trval približne jednu hodinu. Okrem tohto rozhovoru boli zrealizované krátke rozhovory po jednotlivých odučených hodinách, ktoré trvali približne 10-30 min. Po súvislej pedagogickej praxi sme so študentkou učiteľstva matematiky urobili výstupný rozhovor, v ktorom sme sa zamerali na zistenie zmien v postojoch v porovnaní so vstupným rozhovorom.

Hlavné oblasti skúmania vstupného aj výstupného rozhovoru:

- vnímanie matematiky (vedeckej, školskej)
- osobná matematická história
- pohľad na súčasné štúdium

Vstupný a výstupný rozhovor mali naratívny charakter, z čoho vyplývalo, že otázky boli iba orientačné a študentka učiteľstva mala možnosť voľne sa vyjadriť k ľubovoľnej téme a svoju odpoveď rozvinúť. Rozhovory po vyučovacích hodinách boli pološtrukturované. Jednotlivé rozhovory boli z video-audio záznamu prepísané do písomnej podoby a podrobne analyzované na základe skúmaných oblastí.

V rámci celkovej štúdie sme zaznamenali na videozáznam osem po sebe nasledujúcich vyučovacích hodín, ktoré boli prepísané a následne analyzované. Okrem rozhovorov s cvičným učiteľom sme po každej vyučovacej hodine zrealizovali aj pološtrukturované interview s dvomi žiakmi.

Prípad Anny

Anna (meno študentky učiteľstva bolo zmenené) študovala v poslednom, druhom ročníku magisterského stupňa štúdia. Výskum sa uskutočnil počas letného semestra, v čase keď už študenti nemajú pravidelné vyučovanie podľa rozvrhu hodín. Ich povinnosťou bolo absolvovať súvislú pedagogickú prax a pracovať na diplomovej práci.

Anna matematiku chápe ako niečo veľmi konkrétne prítomné v bežnom živote. Čo sa týka štúdia, teoretickú prípravu v matematike vníma ako nutné zlo (definície, vety, dôkazy). Vníma ich ako niečo, čo je potrebné pre lepšie pochopenie používania matematického aparátu.

Anna Tak, no, ja to beriem tak, že musím sa to naučiť, alebo mala by som to pochopiť, aby som to potom mohla využiť, tak ja neviem, akože je to skôr také, že nie, že by som si s láskou teraz čítala skriptá a učila sa dôkazy alebo čítala ich, lebo je to akože zaujímavé, alebo, že

to priam milujem, ale preto, že chcem niečo pochopiť, čo potom neskôr budem využívať. ... som rada, keď potom už len využívam ten vzorec a viem ho aplikovať ale viem, prečo je tak.

Má však veľmi silný vzťah k uplatňovaniu a používaniu matematických poznatkov v praxi. Z praxe vychádza aj jej matematická motivácia. Má záujem v bežnom živote prepočítavať a matematike sa venuje aj vo voľnom čase.

Tieto svoje predstavy prenáša aj do chápania vyučovacieho predmetu matematika. Má k nemu veľmi pozitívny vzťah a pokladá ho za jeden z najdôležitejších predmetov.

Anna No ja ho beriem tak, že je to asi jeden z najpodstatnejších predmetov, ktorý by mal patriť škole, ktorý by teda, rozhodne by sa nemalo znižovať dotácia hodín.

To, čo by sa malo na hodinách matematiky vyučovať, charakterizuje cez pohľad na nový školský zákon, kde nesúhlasí so znižovaním vyučovacích hodín matematiky a vyjadruje obavu, že sa študenti menej naučia. Na druhej strane hodnotí nové prístupy k vyučovaniu ako nezrealizovateľné.

Na otázku čo je cieľom predmetu matematika odpovedala, že učiť praktické využitie matematiky. Svoje presvedčenie zdôvodňuje aj reformou vyučovania, ktoré chápe autoritatívne „zákon káže“. Problém vidí v tom, že ako študentka bola vyučovaná tradičným spôsobom a teraz sa od nej, ako od učiteľa v praxi, vyžaduje používať iné, netradičné, prístupy k vyučovaniu.

Anna No, nový školský zákon káže, aby sme ich učili praktickým veciam a nie len také suché memorovanie, ale no neviem, bude to ťažké. ... problém je v tom, že my študenti sme vychovávaní v tom starom systéme, že teraz je klasický typ vyučovacej hodiny, že prídem, vyskúšam, preberám nové učivo, dám domácu úlohu a idem preč. No a teraz by sme my mali nejakými otázkami donútiť do toho, aby oni začali rozmýšľať prečo je to tak, a vytvorili oni sami tú hypotézu potom ju aj overili, že áno obsah trojuholníka je takto. Len ako, ja to sama na sebe vidím, že ja by som im to všetko povedala a pritom nový školský zákon chce, aby oni to povedali, ale ja som bola učená tomu, že napíšem im poznámky a idem ďalej. A teraz to tak nie je. Bude to také ťažké (sa to) naučiť.

Študentka učiteľstva v tejto fáze popisuje svoj spôsob vyučovania, ale nevie si presne predstaviť, ako sa dajú tieto požiadavky zrealizovať. Preto často volí všeobecný kompromis, ktorý vychádza z akejsi dichotómie starého a nového. Nový prístup pre ňu znamená stratu niektorých matematických vedomostí.

Anna Takže nepreberá sa ani toľko učiva, ani do takej hĺbky a potom v podstate sa to len tak letmo preletí a žiaci nemajú spojenie jednotlivo, len to teda áno, teraz sme sa učili planimetriu dobre, to stačí, ideme na stereometriu, teraz to stačí, kombinatorika a tak ďalej, zas len to základné...

Na vyučovanie sa po matematickej stránke cíti byť pripravená, necíti sa byť však pripravená po didaktickej stránke. Myslí si, že nie je pripravená pre prax. Ako pozitívum vníma to, že doma doučovala matematiku, kde sa naučila viacerými spôsobmi vysvetliť jednotlivé tematické celky.

Nevie ako skĺbiť odovzdávanie teoretických vedomostí, motivovanie žiakov a aplikáciu alternatívnych a efektívnych metód vo vyučovacom procese. Informácie o inovatívnych metódach, hlavne o ich konkrétnom využití sú nepostačujúce, preto čerpá inšpiráciu v prvom rade zo svojich skúseností. „ako som bola učená, tak budem učiť“.

Vplyv pedagogickej praxe na postoje Anny o vyučovaní matematiky

V nazeraní na matematiku ako vedu sa pohľad Anny veľmi nezmenil. Zmena však nastala pri pohľade na matematiku ako vyučovací predmet. Posun nastal hlavne vo vnímaní náročnosti vyučovania z pedagogického a didaktického hľadiska.

Náročnosť vyučovania matematiky, konkrétne spôsob podania matematického učiva Anna sformulovala do spojenia „hovoriť laicky“. Ako najťažšie uviedla, že bolo vcítiť sa do žiackeho myslenia. Počas praxe si uvedomila, že matematika je pre mnohých náročná. Taktiež pre Annu bolo náročné „reagovať na spätnú väzbu“ od žiakov. Počas praxe vyzdvihla schopnosť improvizovať, nakoľko sa nedá na všetko pripraviť.

Najväčší vplyv na obsah ako aj formu vyučovania mala cvičná učiteľka. Vopred uviedla, čo chce, aby na hodine študent učiteľstva odučil a z akých materiálov. Rozhovory po odučenej hodine boli väčšinou v štýle pripomienok a upozornení „ako to mohla spraviť“. Priestor na osobnú reflexiu študentky učiteľstva nebol dostatočný. Anna cvičného učiteľa vníma ako autoritu a tiež ako niekoho, kto jej „kryje chrbát“ a pomáha jej s disciplínou v triede. Postupom času však dochádza k rozporu medzi odporúčaním cvičného učiteľa a Anniným presvedčením „ako to márobiť“.

Anna Ale napríklad tuto, pani profesorka povedala, že ona ich vôbec neučí, ten stredový, že ten si len povedia, že takýto je a už len si označia, len ten obvodový uhol, lebo ten obrázok je potom neprehľadný. Ale ja si myslím, že prečo to musím dávať do jedného obrázku, môžem to dávať do dvoch, nie?

Do konfliktu sa dostáva odporúčanie cvičného učiteľa a spôsob ako to Anna sama bola učená. Ako dôkaz používa svoj starý zošit zo školy. V tejto fáze sa dynamické postoje o vyučovaní matematiky, ako ich Anna uviedla počas vstupného rozhovoru, skoro vôbec neprejavujú v praxi. Po odučení jednej z neúspešných hodín tento rozpor vyjadrila nasledovne:

Anna (použilo som už) ... tri rôzne spôsoby, vysvetľovania a proste, väčšina tomu nechápala.

Výskumník Čo si myslíš, čo bola toho príčina? (...)

Anna Totálne nevyužitie toho učiva v praxi. To nezaujímajú tie deti, že čo to je.

Po ukončení súvislej pedagogickej praxe Anna svoje vyučovanie hodnotila:

Anna „najčastejšie to bola čisto klasická vyučovacia hodina, kde som si len odprednášala svoje, ale potom boli typy, že do dvojíc som dala príklady a (tie) počítali a potom ich išli prezentovať“.

Toto jej tvrdenie môžeme charakterizovať ako silný vplyv prostredia, hoci sa Anna pokúsia aj o inovatívny spôsob výučby prevládajú trvalé postoje. V priebehu pedagogickej praxe sme ho mohli pozorovať na zmenách v organizácii vyučovacej hodiny, ako aj spôsobe prezentovania nového učiva. Ako príčinu uplatnenia inovatívnych prvkov na konci pedagogickej praxe študentka učiteľstva uviedla „aby sa zapojila väčšia časť študentov ako pri tom klasickom vyučovaní.“

Anna ... keď sme mali teda tie, akože „inovačné“ formy tak v podstate to malo zámer tým, že žiaci, aby tam len tak sucho nesedeli, takže aby sa proste zapojila väčšia časť tých žiakov ako pri tom klasickom vyučovaní. ... ja si aspoň myslím, mohol mať taký pozitívnejší vzťah k takejto hodine.

Jedným z podnetov pre skúšanie iných stratégií a metód boli vlastné reflexie na odučenú hodinu, ktoré vyslovila Anna počas interview s výskumníkom po odučení jednotlivých hodín. Tieto jej uvedomenia počas reflexie výrazne ovplyvnili spôsob akým na nasledujúcej hodine organizovala časti hodiny. Môžeme hovoriť o reflexii na odučenú hodinu v zmysle Schön (Schön, 1987).

Na otázku, čo by zlepšila do budúcnosti, sa Anna vyjadrila, že by volila možno menej úloh a viac toho „zábavnejšieho“. Viac by sa zamerala na učenie žiakov. Anne chýbali príklady komplexnejšieho charakteru. Ako môžeme pozorovať u Anny počas pedagogickej praxe nastáva posun od klasického spôsobu vyučovania ako ho charakterizovala pred pedagogickou praxou k skúšaní uplatňovať inovatívne prvky vyučovania. Tieto konkrétne skúsenosti sa Anne osvedčili z hľadiska väčšieho záujmu žiakov.

Diskusia

Na uvedenom príklade Anny môžeme pozorovať vplyv implicitných postojov, ktoré ovplyvňovali voľbu tradičného spôsobu vyučovania. Vplyvom reflexie na svoju prax Anna uviedla, že chce zaujať a zapojiť viac žiakov do vyučovacieho procesu. Záujem o takúto formu vyučovania sa potvrdil aj počas rozhovorov so žiakmi. Otázkou zostáva, ako tento pozitívny prvok systematicky zapracovať do prípravy študentov učiteľstva matematiky. Na druhej strane aj keď sa Anna vyjadrila, že sa chce viac venovať učeniu žiakov, otázka hlbšieho pochopenia učiva žiakmi nebola priamo uvedená počas výstupného rozhovoru. Tieto predpoklady potvrdzujú aj silné negatívne Annine postoje ohľadom inovatívnych prístupov k vyučovaniu, ako ich uviedla pred pedagogickou praxou. V tejto oblasti je potrebné zamerať sa viac na postoje súvisiace s učením sa žiakov.

LITERATÚRA

- [1] Artzt, A.- Armour-Thomas, E. 1996. Evaluation of instructional practice in the secondary school mathematics classroom: A cognitive perspective. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. (ERIC Document Reproduction Service No. ED397131)
- [2] Clarke, D. M. 1997. The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 278 -308.
- [3] Coob, P.- Wood, T.- Yackel, E.- McNeal, B. 1992. Characteristics of classroom mathematics traditions: An international analysis. *American Educational Research Journal*, 29, 573 – 604.
- [4] Ebby, C.B. 2000. Learning to teach mathematics differently: The interaction between coursework and fieldwork for preservice teachers. *Journal of mathematics Teacher Education*, 3, 69-97
- [5] Frykholm, J.A. 1999. The Impact of Reform: Challenges for mathematics teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Vol. 2, No 1, 79-105.
- [6] Handal, B. - Herrington, A. 2003. Mathematics Teacher's Beliefs and Curriculum Reform, *Mathematics Education Research journal*. Vol. 15, No. 1, 59 – 69.
- [7] Hofer, B. K. - Pintrich, P. R. 1997. The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.
- [8] Liljedahl, P.- Rolka, K. - Rösken, B. 2007. Affecting affect: The reeducation of preservice teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching and learning. In W. G. Martin, M. E.

- [9] Lloyd, G.M. 2005. Beliefs about the teacher's role in the mathematics classroom: one student teacher's explorations in fiction and in practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 8: 441 – 467.
- [10] Koršňáková, P., Tomengová, A.: PISA SK 2003 - Národná správa. Učíme sa pre budúcnosť. [online] Bratislava: ŠPÚ 2004. 40 s. ISBN 80-85756-87-0 [citované 6.5. 2010] dostupné na internete: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie/spu_na_rodna_sprava2003.pdf
- [11] Mewborn, D. S. 1999. Reflective thinking among preservice elementary mathematics teachers. *Journal for Research in mathematics Education*, 30, 316-341.
- [12] National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.
- [13] Oliveira, H. a Hannula, M. 2008, Individual Prospective Mathematics Teachers: Studies on Their Professional Growth. IN K. Krainer a T. Wood, 2008, Participants in Mathematics Teacher Education, 13-34, Sense Publishers
- [14] Schoenfeld, A. H. 1985. Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.
- [15] Schön, D. A. 1987. Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions. San Francisco: Jossey-Bass.
- [16] Thompson, A. G. 1984. The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- [17] ŠUNDERLÍK, J. 2010: Komparatívne štúdie vo vyučovaní matematiky. [Dizertačná práca]. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. Fakulta prírodných vied. Školiteľ: doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: Philosophiae Doctor (PhD.). Nitra: FPV, 2010, 183 s.
- [18] Zeichner, K. (1996). Designing educative practicum experiences for prospective teachers. In K. Zeichner, S. melnick, a M.L. Gomez, Currents of reform in preservice teacher education New York: Teachers College. pp. 215 – 234.

PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
 e-mail: jsunderlik@ukf.sk

E-LEARNINGOVÝ KURZ: NETRADIČNÉ METÓDY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRACT. The paper deals with the university course “Untraditional methods in mathematics teaching”. The course is available for future mathematics teachers and teachers in practice and includes motivational and active teaching methods for example didactical games and jigsaws. The main topic of this paper is jigsaw Tangram.

Úvod

V súvislosti s kvalitou vysokoškolského vzdelávania sa v súčasnosti veľa diskutuje o úrovni pripravenosti študentov stredných škôl na toto štúdium, pričom v článku máme na mysli konkrétne matematiku. Menej už počuť o dôležitosti kvality prípravy budúcich učiteľov v tomto smere a patričnom ocenení didaktiky matematiky. Treba si uvedomiť, že matematika preniká do všetkých vyučovacích predmetov prírodovedného, ekonomického, technického i spoločenského zamerania a každodennej praktickej ľudskej činnosti. Preto je potrebné venovať sa otázkam kvalitného matematického vzdelávania a s tým súvisiacej prípravy učiteľov so zvýšenou pozornosťou. Tejto aktuálnej a spoločensky závažnej tematike sa venujeme na Katedre algebry, geometrie a didaktiky matematiky na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky v Bratislave v rámci riešenia projektu KEGA č. 3/6484/08: Inovácia študijných plánov v príprave budúcich učiteľov matematiky za účelom rozšírenia ich kompetencií. Vo forme výberových prednášok realizovaných v rámci projektu ponúkame možnosť rozšírenia kompetencií učiteľov z praxe a budúcich učiteľov. Na základe dotazníkového prieskumu sme zistili, o ktoré oblasti majú v tomto smere záujem. Konkrétne sa jednalo o nasledujúce oblasti:

1. Využívanie informačno-komunikačných technológií vo vyučovaní.
2. Prezentačné schopnosti (riadenie komunikácie v skupine,...).
3. Rozvíjanie pedagogicko-psychologických zručností (kurzy asertivity,...).
4. Písanie projektov (ESF, MŠSR,...).
5. Zručnosti týkajúce sa písania učebných textov na internet (e-learning, www).
6. Školský manažment a právne povedomie.

Tieto oblasti sme ponúkli záujemcom vo forme nasledovných výberových prednášok:

1. Organizácia a riadenie školy.
2. E-learning ako špeciálna forma dištančného vzdelávania.
3. Príprava, realizácia a ekonomické dopady projektov v školstve.

V priebehu riešenia uvedeného projektu KEGA bol prejavovaný záujem o motivačné a aktivizujúce spôsoby vyučovania matematiky. Tieto spôsoby vyučovania sa ukazujú byť potrebné vzhľadom na znížený počet hodín matematiky v rámci školskej reformy a s tým súvisiacu potrebu upútania pozornosti žiakov. Preto sme do ponúkaných výberových

prednášok v rámci projektu zaradili aj prednášku: Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky.

Uvedenú prednášku pripravujeme i v rámci kontinuálneho vzdelávania pedagogických pracovníkov určeného pre aktualizáciu poznatkov učiteľov z praxe. Realizácia kurzov v rámci kontinuálneho vzdelávania prináša učiteľom nemalé časové aj finančné problémy. Prínosom nášho kurzu bude okrem kvalitného obsahového zamerania aj prevažne e-learningová forma realizácie, ktorá učiteľom pomôže prekonať uvedené problémy.

Cieľom výberovej prednášky je štúdium teoretických východísk a prepojenia poznatkov teórie vyučovania matematiky a pedagogicko-psychologických vied za účelom ich dôslednej aplikácie vo vyučovaní matematiky s hlavným zameraním na motiváciu a tvorivosť. Uvedené poznatky sú prezentované na ukážkach konkrétnych učebných metód a pomôcok.

Sylabus výberovej prednášky Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky:

1. Význam a dôležitosť matematiky pre spoločnosť.
2. Netradičné metódy, formy a prostriedky vyučovania matematiky.
3. Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.
4. Didaktické hry v matematike.
5. Slávni matematici – ich matematika – zaujímavé úlohy - rekordy a kuriozity.
6. Alternatívne školstvo. Projektové vyučovanie.
7. Humanizácia vyučovania matematiky.
8. Úloha priestorovej predstavivosti v matematike. Geometrická predstavivosť a riešenie úloh.
9. Význam histórie matematiky v matematickom vzdelávaní.
10. Využitie Internetu v motivačnom vyučovaní matematiky.

V rámci predkladaného príspevku predstavujeme stručne uvedený kurz, pričom sa zo širokého spektra metód predstavovaných účastníkom kurzu zameriame na didaktické hry všeobecne a konkrétnejšie na rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou hlavolamu Tangram.

Pod didaktickou hrou rozumieme činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vykonávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia. Didaktická hra má pravidlá, ktoré organizujú činnosť žiakov. Táto činnosť, jej obsah a pravidlá didaktickej hry vedú k realizácii edukačných cieľov hry. Charakteristické pre didaktickú hru je vysoká angažovanosť a motivácia žiakov, potešenie z priebehu hrovej aktivity. (Průcha, Walterová a Mareš, 1998)

U nás i v zahraničí prebehli viaceré výskumy ohľadne používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky. Výsledky týchto výskumov (Brooker, 2000; Vankúš, 2007) ukazujú prínos najmä čo sa týka zlepšenia motivácie a pocitového prežívania žiakov. Hry tiež popri dosahovaní vzdelávacích cieľov umožňujú rozvoj niektorých dôležitých kľúčových kompetencií, napr. spolupráce, komunikácie, tvorivého a logického myslenia.

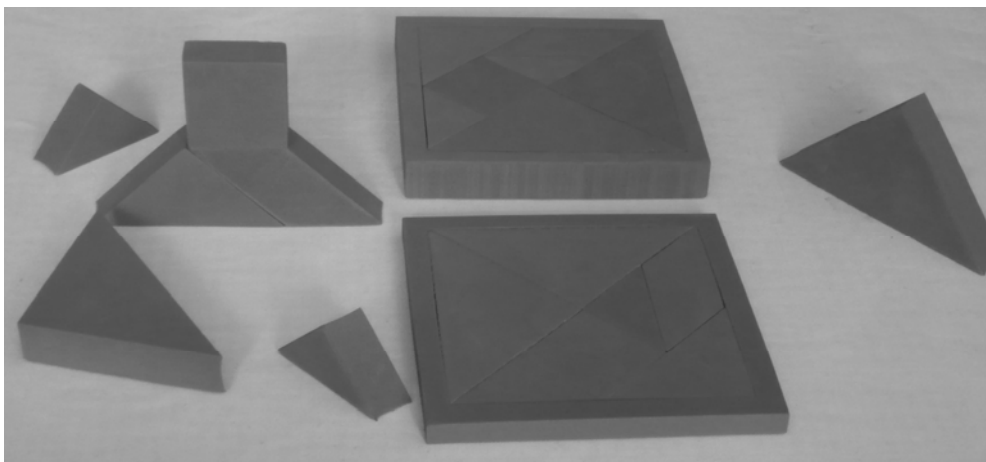
Didaktické hry so skladačkou Tangram

V rámci kurzu Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky predstavujeme viaceré formy matematických hier, ako sú súťažné matematické hry, strategické hry, matematické hlavolamy a skladačky.

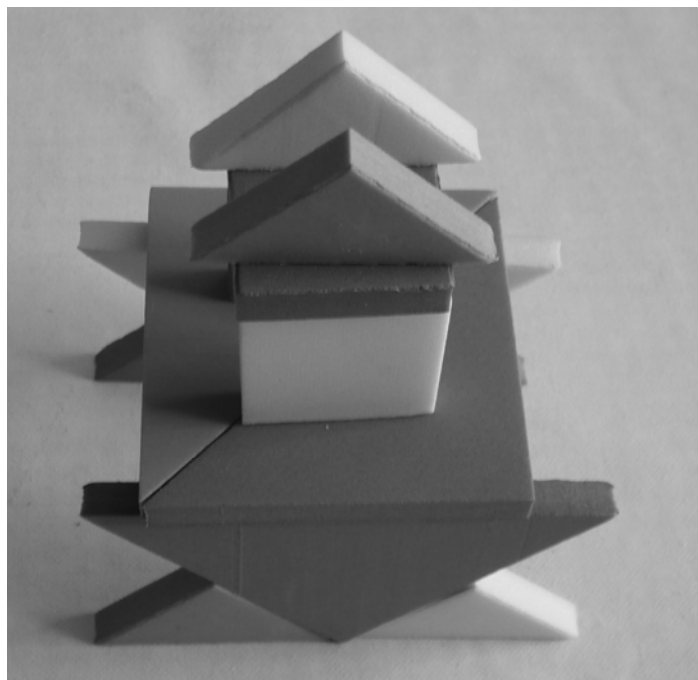
Ako matematický hlavolam resp. skladačka má veľký potenciál Tangram. Tangram je využiteľný ako pomôcka na rozvoj priestorovej predstavivosti. Naše praktické skúsenosti s uvedenou skladačkou ukazujú, že je vhodná pre deti už vo veku 4-5 rokov. Námety na prácu s Tangramom pre deti už od predškolského veku sú napr. v publikácii V. Uherčíkovej a I.K. Haverlíka Hlavolam Tangram – poutavá hračka (Uherčíková, Haverlík, 2002). Tieto deti javia o skladačku a prácu s ňou záujem, čo je pozitívne z hľadiska potreby rozvíjania predstavivosti už v ranom veku. Na báze skladačky Tangram chceme v rámci výskumu vytvoriť i nástroj na zisťovanie úrovne rozvoja priestorovej predstavivosti u detí vo vekovej kategórii, pre ktorú sa nehodia štandardne používané testy.

Množstvo námetov na využitie Tangramu v učive matematiky základnej školy je v knižke J. Brinckovej Didaktická hra v geometrii (Brincková, 2003). Z našich nápadov sa nám osvedčilo napr. používanie dvoch i viacerých sád skladačky Tangram v rámci učenia symetrických zobrazení. Počas aktivity žiakov môže napríklad jeden žiak postupne zostavovať obrázok a druhý žiak vytvárať osovo súmerný obrázok. Pre väčšiu presnosť ukladania dielikov je možné aktivitu realizovať na štvorcovej sieti. Uvedenú aktivitu môžu realizovať i jednotlivci, pričom sa pri ukladaní symetrických dielikov súčasne pravou a ľavou rukou rozvíja i prepájanie mozgových hemisfér. Aktivity sa dajú realizovať vo forme súťažnej didaktickej hry, kde sa hodnotí napríklad rýchlosť vytvorenia obrázkov, presnosť a rozmanitosť.

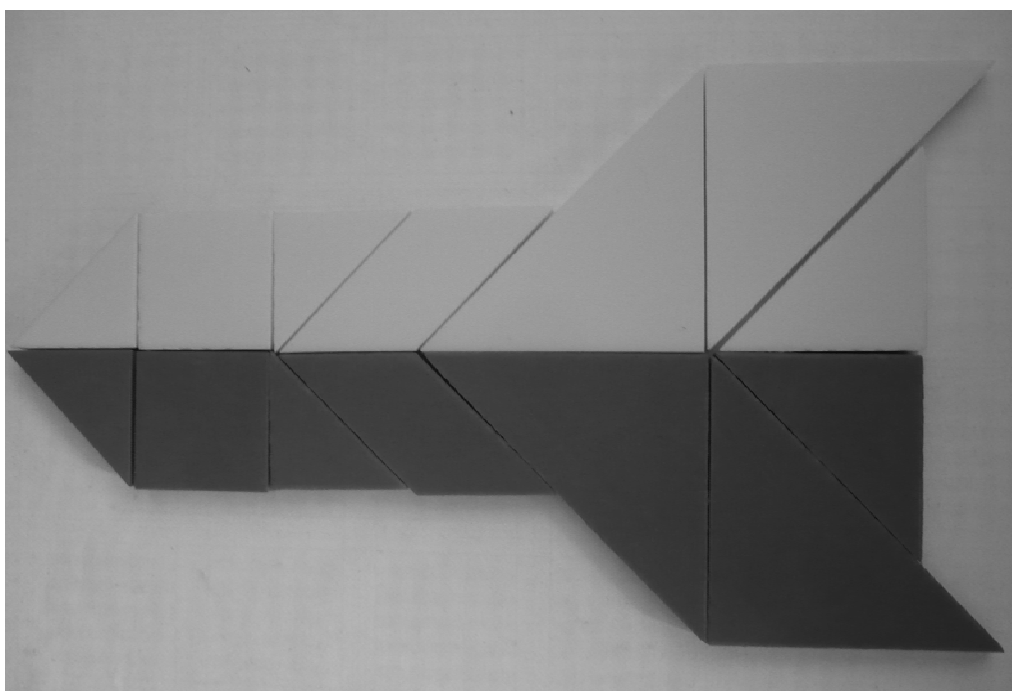
Na nasledujúcich obrázkoch sú ukážky vzorov vytvorených zo skladačky Tangram používanej v rámci rôznych didaktických hier.



Obrázok 1: Skladačka Tangram



Obrázok 2: Priestorový útvar vytvorený z dvoch sád skladačky Tangram



Obrázok 3: Osovo súmerný útvar vytvorený z dvoch sád skladačky Tangram

Záver

Potreba aktivizujúcich a motivačných spôsobov vyučovania matematiky a oboznamovania s nimi v príprave študentov učiteľstva matematiky ako aj v ďalšom vzdelávaní učiteľov matematiky z praxe nás viedla v rámci projektu KEGA č. 3/6484/08k tvorbe výberovej prednášky Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky. Uvedenú prednášku pripravujeme tiež pre potreby kontinuálneho vzdelávania v prevažne e-learningovej forme.

Z učebných metód prezentovaných v rámci uvedenej výberovej prednášky sme sa v článku venovali didaktickým hrám všeobecne a konkrétne didaktickým hrám so skladačkou Tangram. Používanie didaktických hier vo vyučovaní matematiky má svoje opodstatnenie, keďže v článku spomenuté výskumy ukázali pozitívny vplyv uvedených metód na motiváciu a postoje žiakov. Motivácie a postoje priamo ovplyvňujú ďalšie dôležité ukazovatele, ako sú vedomosti žiakov z matematiky, ich dôvera vo vlastné matematické schopnosti, schopnosť riešiť problémové úlohy v rámci matematiky a pod. (Nicolaidou a Philippou, 2003). Pozornosť v článku sme venovali skladačke Tangram, ktorá predstavuje ideálne spojenie hry a učebnej pomôcky. Žiak sa hrá a pritom si dôsledne rozvíja geometrické myslenie. Takéto pomôcky a ich používanie v rámci didaktických hier by malo preto patriť do arzenálu metód učiteľa matematiky.

LITERATÚRA

- [1] Brincková, J.: *Didaktická hra v geometrii*, Bratislava, DONY, 2003, ISBN 80-8541-83-6.
- [2] Brooker, G.: *The Maths Game. Using Instructional Games to Teach Mathematic*, Wellington, NZCER, 2000, ISBN 1-877140-68-6.
- [3] Fulier, J. – Šedivý, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Edícia Prírodovedec, publikácia č. 87, Nitra, 2001, ISBN 80-8050-445-8.
- [4] Průcha, J. – Walterová, E. – Mareš, J.: *Pedagogický slovník*, Praha, Portál, 1998, ISBN 80-7178-252-1.
- [5] Nicolaidou, M. – Philippou, G.: *Attitudes towards mathematics, self-efficacy and achievement in problem-solving*, In: European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Pisa, Bellaria, 2003.
- [6] Uherčíková, V. – Haverlík, I. K.: *Hlavolam Tangram-poutavá hračka*, In: Metodické listy pro předškolní vzdělávání, Praha, RAABE, 2002, ISBN 80-86307-03-04.
- [7] Vankúš, P.: *Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics and process of its teaching*, In: European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Cyprus, Larnaca, s. 369-378, 2007, ISBN 978-9963-671-25-0.

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

FLEXIBILNÉ MNOHOSTENY VO VÝUČBE STEREOMETRIE

DUŠAN VALLO – ONDREJ ŠEDIVÝ – VILIAM ĎURIŠ – LUCIA RUMANOVÁ

ABSTRACT. In this article we present a few flexible polyhedrons and we are concerned in their application in the stereometry education.

Úvod

Obsahová náplň stereometrického učiva, ktoré sa učí na základných a stredných slovenských školách je zameraná na polohové a metrické úlohy o základných telesách ako sú kocka, kváder, ihlan, hranol, valec, kužeľ a guľa. Ide o telesá konvexné a prakticky nekonvexným telesám sa nevenuje pozornosť. Dôvodov je viacero a jedným z nich je aj ich komplikované znázorňovanie vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Na druhej strane však občasné zaradenie drobných poznámok o týchto nekonvexných telesách do výučby stereometrie môže na študentov pôsobiť motivačne.

V tomto skromnom príspevku sa sústreďíme na pomerne netradičné nekonvexné telesá, ktoré sa vyznačujú pozoruhodnou vlastnosťou – pri zachovaní rozmerov stien sú deformovateľné.

Cauchyho veta

V predchádzajúcom odstavci sme zdôraznili, že budeme analyzovať len nekonvexné telesá. Pre konvexné telesá totiž platí veta.

Veta (Cauchy)

Dva konvexné mnohosteny, ktoré majú sebe odpovedajúce zhodné steny, sú zhodné.

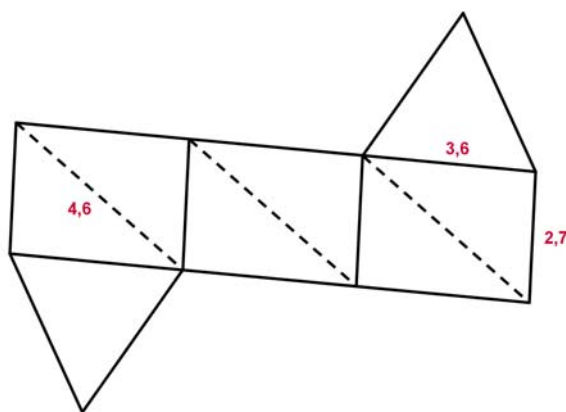
Dôkaz je príliš rozsiahly, a preto ho neuvádzame. Čitateľ nájde dôkaz v [2].

Podľa Cauchyho vety teda nemá zmysel pokúšať sa o konštrukciu konvexného mnohostena, ktorý by bol deformovateľný.

Existujú teda len nekonvexné mnohosteny, ktoré pri zachovaní tvaru stien sú deformovateľné a nazývajú sa **flexibilné** mnohosteny. Uvedieme niekoľko ukážok.

Flexibilné mnohosteny s konečným počtom tvarov

Flexibilné mnohosteny, ktoré môžu nadobúdať len konečný počet tvarov sú pomerne známe a konštrukčne jednoduché. K takým patrí aj Wunderlichov flexibilný mnohosten, ktorého sieť je na obrázku.



Obr. 1: Sieť Wunderlichovho flexibilného osemstena

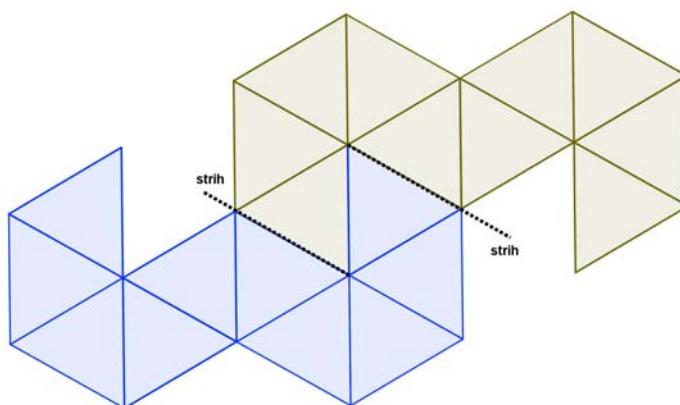
Na prvý pohľad vidno, že ide o nekonvexný osemsten. Prerušované čiary predstavujú „údolie“, plné čiary „vrch“. Tým sú steny mnohostena tvorené len trojuholníkmi.

Ak vyrobíme papierový model, zľahka zatlačíme protiľahlé vrcholy proti sebe, „preskočí“ mnohosten do druhého tvaru. Wunderlichov mnohosten má len dva tvary.



Obr. 2: Dva tvary Wunderlichovho flexibilného mnohostena

Ďalšími známymi flexibilnými mnohostenmi, ktoré nadobúdajú len *tri* možné tvary, sú Goldbergove mnohosteny. Sú dva a ich siete pozostávajú z 12 a 20 rovnostranných trojuholníkov.



Obr. 3: Sieť Goldbergovho flexibilného 20-stena

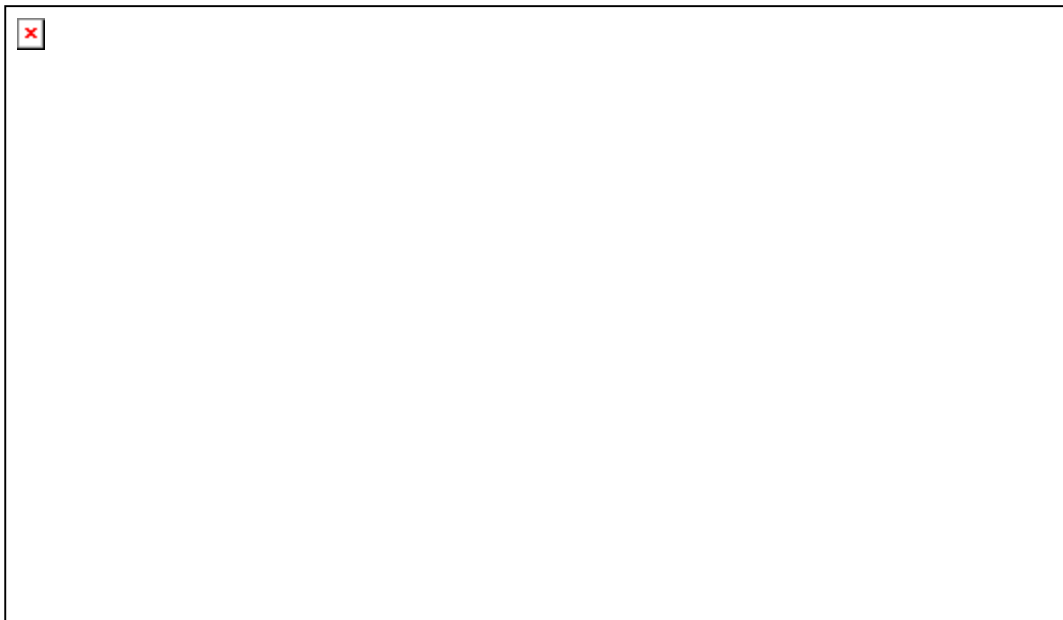
Samotné mnohosteny sú zjednotením dvoch pentaédrov. Na obrázku je znázornený Goldbergov flexibilný 20-sten.



Obr. 4: Goldbergov flexibilný 20-sten

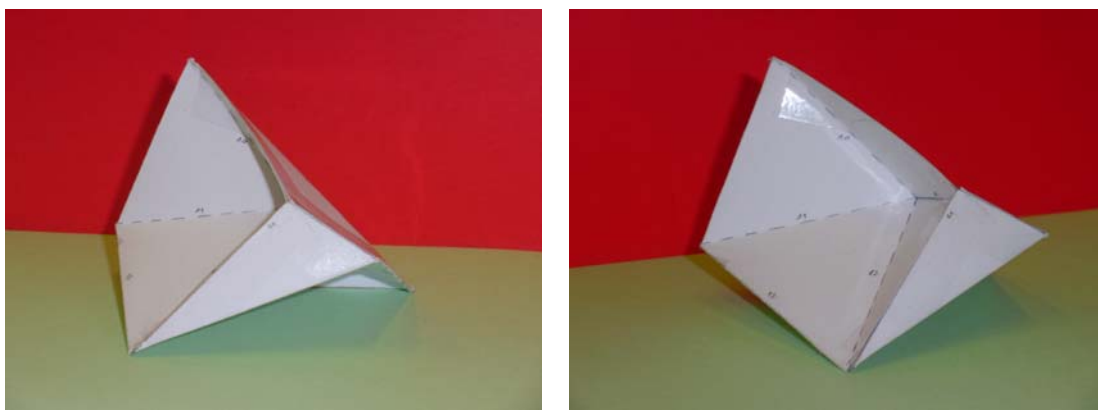
Steffenov flexibilný mnohosten

Steffenov mnohosten patrí medzi najznámejšie flexibilné mnohosteny. Ide o flexibilný mnohosten so 14 trojuholníkovými stenami a 9 vrcholmi.



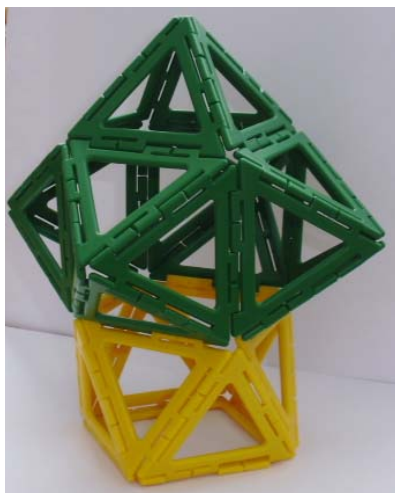
Obr. 3: Sieť Steffenovho flexibilného mnohostena

Sieť je zložitejšia, než pri Wunderlichovom mnohostene, avšak Steffenov mnohosten nemá len dva striktné tvary. Steffenov mnohosten je ľahko deformovateľný do viacerých tvarov. Takéto mnohosteny sa nazývajú **nekonečne flexibilné**. Steffenov mnohosten je najjednoduchší flexibilný mnohosten, ktorého steny sú iba trojuholníky.



Obr. 4: Dva pohľady na Steffenov flexibilný mnohosten

K nekonečne flexibilným mnohostenom patrí aj Masonov flexibilný deltahedron. Jeho konštrukcia je jednoduchá. Nad piatimi stenami kocky postavíme pravidelné štvorboké ihlany, nad poslednou stenou pravidelný štvorboký antihranol.



Obr. 5: Model Masonovho flexibilného mnohostena zo stavebnice Polydron

Záver

Ako sme už zdôraznili, príspevok pojednáva o nekonvexných flexibilných mnohostenoch, ktorých integrácia do výučby stereometrie môže výrazne ovplyvniť motiváciu.

Z vlastných skúseností z výučby predmetu Geometria telies na KM FPV UKF v Nitre môžeme konštatovať, že uvedené mnohosteny sa stretávajú s výrazným záujmom zo strany študentov. Na jednej strane je to predmetná manipácia s modelom, prípadne jeho zhotovenie, na strane druhej ide o študentský „objav“ netradičnej flexibility.

LITERATÚRA

- [1] Weisstein, Eric W. *Flexible Polyhedron*. Dostupné na WWW: <http://mathworld.wolfram.com/FlexiblePolyhedron.html> (cit. 2010-01-01)
- [2] Cromwell, P. R. 1999. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 451s. ISBN: 0 521 66405 5
- [3] Židek, O. 2008. *O využití speciálních rezov na pravidelnom štvorstene*. In. Acta Mathematica 10. Nitra, FPV UKF v Nitre, Nitra: Edícia Prírodovedec č. 270, 2008, ISBN: 978-80-8094-181-9, 255-258 s.
- [4] Pavlovičová, G. - Rumanová, L. 2009. *Štvorsten - jeho vlastnosti, aplikácie*. In. Acta Mathematica 12. FPV UKF v Nitre, Nitra: Edícia Prírodovedec č. 389, 2009. ISBN: 978-80-8094-614-2, 201-208 s.
- [5] Dolbilin, N. P. 1988. *Žestkost' vypuklych mnogogrannikov*. 1988. In. Kvant 5/1988. ISSN: 0130-2221, 6 - 14 s., 1988
- [6] Zalgaller, V. 1978. *Nepreryvno izgibatel'nyj mnogogrannik*. In. Kvant 9/1978. ISSN: 0130-2221, str. 13 – 19
- [7] Weisstein, Eric W. *Multistable Polyhedron*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MultistablePolyhedron.html> (cit. 2010-08-30)

RNDr. Dušan Vallo, PhD.

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.

RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.

RNDr. Lucia Rumanová, PhD.

Katedra matematiky

Fakulta prírodných vied

UKF v Nitre

Tr. A. Hlinku 1

SK – 949 01 Nitra

e-mail: dvallo@ukf.sk

osedivy@ukf.sk

vduris@ukf.sk

lrumanova@ukf.sk

POSTOJE ŽIAKOV 5. A 9. ROČNÍKA ZŠ K MATEMATIKE

PETER VANKÚŠ, EMÍLIA KUBICOVÁ

ABSTRACT. The paper deals with pupils' attitudes towards mathematics and their changes between the fifth and the ninth grade of primary school. The results of administrated questionnaire show that attitudes of the ninth grade students in the research sample are worse than those of the fifth grade students and give impetus to improvement of this situation.

Úvod

Predkladaný článok sa venuje z hľadiska výskumu vyučovania matematiky dôležitej tematike: postojom žiakov k matematike a metódam ich zisťovania. Dôležitosť uvedenej problematiky vyplýva z v rámci učiteľskej a výskumníckej komunity všeobecne akceptovaného názoru, že žiaci sa učia efektívnejšie, ak ich zaujíma učebná látka a dosahujú lepšie výsledky, ak majú pozitívny postoj k tomu, čo sa učia (Ma & Kishor, 1997).

V predkladanom článku analyzujeme výsledky dotazníkového prieskumu postojov žiakov k matematike, ktorý bol realizovaný v spolupráci s Faculty of Education, University of Cambridge. Dotazník použitý v rámci prieskumu bol vytvorený počas štúdie zaoberajúcej sa štruktúrou systému postojov žiakov k matematike a k riešeniu matematických problémov (De Corte & Op't Eynde, 2002). Uvedený dotazník bol modifikovaný za účelom zistenia jeho kompatibility v rámci používania v rôznych štátoch, konkrétne Anglicku, Španielsku a Slovensku (Andrews a kol., 2007a; Andrews a kol., 2007b). Cieľom dotazníkového prieskumu realizovaného na slovenských školách v školskom roku 2006/2007 bolo potom otestovať vytvorený nástroj a súčasne porovnať rozdiely v postojoch žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k vyučovaniu matematiky.

Dotazníkový prieskum postojov žiakov k matematike

Všeobecne môžeme konštatovať, že v literatúre sú najviac frekventované 3 typy definícií postoja (Zan a Di Martino, 2007):

1. Jednoduchá definícia postoja ako pozitívneho alebo negatívneho stupňa vplyvu spojeného s určitým predmetom (McLeod, 1992).
2. Multidimenzionálna (viaczložková) definícia uznáva 3 komponenty: emocionálne reakcie, presvedčenie viazané k predmetu a správanie sa k predmetu (Hart, 1989; Ruffell a kol., 1998).
3. Bi-dimenzionálna (dvojjložková) definícia neobsahuje explicitne správanie sa k predmetu, postoje sú chápané ako schéma presvedčení a emócií viazaných k predmetu (Daskalogianni & Simpson, 2000).

V rámci dotazníka využívaného v rámci výskumu popísaného v článku bola ako teoretické východisko multidimenzionálna koncepcia postojov, pričom jednotlivé zložky danej definície sú obsiahnuté v samotnej formulácii položiek dotazníka. Viac o procese tvorby daného dotazníka nájde čitateľ v článkoch venujúcich sa vývoju tohto nástroja pod názvom Mathematics Related Beliefs Questionnaire (MRBQ) (De Corte & Op't Eynde, 2002; Andrews a kol., 2007a; Andrews a kol., 2007b).

Dotazník skúmal nasledovné tri oblasti:

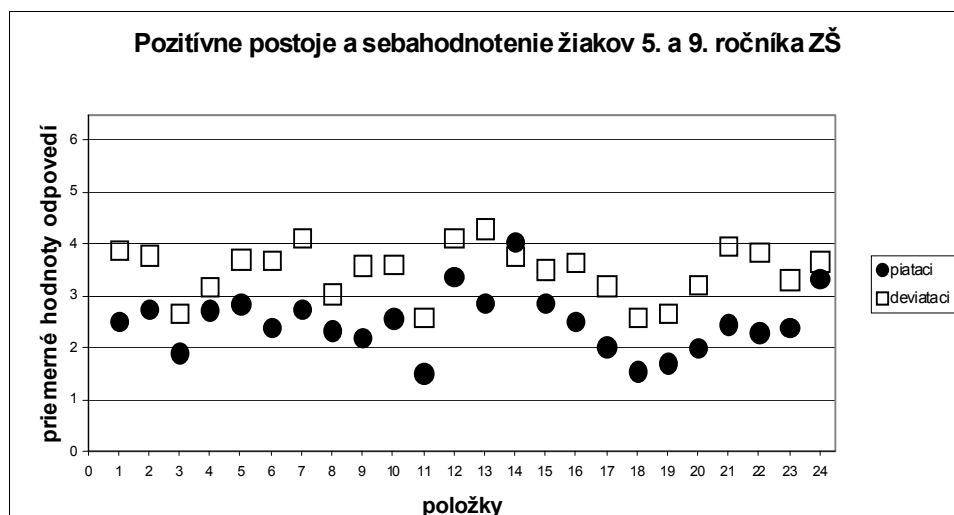
- Pozitívne alebo negatívne postoje k vyučovaciemu predmetu matematika a sebahodnotenie žiackych schopností v matematike. Táto oblasť skúmala postoje žiakov k matematike, k jej vyučovaniu a sebahodnotenie matematických schopností.
- Predstavu o spôsoboch učenia sa matematiky. Uvedená oblasť skúmala štýly učenia sa matematiky a názor žiakov na štýl vyučovania matematiky ako školského predmetu.
- Vplyv učiteľa na postoje žiakov k matematike.

V predkladanom článku pritom kvôli obmedzenému rozsahu prezentujeme len výsledky týkajúce sa prvej skúmanej oblasti dotazníka a z cieľov dotazníkového prieskumu, ktorými boli, ako sme spomenuli vyššie, otestovať vytvorený dotazník a porovnať rozdiely v postojoch žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k vyučovaniu matematiky sa budeme sústrediť na rozdiely v postojoch žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ, keďže o výsledkoch testovania vytvoreného dotazníka sa môže čitateľ dozvedieť v rámci publikovaných článkov (Andrews a kol., 2007b; Andrews a kol., 2008).

Dotazníkového prieskumu, ktorého výsledky prezentujeme v článku, sa celkovo zúčastnilo 204 žiakov, z toho 76 žiakov 5. ročníka a 128 žiakov 9. ročníka. Prieskum sa konal v školskom roku 2006/2007 na základnej škole Alexandra Dubčeka na Majerníkovej ulici v Bratislave. Úvodná strana dotazníka obsahovala informácie o dotazníku a jeho cieľoch. Obsahovala tiež základné informácie o žiakovi a to pohlavie a vek. Dotazník bol zostavený z jednotlivých položiek v tvare Likertovej škály, na ktoré mali žiaci odpovedať jednou zo 6 možností – silne súhlasím (1), súhlasím (2), mierne súhlasím (3), mierne nesúhlasím (4), nesúhlasím (5), silne nesúhlasím (6). Dotazník obsahoval 60 otázok, ktoré boli koncipované tak, aby skúmali zvolené tri oblasti. Prvej oblasti, o ktorej pojednáva tento článok, sa venovalo 31 položiek dotazníka.

Výsledky dotazníkového prieskumu (priemerné hodnoty skóre žiakov v jednotlivých položkách) zobrazujú nasledovné grafy. Pri čítaní grafov treba mať na pamäti, že nižšie hodnoty znamenajú vyššiu mieru súhlasu s danou odpoveďou.

V kategórii pozitívne postoje a sebahodnotenie žiakov bolo vyčlenených 24 položiek dotazníka.



Obrázok 1: Pozitívne postoje a sebahodnotenie žiakov

Položky:

1. Matematiku sa dokáže naučiť každý.
2. Matematika nám umožňuje lepšie pochopiť svet v ktorom žijeme.
3. Ľudia v svojom živote neustále používajú matematiku.
4. Čo sa naučím na matematike môžem použiť aj v ostatných školských predmetoch.
5. Myslím si, že tento rok sa mi na matematike bude dariť.
6. Na matematike sa snažím najlepšie ako viem, aby som ukázal svojmu učiteľovi, že som lepší ako ostatní žiaci.
7. Matematike sa venujem rád.
8. Očakávam, že v písomkách a odpovediach z matematiky budem úspešný.
9. Na matematike sa snažím, aby som ukázal učiteľovi a spolužiakom aký som šikovný.
10. Rozumiem všetkému, čo sme preberali z matematiky tento rok.
11. Myslím si, že matematika je dôležitý predmet.
12. Chápem aj tie najťažšie veci, ktoré sme sa na matematike učili.
13. O matematiku sa veľmi zaujímam.
14. Na to, aby som chápал matematiku, sa nemusím veľmi snažiť.
15. Obyčajne dokážem vyriešiť matematický problém, ktorý si vyžaduje veľa času na riešenie.
16. Zistil som, že dokážem riešiť ťažké matematické problémy s trpezlivosťou.
17. Matematiku sa učím, pretože viem aká je dôležitá.
18. Vedieť matematiku mi pomôže pri zarabáaní peňazí.
19. Matematika je hodnotný a potrebný predmet.
20. Myslím si, že čo sa učíme na matematike tento ročník je pre mňa dôležité.
21. Páči sa mi, čo sa tento ročník na matematike učíme.
22. Myslím si, že učivo matematiky v tomto ročníku je zaujímavé.
23. Som si istý, že sa môžem naučiť riešiť aj najťažšie matematické problémy.
24. Myslím si, že v porovnaní s ostatnými v triede som v matematike dobrý.

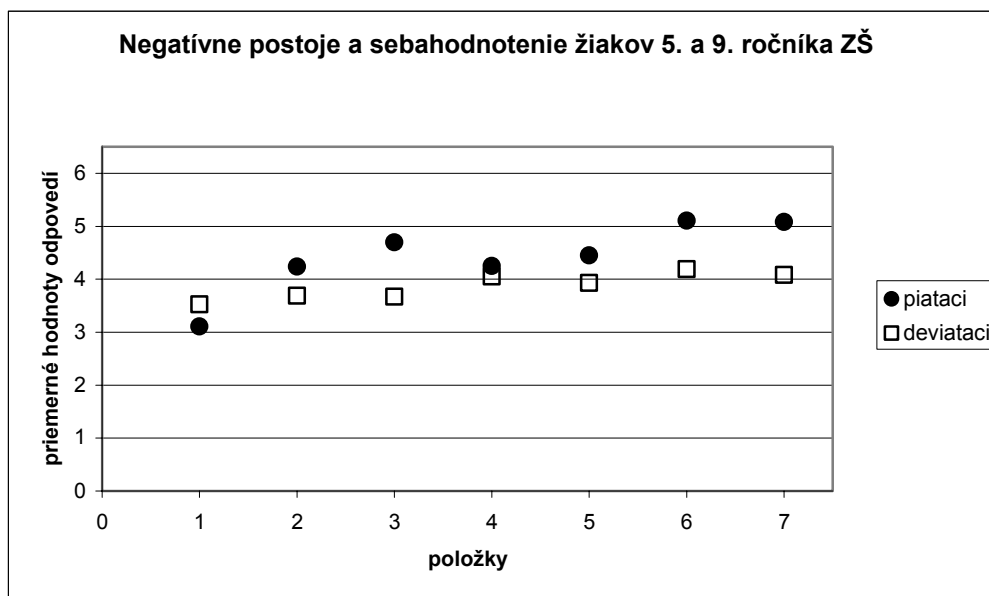
Položky daného grafu by sme si mohli ešte rozdeliť do niekoľkých častí. Položky 1, 7, 13, 21 a 22 nás informujú o náklonnosti žiaka k matematike a k učivu v danom ročníku. Z priemerných hodnôt odpovedí žiakov 9. ročníka v daných položkách môžeme usudzovať, že ich vzťah k matematike a k učivu, ktoré preberajú, je výrazne horší ako u piatakov. Môže to byť podmienené iným štýlom vyučovania a aj iným typom učiva, ktoré je v 9. ročníku abstraktnejšie a pre mnohých žiakov aj menej zaujímavé.

Položky 2, 3, 4, 11, 17, 18, 19 a 20 sa týkajú uvedomenia si dôležitosti matematiky. Z grafu vyplýva, že žiaci 5. aj 9. ročníka si uvedomujú potrebnosť matematiky. Deviatáci si opodstatnenie matematiky uvedomujú pravdepodobne aj na základe toho, že sa pripravujú na prijímacie skúšky na stredné školy, ktoré sa píše aj z matematiky.

Pozitívne sebahodnotenie v matematike skúmajú položky 5, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 23 a 24, v ktorých žiaci 5. ročníka prejavili kladný náhľad na svoje schopnosti v matematike. Žiaci 9. ročníka už boli k svojim schopnostiam v matematike kritickejší.

V položkách 6 a 9 sa prejavuje vplyv vonkajšej motivácie na učenie sa žiakov. Potreba docenenia najmä učiteľom má výrazne väčší vplyv u piatakov ako deviatakov, čo súvisí s vývinom detí. Vplyv učiteľa ako osoby, ktorej sa chcem „zapáčiť“ je u dieťaťa v nižšom veku väčší ako u pubescenta.

V kategórii negatívne postoje a sebahodnotenie žiakov bolo vyčlenených 7 položiek dotazníka.



Obrázok 2: Negatívne postoje a sebahodnotenie žiakov

Položky:

1. Jediné, čo ma na matematike zaujíma, je dostávať dobré známky.
2. Ak nedokážem vyriešiť matematický problém za niekoľko minút, tak ho nedokážem vyriešiť vôbec.
3. Ak neviem vyriešiť matematický problém rýchlo, prestanem sa snažiť.
4. Len veľmi inteligentní žiaci dokážu chápať matematiku.
5. Bežní žiaci nemôžu chápať matematiku, môžu sa len naučiť naspamäť pravidlá, ktoré sa preberajú.
6. Matematika nemá pre môj život nijaký význam.
7. Učiť sa matematiku je zabíjanie času.

Negatívne postoje a sebahodnotenie sa prejavilo viac u žiakov 9. ročníka. U žiakov 5. ročníka môžeme sledovať výraznejšiu závislosť záujmu o matematiku na základe známok.

Záver

Predkladaný článok sa venoval porovnávaniu postojov k matematike a k jej vyučovaniu u žiakov 5. a 9. ročníka základnej školy. Na základe dotazníkového prieskumu prezentovaného v článku môžeme usudzovať, že žiaci 5. ročníka majú lepšie postoje k matematike a k jej vyučovaniu ako žiaci 9. ročníka. Zároveň majú vytvorenú pozitívnejšiu predstavu o svojich schopnostiach v rámci matematiky ako deviataci. To môže súvisieť s narastajúcou náročnosťou učiva matematiky, iným štýlom vyučovania piatakov a deviatakov, iným prístupom učiteľa matematiky k piatakom a deviatakom a aj samotným rozdielom v myslení piatakov a deviatakov.

Uvedené výsledky korešpondujú s predchádzajúcimi štúdiami, ktoré zistili, že postoje žiakov sa často v priebehu školskej dochádzky zhoršujú (Ma & Kishor, 1997). Ukazuje sa, že príliš náročné úlohy, nesprávne zvolené tempo preberania učiva, výber pre žiakov neprimeraného jazyka a negatívne postoje učiteľov majú zlý dopad na postoje žiakov

k matematike v priebehu školskej dochádzky (Philippou & Christou, 1998). Pritom obdobie základnej školy je kľúčové pre formovanie postojov žiakov k matematike, preto je zodpovednosťou učiteľov pokúsiť sa pozitívne ovplyvniť tieto postoje (Ma & Kishor, 1997).

Výsledky prezentované v článku sú ovplyvnené veľkosťou výskumnej vzorky. Aj napriek tomu predstavujú podnet k ďalšiemu štúdiu problematiky vývoja postojov k matematike a k jej vyučovaniu u žiakov v priebehu školskej dochádzky a hľadaniu nástrojov na ich pozitívne ovplyvňovanie. Prínosom v tomto smere môžu byť napríklad aktivizujúce metódy rozvíjajúce motiváciu a tvorivosť žiakov na vyučovaní matematiky (Fulier & Šedivý, 2001) resp. pozitívne vplyvy v rámci pôsobenia učiteľa matematiky.

LITERATÚRA

- [1] Andrews, P., Diego-Mantecón, J., Op 't Eynde, P., Sayers, J. (2007a): *Evaluating the sensitivity of the refined mathematics-related beliefs questionnaire to nationality, gender and age*, In: European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, University of Cyprus, Larnaca, s. 209-218, 2007, ISBN 978-9963-671-25-0.
- [2] Andrews, P., Diego-Mantecón, J., Vankúš, P., Op 't Eynde, P., Conway, P. (2007b): *Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: A three-way cross-sectional pilot comparative study*, 12 Biennial Conference of the European Association for Research on Learning and Instruction (EARLI), Budapest', 2007.
- [3] Andrews, P., Diego-Mantecon, J., Vankúš, P., Op 't Eynde, P., Conway, P. (2008): *A tanulók matematikai meggyőződéseinek értékelése: Egy három országot érintő összehasonlító vizsgálat*, (Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: A three-way cross-sectional pilot comparative study) Iskolakultúra Online, 2008(2), s. 141-159, 2008, ISSN 1789-5170.
- [4] Daskalogianni, K. & Simpson, A. (2000): *Towards a definition of attitude: The relationship between the affective and the cognitive in pre-university students*, Proceedings of PME 24, vol.2, s. 217-224, Hiroshima, 2000, ISSN-0771-100X.
- [5] De Corte, E., & Op 't Eynde, P. (2002): *Unraveling students' belief systems relating to mathematics learning and problem solving*, In: A. Rogerson (Ed.), Proceedings of the International Conference "The Humanistic renaissance in mathematics education", s. 96 -101, Palermo, The Mathematics Education into the 21st Century Project, 2002.
- [6] Fulier, J., Šedivý, O. (2001): *Motivácia a tvorivosť v matematike*, Nitra, UKF, 2001, ISBN 80-8050-445-8.
- [7] Hart, L. (1989): *Describing the Affective Domain: Saying What We Mean*, In: McLeod & Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving*, s. 37-45, New York, Springer Verlag, 1989, ISBN 978-0387-969-24-4.
- [8] Ma X. & Kishor N. (1997): *Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A Meta-Analysis*, Journal for Research in Mathematics Education, 28 (1), 26-47, 1997, ISSN 0021-8251.

- [9] McLeod, D. (1992): *Research on affect in mathematics education: a reconceptualization*, In: D.Grows, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, s. 575-596, New York, McMillan Publishing Company, 1992, ISBN 0-02-922381-4.
- [10] Philippou, N. G., & Christou, C. (1998): *The Effects of a Preparatory Mathematics Program in Changing Prospective Teachers' Attitudes towards Mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 35, 189-206, 1998, ISSN 0013-1954.
- [11] Ruffell, M., Mason, J., Allen, B. (1998). *Studying attitude to mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 35, 1-18, 1998, ISSN 0013-1954.
- [12] Zan, R. & Di Martino, P. (2007): *Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy*, *The Montana Mathematics Enthusiast*, , Monograph 3, s. 157-168, The Montana Council of Teachers of Mathematics, 2007, ISSN 1551-3440.

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

Bc. Emília Kubicová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: emilia.kubicova@post.sk

LIMITA POSTUPNOSTI A JEJ MOTIVÁCIA

MAREK VARGA, MICHAELA KLEPANCOVÁ

ABSTRACT. In our text we introduce several problems that lead to term the limit of a sequence. Some of the mentioned problems would be used as motivational tasks before applying of that term.

Úvod

Pri vyučovaní matematiky sa snažíme dodržiavať istú rozumnú, rokmi overenú šablónu. Pri zavádzaní nových pojmov obyčajne využívame nasledovnú osnovu – motivačné príklady, definícia pojmu, ilustračné príklady.

Motivačné príklady opisujú istú problémovú situáciu, prípadne problém zo životnej reality, ktoré si „pýtajú“ nejaké riešenie. Ak sa táto situácia, prípadne výskyt rovnakej matematickej konštrukcie opakuje v rôznych oblastiach, „oplatí sa“ tento objekt nejak nazvať – pristúpime k samotnej definícii pojmu. Napokon uvidíme ilustračné príklady, na ktorých ukážeme ďalšie využitie práve zavedeného pojmu. Výklad na záver doplníme súborom viet, v ktorých popíšeme mnohé vlastnosti nášho nového objektu.

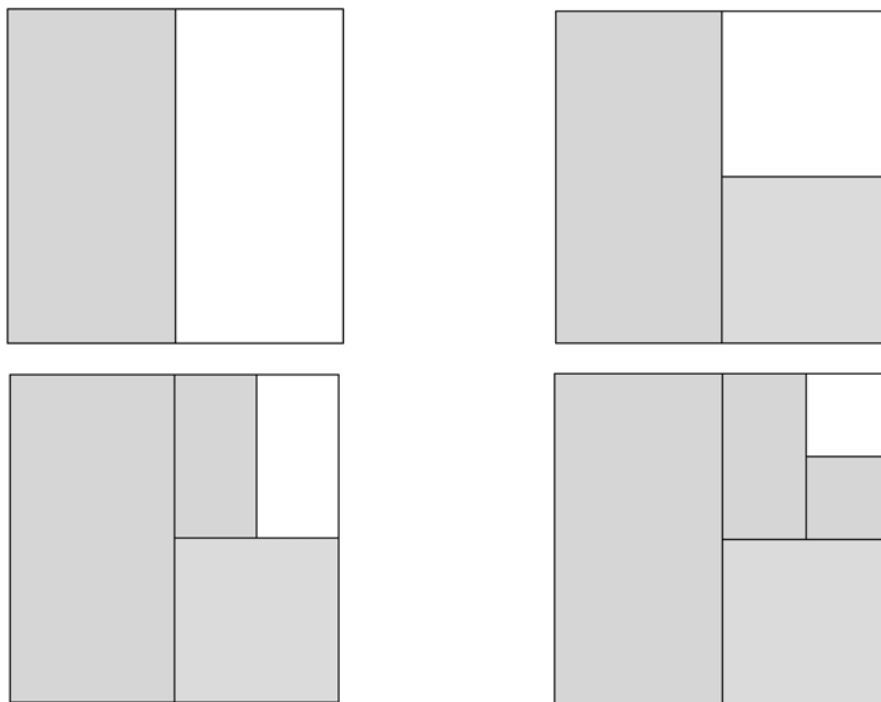
V prípade postupností však obyčajne autori skrípt a učebníc „vpadnú“ rovno do matematiky, resp. priamo do matematickej analýzy. Jednoducho vypíšu niekoľko postupností a na základe pohľadu na ich členy čitateľ intuitívne príde na to, či sa „približujú“ k nejakej hodnote alebo nie. Na základe tohto faktu ich nazveme konvergentné resp. divergentné, navyše predtým môžeme definovať aj samotný pojem limity postupností.

V článku sa teda pokúsime nájsť nejaké príklady, či situácie zo života, na základe ktorých vznikne potreba zavedenia akéhosi pojmu, ktorý bude charakterizovať a popisovať „neobmedzené približovanie sa“.

Limita postupnosti

Ak už máme zostať v matematike, skúsme sa spoľahnúť na príslovie raz vidieť je lepšie ako stokrát počuť. Istú pomoc teda poskytnú obrázky, a nejaké vedomosti z geometrie.

Príklad 1. Nech je daný štvorec so stranou $a=1$. Rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, pričom jeden z nich vyfarbíme. Vyberme si jeden z nich, rozdeľme ho na dve časti (tentokrát to budú štvorce), a opäť jednu z nich vyfarbíme. Zase zoberme jeden zo štvorčekov, rozdeľme ho na dva zhodné obdĺžniky, a jeden z nich vyfarbíme, atď... (pozri obrázok 1). Zaujímá nás, aká časť základného štvorca zostáva vyfarbená po jednotlivých krokoch.



Obrázok 1: Vyfarbovanie štvorca.

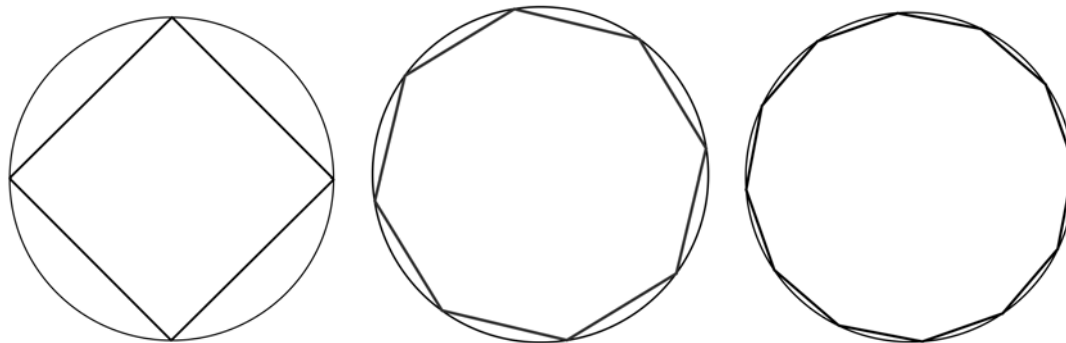
Riešenie. Po prvom kroku bude obsah vyfarbenej plochy $S_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$. Po druhom kroku zostane vyfarbená časť s obsahom $S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$. Po treťom kroku budeme mať vyfarbenú plochu s obsahom $S_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$. Analogicky po ďalšom kroku dostávame $S_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$. Ak by sme pokračovali v tomto postupe, po n -tom kroku bude mať vyfarbená časť obsah $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$; kde $n \in \mathbb{N}$. Uvedeným spôsobom sme teda definovali postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ak by sme v tomto procese pokračovali donekonečna, zrejme by sme vyfarbili celý základný štvorec, ktorého obsah je samozrejme $S = 1$. Samotný proces neobmedzeného vyfarbovania a aj samotný výsledok takejto operácie budeme v matematike zapisovať

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1.$$

Veľkú schopnosť presvedčiť o správnosti nového aparátu bude mať zrejme úloha, v ktorej novými postupmi získame nejaký študentovi už dobre známy výsledok. Tento fakt sa pokúsime prezentovať v nasledovnom príklade.

Príklad 2. Nájdite vzorec na výpočet obvodu o kruhu s polomerom r .



Obrázok 2: Pravidelný štvoruholník, osemuholník, dvanásťuholník vpísaný do kruhu.

Riešenie. Už v starovekej matematike sme sa stretli s problémom vypočítať dĺžku oblúku. Keďže takéto ťažkosti nemáme v prípade hranatých telies (mnohouholníkov), budeme postupovať nasledovne: do kruhu vpíšeme štvoruholník, osemuholník, dvanásťuholník atď. (pozri obrázok 2). Ich obvody budeme môcť vyjadriť pre ľubovoľné n . Z ktoréhokoľvek z n zhodných rovnoramenných trojuholníkov, na ktoré možno rozdeliť daný mnohouholník, totiž vyplýva, že $\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2r}$, kde a je strana daného mnohouholníka. Odtiaľ máme

$$a = 2r \sin \frac{\pi}{n}, \text{ resp. pre obvod daného } n\text{-uholníka dostávame } o_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}.$$

Uvažujme ďalej. Pre veľmi veľké hodnoty n bude už daný mnohouholník „veľmi tesne priliehať“ k danému kruhu, resp. ak obvod kruhu o aproximujeme obvodom mnohouholníka o_n , dopustíme sa veľmi malej chyby. Ideálny prípad by nastal, ak by sme do kruhu vpísali „nekonečneveľauholník“ – vtedy by jeho vrcholy akoby zanikli a vytvorili v podstate danú kružnicu. Takýto myšlienkový proces sa v matematike popisuje pomocou pojmu *limita*. Zapisujeme: $o = \lim_{n \rightarrow \infty} o_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{\pi}{n}$. Po zoznámení sa s limitami

goniometrických funkcií zistíme, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r$.*

Napokon sa môžeme pozrieť aj do nematematických oblastí a nájsť situácie, v ktorých sa stretneme s limitou postupnosti – hoci si to pravdepodobne už ani neuvedomujeme.

Príklad 3. Predpokladajme, že niekde existuje skvelá banka s úrokom 100% za rok, tj. z každej vlozenej sumy S získame po roku výnos S . Keďže sme rozumní a takejto propagande neveríme, vložíme do nej na účet len sumu 1 €, za ktoré by sme po roku mali získať ďalšie 1 €. Ak by uvedená banka vyplácala úroky raz ročne, dostali by sme po roku sumu $(1+1)^1$ €. Ak by sa úroky vyplácali v polročných intervaloch, dostali by sme

* Tento záverečný krok by sme snád mohli aj obrátiť, z kontextu príkladu vyplýva, že

$$o = \lim_{n \rightarrow \infty} o_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi r, \text{ teda zrejme musí platiť } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi.$$

po roku sumu $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$ €. Podobne, ak by sa úroky vyplácali každý trimester, na konci roka by sme mali na účte sumu $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$ €; analogicky v prípade n výplat za rok, by naša suma napokon činila $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ €. Ak by nás banka navyše chcela upútať tým, že peniaze úročí „nekonečne často“, resp. spojíte, z každého vloženého eura by sme mali po roku sumu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ eur. Symbolom e sme označili známe Eulerove číslo, pre ktoré platí $e \approx 2,71828184590\dots$ (teda $e \in \mathbb{I}$).

Príklad 4. Vážne chorý pacient musí užívať 100 mg lieku denne. Jeho organizmus každý deň eliminuje 20% lieku. Odhadnite dlhodobú hladinu lieku v tele tohto pacienta!

Riešenie. Prvý deň sa v tele pacienta nachádza 100 mg lieku. Druhý deň je celková hladina lieku v tele $100 + 100 \cdot 0,8$ mg lieku (druhá dávka + zostatok z predošlého dňa).

Tretí deň je táto hladina $100 + (100 + 100 \cdot 0,8) \cdot 0,8 = 100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot 0,8^2$ mg...

To znamená, že n – tý deň je v tele pacienta $100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot 0,8^2 + \dots + 100 \cdot 0,8^n$ mg lieku. Pomocou vzorca pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti (s kvocientom

$q = 0,8$) dostávame $100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot 0,8^2 + \dots + 100 \cdot 0,8^n = 100 \cdot \frac{0,8^n - 1}{0,8 - 1}$. Pacient

užíva tento liek dlhodobo, to znamená „veľa“ resp. „veľmi veľa“ dní. Tento fakt môžeme opäť vyjadriť pomocou *limity postupnosti* – pre hladinu S uvedeného lieku v tele

pacienta teda platí $S = \lim_{n \rightarrow \infty} 100 \cdot \frac{0,8^n - 1}{0,8 - 1}$.

Príklad 5. Prvý kyv hodinového kyvadla má dĺžku 2 m. Ak bude mať každý nasledujúci dĺžku 99,9 % predchádzajúceho, akú dráhu kyvadlo prejde, kým zastaví?

Riešenie. Hlavná myšlienka riešenia je v podstate zhodná s riešením predošlého príkladu, preto si ho dovoľíme vynechať.

Záver

Dôležitou súčasťou vyučovacieho procesu je motivácia. Preto si myslíme, že by nemala chýbať hlavne pri definovaní fundamentálnych pojmov v matematike – ako napríklad limita postupnosti. Načrtli sme niekoľko príkladov, ktoré by nám mohli pri tom pomôcť (aj keď treba sebakriticky uznať, že posledné dva skôr hraničia s témou *Nekonečné rady*).

LITERATÚRA

- [1] Macháček, M.: *Encyklopedie fyziky*, Praha, Mladá fronta, 1995, ISBN 80-204-0237-3
- [2] Varga, M.: *Niektoré aspekty problémového vyučovania matematickej analýzy*, dizertačná práca, 2006.

PaedDr. Marek Varga, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: mvarga@ukf.sk

Mgr. Michaela Klepancová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: michaela.klepancova@ukf.sk

VYUŽITIE GEOGEBRY PRI RIEŠENÍ ÚLOH NA GEOMETRICKÉ KONŠTRUKCIE S OBRÁZKOVÝM ZADANÍM

KITTI VIDERMANOVÁ – JANKA MELUŠOVÁ

ABSTRACT. In our contribution we present the use of the reverse construction in mathematics teacher training. While implementing the Computer Algebra Systems (CAS) in education teachers assess tasks and problems solved by these systems. We used the CAS GeoGebra to show how to deal with this problem. The utility of replaying construction is necessary. In case of right solution, the assessment is not problematic, but in the case of wrong construction teacher has to find out where is the fault, what object was constructed. Each student was given by 3 constructions in GeoGebra and they had to find out what was the task, to set what was given (independent) objects and what was the requested (dependent) object. In the paper we present the successfulness of students in solving given problems, their methods of problem solving. We also present their opinions to use CAS in geometry education and to this type of activity in teacher training.

Úvod

Myšlienka nášho experimentu vznikla pri opravovaní domácich úloh študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky. V rámci seminárov predmetu Základy matematiky 2, ktorého obsahom je opakovanie stredoškolskej geometrie, sme opakovali aj konštrukčné úlohy – planimetrické i stereometrické. Riešenia domácich úloh zasielali študenti na kontrolu e-mailom. Pre konštrukcie využívali programy Cabri geometria 2 alebo GeoGebra. Jedna študentka sa pomýlila pri opisovaní zadania konštrukčnej úlohy a keď zaslala na kontrolu svoje riešenie, videli sme inú konštrukciu, ako sme očakávali. Snažili sme sa zistiť, kde a akej chyby sa dopustila. Hľadanie chyby bolo časovo i obsahovo náročné. Nakoniec sa nám podarilo odhaliť nesprávne opísané zadanie domácej úlohy.

Konštrukčné úlohy

Je všeobecne známe, že konštrukčné úlohy nepatria medzi obľúbené u žiakov a spôsobujú na školách väčšie ťažkosti ako iné matematické úlohy. Príčinou môže byť, že každá konštrukčná úloha je vlastne slovná úloha, ktorá sa rieši úsudkom, pretože konštrukčná geometria nemá k dispozícii taký kalkul, ako má napr. algebra.

V etape modernizácie matematiky sú konštrukčné úlohy obsahovo stále viac a viac okresávané. V roku 1954 boli na stredných školách geometrii a rysovaníu venované 2 až 3 vyučovacie hodiny týždenne. Dnes sa matematika vyučuje na gymnáziách v 1. ročníku 4 hodiny týždenne, v 2. a 3. ročníku 3 hodiny týždenne, a v maturitnom ročníku je to jedna hodina týždenne. Učivo geometrie je rozdelené do prvých troch ročníkov.

Z výskumu zameraného na konštrukčné úlohy [2] vyplýva, že konštrukčné úlohy sú nielen u žiakov, ale aj u učiteľov matematiky menej obľúbeným učivom.

Nesmieme však zabúdať, že vyučovanie konštrukčných úloh je veľmi potrebné a prospešné, pretože

- poskytujú krásne motivačné úlohy, ktoré podnecujú zvedavosť riešiteľa a vedú k samostatnému objavovaniu zákonitostí,
- ukazujú jasný cieľ – treba zostrojiť – na rozdiel od viet a dôkazov, ktorých význam a zmysel býva žiakovi často nejasný,

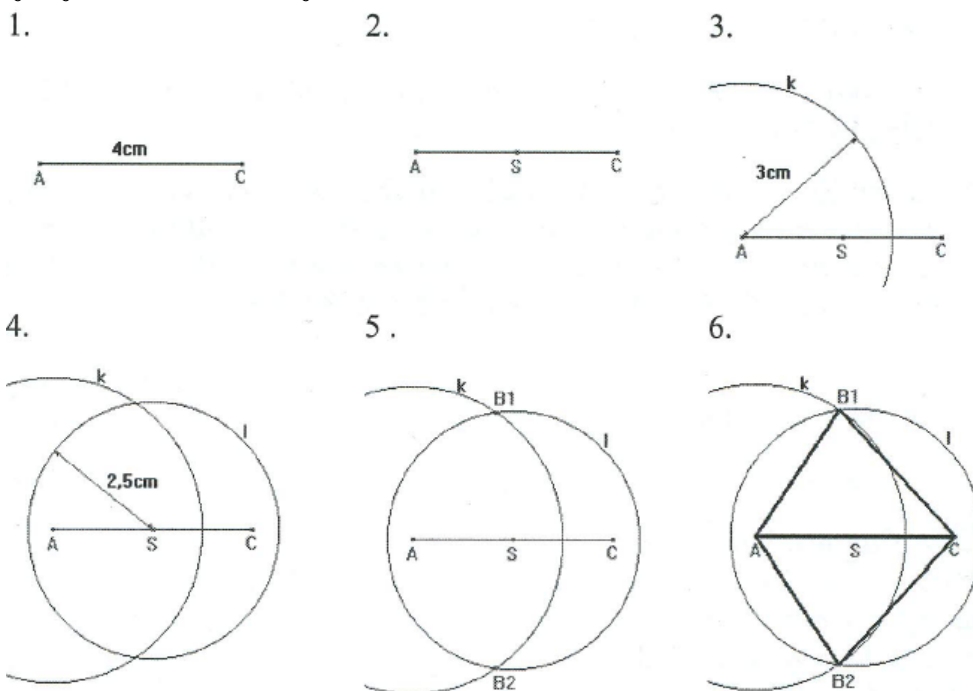
- sú prirodzeným mostom, po ktorom môžu manuálne zručnosti a skúsenosti riešiteľa prejsť do jeho geometrickej poznatkovej štruktúry,
- ukazujú, ako možno teoretické poznatky zúžitkovať v praxi,
- rozvíjajú schopnosť dialektického videnia vzťahu teórie a praxe,
- prispievajú k interiorizácii pojmov a viet,
- sú vhodným testovacím prostriedkom, pomocou ktorého môže učiteľ diagnostikovať kvalitu neformálnych znalostí žiaka.

Úlohy na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním

Pod úlohami na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním máme na mysli úlohy, v ktorých je daná konštrukcia sledom obrázkov zostrojovania konštrukcie alebo slovným (symbolickým) postupom konštrukcie. Úlohou študenta je zistiť, aký útvar sme mali zostrojiť a ktoré prvky boli na jeho konštrukciu zadane. Tieto netradične zadane úlohy môžu spestriť výučbu a napomáhajú aj k lepšiemu pochopeniu danej problematiky. Študent nerysuje, ale skúma a vysvetľuje jednotlivé kroky danej konštrukcie. To vedie k hlbšiemu porozumeniu pri riešení konštrukčných úloh.

Grafické zadania úloh učia študentov čítať z obrázka. Grafické zadanie úlohy môže byť dvojaké – séria obrázkov (ukážka na obr. 1), pričom každý nový krok konštrukcie je daný novým obrázkom, alebo zadáme hotovú konštrukciu v dynamickom geometrickom softvéri – Cabri geometria 2 alebo GeoGebra. Kým prvú možnosť môžeme zaradiť do výučby aj v klasickej triede, druhú možnosť môžeme realizovať iba ak máme k dispozícii počítačovú učebňu vybavenú potrebným počtom počítačov (ideálny prípad je, ak každý žiak pracuje samostatne).

Ukážka zadania sériou obrázkov



Obrázok 1: Ukážka zadania sériou obrázkov (Pavlovičová, 2006)

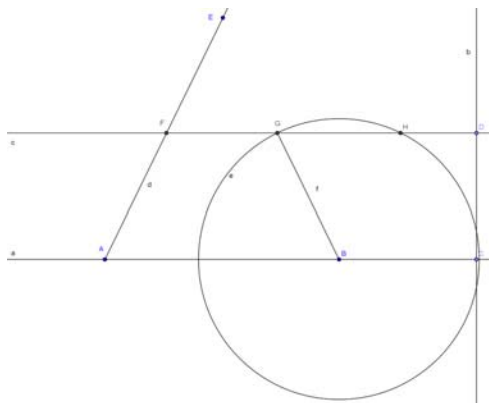
Zadanie a vyhodnotenie experimentu

V rámci experimentu sme zadali študentom 3 úlohy – hotové konštrukcie v programe GeoGebra. Dve z úloh boli planimetrické a jedna stereometrická. Program GeoGebra obsahuje funkciu *prehrať konštrukciu*, ktorú pri riešení úloh všetci študenti využívali.

Experimentu sa zúčastnilo 8 študentov. Každý z nich mal k dispozícii počítač s nainštalovaným softvérom GeoGebra. Svoje úvahy zapisovali študenti aj na papier.

Úloha 1

Z konštrukcie zistite, aký útvar sme mali zostrojiť a ktoré prvky na jeho zostrojenie boli zadané.



Obrázok 2: Daná konštrukcia úlohy 1 v programe Geogebra

Riešenie

Zadané prvky: dĺžka základne AB , veľkosť uhla α , výška lichobežníka.

Zostrojiť sme mali rovnoramenný lichobežník $ABGF$.

Vyhodnotenie študentských riešení

Správne riešenie sa objavilo u troch študentov. Títo študenti správne sformulovali svoje riešenie a napísali zadanie úlohy, ku ktorej patrí konštrukcia na obr. 1.

U dvoch študentov k zadaným prvkom pribudla aj dĺžka ramena lichobežníka BG . Títo študenti si v rámci riešenia neuvedomili rovnoramennosť lichobežníka. Ako hľadaný útvar označili lichobežník.

Dvaja študenti nezapísali zadané prvky. Namiesto toho symbolicky prepísali postup konštrukcie. Hľadaný útvar označili správne - rovnoramenný lichobežník.

Posledný študent tiež nezapísal zadané prvky, a ako hľadaný útvar označil lichobežník. V prepísanom postupe konštrukcie sme videli, že študent konštruje rameno BG pomocou kružidla prenášaním ramena AF .

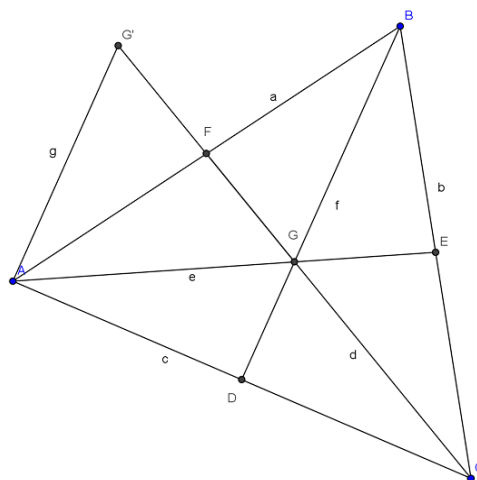
Úloha 2

Z konštrukcie zistite, aký útvar sme mali zostrojiť a ktoré prvky na jeho zostrojenie boli zadané.

Riešenie

Zadané prvky: dĺžky ťažníc trojuholníka.

Zostrojiť sme mali trojuholník AGG' (ako správne riešenie sme uznali aj trojuholník s tretinovým obsahom).

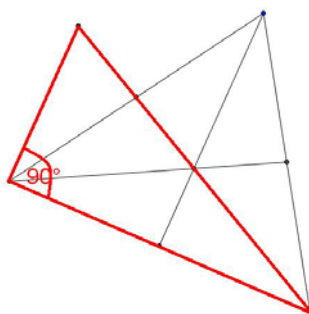


Obrázok 3: Daná konštrukcia úlohy 2 v programe GeoGebra

Vyhodnotenie študentských riešení

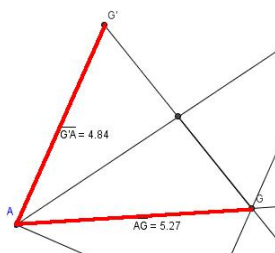
Táto úloha bola najťažšia zo zadanych úloh. Dvaja študenti napísali, že bol zadán trojuholník ABC a mali sme zostrojiť trojuholník AGG' , ktorého obsah je jedna tretina daného trojuholníka. Toto riešenie sme uznali ako správne.

Dvaja študenti napísali, že daný bol trojuholník ABC , a zostrojiť sme mali pravouhlý trojuholník ACG' (obr. 4).



Obrázok 4: Časť študentského riešenia úlohy 2

Títo študenti zabudli využiť najväčšiu moc programu GeoGebra, a to práve jeho dynamiku. Nepokúšali sa manipulovať s konštrukciou, pretože keby tak vykonali, zistili by, že ich predpoklad pravého uhla nie je správny.

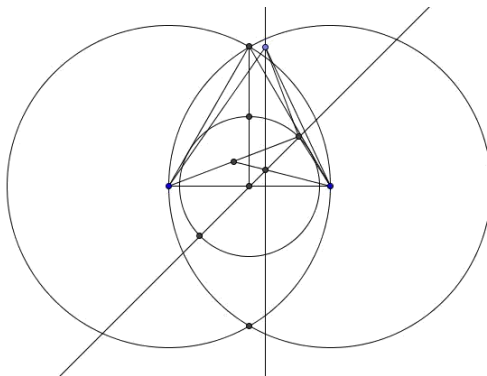


Obrázok 5: Časť študentského riešenia úlohy 2

Ďalší dvaja študenti ako zadanie uvádzajú tiež trojuholník ABC , ale hľadaný útvar identifikovali ako rovnostranný trojuholník AGG' . Nevyužili dynamiku softvéru. Poslední dvaja študenti ako zadanie tiež uvádzajú trojuholník ABC , a ako hľadaný útvar uviedli rovnoramenný trojuholník AGG' . Z popísaných úvah sme vydedukovali nesprávne interpretovanú vlastnosť stredovej súmernosti (obr. 5).

Úloha 3

Z konštrukcie zistite, aký útvar sme mali zostrojiť a ktoré prvky na jeho zostrojenie boli dané.



Obrázok 6: Daná konštrukcia úlohy 3 v programe GeoGebra

Riešenie

Zadané prvky: dĺžka strany podstavy, výška ihlana.

Zostrojiť sme mali obraz pravidelného trojbokého ihlana vo voľnom rovnobežnom premietaní.

Vyhodnotenie študentských riešení

Pri analýze riešení tejto úlohy nás prekvapilo, že iba jeden študent zapísal zadané údaje, teda úplné riešenie bolo v tomto prípade iba jedno.

Zvyšných 7 študentov nezapísalo prvky dané pre konštrukciu. Z nich 5 správne pomenovalo narysovaný útvar ako obraz pravidelného trojbokého ihlana vo voľnom rovnobežnom premietaní. Jeden študent ho označil ako pravidelný štvorsten. Posledný študent nazval skonštruovaný útvar iba obraz ihlana vo voľnom rovnobežnom premietaní, bližšie ho nepopísal.

Názory študentov

Po ukončení experimentu nám študenti napísali svoje názory na vyučovanie geometrie pomocou IKT a zaradenie úloh na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním vrámci učiva konštrukčných úloh.

Využitie dynamických geometrických softvérom na vyučovanie konštrukčných úloh:

- „Je zaujímavé pracovať na počítači, ale žiaci si musia najprv osvojiť zručnosti s pravítkom a kružidlom.“
- „Geometriu som mala vždy najradšej z celej matematiky a páči sa mi aj rysovanie na počítači. Ale napriek tomu by som radšej učila klasickým spôsobom na papier do zošita, aby si žiaci získali zručnosť aj v takejto činnosti. Pri počítači trávia aj bez toho veľa času.“
- „Pomocou PC je to pre deti zábavnejšie a zaujímavejšie.“

Zaradenie úloh na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním do učiva geometrie:

- „Zo začiatku som celkom nechápal, o čo ide. Je to celkom zaujímavý postup, ktorý rozvíja myslenie. Do výučby by som to zaradil potom, ako preberieme klasické konštrukčné úlohy.“
- „Keďže deti neradi rysujú, určite by som takéto úlohy zaradila do výučby. Myslím si, že aj toto by mohlo deti učiť konštrukčným úlohám.“
- „Vôbec nie je jednoduché sa vyznať v tých konštrukciách. Zaradila by som ich na stredné a vysoké školy.“
- „Takéto vyučovanie konštrukčných úloh je pre mňa nové, veľmi zaujímavé a zároveň náročné. Pre žiakov takéto úlohy môžu pôsobiť ako hádanky a môže to byť pre nich motivujúcejšie. Mnohé vlastnosti geometrických útvarov môžu byť viditeľnejšie, keď je konštrukcia hotová, než v prípade, že majú iba zadanie, a predstavu o konštrukciu si majú vytvoriť sami.“

Záver

Matematika a vrátenci nej konštrukčné úlohy patria u žiakov a študentov k menej obľúbeným častiam matematiky, preto musíme hľadať a zavádzať do vyučovania vždy nové a nové motivačné prvky. V našom príspevku sme predstavili úlohy na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním pomocou IKT.

Ohľasy u budúcich učiteľov matematiky sú vo väčšine prípadov pozitívne. Myslíme si, že vytvorenie pozitívneho vzťahu k matematike všeobecne závisí aj od učiteľa. Ak učiteľ učí svoj menej obľúbený celok štýlom „*nech je to čo najskôr za mnou*“, žiaci a študenti to vycítia, a nemôžeme sa potom čudovať, že je pre žiakov matematika nezaujímavá.

LITERATÚRA

- [1] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989. ISBN 80-08-01344-3
- [2] Pavlovičová, G.: *O niektorých názoroch učiteľov na konštrukčné úlohy*. In zborník zo 7. vedeckej konferencie doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov, s. 654-658. Nitra: UKF, 2006. ISBN 80-8050-960-3
- [3] Pavlovičová, G.: *Geometrické konštrukcie trochu inak*. In Acta mathematica 9: zborník zo IV. nitrianskej matematickej konferencie, s. 221-226. Nitra: UKF, 2006. ISBN 80-8094-036-3
- [4] Šedivý, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia*. Nitra: UKF, 2001. 122 s. ISBN 80-8050-417-2
- [5] Vyšín, J.: *Metodika řešení matematických úloh*, 2. doplnené vydanie. Praha: SPN, 1962. 192 s.

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: kvidermanova@ukf.sk

PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: jmelusova@ukf.sk

VYUŽITIE PROGRAMU WINPLOT VO VYUČOVANÍ FUNKCIÍ A ICH VLASTNOSTI (VÝSLEDKY EXPERIMENTU)

ALENA VIZIOVÁ

ABSTRACT. We present our experiences with teaching properties of linear and quadratic function by a computer's program Winplot. It can help students to understand these mathematical problems. If we use ICT during the classes, computers can contribute to progress of information literacy.

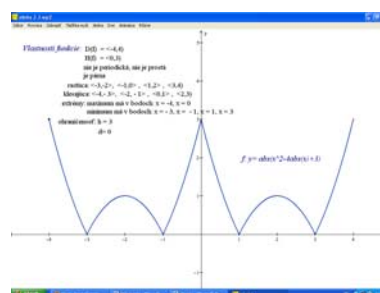
1 Úvod

Nutnosť inovovať vzdelávací proces pre neustále prenikanie informačných a komunikačných trendov do všetkých oblastí života a sektorov hospodárstva je nevyhnutnosťou v procese rozvoja každej spoločnosti. V súčasnosti prebieha prudký rozvoj informačných technológií, ktorý sa musí odraziť aj vo vzdelávacom procese, jeho modernizáciou a zavádzaním nových technológií. Pre splnenie tejto úlohy musí byť aj učiteľ dostatočne informačne gramotný, aby vedel činnosť študentov usmerňovať, podporovať, aby jeho metódy a práca inšpirovali študentov k samostatnosti a tvorivosti. Niektoré ciele a metódy informatizácie jednotlivých predmetov sú už teoreticky rozpracované. Avšak na mnohých školách chýba odvaha učiteľov získavať uvedenou činnosťou praktické skúsenosti. Súčasná školská reforma kladie dôraz na modernizáciu výučby zavádzaním IKT do vyučovacieho procesu. Z tohto dôvodu v našom príspevku popisujeme program Winplot a jeho využitie vo vyučovaní funkcií a ich vlastností.

2 Všeobecná charakteristika programu Winplot

Program Winplot je dostupný na <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> a je voľne šíriteľný. Zobrazuje grafy v rovine aj v trojrozmernom priestore. Dokáže vykresliť body, funkcie dvoch a troch premenných, zakreslí postupnosť bodov, funkcie dané parametricky, funkcie v polárnych, sférických a cylindrických súradniciach, nájde nulové body, priesečníky, Taylorove aproximácie, primitívne funkcie, približné hodnoty určitého integrálu, vykreslí plochu ohraničenú krivkami, dokáže zobrazit' aj rotačné telesá a určiť ich objem. Všetky moduly programu Winplot majú pomerne dôkladné *Help menu* (pomocníka), ktoré poskytujú podrobné informácie o danom programe. Okrem Winplotu sa na vykresľovanie grafov funkcií dajú použiť programy: *AutoGraph*, *Derive*, *Equation grapher*, *Graphic calculus WinPlot*, *GeoGebra*,...

Študenti, ktorí absolvovali hodiny matematiky v počítačovej učebni, v ktorej pracovali s programom Winplot, dokázali zostrojiť (okrem lineárnych funkcií) v danom programe aj grafy lineárnych lomených funkcií (aj s absolútnou hodnotou) a kvadratických funkcií (aj s absolútnou hodnotou) (obr. 1).

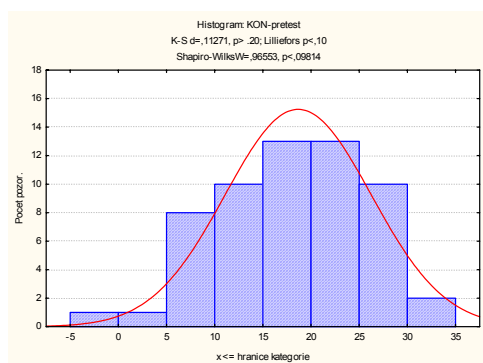


Obr. 1: Prostredie programu Winplot

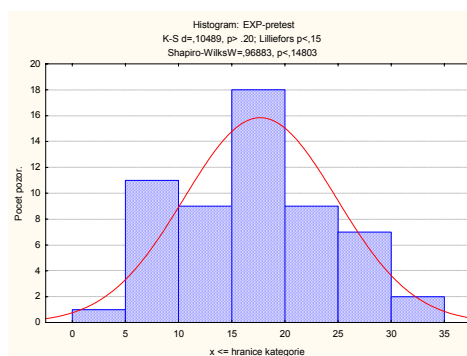
3 Štatistické vyhodnotenie experimentu

Počítačom podporované vyučovanie sme realizovali v školskom roku 2009 /2010 na vzorke 111 študentov (56 študentov experimentálnej skupiny a 55 študentov kontrolnej skupiny). Pred jeho realizáciou zúčastnení študenti písali didaktický test – pretest, ktorým sme zistili ich vstupné vedomosti. Kontrolnú skupinu tvorili študenti triedy kvinty B (KON 1 – 31 študentov) a 1. C (KON 2 – 24 študentov), ktorí absolvovali vyučovanie v triede pomocou kriedy a tabule (rysovacích pomôcok a papiera). Experimentálnu skupinu tvorili študenti triedy kvinta A (EXP 1 – 31 študentov) a 1. B (EXP 2- 25 študentov), ktorí absolvovali vyučovanie s podporou počítača a programu Winplot. Počítač s daným programom mal k dispozícii každý študent z experimentálnej skupiny a učivo v skupinách bolo preberané v rovnakom časovom harmonograme. Predtým ako začali študenti začali riešiť konkrétne úlohy v programe Winplot, tak sa najskôr zoznámili s jeho ovládaním a daný program si nainštalovali aj do svojich domácich počítačov. Na začiatku a konci experimentálneho vyučovania boli obidve skupiny testované didaktickým testom. Cieľom bolo overiť hypotézu výskumu H: „Študenti vzdelávaní pomocou IKT (programu Winplot) dosahujú minimálne rovnocenné výsledky (nie horšie) v riešení matematických úloh zameraných na funkcie a ich vlastnosti ako študenti vzdelávaní bez použitia IKT.“

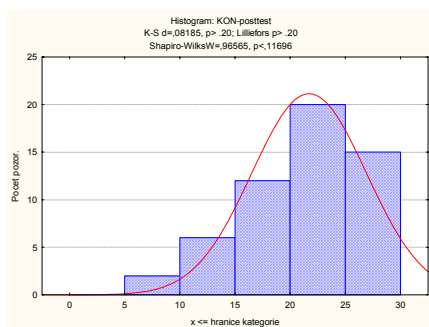
Na jej overenie sme potom stanovili aj štatistické hypotézy. Prvú z týchto hypotéz (H_0 : Medzi kontrolnou a experimentálnou skupinou nie je významný rozdiel v poznatkoch: vlastnosti funkcie, lineárna, kvadratická funkcia a kvadratická funkcia s absolútnou hodnotou) sme na základe výsledkov pretestu prijali, aby sa potvrdil náš predpoklad o rovnocennosti úrovne vedomostí študentov experimentálnej a kontrolnej skupiny. Druhú hypotézu (H_A : Výsledky posttestu nezávisia od použitia programu Winplot.) sme zamietli. Jej zamietnutím nadobúda platnosť alternatívna hypotéza, ktorá tvrdí, že výsledky posttestu závisia od použitia Winplotu vo vyučovaní. Na štatistické vyhodnotenie experimentu sme použili softvér STATISTICA CZ 8 (tvorba grafov a výpočtov). Rozdelenie skóre v základnom súbore možno považovať za normálne v skupinách EXP – pretest (obr. 3), KON – pretest (obr. 2) a KON – posttest (obr. 4), pretože p - hodnoty testov normality (Kolmogorovho - Smirnovho, Shaphirovho - Wilkovho) sú väčšie ako 0,05. Skóre v skupine EXP-posttest (obr.5) nemožno považovať za normálne, pretože $p = 0,001$, čo je menej ako 0,05. Na testovanie hypotézy o rovnosti stredných hodnôt skóre v experimentálnej a kontrolnej skupine sme použili dvojvýberový t - test.



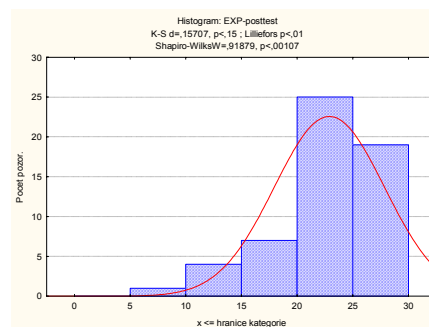
Obr.2



Obr.3



Obr.4



Obr.5

Popisné štatistiky spolu s výsledkami t - testu a F - testu, pričom porovnávame experimentálnu (EXP - pretest) a kontrolnú (KON - pretest) skupinu sú uvedené v nasledujúcej tabuľke (tab.1).

T-test pro nezávislé vzorky (pretest)											
Pozn.: Promenné byly brány jako nezávislé vzorky											
Skup. 1 vs. skup. 2	Prumer skup. 1	Prumer skup. 2	Hodnota t	sv	p	Poc.plat. skup. 1	Poc.plat. skup. 2	Sm.odch. skup. 1	Sm.odch. skup. 2	F-pomer Rozptyly	p Rozptyly
KON vs. EXP	18,99123	17,68421	0,968691	112	0,334787	57	57	7,229955	7,176121	1,015060	0,955597

Tab. 1: Popisné štatistiky pre kontrolnú a experimentálnu skupinu

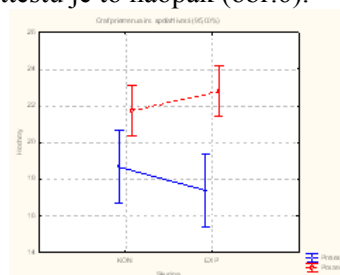
Z výsledkov t - testu nemôžeme zamietnuť hypotézu tvrdiacu, že rozdiel skóre pretestu medzi experimentálnou a kontrolnou skupinou nie je štatisticky významný ($p = 0,334$). Variabilita vedomostí v týchto skupinách nie je štatisticky významná ($F = 1,015$; $p = 0,955$). Vzhľadom na to, že rozdelenie skóre v súbore EXP - posttest nie je normálne, na overenie hypotézy H použijeme neparametrický Mann - Whitneyov U test (tab.2) a testujeme štatistickú hypotézu: H_0 : Rozdelenie skóre posttestu v základných súborech experimentálnej a kontrolnej skupiny je identické. proti hypotéze: H_A : Rozdelenie skóre posttestu v základných súborech experimentálnej a kontrolnej skupiny nie je identické.

Mann-Whitneyuv U test										
Die promen. Skupina										
Promenná	Sct por. KON	Sct por. EXP	U	Z	Úroveň p	Z upravené	Úroveň p	N platn. KON	N platn. EXP	2*1str. presné p
Posttest	2851,000	3365,000	1311,000	-1,34770	0,177757	-1,34897	0,177348	55	56	0,178460

Tab.2: Výsledky Mann - Whitneyovho U testu

Z výsledkov vyplýva že p - hodnota pre U - test je rovná 0,177, čo je viac ako nami zvolená hladina významnosti a teda štatistickú hypotézu H_A : „Rozdelenie skóre posttestu v základných súborech experimentálnej a kontrolnej skupiny nie je identické“ nezamietame. Teda medzi skóre v týchto skupinách nie je signifikantný rozdiel. Z interakčného grafu vidíme, že priemerné skóre experimentálnej skupiny z pretestu je nižšie ako kontrolnej skupiny. V prípade skóre z posttestu je to naopak (obr.6).

Tento rozdiel však nie je štatisticky významný. Na záver môžeme povedať, že použitím počítača s programom Winplot sa výsledky experimentálnej skupiny v porovnaní s kontrolnou skupinou mierne, ale štatisticky nevýznamne zlepšili. Tým je overená aj platnosť hypotézy výskumu.



Obr. 6: Graf priemerov skóre pretestu a posttestu pre EXP a KON skupinu

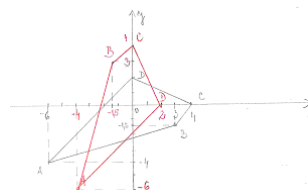
4 Vyhodnotenie úloh pretestu a posttestu a ich riešenie študentmi

U každého študenta bol zaznamenaný počet bodov, ktoré získal za pretest a posttest. Za pretest (posttest) mohol študent získať maximálne 32 (30) bodov. V preteste študenti riešili 6 úloh a po jeho analýze sme vypočítali aj percentuálnu úspešnosť riešenia každej úlohy v kontrolnej a experimentálnej skupine (tab.3).

	EXP - pretest	KON - pretest
úloha 1	88,30%	94,74%
úloha 2	86,26%	68,13%
úloha 3	40,70%	44,56%
úloha 4	46,10%	64,62%
úloha 5	66,67%	64,69%
úloha 6	52,05%	41,52%

Tab.3: Úspešnosť riešenia úloh pretestu experimentálnou a kontrolnou skupinou

Úloha 1: *Narysujte štvoruholník ABCD, keď platí: $A[-4,-6]$, $B[-1,5; 3]$, $C[0, 4]$, $D[2, 0]$.* Študenti oboch skupín robili najčastejšie chyby pri zakresľovaní bodov v súradnicovej sústave - zámena x -ovej a y -ovej súradnice bodov (obr.7)



Obr. 7: Riešenie úlohy 1 z pretestu

Úloha 2: *Zostavte tabuľku priamej úmernosti $y = 2x$ a zostrojte jej graf pre $x \in \{-2, 0, 1, 3, 5\}$. Čo je grafom priamej úmernosti?"*

Najčastejšie zabudli študenti napísať odpoveď na danú otázku. Medzi tými, ktorí odpovedali, sa vyskytli správne aj nesprávne odpovede. Napr. jeden študent z 1.B triedy uviedol, že grafom priamej úmernosti sú všetky reálne čísla.

Najväčšie ťažkosti študentom robilo riešenie úlohy 3: *Dané sú body: $A[4; 0,25]$, $A'[-4, -6]$, $B[8; 0,25]$, $C[0,25; 8]$, $D[4; 0,125]$, $E[0,125; 0,25]$, $F[0,125; 8]$, $G[4,4]$, $H[0,2; 5]$. Zistite, ktorý z daných bodov leží na grafe nepriamej úmernosti $y = \frac{1}{2x}$.* Študenti, ktorí vedeli

riešiť danú úlohu získali za ňu plný počet bodov (10 b), resp. tí, ktorí zistili len niekoľko bodov (nie všetky), získali adekvátny počet bodov podľa vzorového riešenia. Mnohí študenti danú úlohu vôbec neriešili.

Úloha 4: *Riešte sústavu rovníc $x + \frac{y+2}{3} = 3$, $\frac{x+2}{4} + \frac{y}{2} = \frac{11}{4}$ a urobte skúšku správnosti.*

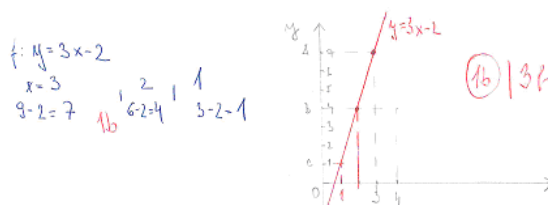
V riešeníach sa najčastejšie vyskytli numerické chyby aj napriek správne použitej sčítovacej (dosadzovacej) metóde.

Podobne to bolo aj pri riešení úlohy 5: *Riešte nerovnicu $3(x+2) - 4x+5 \leq -2x + 5(2x-3)$.* Študenti najčastejšie robili numerické chyby (obrátenie znaku nerovnosti pri násobení záporným číslom).

Úloha 6: *Zostrojte graf funkcie $f: y = 3x - 2$.*

Pri riešení tejto úlohy študenti kvinty nemali postačujúce vedomosti. Učili sa zostrojiť iba graf priamej a nepriamej úmernosti, ale napriek tomu niektorí z nich dokázali získané vedomosti využiť a danú úlohu vyriešiť.

Chýb pri riešení úlohy sa dopúšťali aj študenti 1. ročníka aj napriek tomu, že učivo lineárna funkcia, jej vlastnosti a graf preberali na ZŠ. Chýb sa dopúšťali aj pri vytvorení tabuľky pre funkčnú závislosť x , y a následne potom pri zostrojení grafu funkcie.



Obr.8: Riešenie úlohy 6 pretestu

Rovnako ako v prípade pretestu aj pre posttest sme urobili analýzu jednotlivých úloh a vypočítali sme ich percentuálnu úspešnosť riešenia úloh kontrolnou a experimentálnou skupinou (tab.4).

	EXP - posttest	KON - posttest
úloha 1	77,23%	76,36%
úloha 2	76,56%	60,00%
úloha 3	74,62%	73,64%
úloha 4	86,91%	73,33%
úloha 5	39,29%	60,00%

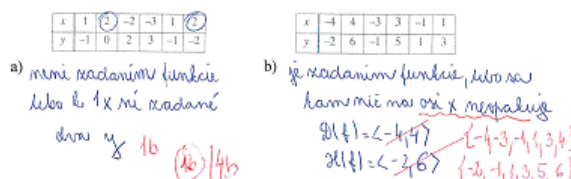
Tab.4: Úspešnosť riešenia úloh posttestu experimentálnou a kontrolnou skupinou

Úloha 1: Zostrojte graf funkcie $y = |x^2 - 10x + 21|$, určte jej vlastnosti, vrchol a priesečníky so súradnicovými osami. Zapište rovnicu osi paraboly.

Študenti experimentálnej skupiny boli lepší pri presnejšom zostrojení grafu danej funkcie, určení jej vlastností a výpočte priesečníkov grafu funkcie so súradnicovými osami. K najčastejším chybám v kontrolnej skupine patrila vlastnosť funkcie - monotónnosť a výpočet priesečníkov grafu funkcie s osou x .

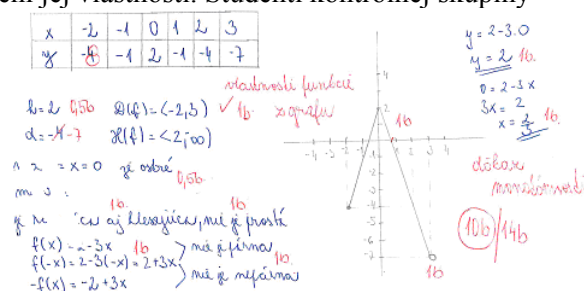
Úloha 2: Rozhodnite, ktorá z uvedených tabuliek je zadáním funkcie. U zistenej funkcie určte definičný obor a obor hodnôt.

Riešenie tejto úlohy nerobilo študentom experimentálnej skupiny žiadne ťažkosti. Študenti kontrolnej skupiny dosiahli horšie výsledky, pretože definičný obor a obor hodnôt zistenej funkcie zapisovali pomocou intervalov (obr. 9)



Obr. 9: Ukážka riešenia 2. úlohy posttestu

Úloha 3: Zostrojte graf funkcie $f: y = 2 - 3x$ na intervale $(-2, 3)$. Určte jej vlastnosti a priesečníky so súradnicovými osami. Študenti experimentálnej skupiny boli lepší v presnosti zostrojenia grafu funkcie a určení jej vlastností. Študenti kontrolnej skupiny najčastejšie určili nesprávne hodnotu y - ovejš súradnice bodov a nesprávne zostrojili graf funkcie. Niektorí aj z nesprávne zostrojeného grafu vedeli správne vyčítať vlastnosti funkcie (označené ako prenášaná chyba). Najväčšie ťažkosti študentom robili tieto vlastnosti funkcie: extrémny a ohraničenosť.



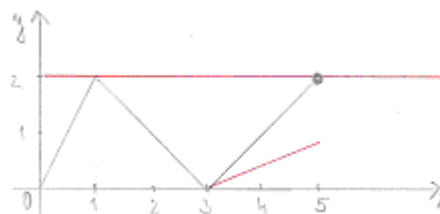
Obr.10: Ukážka riešenia úlohy 3 posttestu

Študenti experimentálnej skupiny boli lepší aj v riešení úlohy 4: *Dokreslite graf funkcie tak, aby funkcia bola párna (nepárna)*“. Študentom kontrolnej skupiny robilo najväčšie ťažkosti dokresliť graf nepárnej funkcie.



Obr.11: Ukážka riešenia úlohy 4 posttestu

Najväčšie ťažkosti v postteste robilo študentom experimentálnej skupiny riešenie úlohy 5: *Načrtnite graf funkcie, pre ktorú platí: $D(f) = \langle 0,5 \rangle$, $H(f) = \langle 0,2 \rangle$, ostré maximum má v bode 1, minimum v bodoch 0 a 3. Pri riešení danej úlohy sa študenti dopúšťali najčastejšej chyby – druhé ostré maximum v bode 5 (obr.12).*



Obr.12: Ukážka riešenia úlohy 5 posttestu

Záver

Príspevok poukazuje na výsledky výskumu, ktorý bol zameraný na využitie programu Winplot vo vyučovaní matematiky v kvintách osemročného a v 1. ročníkoch štvorročného gymnázia. Po skončení experimentálneho vyučovania každý študent odpovedal na dotazník, z ktorého možno konštatovať, že tento spôsob výučby matematiky sa stretol u študentov s veľkým ohlasom. Vyučovanie s podporou počítača považujú študenti za zaujímavé, pútavejšie, názornejšie a efektívnejšie (umožňuje preriešiť väčšie množstvo príkladov a úloh na vyučovacích hodinách). Práca v danom programe sa im páčila a prijali by častejšie použitie počítača a matematických programov na hodinách matematiky. Potvrdilo sa, že používanie počítačov a výučbových programov vo vyučovaní matematiky zvyšuje záujem študentov o matematiku, podnecuje ich k samostatnej práci pri riešení matematických úloh. U „slabších“ študentov, ktorí sa pri klasickom vyučovaní držia v úzadí, pasívne sledujú dianie na hodinách, počítačom podporovaná výučba ich vedie k väčšej aktivite a samostatnosti.

PaedDr. Alena Viziová

Gymnázium

Golianova 68

SK – 949 01 Nitra

e-mail: alena.viziova@gmail.com

SÚVIS RIEMANNOVSKEJ INTEGROVATEĽNOSTI FUNKCIE S EXISTENCIOU LIMÍT V BODOCH JEJ DEFINIČNÉHO OBORU

PETER VRÁBEL

ABSTRACT. The connection Riemann integrability of functions with existence of limits in points their range of definition are investigated in the paper.

Úvod

Otázka integrovateľnosti ohraničených funkcií v zmysle Riemanna v súvislosti s množinou bodov nespojitosti funkcie je vyriešená Lebesguovou vetou. Podľa tejto vety je ohraničená funkcia na intervale $[a, b]$ riemannovsky integrovateľná práve vtedy, keď množina jej bodov nespojitosti má Lebesguovu mieru nula (viď napr. [3]). Pripomíname, že množina A , $A \subseteq \mathbb{R}$, má Lebesguovu mieru nula práve vtedy, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje taká postupnosť otvorených intervalov J_i , $i \in \mathbb{N}$, že $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ (hovoríme, že intervaly J_i pokrývajú množinu A) a $\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) < \varepsilon$, kde $d(J_i)$ označuje dĺžku intervalu J_i . Každá spočítateľná množina nejakých reálnych čísel má Lebesguovu mieru nula. Z Lebesguovej vety potom vyplýva, že ak ohraničená funkcia f má na intervale $[a, b]$ iba spočítateľne veľa bodov nespojitosti, tak je na tomto intervale integrovateľná. Tak napríklad známa Riemannova funkcia ($f(x) = 0$ pre každé iracionálne číslo x z intervalu $[0, 1]$ a $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ pre každé racionálne číslo $\frac{p}{q} \in [0, 1]$, p, q sú nesudeliteľné, $q \in \mathbb{N}$) je nespojitá práve v každom racionálnom čísle z intervalu $[0, 1]$ a keďže množina $\mathbb{Q}$ všetkých racionálnych čísel je spočítateľná, tak táto funkcia je integrovateľná.

Otázku integrovateľnosti možno skúmať aj v súvislosti s inými význačnými množinami funkcie f , napríklad v súvislosti s množinou bodov, v ktorých má limitu resp. jednostranné limity.

Existencia limít funkcie v bodoch uzavretého intervalu a jej integrovateľnosť

Je známe tvrdenie, že ak ohraničená funkcia f má v každom bode intervalu $[a, b]$ limitu, tak je na tomto intervale integrovateľná (viď napr. [2]). Toto tvrdenie možno zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom.

Veta 1. Nech ohraničená funkcia f má v každom bode $x \in [a, b] - A$, kde A je spočítateľná podmnožina intervalu $[a, b]$, limitu. Potom funkcia f je na intervale $[a, b]$ riemannovsky integrovateľná.

Dôkaz. Nech $D(f)$ označuje množinu všetkých bodov nespojitosti funkcie f z intervalu $[a, b]$. Ľahko možno nahliadnuť, že $D(f) - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, kde

$D_n = \left\{ t \in [a, b] - A; \left| \lim_{x \rightarrow t} f(x) - f(t) \right| \geq \frac{1}{n} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ukážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je množina D_n spočítateľná. Dôkaz tohto tvrdenia urobíme nepriamo. Nech by pre nejaké $n \in \mathbb{N}$ bola množina D_n nespočítateľná. Každá nespočítateľná množina obsahuje nespočítateľne veľa svojich kondenzačných bodov (viď napr. [2], dôkaz lemy 6.1.1, str. 116). Vezmime ľubovoľný kondenzačný bod množiny D_n , ktorý do nej patrí a označme ho t_0 . Keďže $t_0 \notin A$, tak existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow t_0} f(x)$. Označme ju symbolom B . Potom existuje

taká postupnosť bodov $t_k \in D_n$, $k = 1, 2, \dots$, že $t_k \rightarrow t_0$, $t_k \neq t_0$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje vlastná $\lim_{x \rightarrow t_k} f(x)$, pričom $\left| \lim_{x \rightarrow t_k} f(x) - f(t_k) \right| \geq \frac{1}{n}$. Takto pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje také okolie $V(t_k)$ bodu t_k , že pre ľubovoľné $x \in V(t_k) \cap [a, b]$, $x \neq t_k$, platí $|f(x) - f(t_k)| \geq \frac{1}{2n}$.

Odtiaľ už vyplýva, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje také $x_k \in V(t_k) \cap [a, b]$, $x_k \neq t_0$, že $|x_k - t_k| < \frac{1}{k}$ a $|f(x_k) - f(t_k)| \geq \frac{1}{2n}$ (*). Potom nielen $t_k \rightarrow t_0$ ale aj $x_k \rightarrow t_0$, $x_k, t_k \neq t_0$ pre $k = 1, 2, \dots$. Z existencie limity $\lim_{x \rightarrow t_0} f(x)$ vyplýva, že $f(x_k) \rightarrow B$, $f(t_k) \rightarrow B$. Z nerovnosti

(*) však dostávame $0 = |B - B| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k) - f(t_k)| \geq \frac{1}{2n}$, čo je spor.

Z dokázaného vyplýva, že množina $D(f)$, $D(f) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup A$, je spočítateľná a z Lebesguovej vety dostávame jej integrovateľnosť. $\square$

Poznámka 2. Obrátené tvrdenie k vete 1 neplatí. Definujme funkciu f na intervale $[0, 1]$ takto: $f(x) = 0$ pre $x \in C$, kde C je Cantorova množina, $f(x) = 1$ pre $x \in [0, 1] - C$. Je známe, že Cantorova množina je nespočítateľná, uzavretá a má Lebesguovu mieru 0. Množina $[0, 1] - C$ je otvorená. Odtiaľ a z definície funkcie f vyplýva, že f je spojitá v každom bode množiny $[0, 1] - C$. Z Lebesguovej vety potom vyplýva, že funkcia f je na intervale $[0, 1]$ riemannovsky integrovateľná. Z definície Cantorovej množiny však vyplýva, že každý jej bod má nasledujúcu vlastnosť: v každom jeho okolí existuje dokonca nespočítateľne veľa bodov z množiny C i bodov z množiny $[0, 1] - C$. Odtiaľ vyplýva, že funkcia f nemá v každom bode Cantorovej množiny limitu (podrobnejšie v príklade 7).

Veta 3. Nech ohraničená funkcia f má v každom bode $x \in (a, b) - A_1$ limitu zľava a v každom bode $x \in (a, b) - A_2$ limitu sprava, pričom A_1, A_2 sú spočítateľné množiny. Potom funkcia f je na intervale $[a, b]$ riemannovsky integrovateľná.

Dôkaz. Dôkaz vety 1 možno prispôbiť pre limity zľava resp. sprava. Nech $D^+(f)$ ($D^-(f)$) označuje množinu všetkých bodov z intervalu $[a, b]$, v ktorých nie je funkcia f spojitá sprava (zľava). Potom $D^+(f) - A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^+$, $D^-(f) - A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^-$, kde

$$D_n^+ = \left\{ t \in [a, b] - A_1; \left| \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) - f(t) \right| \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad D_n^- = \left\{ t \in [a, b] - A_2; \left| \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) - f(t) \right| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

$n = 1, 2, \dots$

Analogickou úvahou ako v dôkaze vety 1 možno ukázať, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú množiny D_n^+ , D_n^- spočítateľné. Preto je spočítateľná aj množina $D(f) = D^+(f) \cup D^-(f)$, čo je množina bodov nespojitosti funkcie f . Opäť z Lebesguovej vety dostávame integrovateľnosť funkcie f . $\square$

Poznámka 4. Z dôkazu vety 3 vyplýva, že ak funkcia f má na intervale J limitu sprava (zľava) v každom bode tohto intervalu, prípadne s výnimkou spočítateľne veľa bodov, tak množina bodov nespojitosti sprava (zľava) je spočítateľná.

Nech funkcia f je definovaná na intervale J . Nech M^+ (M^-) označuje množinu všetkých takých $x \in J$, v ktorých má funkcia f limitu sprava (zľava). Núka sa otázka vzťahu týchto množín.

Príklad 5. Nech $A = \left\{ t \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{Z} \exists k \in \mathbb{N} t = n + \frac{1}{k+1} \right\}$ a nech funkcia f je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$ takto: $f(x) = 0$ pre každé $x \in A$ a $f(x) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R} - A$. Ľahko nahliadneme, že funkcia f nemá limitu sprava v žiadnom bode $x \in Z$ a v každom bode $x \in \mathbb{R} - A$ má limitu sprava, ktorá sa rovná číslu 1. Ďalej v každom bode $x \in \mathbb{R}$ má funkcia f limitu zľava, ktorá sa rovná číslu 1. Teda $M^+ = \mathbb{R} - Z$, $M^- = \mathbb{R}$. Pre množinu bodov nespojitosti $D(f)$ funkcie f platí $D(f) = A \cup Z$. Táto množina je spočítateľná.

Príklad 6. Nech $B = \left\{ x \in [0, 1]; \exists n \in \mathbb{N} - \{1\} \exists k \in \mathbb{N} x = \frac{1}{n} + \frac{1}{(n-1)n} \cdot \frac{1}{k} \right\}$ a nech funkcia f je definovaná na intervale $[0, 1]$ takto: $f(x) = 0$ pre každé $x \in B$ a $f(x) = 1$ pre každé $x \in [0, 1] - B$. Potom funkcia f nemá limitu sprava v žiadnom bode množiny $C = \{0\} \cup \left\{ x \in [0, 1]; \exists n \in \mathbb{N} - \{1\} x = \frac{1}{n} \right\}$, pretože v každom pravom okolí ľubovoľného bodu množiny C existujú body $u \in B$, $v \in [0, 1] - B$, v ktorých $f(u) = 0$, $f(v) = 1$. V každom bode množiny $(0, 1) - C$ funkcia f má limitu sprava, ktorá sa rovná číslu 1. V každom bode intervalu $(0, 1]$ funkcia f má limitu zľava, ktorá sa rovná číslu 1.

Teda $M^+ = (0, 1) - C$, $M^- = (0, 1]$. Pre množinu bodov nespojitosti $D(f)$ funkcie f platí $D(f) = B \cup C$. Táto množina je spočítateľná.

Príklad 7. Budeme opäť uvažovať Cantorovu množinu (označme ju C). Označme $I = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $J_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $J_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Interval I nazveme otvoreným intervalom nultého

poradia, interval J_0 (J_1) ľavým (pravým) uzavretým intervalom prvého poradia. Označme ďalej $I_0 = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$, $I_1 = \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$ a nazvime ich otvorenými intervalmi prvého poradia. Vynechajme z intervalu J_0 interval I_0 , dostaneme uzavreté intervaly druhého poradia $J_{00} = \left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $J_{01} = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$, podobne vynechaním intervalu I_1 z intervalu J_1 dostaneme uzavreté intervaly druhého poradia $J_{10} = \left[\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}\right]$, $J_{11} = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$. Prvé (druhé) z týchto dvojíc intervalov nazveme ľavé (pravé) uzavreté intervaly druhého poradia. Všeobecne, ak už máme zostrojené uzavreté intervaly n - tého poradia $J_{k_1, k_2, \dots, k_n}$, kde $k_1, k_2, \dots, k_n$ je postupnosť čísel 0, 1, definujeme uzavreté intervaly $(n+1)$ - ho poradia takto: každý interval $J_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ je zjednotením troch rovnako dlhých neprekrývajúcich sa uzavretých intervalov, z ktorých prostredný vynecháme a krajné označíme $J_{k_1, k_2, \dots, k_n, 0}$, $J_{k_1, k_2, \dots, k_n, 1}$. Prvý (druhý) z nich nazveme ľavým (pravým) uzavretým intervalom $(n+1)$ - ho poradia. Každé číslo α z množiny C je jednoznačne určené 0-1 postupnosťou $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, pričom $\{\alpha\} \cap J_{k_1} \cap J_{k_1, k_2} \cap \dots \cap J_{k_1, k_2, \dots, k_n} \cap \dots$ (viď [1]).

Definujme funkciu f na intervale $[0,1]$ rovnako ako v poznámke 2. Ak α je určené postupnosťou tvaru $k_1, k_2, \dots, k_n, 0, 0, \dots$ (a teda je určené prienikom uzavretých intervalov k - tého poradia, $k=1, 2, \dots$, pričom všetky tieto intervaly pre $k \geq n+1$ sú ľavé), tak v istom ľavom okolí bodu α $f(x)=1$ (okrem bodu 0) a teda $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)=1$.

V každom jeho pravom okolí existuje dokonca nespočítateľne veľa bodov z množiny C i bodov z množiny $[0,1] - C$, teda $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ neexistuje. Množinu všetkých takýchto bodov

množiny C označme C^+ . Analogicky možno uvažovať množinu C^- , do ktorej patria práve také prvky Cantorovej množiny, v ktorých má funkcia f limitu sprava (rovnajúcu sa 1) a nemá limitu zľava. Ľahko nahliadneme, že obe množiny C^+ , C^- sú spočítateľné.

Ak $\alpha \in C$ je určené 0-1 postupnosťou $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, v ktorej nekonečne veľa členov sa rovná číslu 0 a taktiež nekonečne veľa členov sa rovná číslu 1, tak v každom jeho ľavom aj pravom okolí sú body z množiny C i body z množiny $[0,1] - C$, teda ani jedna z jednostranných limit $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ neexistuje. Množinu všetkých takýchto bodov

množiny C označme C^{+-} . Potom $M^+ = [0,1] - (C^+ \cup C^{+-})$, $M^- = [0,1] - (C^- \cup C^{+-})$.

Nakoniec poznamenajme, že funkcia f z príkladu 5 je riemannovsky integrovateľná na ľubovoľnom intervale $[-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$ a taktiež funkcie f z príkladov 6, 7 sú riemannovsky integrovateľné na intervale $[0,1]$, pretože ich množiny bodov nespojitosti majú Lebesguovu mieru 0.

LITERATÚRA

- [1] Šalát, T.: *Metrické priestory*, Bratislava, Alfa, 1981.
- [2] Šalát, T.: *Seminár z matematiky*, Vysokoškolské učebné texty, Bratislava, MFF UK, 1990, ISBN 80-223-0312-7.
- [3] Švec, M. – Šalát, T. – Neubrunn, T.: *Matematická analýza funkcií reálnej premennej*, Bratislava, Alfa, 1987.

Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: pvrabel@ukf.sk

ŽIVOT ŽIAKA PRIMÁRNEJ ŠKOLY AKO VÝCHODISKO PRE TVORBU ÚLOH ROZVÍJAJÚCICH MATEMATICKÚ GRAMOTNOSŤ

VERONIKA ZEĽOVÁ

ABSTRACT. Development of mathematical literacy is a lifelong process and school has a significant position in it. This article examines life of elementary school pupil and based on this analysis we suggest several subjects that should be focused on during third and fourth class of elementary school.

Úvod

Vedieť čítať, písať a počítať už ani zďaleka nepostačuje jedincovi, ktorí sa chce aktívne zapojiť do života súčasnej spoločnosti. Okrem týchto základných zručností sa od neho tiež vyžaduje, aby sa vedel vysporiadať s problémami, ktoré mu nastoľuje každodenný život. Naše primárne školstvo prechádza od roku 2008 zmenou modelu obsahu vzdelávania a postupne do edukačnej praxe zavádza Štátny vzdelávací program (ŠVP) ISCED 1. Tento program dáva školám možnosť vytvoriť si svoj vlastný školský vzdelávací program, v ktorom sa zohľadnia špecifické lokálne regionálne podmienky danej školy a potreby žiakov, ktorí ju navštevujú. (Brincková, 2010)

Rozvíjanie matematickej gramotnosti je celoživotný proces a škola v ňom má svoju významnú úlohu. Ak chceme rozvíjať matematickú gramotnosť žiakov na primárnom stupni vzdelávania, mali by sme poznať jeho život, záujmy a potreby.

Proces socializácie žiaka mladšieho školského veku a formovanie jeho záujmov

V mladšom školskom veku je zo socializačného hľadiska dôležitý vstup do školy. Predstavuje ďalší odklon od výlučného vplyvu rodiny a ďalší krok k podriadeniu sa pravidlám inštitúcie (teda školy). Tento vek môžeme tiež považovať za ďalšiu fázu prípravy na život v spoločnosti. Úspešnosť uplatnenia sa v škole predurčuje neskoršie spoločenské zaradenie. Pod vplyvom školy sa rozvíjajú vlastnosti a kompetencie, ktoré môže žiak využiť v reálnom živote. (Vágnerová, 2005)

Rozvoj záujmov detí v tomto veku závisí od vlôh (prípadne schopností), ale aj podmienok prostredia (dĺžka voľného času, postoj rodičov k ich záujmom, možnosti navštevovania rôznych krúžkov, kurzov a pod.). (Končeková, 2007) Ako uvádza Ľ. Gáborová (In Končeková, 2007) v školskom veku sú na prvom mieste športové záujmy, hlavne aktívnej povahy. Deti mladšieho školského veku majú tiež rôzne poznávacie záujmy, majú záujem o literatúru, divadlo, film, televíziu. V dnešnej dobe pribúda záujem hlavne o počítač.

Cieľom vyučovania matematiky na primárnom stupni vzdelávania by podľa ŠVP ISCED 1 malo okrem iného byť aj to, aby si žiaci osvojili také poznatky a zručnosti, ktoré budú potrebovať v priebehu svojho ďalšieho vzdelávania a v každodennom živote.

Popis realizovaného prieskumu

Výskum realizovaný v školskom roku 2006/2007 ukázal, že zaradením vhodných úloh do vyučovania matematiky môžeme zvýšiť úroveň matematickej gramotnosti 9-10 ročných žiakov. (Zeľová, 2008) Vytvoreniu vhodných úloh však predchádza analýza potrieb a záujmov žiakov. Preto sme sa rozhodli zrealizovať dotazníkový prieskum, cieľom ktorého bolo zistiť, akým aktivitám sa dieťa v tomto veku najčastejšie venuje.

Dotazník obsahoval 9 uzavretých položiek. Prostredníctvom prvých štyroch položiek sme zisťovali fakty o rodine žiaka (vek rodičov, počet detí v rodine a bydlisko (mesto/obec)). V piatej položke sme zisťovali frekvenciu návštevnosti školského klubu deťmi. Ďalšie dve položky boli zamerané na zistenie používania techniky v domácnosti deťmi a na identifikovanie činností, ktoré dieťa v reálnom živote robieva. Dotazník sme tiež doplnili o dve položky, ktorými sme zisťovali názor rodičov na schopnosť školy pripraviť ich dieťa na riešenie problémov reálneho života a na ich názor na didaktické prostriedky, ktoré používajú ich deti vo vyučovaní matematiky.

Dotazník vyplnilo celkom 275 rodičov žiakov 3. a 4. ročníka základných škôl Prešovského kraja. Pri analýze výsledkov sme nerozlišovali, či išlo o rodiča žiaka 3. alebo 4. ročníka, keďže predpokladáme, že záujmy a aktivity žiakov v tomto veku sú približne rovnaké.

Charakteristika prieskumnej vzorky

Z pohľadu veku rodičov žiakov môžeme konštatovať, že väčšina rodičov bola vo veku medzi 30-35 rokov.

Vek	Matka	Otec
Menej ako 30 rokov	9,82%	4%
30 – 35 rokov	68,36%	57,82%
36 – 40 rokov	19,64%	34,18%
viac ako 40 rokov	2,18%	4%

Tabuľka 1: Vek rodičov zapojených do prieskumu

Tiež nás zaujímalo, koľko detí žije v rodine respondentov. Táto skutočnosť tiež podľa nášho názoru môže mať vplyv na voľbu úloh zameraných na rozvoj gramotnosti. Rola jedináčika je oproti role dieťaťa z početnejšej rodiny odlišná. Jedináčikovi je venovaná zvýšená pozornosť a úzkostlivejšia starostlivosť, dieťa z početnejšej rodiny musí byť častokrát samostatné a schopné postarať sa napr. o mladších súrodencov. Analýza ukázala, že väčšina detí pochádza zo štvorčlennej rodiny a viac ako štvrtina detí pochádza z päťčlennej rodiny.

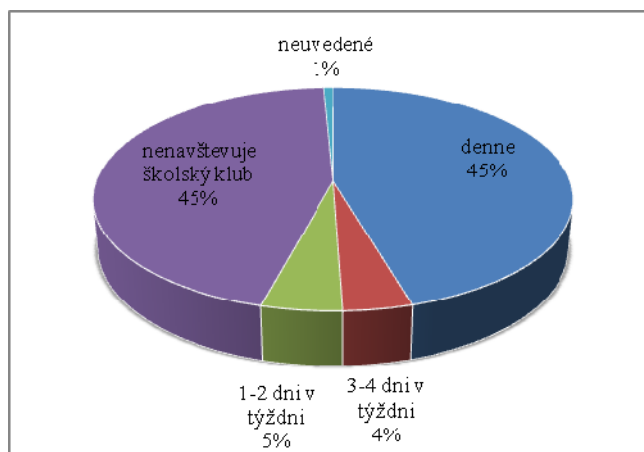
Počet detí v rodine	Počet žiakov (%)
1	11,27%
2	50,55%
3	26,55%
4 a viac	11,64%

Tabuľka 2: Počet detí žijúcich v domácnosti

Ďalší faktor, ktorý by podľa nášho názoru mal byť rozhodujúci pri voľbe vhodných úloh rozvíjajúcich matematickú gramotnosť žiaka je skutočnosť, či dieťa žije v meste alebo na vidieku. Do nášho dotazníkového prieskumu bolo zo všetkých rodín 80,73% rodín žijúcich v meste, zvyšné rodiny boli z vidieka.

Analýza záujmov žiakov 3. a 4 ročníka základnej školy

Jedným zo spôsobov trávenia voľného času žiakmi prvého stupňa je navštevovanie školského klubu detí zriadenom na základnej škole, ktorú navštevujú. V dotazníku, ktorý sme zadali rodičom žiakov sme zisťovali, ako často dieťa školský klub navštevuje. Výsledky uvádzame v nasledujúcom grafe.



Obrázok 1: Navštevnosť školského klubu detí žiakmi 3. a 4. ročníka základnej školy

Na rozdiel od doobedňajšieho vyučovania, ktoré je pre žiakov povinné, navštevovanie školského klubu detí v poobedňajších hodinách je aktivita dobrovoľná. Z uvedeného grafu vyplýva, že školský klub denne navštevuje iba 45% žiakov, preto by bolo podľa nášho názoru efektívnejšie zaradiť úlohy rozvíjajúce matematickú gramotnosť žiakov do doobedňajšieho vyučovania a sprístupniť ich tak čo najväčšiemu počtu žiakov.

Položkou č. 5 sme zisťovali, ktorú techniku deti v tomto veku v domácnosti aktívne využívajú. Výsledky sme zhrnuli do nasledujúcej tabuľky:

Technický prostriedok	Počet žiakov (%)
Televízor	94,91%
Rádio	53,09%
Mobilný telefón	36,73%
Počítač bez internetu	33,45%
Počítač s internetom	18,91%

Tabuľka 3: Využívanie technických prostriedkov v domácnosti žiakmi 3. a 4. ročníka základnej školy

Technické prostriedky, ktoré sme do ponuky zaradili, slúžia na získavanie informácií z reálneho života. Podľa nášho názoru je dôležité vedieť, či majú žiaci napr. prístup k počítaču s internetom, aby sme zistili, či môžeme zadať žiakom domácu úlohu zameranú na vyhľadávanie potrebných informácií na internete, s ktorými by sme ďalej mohli na vyučovaní pracovať. Výsledky ukázali, že len 19% žiakov používa doma pravidelne počítač s internetom. Preto by zaradenie úloh do vyučovacieho procesu, na riešenie ktorých by žiaci mali vyhľadať potrebné informácie doma na internete, nebolo vhodné. Informácie dostupné na internete a nevyhnutné na riešenie vytvorených úloh by preto mali učitelia poskytnúť priamo na vyučovacej hodine alebo by mali žiakom umožniť, aby si ich žiaci mohli získať z internetu priamo na hodine.

Prostredníctvom položky č. 6 „Vyznačte činnosti, ktoré Vaše dieťa robieva (zaškrtnúť môžete aj viac odpovedí)“ sme sa pokúsili zistiť, akým aktivitám sa venuje žiak 3. a 4. ročníka základnej školy vo svojom živote. Získané informácie nám môžu poslúžiť na vymedzenie oblastí z reálneho života, s ktorými sa žiak v tomto veku stretáva. Výsledky sme spracovali do nasledujúcej tabuľky.

Aktivita	Počet žiakov (%)
Pomáha pri domácich prácach	78,55%
Navštevuje krúžky organizované školou	66,91%
Číta knihy	66,55%
Samostatne nakupuje	59,27%
Učí sa bez pomoci	58,55%
Číta časopisy	51,27%
Samo si organizuje voľný čas	44,73%
Navštevuje krúžky organizované inou inštitúciou	28,00%
Cestuje MHD	20,00%
Cestuje autobusom	18,91%
Posiela poštu	10,55%
Cestuje vlakom	5,09%

Tabuľka 4: Aktivity, ktoré vykonávajú žiaci 3. a 4. ročníka základnej školy v reálnom živote

U uvedenej tabuľky vyplýva, že dieťa v tomto veku sa v spoločnosti musí orientovať všestranne. Žiak 3. a 4. ročníka ZŠ pomáha pri domácich prácach, navštevuje rôzne záujmové krúžky, samostatne nakupuje, posiela poštu, cestuje MHD, autobusom i vlakom.

Na základe týchto skutočností sme sa pokúsili o návrh tém, ktoré by učiteľ v rámci vyučovania mohol spracovať a žiakom zadať vo forme projektov. Uvádzame zoznam takých tém, v rámci ktorých by mali byť riešené úlohy pomocou matematického aparátu.

- V obchode, na pošte
- V cukrárni, v reštaurácii
- O čase – so zameraním na zlepšenie práce s hodinami
- Počítame úlohy o čase – so zameraním na orientáciu v cestovných poriadkoch, na organizovanie voľného času
- Zdravie a choroba
- Teplota
- Zariaďujeme si izbu
- Plánovanie návštevy kina, divadla;
- V knižnici

- Varíme, pečieme...

Do navrhnutého zoznamu tém môže učiteľ doplniť vlastné témy, priamo „šité na mieru“ svojim žiakom. Učiteľ by nemal zabúdať na potreby svojich žiakov, na ich vekové osobitosti, záujmy, schopnosti.

Názory rodičov na matematické vzdelávanie ich detí

Posledné dve položky dotazníka boli zamerané na zistenie názoru rodičov na:

- úroveň prepojenia školskej matematiky so životom ich dieťaťa,
- tradičné didaktické prostriedky, ktoré sa využívajú vo vyučovaní matematiky.

Výsledky zistené prostredníctvom zadaného dotazníka uvádzame v nasledujúcich tabuľkách.

Podľa môjho názoru škola...	
...dostatočne pripravuje moje dieťa na život v spoločnosti	78,18%
...mohla by sa aj viac venovať príprave detí do života	17,45%
...nedostatočne pripravuje moje dieťa na život v spoločnosti.	0,36%
neuvedené	4,00%

Tabuľka 5: Názor rodičov na úroveň prepojenia školskej matematiky so životom ich dieťaťa

Úlohy v pracovných zošitoch a učebniciach z matematiky sú, podľa môjho názoru...	
...iba samé hranie a rozprávky	0,36%
...neprispôsobené veku dieťaťa	7,27%
...pre moje dieťa nudné	0,73%
...neprispôsobené životu	1,45%
...pripravujú dieťa pre život	40,73%
...veľa úloh zo života	6,55%
...prispôsobené veku dieťaťa	71,64%
...pre moje dieťa zábavné	39,64%
...prispôsobené životu	22,91%
...nepripravujú dieťa pre život	2,55%

Tabuľka 6: Názor rodičov na didaktické prostriedky využívané vo vyučovaní matematiky

V závere ešte uvádzame tie z názorov rodičov, ktoré nás najviac zaujali:

„Prijal by som, aby môj syn riešil v škole aj viac úloh zo života.“

„Matematika je potrebná. Ale niektoré výpočty sú také zložité, že takýto spôsob výpočtu dieťa v živote nevyužije.“

„Matematiku bude moje dieťa potrebovať celý život, preto je dobré, keď sa na to pripravuje už teraz.“

„Niektoré príklady sú nezrozumiteľné a ťažko použiteľné v praxi.“

„Matematika pre moje dieťa znamená rozmyšľanie.“

Záver

Nástupom nového Štátneho vzdelávacieho programu sa učiteľom vytvoril priestor na precíznejšie rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy. Na to, aby učiteľ mohol efektívne rozvíjať matematické kompetencie svojich žiakov, potrebuje poznať ich potreby, záujmy a vychádzať z týchto informácií by mal vhodne využívať úlohy na riešenie ktorých je potrebný matematický aparát. Databázy takýchto úloh však stále na primárnom stupni vzdelávania chýbajú, preto je učiteľ odkázaný na vlastnú tvorbu úloh, tvorbu svojich kolegov alebo na používanie uvoľnených úloh výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.

Od januára 2010 sa realizuje na Katedre matematickej edukácie projekt KEGA 165-016PU-4/2010 pod názvom *Matematika pre život - cesty rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS* podporený Kultúrnou a edukačnou grantovou agentúrou Ministerstva školstva Slovenskej republiky zameraný na aktuálne potreby súčasného primárneho vzdelávania - na zlepšenie prípravy študentov a učiteľov - elementaristov na proces rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte novej školskej reformy a medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS. V rámci riešenia výskumnej úlohy bude vytvorená online zbierka úloh publikovaná na katedrovej stránke www.matematickapointa.sk rozvíjajúcich matematické kompetencie žiakov primárnej školy, ktorá doteraz na Slovensku chýbala. Práve táto databáza by mohla byť nápomocná v náročnej práci súčasných učiteľov – elementaristov.

REFERENCES

- [1] Brincková, J.: *Vyučovanie matematiky z pohľadu súčasnej školskej reformy*. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela, 2010, ISBN 978-80-8083-936-9.
- [2] Končeková, Ľ.: *Vývinová psychológia*. Prešov: Vydavateľstvo Michala Vaška, 2007, ISBN 978-80-7165-614-2.
- [3] Vágnerová, M.: *Vývojová psychologie – dětství a dospívání*. Praha: Nakladatelství Karolinum, 2005, ISBN 80-246-0956-8.
- [4] *Štátny vzdelávací program – Matematika – Príloha ISCED 1*. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. Dostupné na internete: <http://www.statpedu.sk/documents//16/vzdelavacie_programy/statny_vzdelavaci_program/prilohy/matematika_ISCED1_2.pdf>
- [5] Zeľová, V.: *Cesty k rozvíjaniu matematickej gramotnosti žiaka primárnej školy*. [dizertačná práca] Prešov: Pedagogická fakulta, 2008.

PaedDr. Veronika Zeľová, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta PU v Prešove
17. novembra 1
SK – 080 01 Prešov
e-mail: zelova@unipo.sk



PROGRAM KONFERENCIE

13. septembra 2010 – pondelok

Oficiálne otvorenie Letnej školy doktorandov

14. septembra 2010 – utorok

Plenárne prednášky

miestnosť THC 212

8³⁰ hod. – 9¹⁵ hod.

Jarmila Novotna

EXPLANATION IN TEACHING MATHEMATICS. TEACHERS' VIEWS

9³⁰ hod. – 10¹⁵ hod.

Nicolas Mousolides

THE LEARNING OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELLING
USING CONCEPTUAL TECHNOLOGICAL TOOLS

10¹⁵ hod. – 10³⁰ hod. Coffee break - miestnosť M – 6

10³⁰ hod. – 11¹⁵ hod.

Freya Hreinsdóttir

ICELANDIC GEOGEBRA INSTITUTE – ON OPEN SOURCE SOFTWARE AND
OPEN SOURCE TEACHING MATERIAL

11³⁰ hod. – 12¹⁵ hod.

Maria Luiza Cestari

INTERPLAY BETWEEN HOME-SCHOOL FOR NORWEGIAN PUPILS IN THE
LEARNING OF MATHEMATICS: A CASE STUDY

10¹⁵ hod. – 10³⁰ hod. Lunch break

13³⁰ hod. – 14¹⁵ hod.

Barbro Grevholm

VARYING VIEWS OF MATHEMATICS AND IMAGES OF
MATHEMATICIANS AMONG NORWEGIAN UPPER SECONDARY SCHOOL
STUDENTS

14³⁰ hod. – 15¹⁵ hod.

Andreas Ulovec

REAL-LIFE TASK - MORE REALITY, PLEASE!

14³⁰ hod. – 15¹⁵ hod.

Vladimir Georgiev

MATH TO EARTH: EXPERIENCE OF MATH LABS AND ACTIVITIES IN THE YEAR OF GALILEI IN PISA

10¹⁵ hod. – 10³⁰ hod. Coffee break - miestnosť C 204

16³⁰ hod. – 17¹⁵ hod.

John Andersen

MATHEMATICAL OPPORTUNITIES – MATHEMATICAL AWARENESS: A QUESTION OF FOCUS

17³⁰ hod. – 18¹⁵ hod.

Jevgenia Sendova

THE MATHEMATICS IN THE BEAUTIFUL AND THE BEAUTIFUL IN MATHEMATICS

16. septembra 2010 – štvrtok

Plenárne prednášky

miestnosť P 2

9⁰⁰ hod. – 9⁴⁵ hod.

OLEG MUSKAROV, JEVGENIJA SENDOVA, NELI DIMITROVA

ENHANCING THE RESEARCH POTENTIAL OF MATHEMATICALLY GIFTED HIGH-SCHOOL STUDENTS

10⁰⁰ hod. – 10⁴⁵ hod.

KRISTIN BJARNADÓTTIR

HISTORY OF MATHS EDUCATION IN ICELAND

11¹⁵ hod. – 12⁰⁰ hod.

BOHUMIL NOVÁK

NON-TRADITIONAL MATHEMATICS TASKS AND ACTIVITIES IN ELEMENTARY SCHOOL EDUCATION

12¹⁵ hod. – 13⁰⁰ hod.

HENK VAN DER KOOLJ

MATHEMATICS AT WORK

Rokovania v sekciách

Sekcia 1, miestnosť C 212

Rokovanie vedie : PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.

14⁰⁰ hod. – 14¹⁵ hod.

JOANNA MAJOR, ZBIGNIEW POWĄZKA

FROM RESEARCHES UPON SOLVING STEREOMETRIC TASKS BY STUDENTS

14¹⁵ hod. – 14³⁰ hod.

ADAM CZAPLIŃSKI, MACIEJ MAJOR

EXCEL SPREADSHEET AS A SUPPORTING TOOL FOR CONDUCTING MATHEMATICAL REASONING

14³⁰ hod. – 14⁴⁵ hod.

MAREK POMP, ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

KONCEPCJE TWORBY INTERAKTYWNYCH ĆWICZEŃ I TESTÓW W MATEMATYCE

14⁴⁵ hod. – 15⁰⁰ hod.

MAREK POMP, ZUZANA VÁCLAVÍKOVÁ

FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ GEOMETRICKOU PŘEDSTAVIVOST ŽÁKŮ ZŠ

15⁰⁰ hod. – 15¹⁵ hod.

DARINA STACHOVÁ

GEOMETRICKÁ GRAMOTNOSŤ ŠTUDENTOV VŠ TECHNICKÉHO ZAMERANIA

15¹⁵ hod. – 15³⁰ hod.

IVETA SCHOLTZOVÁ

PRVÉ KROKY K MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI

15³⁰ hod. – 15⁴⁵ hod.

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

E-LEARNINGOVÝ KURZ: NETRADIČNÉ METÓDY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

15⁴⁵ hod. – 16⁰⁰ hod.

VERONIKA ZELLOVÁ

ŽIVOT ŽIAKA PRIMÁRNEJ ŠKOLY AKO VÝCHODISKO PRE TVORBU ÚLOH ROZVÍJAJÚCICH MATEMATICKÚ GRAMOTNOSŤ

16⁰⁰ hod. – 16¹⁵ hod.

ALENA PRÍDAVKOVÁ

PRÍSTUPY K RIEŠENIU JEDNEJ MATEMATICKEJ ÚLOHY V PRÍPRAVE UČITEĽOV ELEMENTARISTOV

16¹⁵ hod. – 16³⁰ hod.

JANA PŘÍHONSKÁ
ROZVOJ LOGICKÉHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ

Sekcia 2, miestnosť C 217

Rokovanie vedie : PaedDr. Marek Varga, PhD.

14⁰⁰ hod. – 14¹⁵ hod.

RŮŽENA BLAŽKOVÁ
ŽÁCI SE SPECIFICKÝMI VZDĚLÁVACÍMI POTŘEBAMI

14¹⁵ hod. – 14³⁰ hod.

IRENA BUDÍNOVÁ
VÝVOJ POJMU FUNKCE OD ARCHIMEDA PO NEWTONA

14³⁰ hod. – 14⁴⁵ hod.

IVETA KOHANOVÁ
METÓDA PROBLEM SOLVING V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV
MATEMATIKY

14⁴⁵ hod. – 15⁰⁰ hod.

HYČKOVÁ SILVIA – KONTROVÁ LÝDIA
FUNKCIA VIZUALIZÁCIE V MATEMATICKOM VZDELÁVANÍ

15⁰⁰ hod. – 15¹⁵ hod.

MAREK MOKRIŠ
C.a.R A METÓDA GENEROVANÝCH PROBLÉMOV

15¹⁵ hod. – 15³⁰ hod.

RADEK KRPEC
PROČ JE DŮLEŽITÉ UVĚDOMOVAT SI VZTAH MEZI
PRAVDĚPODOBNOSTMI OPAČNÝCH JEVŮ

15³⁰ hod. – 15⁴⁵ hod.

PETER VANKÚŠ, EMÍLIA KUBICOVÁ
POSTOJE ŽIAKOV 5. A 9. ROČNÍKA ZŠ K MATEMATIKE

15⁴⁵ hod. – 16⁰⁰ hod.

MILAN STACHO, MÁRIA BRANICKÁ
VYUČOVANIE MATEMATIKY V DRUHOM STUPNI ŠTÚDIA NA FAKULTE
PEDAS ŽILINSKEJ UNIVERZITY V ŽILINE

16⁰⁰hod. – 16¹⁵ hod.

ĽUBOMÍR CZANNER – JÁN ČIŽMÁR

VÝSTAVBA ZÁKLADNÝCH ARITMETICKÝCH ŠTRUKTÚR V PRIMÁRNEJ ŠKOLE NA SLOVENSKU, V NEMECKU A VO VEĽKEJ BRITÁNII

16¹⁵hod. – 16³⁰ hod.

JAROSLAV PERNÝ - JANA HANKOVÁ - TEREZA NOVÁKOVÁ - TEREZA VOTRUBCOVÁ

BUDOUČÍ UČITELÉ A ROZVOJ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI ŽÁKŮ

16⁴⁵ hod. miestnosť C 117 a C 118

Krátke spoločenské stretnutie účastníkov konferencie

17. septembra 2010 - piatok

PLENÁRNE PREDNÁŠKY

miestnosť C 212

9⁰⁰ hod. - 9⁴⁵

Beáta Stehlíková

PRIESTOROVÁ ŠTATISTIKA

Rokovania v sekciách

Sekcia 1

Miestnosť THC 212

Rokovanie vedie : PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.

9⁴⁵ hod. – 10⁰⁰ hod.

JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA

INVARIANTNÍ PODGRUPY GRUP OBYČEJNÝCH LINEÁRNÍCH
DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ DRUHÉHO ŘÁDU

10⁰⁰ hod. – 10¹⁵ hod.

OLEG PALUMBÍNY - RÓBERT VRÁBEL

ON EXISTENCE OF OSCILLATORY SOLUTIONS OF BINOMIAL FOURTH-
ORDER LDEs

10¹⁵ hod. – 10³⁰ hod.

OLEG PALUMBÍNÝ

ALTERNATÍVNE ZAVEDENIE OBORU VŠETKÝCH NEZÁPORNÝCH
REÁLNYCH ČÍSEL

10³⁰ hod. – 10⁴⁵ hod.

ANTONIO BOCCUTO - XENOFON DIMITRIOU - NIKOLAS

PAPANASTASSIOU

CONVERGENCE THEOREMS FOR THE OPTIMAL INTEGRAL IN RIESZ
SPACES

10⁴⁵ hod. – 11⁰⁰ hod.

PETER VRÁBEL

SÚVIS RIEMANNOVSKEJ INTEGROVATELNOSTI FUNKCIE
S EXISTENCIOU LIMÍT V BODOCH JEJ DEFINIČNÉHO OBORU

11⁰⁰ hod. – 11¹⁵ hod. Coffee break - miestnosť M – 6

11¹⁵ hod. – 11³⁰ hod.

JOZEF FULIER

NIEKOĽKO POZNÁMOK O SUMÁCH ČÍSELNÝCH RADOV

11³⁰ hod. – 11⁴⁵ hod.

ĽUBOMÍR RYBANSKÝ, MARTA VRÁBELOVÁ

ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKOV VÝSTUPNÉHO TESTU
PRE 5. ROČNÍK PROJEKTU KEGA 3/7001/09

11⁴⁵ hod. – 12⁰⁰ hod.

JÚLIUS JENIS, MARTA VRÁBELOVÁ

STOCHASTIKA V ŠTÚDIU UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE

12⁰⁰ hod. – 12¹⁵ hod.

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ

ANALÝZA RIEŠENIA VYBRANÝCH ÚLOH V TESTOVANÍ ŽIAKOV
5. ROČNÍKA ZŠ

12¹⁵ hod. – 12³⁰ hod.

SOŇA FÁNDLYOVÁ – MIROSLAVA SOVIČOVÁ

PRINÍPY TVORBY ÚLOH PROJEKTU LLP COMENIUS COMPASS (UKÁŽKY
ÚLOH VYTVORENÝCH V HOLANDSKU)

12³⁰ hod. – 12⁴⁵ hod.

KITTI VIDERMANOVÁ – JANKA MELUŠOVÁ

VYUŽITIE GEOGEBRY PRI RIEŠENÍ OPAČNÝCH KONŠTRUKČNÝCH
ÚLOH

Sekcia 2, miestnosť C 217

Rokovanie vedie : RNDr. Dušan Vallo, PhD.

9⁴⁵ hod. – 10⁰⁰ hod.

ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO

POUŽITIE POMERU PRI RIEŠENÍ GEOMETRICKÝCH ÚLOH (METODICKÝ PRÍSPEVOK)

10⁰⁰ hod. – 10¹⁵ hod.

ADAM PŁOCKI

OVĚŘOVÁNÍ HYPOTÉZ A MATEMATIZACE VE STOCHASTICE PRO UČITELE

10¹⁵ hod. – 10³⁰ hod.

SOŇA ČERETKOVÁ - ĽUBICA KORENEKOVÁ - JANKA MELUŠOVÁ

ÚLOHY (NIELEN) O ŽIAROVKÁCH A ÚSPORE ELEKTRICKEJ ENERGIE

10³⁰ hod. – 10⁴⁵ hod.

ZOLTÁN FEHÉR

PRAVDEPODOBNOSŤ ALEBO ŠANCA?

10⁴⁵ hod. – 11⁰⁰ hod.

JÁN ŠUNDERLÍK

POSTOJE V PRÍPRAVE ŠTUDENTOV UČITEĽSTVA MATEMATIKY - PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA

11⁰⁰ hod. – 11¹⁵ hod. Coffee break - miestnosť C 204

11¹⁵ hod. – 11³⁰ hod.

MAREK VARGA, MICHAELA KLEPANCOVÁ

LIMITA POSTUPNOSTI A JEJ MOTIVÁCIA

11³⁰ hod. – 11⁴⁵ hod.

ALENA VIZIOVÁ

VYUŽITIE PROGRAMU WINPLOT VO VYUČOVANÍ FUNKCIÍ A ICH VLASTNOSTI (VÝSLEDKY EXPERIMENTU)

11⁴⁵ hod. – 12⁰⁰ hod.

FILIP HALAMA – PATRÍCIA BENICKÁ

JEDEN Z PRÍSTUPOV ROZVÍJANIA MATEMATICKÉHO MYSLENIA V OBLASTI KOMBINATORIKY

12⁰⁰ hod. – 12¹⁵ hod.

DUŠAN VALLO – ONDREJ ŠEDIVÝ – VILIAM ĎURIŠ

FLEXIBILNÉ MNOHOSTENY VO VÝUČBE STEREOMETRIE

12¹⁵ hod. – 12³⁰ hod.

DANA MITRENGOVÁ, TOMÁŠ LENGYELFALUSY
DÔKAZY VZŤAHOV PRE SÚČTY HODNÔT FUNKCIÍ ARCUS

12³⁰ hod. – 12⁴⁵ hod.

EVA BARCÍKOVÁ
MOTIVÁCIA POMOCOU RIEŠENIA KONŠTRUKČNÝCH GEOMETRICKÝCH
ÚLOH S VYUŽITÍM IKT

ORGANIZAČNÝ VÝBOR KONFERENCIE:

predseda: RNDr. Dušan Vallo, PhD.

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.

RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.

PaedDr. Janka Melušová, PhD.

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.

Paeddr.. Lucia Rumanová, PhD.

PaedDr. Ján Šunderlík

PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.

PaedDr. Marek Varga, PhD.

RNDr. Kitty Vidermanová, PhD:

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Júlia Civáňová

PaedDr. Eva Bartíková

Mgr. Tomáš Bene

Mgr. Patrícia Benická

Mgr. Gabriela Galliková

Mgr. Filip Halama

Mgr. Štefan Havrlent

Mgr. Michaela Klepancová

Mgr. Mária Kóšová

RNDr. PaedDr. Peter Lenčes

RNDr. Ľubomír Rybanský

Mgr. Miroslava Sovičová

Mgr. Eva Uhrinová

OBSAH

NOVÁK, BOHUMIL: Reflexe netradičných úloh a matematických aktivít v prostredí základní školy.....	3
STEHLÍKOVÁ, BEÁTA: Priestorová štatistika.....	13
ŠEDIVÝ, ONDREJ – VALLO, DUŠAN: použitie pomeru při riešení geometrických úloh (metodický príspevok).....	21
BARCÍKOVÁ, EVA: Motivácia pomocou riešenie konštrukčných geometrických úloh s využitím IKT.....	37
BERÁNEK, JAROSLAV – CHVALINA, JAN: Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu.....	43
BLAŽKOVÁ, RUŽENA: Žáci se specifickými vzdělávacími potřebami.....	49
BOCCUTO, ANTONIO – DIMITRIOU, XENOFON – PAPANASTASSIOU, NIKOLAS: Convergence theorems for the optima integral in riesz spaces.....	55
BUDÍNOVÁ, IRENA: Vývoj pojmu funkce od Archimeda po Newtona.....	63
CZANNER, ĽUBOMÍR – ČIŽMÁR, JÁN: Výstavba základných aritmetických štruktúr v primárnej škole na Slovensku, v Nemecku a vo Veľkej Británii.....	69
CZAPLIŃSKI, ADAM – MAJOR, MACIEJ: Excel spreadsheet as a supporting tool for conducting mathematical reasoning.....	75
ČERETKOVÁ, SOŇA – KORENEKOVÁ, ĽUBICA – MELUŠOVÁ, JANKA: Úlohy (nielen) o žiarovkách a úspore elektrickej energie.....	83
FÁNDLYOVÁ, SOŇA – SOVIČOVÁ, MIROSLAVA: Princípy tvorby úloh projektu LLP Comenius (ukážky úloh vytvorených v Holandsku).....	91
FEHÉR, ZOLTÁN: Pravdepodobnosť alebo šanca?.....	97
FULIER, JOZEF: Niekoľko poznámok o sumách číselných radov.....	103
HALAMA, FILIP – BENICKÁ, PATRÍCIA: Jeden z prístupov rozvíjania matematického myslenia v oblasti kombinatoriky.....	109
HYČKOVÁ, SILVIA – KONTROVÁ, LÝDIA: Funkcia vizualizácie v matematickom vzdelávaní.....	115

JENIS, JÚLIUS – VRÁBELOVÁ, MARTA: Stochastika v štúdiu učiteľstva pre primárne vzdelávanie.....	123
KOHANOVÁ, IVETA: Metóda Problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky.....	127
KRPEC, RADEK: Proč je důležité uvědomovat si vztah mezi pravděpodobnostmi opačných jevů.....	133
MAJOR, JOANNA – POWAZKA ZBIGNIEW: From researches upon solving stereometric tasks by students.....	139
MITRENGOVÁ, DANA – LENGYELFALUSY TOMÁŠ: Dôkazy vzťahov pre súčty hodnôt funkcií arcus.....	145
MOKRIŠ, MAREK: C. a R. a metóda generovaných problémov.....	151
PALUMBÍNY, OLEG: Alternatívne zavedenie oboru všetkých nezáporných reálnych čísel.....	157
PALUMBÍNY, OLEG – VRÁBEL, RÓBERT: On existence of oscillatory solutions of binomal fourth order LDEs.....	163
PAVLOVIČOVÁ, GABRIELA – ZÁHORSKÁ, JÚLIA – RYBANSKÝ, ĽUBOMÍR: Analýza riešenia vybraných úloh v testovaní žiakov 5. ročníka ZŠ.....	169
PERNÝ, JAROSLAV – HANKOVÁ, JANA – NOVÁKOVÁ, TEREZA – VOTRUBCOVÁ, TEREZA: Budoucí učitelé a rozvoj geometrické představivosti žáků.....	177
PLOCKI, ADAM: Ověřování hypotéz a matematizace ve stochastice pro učitele.....	183
POMP, MAREK – VÁCLAVÍKOVÁ, ZUZANA: Faktory ovlivňující geometrickou představivost žáků.....	197
POMP, MAREK – VÁCLAVÍKOVÁ, ZUZANA: Koncepce tvorby interaktivních úloh a testů v matematice.....	203
PRÍDAVKOVÁ, ALENA: Prístupy k riešeniu jednej matematickej úlohy v príprave učiteľov elementaristov.....	209
PŘÍHONSKÁ, JANA: Rozvoj logického myšlení žáků.....	219
RYBANSKÝ, LUBOMÍR – VRÁBELOVÁ, MARTA: Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. ročník projektu KEGA 3/7001/09.....	225
SCHOLTZOVÁ, IVETA: Prvé kroky k matematickej gramotnosti.....	233

STACHO, MILAN – BRANICKÁ, MÁRIA: Vyučovanie matematiky v druhom stupni štúdia na fakulte PEDAS Žilinskej univerzity v Žiline.....	241
STACHOVÁ, DARINA: Geometrická gramotnosť študentov technického zamerania.....	245
STEHLÍKOVÁ, BEÁTA – TIRPÁKOVÁ, ANNA: Od vlčej kosti k fuzzy množinám.....	251
ŠUNDERLÍK, JÁN: Postoje v príprave študentov učiteľstva matematiky – prípadová štúdia.....	257
UHERČÍKOVÁ, VIERA - VANKÚŠ, PETER: E-learningový kurz Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky.....	265
VALLO, DUŠAN – ŠEDIVÝ, ONDREJ – ĎURIŠ, VILIAM – RUMANOVÁ, LUCIA: Flexibilné mnohosteny vo výučbe stereometrie.....	271
VANKÚŠ, PETER – KUBICOVÁ, EMÍLIA: Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike.....	277
VARGA, MAREK – KLEPANCOVÁ, MICHAELA: Limita postupnosti a jej motivácia.....	283
VIDERMANOVÁ, KITTI – MELUŠOVÁ, JANKA: Využitie GeoGebry pri riešení úloh na geometrické konštrukcie s grafickým zadáním.....	289
VIZIOVÁ, ALENA: Využitie programu Winplot vo vyučovaní funkcií a ich vlastností (výsledky experimentu).....	295
VRÁBEL, PETER: Súvis Riemannovskej integrovateľnosti funkcie s existenciou limit v bodoch jej definičného oboru.....	301
ZELIOVÁ, VERONIKA: Život žiaka primárnej školy ako východisko pre tvorbu úloh rozvíjajúcich matematickú gramotnosť.....	307
Program VIII. nitrianskej matematickej konferencie.....	313

Názov: ACTA MATHEMATICA 13
Vydavateľ: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Zostavovatelia: prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
PaedDr.. Janka Melušová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Rok vydania: 2010
Poradie vydania: prvé
Počet strán: 324
Počet výtlačkov: 120 ks

Kategória: AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

©UKF v Nitre 2010

ISBN 978-80-8094-781-1
EAN 9788080947811