FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY IN NITRA

ACTA MATHEMATICA 14

NITRA 2011

EDITION PRÍRODOVEDEC No 476

ISBN 978-80-8094-958-7

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

ACTA MATHEMATICA 14

zborník príspevkov z IX. nitrianskej matematickej konferencie
organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre
v dňoch 22. – 23. septembra 2011

NITRA 2011

Názov: Acta mathematica 14
Edícia: Prírodovedec č. 476

Zostavovatelia:
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Recenzenti:
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
doc. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.
doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
PhDr. PaedDr. Valéria Švecová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
PaedDr. Marek Varga, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Vydané v roku 2011 ako účelová publikácia Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s finančnou podporou grantu KEGA 073UKF 4/2011:*Didaktické postupy vyučovania matematiky na II. stupni ZŠ a v príprave učiteľov s akcentom na prioritné úlohy matematiky vo vzdelávaní v intenciách Štátneho vzdelávacieho programu* a Akademickým klubom FPV UKF v Nitre

Schválené vedením FPV dňa 21. 9. 2011

Rukopisy príspevkov prešli odbornou oponentúrou, ale neboli jazykovo upravované.

ISBN 978-80-8094-958-7

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

O KOLINEÁRNOSTI BODOV A ZBIEHAVOSTI (KONKURENTNOSTI) PRIAMOK

ŠTEFAN SOLČAN

ABSTRACT. The aim of lecture is make a few notes, links to other resources and my views on the issue of setting point's collinearity and concurrency of lines. We remind some known phrases, several ways of proving and the interconnection of several arguments, sometimes expected and sometimes surprising.

Motto: I have made this letter longer than usual because I lack the time to make it shorter.
Blaise Pascal

Úvod

Tri (ale aj iný počet, napr. dva alebo štyri) body nazývame kolineárnymi bodmi, ak incidujú s jednou priamkou. Tri priamky nazývame konkurentnými alebo zbiehavými (z angl. concurrent), ak patria jednému zväzku priamok, t. j. ak prechádzajú jedným bodom.

K pojmu kolineárnosti je teda potrebné mať jasné, čo je priamka. Slovo geometria značí v preklade meranie Zeme, je možné teda priamku intuitívne vymedziť cez mieru; dá sa to aj presnejšie – je to množina bodov *X* (*Y*, *Z*) v rovine, pre ktoré platí $AX + XB = AB$, $AB + BY = AY$, resp. $ZA + AB = ZB$, kde *A*, *B* sú dva rôzne body roviny. Je to vlastne akási „negácia" trojuholníkovej nerovnosti. Iná možnosť (a robí sa aj dnes) je definovať priamku ako množinu bodov *X*, pre ktoré je $AX = XB$ (os úsečky *AB*).

Po axiomatizácii geometrie je najčastejšie pojem priamka vymedzený axiómami, býva tzv. primitívnym pojmom. Niekedy však je definovaný z iných primitívnych pojmov (napr. vzdialenosť – metrika). V geometrii, v geometrických konštrukciách, nové body získavame najčastejšie ako priesečníky skorších objektov – priamok, kružníc, príp. ďalších kriviek, či geometrických objektov. Môžeme ich tiež získať ako body vyhovujúce určitým požiadavkám (majú istú vzdialenosť od iných bodov, či priamok, ... deliaci pomer, a pod.).

Určiť, či tri takto získané body sú kolineárne, t. j. či existuje priamka, ktorá ich obsahuje – s ktorou incidujú, je niekedy dosť zložité.

V euklidovskej syntetickej geometrii snáď najčastejšie sú v dôkazoch (v rozhodujúcom kroku) použité tieto tvrdenia, zakotvené priamo v axiómach:

- ak sú priamky *AB* a *CD* rovnobežné a majú spoločný bod *R*, tak priamky *AB* a *CD* splývajú, t. j. body *A*, *R*, *C*, ako aj *A*, *B*, *C* sú kolineárne.
- Ak v euklidovskom priestore ležia tri body *P*, *Q*, *R* v dvoch rôznych rovinách, tak sú kolineárne (ležia na priesečnici daných rovín).

Ak študujeme geometriu analytickou metódou, získame informáciu o kolineárnosti bodov prevodom informácií zo zadania (predpokladov) na isté aritmetické vzťahy či algebrické rovnice. Tak napr. tri body *A*, *B*, *C* rozšírenej euklidovskej roviny s homogénnymi projektívnymi súradnicami $A(a_0, a_1, a_2)$, $B(b_0, b_1, b_2)$ a $C(c_0, c_1, c_2)$ sú kolineárne práve vtedy, keď determinant z ich súradníc sa rovná nule,

Príspevok bol vypracovaný za podpory grantu VEGA 1/0730/09

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

alebo (afinná verzia) - tri body *A*, *B*, *C* euklidovskej (afinnej) roviny s karteziánskymi (afinnými) súradnicami $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ a $C(c_1, c_2)$ sú kolineárne práve vtedy, keď nasledovný determinant sa rovná nule

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ak pri štúdiu geometrie využívame zobrazenia (transformácie) danej roviny, využívame ich vlastnosti, napr. fakt, že

- priamky (v euklidovskej rovine) určené bodom *X* a jeho obrazom *X´* v rovnoľahlosti (pre $X \neq X'$) prechádzajú pevným bodom *S*, teda body *X*, *X´*, *S* sú kolineárne,
- v projektívnej rovine to isté platí, ak je zobrazenie stredovou kolineáciou,
- ak projektívnosť z priamky p na priamku *p´* zachová priesečník týchto priamok, dané zobrazenie je perspektívnosť; potom zase platí, že priamky určené bodom *X* a jeho obrazom *X´* v tomto zobrazení prechádzajú pevným bodom *S*, teda body *X*, *X´*, *S* sú kolineárne.

Fermatov bod, Eulerova priamka a ďalšie body a priamky

Medzi najznámejšie tvrdenia o kolineárnosti bodov, či zbiehavosti (konkurentnosti) priamok patria vety o existencii ortocentra, ťažiska, stredov vpísaných a opísaných kružníc danému trojuholníku,... Formulované sú dosť jednoducho:

- výšky (ťažnice, osi strán, osi vnútorných uhlov) trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.

- body rovnako vzdialené od vrcholov (strán) trojuholníka ležia na priamke (os strany, os uhla).

Iné sú formulované o niečo zložitejšie:

- Nad stranami trojuholníka *ABC* zostrojme rovnostranné trojuholníky *A´BC*, *AB´C* a *ABC´*, t. j. také body *A´*, *B´*, *C´*, aby trojuholníky *A´BC*, *AB´C* a *ABC´* boli rovnostranné. Potom priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* prechádzajú jedným bodom *X*. Bod *X* sa nazýva **Fermatovým** (alebo aj Toricelliho) **bodom** a je riešením problému nájdenia takého bodu *X*, ktorého súčet vzdialeností od vrcholov trojuholníka *ABC* je minimálny.

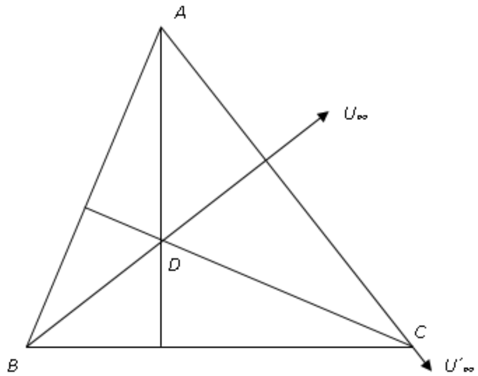
- ak *P*, *Q*, *R* sú päty kolmíc z ľubovoľného bodu *M* ležiaceho na kružnici opísanej trojuholníku *ABC* na jeho strany, tak body *P*, *Q*, *R* ležia na jednej priamke (**Simsonova priamka**, často známa aj ako Wallacova-Simsonova priamka)

- ťažisko *T*, ortocentrum *O* a stred *S* kružnice opísanej trojuholníku *ABC* ležia na jednej priamke (**Eulerova priamka**)

- body, ktorých mocnosti vzhľadom na dve nesústredné kružnice sa rovnajú, ležia na jednej priamke (**chordála** daných kružníc).

Existujú dôkazy štandardné, zaužívané a elementárne. Tie isté tvrdenia sa dajú dokázať aj s menej elementárnymi „nástrojmi“. Ukážkou takého netradičného zdôvodnenia platnosti tvrdenia, že výšky trojuholníka sa pretínajú v jednom bode je nasledovný dôkaz (je to dôsledok úvah z dôkazu vety 39,8 v [7], str. 178):

Nech *A, B, C, D* sú štyri po troch nekolineárne body, pre ktoré platí $AB \perp CD$ a $AD \perp BC$. Dokážeme, že aj $AC \perp BD$. Body *A*, *B*, *C*, *D* sú bázou zväzku kužeľosečiek v rozšírenej euklidovskej rovine. Podľa Desargovej vety o zväzku kužeľosečiek pretínajú kužeľosečky zväzku nevlastnú priamku vo dvojiciach bodov, ktoré tvoria involúciu. Táto involúcia je určená vratnými dvojicami $(V_\infty, V_\infty^{'})$ a $(W_\infty, W_\infty^{'})$ nevlastných bodov priamok AB, CD, resp. AD, BC (sú to singulárne kužeľosečky zväzku). Podľa tejto vety aj dvojica $(U_\infty, U_\infty^{'})$ nevlastných bodov priamok BD a AC si zodpovedá v tejto involúcii. Pretože je $AB \perp CD$ a $AD \perp BC$, ide o tzv. absolútnu involúciu, platí aj $AC \perp BD$, priamky *AD*, *BD*, *CD* sú výškami trojuholníka *ABC* a prechádzajú jedným bodom - bodom *D* (Obr. 1).



Obr. 1

Pappus, Pascal a Desargues

Jedným z klasických tvrdení, ktoré sa týka kolineárnosti troch bodov je tzv. Pappova veta. Existuje viac tvrdení, ktoré sa zvyknú nazývať Pappovou vetou (Pappus's centroid theorem, the Pappus chain, Pappus's harmonic theorem, Pappus's hexagon theorem, pozri [14]). Tu sa budeme zaoberať tvrdením, ktoré je súčasťou textov skoro každej učebnice deskriptívnej geometrie a je známe ako príklad jednoducho formulovaného tvrdenia týkajúceho sa len priamok, bodov a ich incidencie. Zvyčajne je formulované nasledovne:

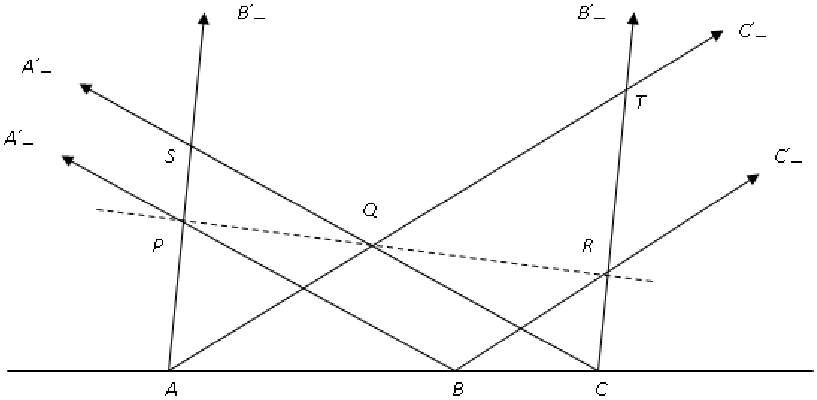
Pappova veta. Nech *p*, *p´* sú dve rôzne priamky v projektívnej rovine, *A*, *B*, *C* sú tri rôzne body priamky *p*, *A´*, *B´*, *C´* tri rôzne body priamky *p´*, všetky rôzne od bodu *p* ∩ *p´*. Potom body *P* = *AB´* ∩ *A´B*, *Q* = *AC´* ∩ *A´C*, *R* = *BC´* ∩ *B´C* sú kolineárne.

Poznámka. Známe a najčastejšie uvádzané dôkazy Pappovej vety, ako výroku platného v rozšírenej euklidovskej rovine, využívajú platnosť tzv. základnej vety v rozšírenej euklidovskej rovine, iné sú elementárne a opierajú sa o tvrdenia euklidovskej roviny (pozri napr. [3], [5] alebo [12]).

V zbierke [8], nadväzujúcej na preklad knižky [15], obsahujúcej aj preklad poznámok a tvrdení Pappa ku Porizmom Euklida (pozri [9]), je uvedený dôkaz tejto vety s využitím tvrdení euklidovskej geometrie a aritmetiky, predovšetkým viet o podobnosti trojuholníkov (pozri k tomu napr. [10]). Je zaujímavé sledovať, ako Pappus postupne budoval zdôvodnenie tohto tvrdenia, ktoré má také významné postavenie v projektívnej geometrii. Skôr než uvedieme Pappov dôkaz, uvedieme aspoň myšlienky a postup niektorých dôkazov tejto vety.

Dôkaz 1. (Hartshorne, pozri [5])

Zvolíme priamku $A'B' = B'C'$ za nevlastnú priamku. Všetky ostatné body sú potom už vlastné a môžeme použiť tvrdenia euklidovskej roviny, napr.vety o podobnosti trojuholníkov (Obr. 2)
Z podobnosti trojuholníkov *BCR* a *ACT*, ako aj z podobnosti trojuholníkov *PAB* a *SAC* dostaneme úmery, ktoré spolu s faktom podobnosti trojuholníkov *TQC* a *AQS* implikujú, že aj trojuholníky *TQR* a *AQP* sú podobné. Preto platí, že uhol *AQP* je zhodný s uhlom *TQR* a priamky *PQ* a *QR* sú rovnobežné. Pretože majú spoločný bod, musia byť totožné, teda body *P, Q, R* sú kolineárne.



Obr. 2

Aby bol dôkaz úplný, treba ukázať, že ak Pappov výrok platí pre špeciálnu dvojicu priamok, tak platí pre ľubovoľné dve priamky. V rozšírenej euklidovskej (a každej desargovskej) rovine toto platí ako dôsledok existencie istých transformácií roviny (projektívnych kolineácií) a ich vlastností.

Dôkaz 2 (pozri aj http://www.mathpages.com/home/kmath542/kmath542.htm)

Body, ktoré majú byť (dokázané) kolineárne, sú nevlastné. V tomto dôkaze sa to dosiahne vnorením roviny α obsahujúcej všetky dané body do trojrozmerného (projektívneho – rozšíreného euklidovského) priestoru. Následne sa stredovo zobrazia body do roviny α´ tak, aby dva body z bodov *P, Q, R* boli premietnuté do nevlastných bodov. Kolineárnosť pôvodných bodov sa dokáže tak, že sa ukáže, že aj tretí bod z bodov *P, Q, R* sa premietne do nevlastného bodu.
Detailnejšie: Nech sú obrazy daných bodov do roviny α´ označené ako pôvodné body. Nech sú body $P = AB' \cap A'B$, $R = BC' \cap B'C$ nevlastné, v afinnom vyjadrení – nech $AB' \parallel A'B$ a $BC' \parallel B'C$ (pozri obr. 3). Nech $O = AB \cap A'B'$.

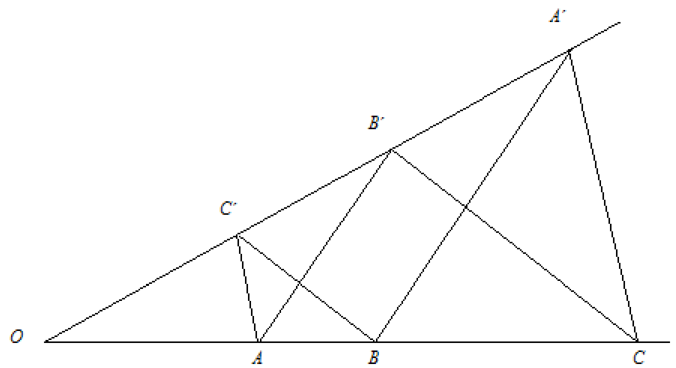
Trojuholníky OCB' a OBC' sú podobné (rovnoľahlé) a preto $\dfrac{OC}{OB'} = \dfrac{OB}{OC'}$.

Obdobne trojuholníky $OA'B$ a $OB'A$ sú podobné (rovnoľahlé) a preto $\dfrac{OA'}{OB} = \dfrac{OB'}{OA}$.

Z toho máme $OC = \dfrac{OB.OB'}{OC'}$ a $OA' = \dfrac{OB'.OB}{OA}$ a ďalej $OC.OC' = OA'.OA$. (Autor tu upozorňuje na komutatívnosť násobenia – ako súvis s Pappovou vetou ...)

Zo vzťahu $\dfrac{OC}{OA'} = \dfrac{OA}{OC'}$ a faktu, že body *O*, *A*, *C* ako aj body *O*, *C*´, *A*´ sú kolineárne máme ako dôsledok, že trojuholníky OAC' a OCA' sú rovnoľahlé a teda priamky AC' a CA' sú rovnobežné, $AC' \parallel CA'$.

Body *P*, *Q*, *R* sú teda kolineárne.



Obr. 3

Dôkaz 3 (analytický – pozri [12])

Nech (x_0, x_1, x_2) sú homogénne súradnice bodu *X* rozšírenej euklidovskej roviny s nevlastnou priamkou $x_0 = 0$. Zvoľme priamku $x_1 = 0$ za priamku *p* a priamku $x_2 = 0$ za priamku *p*´. Nech je ďalej $A = (1,1,0)$, $A' = (1,0,1)$, $C = (0,1,0)$ (nevlastný bod priamky *p*), $C' = (0,0,1)$ (nevlastný bod priamky *p*´). Nech bod *B* z priamky *p* a bod B´ z priamky *p*´ spĺňajú predpoklady vety. Potom $B = (1, b, 0)$ a $B' = (1, 0, b')$, kde *b*, *b*´ sú reálne čísla rôzne od 0,1. Vypočítame rovnice priamok *AB*´, *A*´*B*, ... a zistíme, že $P = (bb'-1, b(b'-1), b'(b-1))$, $Q = (1,1,1)$ a $R = (1, b, b')$. Determinant zostavený z ich súradníc sa rovná nule, čo je ekvivalentné faktu, že body *P*, *Q*, *R* sú kolineárne.

Poznámka. V obdobne ako v dôkaze 1 tu boli priamky *p*, *p*´ zvolené špeciálne, hoci veta hovorí o ľubovoľnej dvojici priamok. To, že dôkaz je korektný, vyplýva z nasledovnej vety platnej v desargovskej (a teda aj v rozšírenej euklidovskej) rovine: Ak *ABCD* a *A*´*B*´*C*´*D*´ sú dve štvorice po troch nekolineárnych bodov, tak existuje projektívna kolineácia, ktorá zobrazí postupne body *A*, *B*, *C*, *D* na body *A*´, *B*´, *C*´, *D*´.

Dôkaz 4 (Pappov dôkaz, ktorého preklad je uvedený v zbierke [8], obsahujúcej preklad poznámok a tvrdení Pappa k Porizmom Euklida)

Dôkaz samotnej vety (veta 139 z [8]) je dôsledkom viacerých podporných, či pomocných tvrdení (veta 129-138), ktoré sú samy osebe zaujímavé a dôležité. Text je písaný dobovým vyjadrovaním – aj aritmetické veličiny sa vyjadrujú v geometrických pojmoch (súčin veľkostí úsečiek ako obsah obdĺžnika).

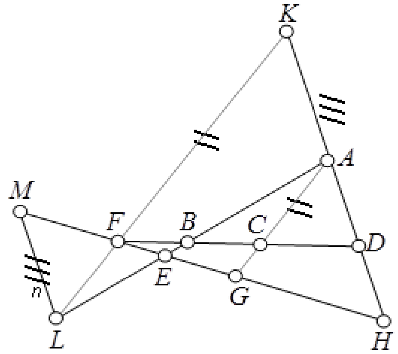
Tvrdenia Pappovej vety ako aj tvrdení, ktoré sú pri jej zdôvodnení využité, uvedieme najskôr v pôvodnej formulácii, ako ho preložil (do ruštiny) Rosenfeld (a následne autor tohto príspevku do slovenčiny):

Veta 129 – Ak 3 priamky *AB, CA, DA* sú preťaté priamkami *FE, FD* vychádzajúcimi z jedného bodu, potom tvrdím, že (obdĺžnik) na *FB, DC* sa má k (obdĺžniku) na *FD, BC* ako (obdĺžnik) na *FE, HG* k (obdĺžniku) na *FH, GE*.

Text tvrdenia v súčasnom matematickom jazyku:

Nech sú dané tri priamky *AB*, *AC*, *AD* a bod *F* neležiaci na žiadnej z nich. Nech sú dané ďalšie body *E*, *G*, *H* nasledovne: bod *E* je ľubovoľný bod priamky *AB*, rôzny od bodov *A*, *B*, $G = EF \cap AC$, $H = EF \cap AD$. Potom platí:

$$(FB.DC):(FD.BC) = (FE.HG):(FH.GE).$$



Obr. 4

Zostrojme bodom *F* priamku *m* rovnobežne s priamkou *AC*. (v texte – s priamkou *GCA*). Nech $K = DA \cap m$, $L = AB \cap m$; je teda $m = KL$. Ďalej zostrojme bodom *L* priamku *n* rovnobežne s priamkou *AD*. Priamka *n* pretne priamku *EF* v bode *M*; $M = EF \cap n$ (Obr. 4).

Z podobností trojuholníkov v skúmanom útvare získame tieto vzťahy:

$EG:GA = EF:FL$, $AG:GH = FL:FM$ a tiež $FL:FM = FK:FH$.

Z nich vynásobením a vykrátením dostaneme $EF.GH = EG.FM$. Z predchádzajúceho dostaneme tiež $\frac{EG}{EF} = \frac{GH}{FM} = \frac{AG}{FL}$.

S pomocou týchto vzťahov dostaneme, že $\frac{EF.GH}{EG.HF} = \frac{EG.FM}{EG.HF} = \frac{FM}{FH} = \frac{LF}{FK}$. Ďalej (opäť z podobnosti vhodných trojuholníkov) vyplýva, že $FL = \frac{FB.CA}{BC}$ a $FK = \frac{FD.AC}{CD}$, teda $\frac{LF}{KF} = \frac{FB.CD}{FD.BC}$.

Nakoniec porovnaním posledných vzťahov máme požadované $\frac{FB.DC}{FD.BC} = \frac{FE.HG}{FH.GE}$.

Poznámka. Dnes by sme povedali, že perspektívnosť z priamky *BC* na priamku *GH* zachováva dvojpomer.

Ďalšie tvrdenie je samo osebe zaujímavým tvrdením o kolineárnosti istých bodov (a súvise s harmoničnosťou štvorice bodov), ktoré však nie je dôležité z hľadiska dôkazu Pappovej vety, uvediem ho bez dôkazu:

Veta 131 – Ak je daný obrazec *ABCDEFGH*, tak *AD* sa má k *DC* ako *AB* k *BC*. Ak sa má *AD* k *DC* tak, ako *AB* k *BC*, tak tvrdím, že čiara prechádzajúca bodmi (cez body) *A*, *H*, *F* je priamka.

Toto tvrdenie obsahuje vlastne dve tvrdenia:

a) Ak sú dané štyri kolineárne body *A, B, C, D* a body *E, F, G, H* mimo priamky *AB*, pričom trojice bodov (*A*, *G*, *E*), (*E*, *F*, *C*), (*F*, *G*, *D*) a (*B*, *H*, *E*) sú kolineárne, tak pre veľkosti úsečiek ... platí $AD : DC = AB : BC$.

b) Dané sú body *A, B, C, D* ležiace na jednej priamke, pre ktoré (pre veľkosti úsečiek nimi určených) platí $AD : DC = AB : BC$. Nech bod *E* je ľubovoľný bod mimo priamky *AB*, body *G* z *AE* a *F* z *CE* sú také body, aby priamka *FG* prechádzala bodom *D*. Ďalej je daný bod $H = CG \cap EB$. Potom sú body *A*, *H*, *F* kolineárne.

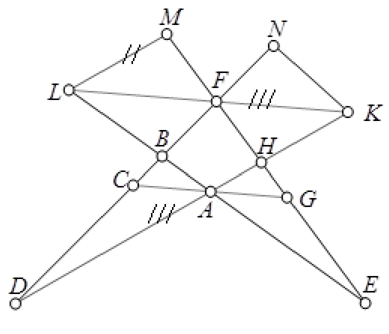
Nasledujúce tvrdenie je podstatné vo vzťahu k dôkazu Pappovej vety:

Veta 136. Zostrojíme z bodu *F* k dvom priamkam *BAE*, *DAH* dve priamky *DF*, *FE* a nech (obdĺžnik) na *DF*, *BC* sa má k (obdĺžniku) na *DC*, *BF* ako (obdĺžnik) na *FH*, *GE* k (obdĺžniku) na *FE*, *GH*. Tvrdím, že čiara prechádzajúca bodmi *C*, *A*, *G* je priamka.

Po preformulovaní do dnešného jazyka:

Nech *A*, *D*, *E* sú tri nekolineárne body, *F* je bod neležiaci na žiadnej z priamok *AD*, *AE*. Nech $B = AE \cap FD$, $H = AD \cap FE$. Nech *C*, *G* sú také body, že $C \in FD$, $G \in FE$ a platí $(DF.BC):(DC.BF) = (FH.GE):(FE.GH)$. Potom sú body *C*, *A*, *G* kolineárne.

Dôkaz. Nech platí $\dfrac{DF.BC}{DC.BF} = \dfrac{FH.GE}{FE.GH}$, t. j.
$(DF.BC):(DC.BF) = (FH.GE):(FE.GH)$.



Obr. 5

Zostrojme bodom *F* priamku *m* rovnobežnú s priamkou *CA* tak, že *m* pretne (priamku) *AD* v bode *K* a priamku *AE* v bode *L*. Bodom *L* zostrojme priamku *n* rovnobežnú s priamkou *AD*; zostrojme ešte bod $M = n \cap EF$. Nakoniec zostrojme priamku *p* rovnobežnú s *AB* a jej priesečník *N* s priamkou *DF*; $N = p \cap DF$. Je teda $n = LM$ a $p = KN$. (Pozri obr. 5)

Z rovnoľahlosti dvojíc trojuholníkov *CBA* a *FNK*, resp. *DBA* a *DNK* dostaneme, že platí $DF:DC = FN:CB$, t.j. $DF.CB = DC.FN$, z čoho s použitím predpokladu dostaneme vzťah $\dfrac{FH.GE}{FE.GH} = \dfrac{DF.BC}{DC.BF} = \dfrac{DC.FN}{DC.BF} = \dfrac{FN}{BF}$.

Ďalej z rovnoľahlosti dvojíc trojuholníkov *FBL* a *FNK*, resp. *FKH* a *FLM*, dostaneme $FN:FB = FK:FL = FH:FM$. Úpravou posledne získaných vzťahov máme $\dfrac{FH.GE}{FM.GE} = \dfrac{FH.GE}{FE.GH}$ a teda $FM.GE = FE.GH$.

Keďže platí aj $\dfrac{EM}{EH} = \dfrac{EF}{GE}$ a $\dfrac{EM}{EH} = \dfrac{EL}{AE}$ (z podobnosti trojuholníkov *ELM* a *EAH*), platí $\dfrac{EF}{GE} = \dfrac{EL}{AE}$ a teda sú trojuholníky *ELF* a *EAG* rovnoľahlé. Z toho vyplýva, že priamky *FL* a *AG* sú rovnobežné. Pretože podľa konštrukcie v úvode boli priamka *KL* (prechádzajúca bodom *F*) a priamka *AC* rovnobežné a $FL = KL$, sú priamky *AG* a *AC* rovnobežné. Pretože majú spoločný bod A, musí platiť $AG = AC$, t.j. body *A*, *G*, *C* sú kolineárne.

V [8] je spomenutá (ale neuvedená) aj veta 137, ktorá je špeciálny prípad vety 129 pre situáciu, keď jedna z premietajúcich priamok bodov priamky *BC* je rovnobežná s priamkou *EF*, na ktorú sa body premietajú. Dané tvrdenie možno sformulovať nasledovne:

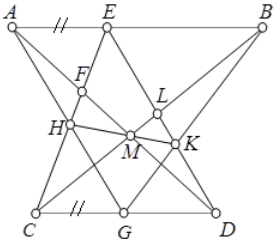
Nech sú dané tri priamky *AB, AC, AD* a bod *F* neležiaci na žiadnej z nich. Nech sú dané také body *E*, *G*, že *E* je bod priamky *AB*, rôzny od bodov *A*, *B*, pričom priamka *EF* je rovnobežná s priamkou *AD a G* = $EF \cap AC$. Platí $(FB.DC):(FD.BC) = (FE:GE)$.

Nasledovná veta je vlastne špeciálnym prípadom Pappovej vety, jej dôkaz sa veľmi nelíši od dôkazu všeobecného tvrdenia (odvoláva sa na predchádzajúcu vetu 137), uvedieme ju bez dôkazu.

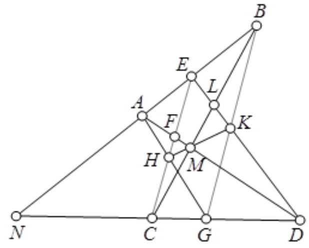
Veta 138. Treba dokázať, že ak sú dané rovnobežky *AB, CD* a tieto priamky sú preťaté priamkami *AD, AG, BC, BG* a ešte zostrojíme (spojnice) *EC a ED,* potom čiara prechádzajúca cez body *H, M, K* je priamka. (Obr. 6)

Po preformulovaní do dnešného jazyka:

Nech sú dané štyri také body *A*, *B*, *C*, *D*, že sú po troch nekolineárne a priamka *AB* je rovnobežná s priamkou *CD*. Nech *E* je ľubovoľný bod priamky *AB*, rôzny od bodov *A*, *B*; *G* je bod priamky *CD*, rôzny od každého z bodov *C*, *D*. Nech $H = EC \cap AG$, $M = BC \cap AD$, $K = ED \cap BG$. Potom body *H, M, K* sú kolineárne.



Obr. 6



Obr. 7

Veta 139 (Pappova veta). Ak sú priamky *AB*, *CD* nie rovnobežné, ale sa pretínajú v bode *N*, tak cez body *H*, *M*, *K* tiež prechádza priamka. (Zamlčaný je tu predpoklad uvedený už v predchádzajúcej vete: Ak sú priamky *AB*, *CD* preťaté priamkami *AD*, *AG*, *BC*, *BG* a ešte zostrojíme *EC* a *ED*, potom čiara prechádzajúca cez body *H*, *M*, *K* je priamka.)

Dnešné znenie: Nech sú dané štyri také body *A*, *B*, *C*, *D*, že sú po troch nekolineárne a priamky *AB*, *CD* pretínajú v bode *N*, ktorý je rôzny od bodov *A*, *B*, *C*, *D*. Nech *E* je ľubovoľný bod priamky *AB*, rôzny od bodov *A*, *B*, *N*; nech *G* je bod priamky *CD*, rôzny od každého z bodov *C*, *D*, *N*. Nech $H = EC \cap AG$, $M = BC \cap AD$, $K = ED \cap BG$. Potom body *H*, *M*, *K* sú kolineárne.

Dôkaz. Označme ešte $F = EC \cap AD$, $L = BC \cap DE$. (Pozri obr. 7)
Najskôr sa dvakrát použije veta (129): tri priamky *AD*, *AG*, *AN* (= *AB*) sú preťaté dvomi priamkami *CE*, *CD* a preto platí $\dfrac{CE.HF}{CH.EF} = \dfrac{CN.GD}{CG.DN}$, obdobne platí aj $\dfrac{CN.GD}{CG.DN} = \dfrac{LE.DK}{LK.DE}$.

Teraz použijeme vetu (136), pri4om uvedieme formuláciu textu v duchu vety (136):

Nech *M*, *C*, *D* sú tri nekolineárne body, *E* je bod neležiaci na žiadnej z priamok *MC*, *MD*. Nech $F = MD \cap EC$, $L = MC \cap DE$. Nech *H*, *K* sú také body, že *H* je z *CE*, *K* z *DE* a platí (*CE.FH*) : (*HC.EF*) = (*EL.DK*) : (*DE.KL*) . Body *H*, *M*, *K* sú (na základe lemy 3) kolineárne.

Poznámka. Ak platí Pappova veta v projektívnej rovine, má viacero dôležitých dôsledkov (platnosť duálnej vety k Papovej, Desargova veta, platnosť základnej vety, komutatívnosť grupy homológií s tým istým stredom a tou istou osou), pozri k tomu napr. [5], [1] alebo [12]. Keďže niektoré výroky sú v projektívnej rovine ekvivalentné výroku Pappovej vety, sú tam aj vlastne aj ďalšie dôkazy Pappovej vety.

K známym a jednoducho formulovaným tvrdeniam patrí aj tzv. **Desargova veta:**

Nech *ABC* a *A´B´C´* sú dva trojuholníky. Ak existuje bod *O*, ktorý inciduje (súčasne) s priamkami *AA´*, *BB´*, *CC´* , tak body *P* = *AB* ∩ *A´B´*, *Q* = *AC* ∩ *A´C´*, *R* = *BC* ∩ *B´C´* sú kolineárne.

Pretože platí v každej projektívnej rovine, ktorú možno vnoriť do trojrozmerného projektívneho priestoru, klasický dôkaz tejto vety sa robí zvyčajne v dvoch krokoch – v prvom sa dokáže pre trojuholníky ležiace v rôznych rovinách a v druhom pre trojuholníky v jednej rovine. Využije sa pritom platnosť tvrdenia z prvého kroku a fakt, že v projektívnom priestore sa každé dve (rôzne) roviny pretnú (v priamke).

K „čisto“ projektívnym tvrdeniam patrí aj Pascalova veta:

Priamky na ktorých ležia protiľahlé strany jednoduchého šesťuholníka *ABCDEF* vpísaného do kužeľosečky sú kolineárne.

Poznámky.

1. Pascal ju dokázal údajne ako 16-ročný (nieledy sa uvádza 17-ročný) najskôr pre kružnicu.

2. Pappova veta sa niekedy nazýva aj Pascalovou, lebo priamky *p, p´* z Pappovej vety sa dajú chápať ako singulárna kužeľosečka.
3. K dôkazom Pascalovej vety využívajúcim napr. fakt, že istá projektívnosť sa ukáže byť perspektívnosťou pozri [5] alebo [12].
4. Ďalšie dôkazy Desargovej a Pascalovej vety s využitím Menelaovej vety sú uvedené v nasledujúcej časti.

Menelaus a Ceva

K zaujímavým tvrdeniam patrí Menelaova veta. Aj keď sa pripisuje Menelaovi, tvrdenie bolo známe už skôr, jeho formulácia bola približne takáto:

... ak priamka pretína tri strany trojuholníka (jedna je predĺžená za vrcholy trojuholníka), tak súčin troch (veľkostí) nesusedných úsečiek určených vrcholmi trojuholníka a priesečníkmi priamky sa rovná súčinu zvyšných úsečiek trojuholníka (... *if a straight line crosses the three sides of a triangle* (*one of the sides is extended beyond the vertices of the triangle*), *then the product of three of the nonadjacent line segments thus formed is equal to the product of the three remaining line segments of the triangle.*)

(pozri napr. http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Menelaus.html)

Menelaova veta . Nech *A, B, C* sú tri ľubovoľné nekolineárne body a *A´, B´, C´* sú body rôzne od bodov *A, B, C*, pričom $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$. Potom platí:
Body *A´, B´, C´* sú kolineárne práve vtedy, ak $(BCA').(CAB').(ABC') = 1$.

Poznámka. Niekedy sa Menelaova veta formuluje v tvare implikácie (tvrdenie o kolineárnosti troch bodov), v poslednom čase skôr ako ekvivalencia.

Dôkaz (V.Zaťko)
Nech

$$A' = B + r.(C - B),\ B' = C + s.(A - C),\ C' = A + t.(B - A) \tag{1}$$

pre vhodné reálne čísla *r, s, t*. Potom je

$$(BCA') = \frac{r}{r-1},\ (CAB') = \frac{s}{s-1} \text{ a } (ABC') = \frac{t}{t-1}. \tag{2}$$

Body *A´, B´, C´* sú kolineárne práve vtedy, keď sú vektory $B' - A'$ a $C' - A'$ lineárne závislé, t.j. práve vtedy, keď rovnica

$$x.(B' - A') + y.(C' - A') = \bar{0} \tag{3}$$

má nenulové riešenie pre vhodné reálne *x, y*. Zo vzťahov (1) po dosadení do rovnice (3) dostaneme rovnicu

$$x\{(C - B) + s[(A - B) + (B - C)] - r(C - B\} + y\{(A - B) + t(B - A) - r(C - B)\} = \bar{0}.$$

a po úprave rovnicu

$$[x.(1 - s - r).(C - B) + y.(-r).(C - B)] + [-sx + ty - y].(B - A) = \bar{0} \tag{4}$$

Rovnica (4) má netriviálne riešenie práve vtedy, keď má netriviálne riešenie sústava rovníc

$$x.(1 - r - s) - ry = 0$$

$$-sx + (t - 1)y = 0$$

čo je práve vtedy, keď determinant matice sústavy sa rovná nule, teda vtedy, keď

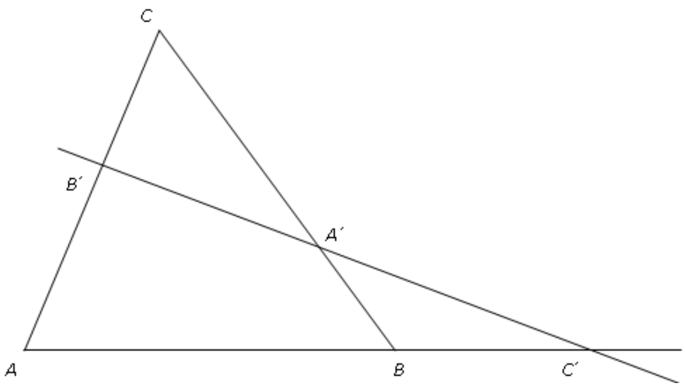
$-1+r+s+t-rt-st-rs=0$ alebo $-1+r+s+t-rt-st-rs+rst=rst$, čo je po úprave
$(r-1).(s-1).(t-1)=rst$ alebo

$$\frac{r}{r-1}.\frac{s}{s-1}.\frac{t}{t-1}=1. \qquad (5)$$

Výraz (5) je po dosadení vzťahov (2) ekvivalentný s tvrdením vety.

Dôkaz s využitím rovnoľahostí (pozri http://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus%27_theorem)

Nech H_1, H_2, H_3 sú rovnoľahlosti so stredmi A', B', C', ktoré zobrazia postupne bod *B* do *C*, *C* do *A* a bod *A* do *B*. Pre ich zloženie $H = H_3 \circ H_2 \circ H_1$ je teda bod B samodružným bodom a je teda buď rovnoľahlosťou alebo identitou. Zobrazenie $H_2 \circ H_1$ zachováva priamku $A'B'$ a zobrazenie *H* zachováva priamku $A'B'$ práve vtedy, keď bod *C´* leží na priamke $A'B'$. Pretože samodružný bod zobrazenia *H* neleží na samodružnej priamke, musí byť *H* identitou. To je práve vtedy, keď sú body A', B', C' kolineárne. Ak je *H* identitou, súčin koeficientov rovnoľahlostí H_1, H_2, H_3 sa rovná jednej, $\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}=1$. Tento výraz platí teda práve vtedy, keď sú body A', B', C' kolineárne. (Obr. 8)

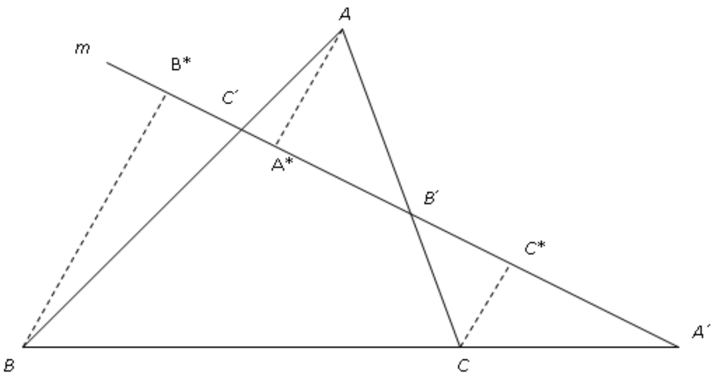


Obr. 8

V [6] sa najskôr dokáže veta obrátená k Menelaovej vete, ktorá je potom dôsledkom tejto vety:
Veta ([6], veta 192). Ak sa strany *BC*, *CA*, *AB* trojuholníka *ABC* pretínajú s tou istou priamkou *m* v bodoch *A´*, *B´*, *C´*, tak medzi úsečkami určenými danými bodmi na stranách trojuholníka *ABC* platí vzťah:

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1.$$

Dôkaz. Nech *A**, *B**, *C** sú kolmé priemety bodov *A*, *B*, *C* na priamku *m* (Obr. 9).



Obr. 9

Z rovnoľahlosti trojuholníkov $A'BB^*$ a $A'CC^*$ vyplýva $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{BB^*}{CC^*}$; analogicky zistíme, že platí $\dfrac{B'C}{B'A}=\dfrac{CC^*}{AA^*}$ a $\dfrac{C'A}{C'B}=\dfrac{AA^*}{BB^*}$. Využitím týchto vzťahov zistíme, že

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{BB^*}{CC^*}.\frac{CC^*}{AA^*}.\frac{AA^*}{BB^*}=1$$

Veta ([6], veta 193) **-** veta obrátená k vete (192) z [6]**,** známa ako **Menelaova veta.**

Ak sú na stranách *BC, CA, AB* trojuholníka *ABC* dané body *A´*, *B´*, *C´* vyhovujúce vzťahu

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$$

tak body *A´*, *B´*, *C´* ležia na (jednej) priamke.

Dôkaz. Priamka *A´B´* pretína stranu *AB* v bode *C´´*; podľa predchádzajúcej vety platí $\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B'C}{B'A}.\dfrac{C''A}{C''B}=1$. Z tohto a z predpokladu dostaneme, že $\dfrac{C'A}{C'B}=\dfrac{C''A}{C''B}$ a teda že body *C´* a *C´´* splývajú.

Veta (Cevova veta)

Nech *A, B, C* sú tri ľubovoľné nekolineárne body a *A´, B´, C´* sú body rôzne od bodov *A, B, C*, pričom $A'\in BC, B'\in AC, C'\in AB$. Potom platí: Priamky *AA´, BB´, CC´* sú konkurentné (prechádzajú jedným bodom) práve vtedy, ak $(BCA').(CAB').(ABC')=-1$.

Poznámky.

1. Hadamard v [6] najskôr dokáže Menelaovu vetu, potom vetu obrátenú k Cevovej a z nej nakoniec vetu Cevovu.
2. Giovanni Ceva „znovuobjavil" Menelaovu vetu a v roku 1678 publikoval svoju vetu – dnes známu ako Cevova veta.

3. Menelaova a Cevova veta sú formulované v pojmoch afinnej geometrie, ale sú v istom zmysle duálne – aspoň „geometrické podmienky“ ich platnosti a tým aj obrázok, schéma, k podpore dôkazu daných viet.

Na stránke [2], vychádzajúc z článku Johna R. Silvestera (pozri [11]) formulujú (a dokazujú) obe vety – Menalovu i Cevovu – naraz.
Ak body *A, B, C* a *A´, B´, C´* majú ten istý význam ako v spomínaných vetách, tak

- body *A´, B´, C´* sú kolineárne práve vtedy, keď $(BCA').(CAB').(ABC')=1$,
- priamky *AA´, BB´, CC´* prechádzajú jedným bodom (sú „zbiehavé“ – concurrent) práve vtedy, keď platí $(BCA').(CAB').(ABC')=-1$.

Výraz $(BCA').(CAB').(ABC')$ sa zvykne vyjadriť nasledovne: $\dfrac{A'B}{A'C}.\dfrac{B'C}{B'A}.\dfrac{C'A}{C'B}$, kde symbol *A´B* značí tzv. orientovanú veľkosť (dĺžku) úsečky *A´B*. Na spomenutej stránke a v článku J.R.Silvestra je nahradený vyššie uvedený výraz nasledovným výrazom $\dfrac{BA'}{A'C}.\dfrac{CB'}{B'A}.\dfrac{AC'}{C'B}$, a napravej strane tvrdení sa zmení nielen tento výraz ale aj znamienko:

- body *A´, B´, C´* sú kolineárne práve vtedy, keď $\dfrac{AC'}{C'B}.\dfrac{BA'}{A'C}.\dfrac{CB'}{B'A}=-1$ alebo $[-(BCA')].[-(CAB')].[-(ABC')]=-1$ (Menelaova veta)
- priamky *AA´, BB´, CC´* prechádzajú jedným bodom (sú „zbiehavé“ – concurrent) práve vtedy, keď platí $\dfrac{AC'}{C'B}.\dfrac{BA'}{A'C}.\dfrac{CB'}{B'A}=+1$ (Cevova veta).

Dôvod – dôkaz využije barycentrické súradnice a autorovi „sa to hodí“:
Dôkaz. Nech a, b, c s reálne čísla tak, že platí
$BA'=\dfrac{BC}{1+a}$, čo implikuje $A'C=\dfrac{a}{1+a}.BC$, $CB'=\dfrac{CA}{1+b}$, a teda $B'A=\dfrac{b}{1+b}.CA$,
$AC'=\dfrac{AB}{1+c}$, z čoho je $C'B=\dfrac{c}{1+c}.AB$.
Potom máme $\dfrac{AC'}{C'B}.\dfrac{BA'}{A'C}.\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{1}{abc}$, takže je (pre)formulácia tvrdenia
$\dfrac{1}{abc}=-1$ pre Menelaovu a $\dfrac{1}{abc}=+1$ pre Cevovu vetu.
Barycentrické súradnice bodov vzhľadom na trojuholník *ABC* sú nasledovné“
$A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$, $A'(0;\dfrac{a}{a+1};\dfrac{1}{a+1})$, $B'(\dfrac{1}{b+1};0;\dfrac{b}{b+1})$, $C'(\dfrac{c}{c+1};\dfrac{1}{c+1};0)$.
Jednoduchým výpočtom sa zistí, že

- body *A´*, *B´*, *C´* sú kolineárne práve vtedy, keď $abc=-1$, a
- priamky *AA´*, *BB´*, *CC´* incidujú s tým istým bodom právevtedy, keď $abc=+1$.

Poznámka. J. Silvester v svojom článku [11] považuje za Menelaovu a Cevovu vetu implikácie, ktorých predpoklad je kolineárnosť bodov *A´*, *B´*, *C´* , resp. konkurentnosť priamok *AA´*, *BB´*, *CC´*. Ako jednoduchú aplikáciu týchto úvah J. R. Silvester ukazuje, že dvojnásobné použitie Menelaovej vety (na Δ *BA´A* a kolineárne body *C, P, C´* a potom na

$\Delta\, A'CA$ a kolineárne body B, B', P, kde P je priesečník priamok AA', BB' a CC', implikuje platnosť vzťahu $\frac{AC'}{C'B}.\frac{BA'}{A'C}.\frac{CB'}{B'A} = (-1)^2 = +1$.

Menelaovu vetu dokáže, ak použije Cevovu vetu šesťkrát.

Niektoré známe vety ako „dôsledky“ Menelaovej vety (Desargova veta**,** Pascalova veta, Pappova veta – pozri http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pappus.shtml , Cevova veta pozri [6]).

Desargova veta ([6], str.185, pr.II)

Ak sú dané $\Delta\, ABC$, $\Delta\, A'B'C'$ tak, že $AA' \cap BB' \cap CC' = O$, tak body $N = AB \cap A'B'$, $M = AC \cap A'C'$, $L = BC \cap B'C'$ ležia na jednej priamke.
Dôkaz.
Ak sa budeme snažiť použiť Menelaovu vetu aplikovanú na $\Delta\, ABC$, tak body M, N, L ležia na jednej priamke práve vtedy, keď $(BCL).(CAM).(ABN) = 1$ (pozri obr.10).

Použijeme Menelaovu vetu trikrát postupne na trojuholníky OBC, OAB a OAC a priamky $LB' = B'C'$, $NB' = B'A'$, $MA' = A'C'$. Platí

$(BCL).(COC').(OAA') = 1$, $(ABN).(BOB').(OAA') = 1$ a

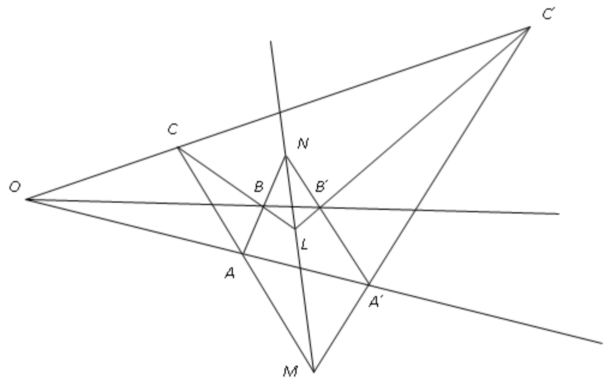
$(CAM).(AOA').(OCC') = 1$.

Vynásobíme ľavé strany a dostaneme

$(BCL).(CAM).(ABN).(COC').(OCC').(AOA').(OAA').(BOB').(OBB') = 1$, z čoho máme $(BCL).(CAM).(ABN) = 1$, lebo

$(COC').(OCC') = (AOA').(OAA') = (BOB').(OBB') = 1$.

Body M, L, N sú teda kolineárne.



Obr. 10

Pascalova veta ([6], str.185, pr.III)

Nech k je kružnica a $ABCDEF$ je šesťuholník vpísaný do k. Potom body $L = AB \cap DE$, $M = BC \cap EF$, $N = CD \cap FA$ sú kolineárne.
Dôkaz.
Budeme skúmať trojuholník so stranami AB, CD, EF a vrcholmi $J = AB \cap CD$, $I = CD \cap EF$, $K = EF \cap AB$. Podľa Menelaovej vety budú body L, M, N kolineárne práve vtedy, keď bude platiť $(IJN).(JKL).(KIM) = 1$.

Aby sme to dokázali, budeme uvažovať o $\Delta\, IJK$ a troch priamkach :

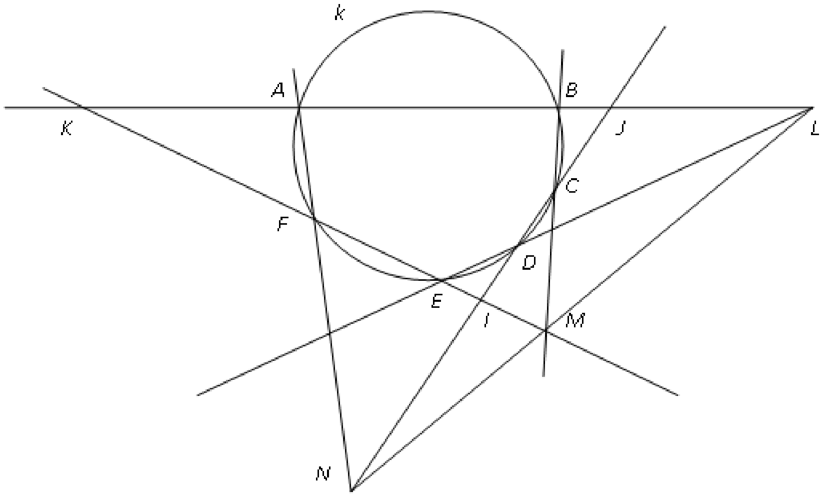
DE : platí $(IJD).(JKL).(KIE) = 1$

BC : platí $(IJC).(JKB).(KIM) = 1$ (1)

FA : platí $(IJN).(JKA).(KIF) = 1$.

Plánuje sa vynásobiť ľavé strany, a ukázať, že platí $(IJD).(KIE).(IJC).(JKB).(JKA).(KIF) = 1$. Rozpisom deliacich pomerov cez „orientované veľkosti úsečiek“ a následnej úprave dostaneme totiž, že $\frac{ID}{JD}.\frac{KE}{IE}.\frac{IC}{JC}.\frac{JB}{KB}.\frac{JA}{KA}.\frac{KF}{IF} = \left(\frac{ID.IC}{IE.IF}\right).\left(\frac{KE.KF}{KB.KA}\right).\left(\frac{JB.JA}{JC.JD}\right) = 1$. Posledná rovnosť platí, pretože platí $ID.IC = IE.IF = m(I,k)$, mocnosti bodu *I* vzhľadom na kružnicu *k*. Obdobne pre body *K* a *J*.

Po vynásobení rovností (1) a využití predchádzajúcich rovností, dostaneme, že platí $(IJN).(JKL).(KIM) = 1$, teda body *L, M, N* sú kolineárne (obr. 11).



Obr. 11

Záver

Na http://www.cut-the-knot.org/Generalization/MenelausByEinstein.shtml je spomenutá korešpondencia medzi Albertom Einsteinom a jeho priateľom Max Wertheimerom, v ktorej diskutujú o elegantnosti matematických dôkazov. Podľa Einsteina „... úplne spokojní môžeme byť iba vtedy, ak máme pocit, že každý pojem (použitý v dôkaze) je úzko zviazaný s dokazovanou vetou.“ Ako ukážku Einstein dáva dva dôkazy, jeden „škaredý“ (ugly) a druhý elegantný, vkusný (elegant) – sú to dva dôkazy Menelaovej vety. Ten prvý je kratší, ale: „aj keď je prvý dôkaz jednoduchší, nie je uspokojivý, pretože používa doplňujúcu, pomocnú (auxiliary) priamku, ktorá nesúvisí s obsahom dokazovanej vety a dôkaz preferuje bez zjavnej príčiny vrchol *A*, hoci dokazovaná veta je symetrická vo vzťahu k *A, B, C*. Druhý dôkaz, oproti tomu, je symetrický a dá sa čítať priamo z obrázku.“ Je to zaujímavý pohľad, bolo by zaujímavé vedieť, aký názor by mal na klasický dôkaz Desargovej vety v rovine, ktorý sa robí „cez priestor“ a využíva jeden voľne voliteľný bod mimo danej roviny a jeden, príp. dva trojuholníky neležiace v rovine pôvodných trojuholníkov. Možno z tohto pohľadu by bol „krajší“ dôkaz Desargovej vety s využitím Menelaovej vety, ako sme to uviedli v predchádzajúcej časti.

LITERATÚRA

[1] Blattner, J.: *Projective Plane Geometry*. Holden-Day, Inc. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1974

[2] Bogomolny, A.: *Simultaneous Generalization of the Theorems of Ceva and Menelaus* (from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles), http://www.cut-the-knot.org/Generalization/CevaAndMenelaus.shtml, Accessed 15 September 2011

[3] Busemann, H., Kelly, P.J.: *Projective Geometry and Projective Metrics*. New York Academic Press Inc. Publishers, 1953 (Ruský preklad: Izdateľstvo Inostrannoj Literatury, Moskva 1957

[4] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., London 1961 (ruský preklad: Vvedenie v geometriju. Izd. Nauka, Moskva 1966)

[5] Hartshorne, R.: *Foundations of projective geometry* (ruský preklad: Izdateľstvo Mir, Moskva 1970)

[6] Hadamard, J.: *Lessons in Geometry I., Plane Geometry* (ruský preklad: Adamar, Ž.: Elementarnaja geometrija. Tom I., Gosud.učebno-pedag.izdatelstvo, Moskva 1957)

[7] Havlíček, K.: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*. SNTL, Praha 1956

[8] Juškevič, A. P. a kol.(Rozenfeld, B. A., Bašmakova, I. G., Demidov, S. S., Belyj, J. A.): *Chrestomatija po istorii matematiky*. Časť III. Geometrija. 5b. Voprosy projektívnoj geometrii. (Iz sedmoj knigi «Matematičeskogo sbornika » Pappa, prekl.B.A.Rosenfeld). Moskva, Prosveščenie, 1976

[9] Pappi Alexandrini: *Collectiones quae supersunt*, t. II. Ed. F. Hultsch, Berolini, 1877

[10] Sklenáriková, Z., Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Vyd. UK Bratislava 2002

[11] Silvester, J. R.: *Ceva = (Menelaus)2*, Maths Gazette 84, 268-271 (2000)

[12] Solčan, Š.: Projektívna geometria (Skriptum UK, 1995)

[13] Solčan, Š., Straka, P.: *O dokazovaní kolineárnosti bodov*. In: EMATIK 2008 : Zborník príspevkov z konferencie. - Bratislava : FMFI UK, 2009. - S. 96-102. - ISBN 978-80-89186-55-6

[14] Weisstein, Eric W. *"Pappus's Theorem*." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PappussTheorem.html

[15] Wieleitner, H.: *Geschichte der Mathematik* (Neue Bearbeitung), Sammlung Göschen 2 Bände 1922, 1923

Doc. RNDr. Štefan Solčan, PhD.
Oddelenie geometrie
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
FMFI UK Bratislava
Mlynská dolina
SK - 842 48 Bratislava
e-mail:*solcan@fmph.uniba.sk*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

CONTROL AND EVALUATION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

MAJOR MACIEJ

ABSTRACT. In this paper I present proposals for sets (series) of the tasks that control not only the mathematical knowledge of the accounts and deduction, but also the ability organization in both phases: mathematization, and interpretation phase.

The issue of control and evaluation of knowledge and evaluation of competence in mathematics is an important and constantly current problem of psychology, pedagogy and didactics of mathematics. The views on the objectives, content and methods of control are changing because they take into account the latest research findings, as well as the needs of fast cultural changes in society.

Many mathematics educators raise these issues. Z. Krygowska dedicates a separate chapter to these matters in [2] (pp. 144-164). She cites there the view J. Suranyi'a[1] of controlling the results of mathematics teaching and its evaluation: *Control and evaluation is the process of collecting information on learning results in different aspects, leading to the evaluation based on this information. This process plays an important role in the whole system of education. This process is conditioned by the requirements of society and the needs of education, but for various reasons, progress in methods of control and evaluation is always late in relation to the progress of teaching, manifested in textbooks, teaching methods and programs.* Next three groups of issues formulated by J. Suranyi are considered and related to the of process control and evaluation:

— *how to control and to judge knowledge and skills of mathematics?;*
— *what should be controlled and evaluated?;*
— *how to do it?*

The basic tool for testing and evaluation of mathematical knowledge and skills are mathematical tasks. Unfortunately, solving many of the proposed tasks of pupils both during lessons at school, as well as during various types of competence exams (test after gymnasium, the matriculation examination) comes down to the implementation of certain accounts and so covers only a phase of accounts and deduction. The ability to phase the organization and interpretation of mathematization is therefore not controlled.

Solving most of the tasks proposed by teachers, textbooks and collections base on the duplication of tasks presented to pupils schemes of conduct. In the terminology of Z. Krygowska, these tasks are tasks-exercises or tasks for the practical applications of theory. In fact, a pupil solves these tasks in an algorithmic way, often without understanding the operations. There is little opportunity for pupils for conceptual reasoning, which is an important element of mathematical culture.

In this paper we present proposals for sets (series) of the tasks that control not only the mathematical knowledge of the accounts and deduction, but also the ability organization in both phases: mathematization, and interpretation phase, and so what in this work is treated as a basic competence in mathematics. Monitoring and evaluation of knowledge cannot

[1]UNESCO, *Nouvelles tendances de l'enseignement des mathématiques*, Vol. III, 1973.

(and should not) lead to the solution of tasks in which only calculations are performed (calculations accounting). Therefore, this proposal tasks, enabling the control of mathematical competence includes short series of tasks in some way related. The essence of this relationship is:
– certain analogies,
– isomorphisms,
– symmetries,
– ability to transfer methods and tools of solving one problem to solve another, in this sense analogous.

Discovery, justification and the use of these analogies in the process of solving problems in these proposals is also the subject of monitoring and evaluation. It is not only the control of basic issues of a section of mathematics but also pupils' overall mathematical ability.

In the proposed series of tasks a global perspective on the structure of the series is a very important skill. The ability to plan accounts, interpret the results obtained is the key role in solving the series. A person solving such a set of tasks should be informed that they should first read the contents of all tasks, and then decide in what order he\she will solve them. Tasks are designed so that it is possible to solve them in any order. However, the essence of the set is that the solution to a task allows for the solution of earlier tasks. Interesting here is whether a person who solves a set of tasks sees common structure of tasks, and begins the task from the last one (so far), or solves them one after another starting with the easiest and gradually extends the method to solve more general tasks, or does not see the relationship between tasks and solving tasks independently. Therefore, there is important information in what order examined solve the task.

Now we propose two sets of tasks, the first of the probability theory (see [5]), the second of mathematical analysis (see [4]).

Set 1.
Task 1.1. You have been invited to play. From an urn with two white balls and one black two balls are picked. If both are the same colour, then you will win, if they are different colours, then I will win. Do you accept the invitation to play this game? How will you explain in this situation your decision?

Task 1.2. In an urn we have 6 black balls and two white. In this game participate two players: G_A and G_B. From the urn U we pick two balls at the same time. If the balls picked are the same colour, the player G_A wins. If the balls picked are different colours, the player G_B wins. Are the chances of both players equal in this game? If not, how many white balls must be put into the urn so that the game is fair?

Task 1.3. In an urn we have b white balls and c black balls. In this game simultaneously two balls are picked from the urn. If the balls are picked in the same colour, then the first player wins if the balls are picked in different colours the second player wins. For which b and c is this game fair? Explain your answer.

The presented set of tasks can be used to control the organization skills of all three phases of the application of mathematics. In particular, it is about control organization of deduction phases: to see the analogy, the idea of making transfer in similar situations, interpretation within mathematics.

These are not actually mathematical tasks in the strict sense – they are mentioned in games of chance - in their formulation non-math terms were used . The text of tasks does not included a phrase "calculate the probability". Solving each task begins with the formulation of a mathematical task. After solving numerical obtained results should be interrupted. The tasks form a thematic whole. Task 1.1 is a simple exercise involving the school probability theory. Task 1.2 is a generalization of the task 1.1. In this task, apart from calculating the probability that a player will win, you must specify with what number of white balls in the urn, this game is fair. Task 1.3 in turn is a generalization of the task 1.2. You have to specify all the values a and b, for which the described game is fair. We will present an example of a solution of tasks. The experiment carried out in a game of task 1.3. is simultaneously picking two balls from the urn U_{b*c} with b white balls and c black. The solving should begin with the construction of a model of the experiment. There is $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$, where ω_j mean the result of draw: among two randomly selected balls there are *j* black balls ($j=0,1,2$).

It is easy to notice that

$$p(\omega_0)=\tfrac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)},\ p(\omega_1)=\tfrac{2bc}{(b+c)(b+c-1)},\ p(\omega_2)=\tfrac{c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)}.$$

Consider the events:

A = { *balls picked will be the same colour*},

B = { *picked balls will be different colours*}.

The described in the task game is fair, where $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. From the last condition we obtain the equality

$$b(b-1)+c(c-1)=2bc. \qquad ($$

Assuming that $b+c=s$ we obtain the condition $|s-2c|=\sqrt{s}$. Substituting for *s* the squares of further positive integers greater than 1 and taking into account, that $b+c=s$ we get all the pairs of numbers satisfying the condition (1). The set of solutions D equations (1) can be represented as

$$D=\left\{(b,c):b=\tfrac{k^2-k}{2},c=\tfrac{k^2+k}{2},\text{ dla } k\in \mathrm{N}_2\right\}\cup\left\{(b,c):b=\tfrac{k^2+k}{2},c=\tfrac{k^2-k}{2},\text{ dla } k\in \mathrm{N}_2\right\}.$$

The game is fair only if $(b,c)\in D$.

In task 1.1 balls are drawn from the urn U_{2*1}, $(2,1)\notin D$, so the game is not fair. A similar situation occurs for the play of the first part of task 1.2. In the second part of task 1.2 balls are drawn from the urn U_{2+x*6}, where $x\in \mathrm{N}$. From the condition (1) follows that for $b=2+x$ i $c=6$ is $x^2-9x+8=0$. The solution to the last equation is $x=1$ or $x=8$. The game is so fair, when the draw takes place the urns U_{3*6} or the urn U_{10*6}.

Task 1.1 controls the basic knowledge of the school of probability theory. Task 1.2 in addition to the control of this knowledge enables the control phase, the organization skills of deduction. Task 1.3 controls the phase of the organization mathematization skills in a situation where the probability distribution for a given set depends on two parameters.

Now I present a series of three tasks for solving equations with a parameter in which there is absolute value.

Set 2

Task 2.1. Solve the equation $|x-4|=0$ as well $|x+2|=0$.

Task 2.2. For what value of parameter $a \in R$ equation $|x-a|=0$ has exactly one solution.

Task 2.3. For what value of parameter $b \in R$ equation $|x-b|+|x-3|=0$ has exactly one solution.

Task 2.4. What condition must satisfy real numbers $a_1, a_2, \ldots a_n$ that the equation

$$|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots|x-a_n|=0$$

has exactly one solution.

Presented a set of tasks can also be used to control the readiness examined in the conduct of reasoning based on analogy, making the transfer of reasoning, in analogous situations, interpretation inside mathematics.

Task 2.1 is a typical task. Its solution is reduced to solving equations with absolute value.

There is sufficient ability to apply the definition of absolute value.

Tasks 2.2 and 2.3 are a little harder, because the parameter value should be set so that the equation has exactly one solution. To solve this task it is sufficient to know the definition of absolute value and understanding of the concept of parameter, although the tasks 2.2 and 2.3 are conceptually easier to solve using the properties of absolute value. Task 2.4 is the most general. *n* parameters should be set so that the equation has exactly one solution. The very definition of absolute knowledge is not sufficient to resolve it. Conceptually it should be solved using the theorem on the absolute value.

Presented solutions of the last three tasks of the second set. First of all we give one of the basic theorems about absolute value.

Theorem. For each real number *t* the following equivalence is true

$$|t|=0 \Longleftrightarrow t=0.$$

Because $|t|\geq 0$ for any real number t, so

$$|t_1|+|t_2|+\ldots+|t_n|=0 \Longleftrightarrow |t_1|=|t_2|=\ldots=|t_n|=0 \Longleftrightarrow t_1=t_2=\ldots=t_n=0.$$

Returning to the solution of the problem 2.4 we have

$x-a_1=x-a_2=\ldots=x-a_1=0 \Longleftrightarrow x=a_1, x=a_2 \ldots x=a_n.$

Because $x \in R$ so

$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

Equation $|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots|x-a_n|=0$ so we have exactly one solution when $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

On the basis of our reasoning we concluded that if $b=3$, this equation $|x-b|+|x-3|=0$ has exactly one solution. The conducted reasoning can also conclude that the equation $|x-a|=0$ has exactly one solution for any real number *a*.

Task 2.1 controls the basic knowledge of skills to solve equations with absolute value. Tasks 2.2 and 2.3 in addition to the knowledge of these skills allow you to control the organization phase of deduction. This is the way to find the unknown parameter to the equation satisfy the condition. Task 2.4 allows you to control whether the person solving it knows and can apply in non-standard statements absolute value. It allows, therefore to diagnose the readiness to solve problems that are in the area closest to pupils.

In this part of the work we present a set of tasks in the form of a test as a special form of control of certain mathematical competence in the field of mathematics in the department including competence in the field of logic in which the competence generally does not work, either at school or during exams[2], including competence in the field of logic. The aim is to control the test phase, the ability to organize deduction. It is to check how the chosen or constructed counterexamples are formulated and how to formulate conclusions. All statements in the test are formulated in the form of implications $p \Rightarrow q$.

It is interesting here, how it is understood by learning the truth of the implications and how it is verified.

We will present here two tests: a test of probability (see [5], [6], [7]) and mathematical analysis of the concept of absolute value (see [3]).

The test of probability theory				
In all of the following statements refers to the probability space (Ω, Z, P). *Please verify these claims, i.e. determine whether they are true or not.*				
	Theorem	yes	no	if the theorem is false is that justify
1.	If $P(A)=0$, then event A is impossible			
2.	If $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, then $P(A) > P(B)$			
3.	If $A \cap B = \varnothing$, then $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$			
4.	If $A \cap B = \varnothing$, then $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$			
5.	If $A \cap B = \varnothing$, then $P(B) = 1 - P(A)$			
6.	If $\overline{\overline{A}} = k$, a $\overline{\overline{\Omega}} = s$, then $P(A) = \frac{k}{s}$			
7.	If $P(A) = P(B)$, then $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ are equinumerous			
8.	If $P(A \cup B) = 1$, then $B = A'$ $(\Omega \setminus A = B)$			
9.	If $B = A'$ $(B = \Omega \setminus A)$, then $P(A \cup B) = 1$			
10.	If $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, then $A \cap B = \varnothing$.			

The content of each of the tasks included in this test is to verify statements concerning a certain probability. For each of the questions you must answer, “yes” or “no”. If the

[2] This type of task is not too much in the current collection of tasks, books, or sets of tasks in the Matura.

answer is "not" (the statement is false), then it must be justified, and so construct an appropriate counterexample. The place to enter the counterexample has been deliberately limited (in the original test, it is a rectangle with dimensions of 2,5cm × 8cm)[3]. The aim of this treatment was suggestion not to look for counterexamples among the well-known models of random experiments (throws cubes, urns schemes)[4]. but to construct them formally, without reference to reality.

Included are true only Theorem 3. and 9., all others are false. Let $\Omega=\{a,b,c\}$. To determine the probability space (Ω, Z, P) just specify a pair (Ω, p), where p is the probability distribution on the set Ω (see [?], s. 126-127).
We have then $Z=2^{\Omega}$ and $P(A)=\sum_{\omega\in A} p(\omega)$ for $A\in Z$.
Probability distribution p on the set $\{a,b,c\}$ we define as follows:

$\omega\in\Omega$	a	b	c
$p(\omega)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

1. If $A=\{b\}$, then $P(A)=p(b)=0$ and $A\neq\varnothing$, and so theorem 1. is false. Let $A=\{a,b\}$ and $B=\{c\}$. We have $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ and $P(A)=p(a)+p(b)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}<\frac{2}{3}=p(c)=P(B)$, and so theorem 2. is false.
2. If $A=\{a\}$ and $B=\{c\}$, then $A\cap B=\varnothing$ and $0=P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}$, and so theorem 4. Is false.
3. If $A=\{a\}$ and $B=\{b\}$, then $A\cap B=\varnothing$ and $P(B)=0\neq 1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. That implies, that theorem 5. is also false.
4. For the event $A=\{a,c\}$ is $\overline{\overline{A}}=2$ and $\overline{\overline{\Omega}}=3$ and $P(A)=1\neq\frac{2}{3}=\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$, and so theorem 6. is false.
5. We take $A=\{a,b\}$ and $B=\{a\}$. Then we have $P(A)=P(B)$ and $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$, that shows, that theorem 7. is false .
6. Let $A=\{a\}$ and $B=\{c\}$. Then $P(A\cup B)=1$ and events A and B are not complementary, because $A\cup B\neq\Omega$. So the theorem 8 is false.
7. For $A=\{a,b\}$ and $B=\{b,c\}$ we have: $P(A\cup B)=P(\{a,b,c\})=1$ and $P(A)+P(B)=1$, so $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ and $A\cap B=\{b\}\neq\varnothing$, that shows, that theorem 10. is false.

Counterexamples have been constructed in the context of the particular probability space. Whether it is a model of some experience, it is not (because it can not be) relevant. The problem concerns the verification of claims of the world of mathematics. Solving the task reduces to organization phase of deduction.

Note that:

- If the assumptions in the statements: 1., 2., 6., 7. and 10. adding the condition that the probability space is a classic, that new claims (they relate to classical probability) are true;

[3]see ...
[4]Describing of this procedures take a o lo9t of place

- Theorem 8. is opposite to the theorem 9. True is the only theorem 9. Theorem 10. is inverse to Theorem 3. True is the only theorem 3. The test should check properly understood is the relationship between the truthfulness of the statements and theorem the opposite;
- Theorems 3. and 4. varies thesis. One rule on the sum of probabilities of events, and the other the probability of the product, event. The fact that the 3. theorem is true, may suggest that the fourth theorem is also true.

  Now we propose a test of mathematical analysis of the concept of absolute value.

The test for the absolute value				
In all these theorems a and b are arbitrary real numbers. Please verify these claims, i.e. Determine whether they are true or not.				
	theorem	yes	no	if the theorem is false is that justify
1.	If $\lvert a-b\rvert \geq 0$, then $a \geq b$			
2.	If $a > b$, then $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$			
3.	If $a > b$, then $-\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$			
4.	If $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert = \lvert a+b\rvert$, then ($a > 0$ and $b > 0$) or ($a < 0$ and $b < 0$)			
5.	If $\lvert a-b\rvert = 0$, then $a = b = 0$			
6.	If $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$, then $a > b$			
7.	If $a > b$, then $-\lvert a\rvert < -\lvert b\rvert$			
8.	If $a \geq b$, then $\lvert a\rvert > -\lvert b\rvert$			
9.	If $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert = 0$, then $a^2 - b^2 = 0$			
10.	If $a \neq b$ then $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$			

The proposed test is a set of statements about properties of absolute value. Only the last 2 statements are true, others are false. Solving this set of tasks it is necessary to assess the logical sentences written and using mathematical symbols. Rating of the truth tulner of individual sentences and constructing an appropriate example, and saving a solution may present students with great difficulty. Many educators draw attention to the fact that many high school students do not understand the concept of theorem, and in particular the hypothetico-deductive structure, therefore see no proof of the theorem in its truthfulness, and therefore do not understand the role of proof in the construction of deductive theory (see [8]).

The following table presents the test solution.

n.	a	b	p	$\sim q$
1	-3	2	$\|-3+2\|>0$	$\sim(-3\geq 2)$
2	2	-3	$2>-3$	$\sim(\|2\|>\|-3\|)$
3	2	-3	$2>-3$	$\sim(-\|2\|>\|-3\|)$
4	0	0	$\|0\|+\|0\|=\|0+0\|$	$\sim[(0>0\wedge 0>0)\vee(0<0\wedge 0<0)]$
5	2	2	$\|2-2\|=0$	$\sim(2=2=0)$
6	-3	2	$\|-3\|>\|2\|$	$\sim(-3>2)$
7	2	-3	$2>-3$	$\sim(-\|2\|<-\|-3\|)$
8	0	0	$0\geq 0$	$\sim(\|0\|>-\|0\|)$

Finally we will present a series of tasks, which combine the same structure.

The tasks of probability theory.

Task I.I. Three cards of quilting, Jack (w), Queen (d) and King (k), after shuffling will be distributed in a row in a moment. Before this, the player bets on the outcome of this experiment nominating, which card hits the first place, which to another, and which the third. We are talking about a hit on the site, if in this place is this card that the player predicted in this place. The number of hits is the count of points scored in one game. With what probability can a player in this game get 3 points, of which 2, of which one, on which 0?

Task I.II. The game involves two players G_A and G_B. Each player has three cards quilting: Jack (w), Queen (d) and King (k). Everyone shuffles his cards. Player G_A spreads his cards in a row, and then, in a parallel row player puts his cards G_B. If those two rows in front of the card are identical, then let's talk about a combination. On the table lie three chips.

Player G_A takes as many chips as there were association. The other player takes the chips G_B. The winner in this game, the one who received more chips. Is it a fair game? To solve the task can we use the solution of the previous task? Why?

The tasks of this set concern the so-called. ,, random distribution of *k* numbered balls to the *k* numbered locations " for $k=3$. Spaces that are probabilistic models of random experiments referred to in each of the tasks of this set are isomorphic. Each of these experiments can thus simulate the random distribution of three numbered balls numbered in three places. The tasks of this set of controls demonstrating the resulting isomorphism's analogs and skills of inference by analogy.

Set on the theory of absolute value

Task II.I. Solve the inequality $|x-3|\leq 2$.

Task II.II. On the number line, select all the numbers, the distance of 3 is less than or equal to 2.

The tasks of this set, refer to two different aspects of the concept of the absolute value of real number. The first suggests performing algebraic calculus, the second refers to the geometric interpretation of the absolute value. It is important here, whether a student can see that in fact he or she has to solve the same task and is able to interpret the solution of one task in the context of the second task. The solution to both of these tasks is set $[1,5]$.

The ability to problem solving is considered the primary effect of teaching mathematics. But the more important goal to achieve a mathematics teacher should be prepared for is to teach him to formulate tasks, problems, learn how to make meaningful questions. This objective can be achieved through a system of monitoring and evaluating students' knowledge. The control of the efficiency of the accounts cannot be considered as the control of important mathematical competence. Inference by the symmetries and analogies should also be the subject to the control of competence in mathematics. The ability to formulate such proposals is an important aspect of mathematical culture.

The outlined aspects in this article are not exhaustive but merely indicate the problem. Finally, it is worth noting that similar sets of tasks for the various branches of mathematics can and should be offered to students at every stage of education.

BIBLIOGRAPHY

[1] J. Czaplińska.,M. Major, *Some remarks on students' knowledge of the absolute value*, Mathematica. Proc. of the XIth Slovak-Czech-Polish Mathematical School, ed. Takáč Z., XIth Slovak-Czech-Polish Mathematical School, Ružomberok, June 2-5, 2004 2004, 116-121.

[2] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki, Cz. II*, WsiP, Warszawa 1977.

[3] J. Major, *Remarks on verifications of the truth value of propositions on absolute value*, Proceedings of the XIIth Czech-Polish-Slovak Mathematical School, ed.: Melichar J. 2005, 158-161.

[4] J. Major, *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej*, unpublished PhD thesis, Kraków 2006.

[5] M. Major, *Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy uczniów oraz studentów nauczycielskich kierunków studiów matematycznych,* unpublished PhD thesis, Kraków 2001.

[6] M. Major, *Własności prawdopodobieństwa błędnie sugerowane przez prawdopodobieństwo klasyczne*, Ann. Acad. Paed. Cracov. 5 Stu. ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia 1(2002), 75-83.

[7] M. Major, B. Nawolska., *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, WN WSP, Kraków, 1999.

[8] B. J. Nowecki, *Z badań nad rozumieniem przez uczniów szkół średnich twierdzeń matematycznych i ich dowodów,* Rocznik Komisji Nauk Pedagogicznych 20, 29-64.

[9] A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela,* Wydawnictwo naukowe *NOVUM*, Płock 2007.

[10] A. Płocki, *Dydaktyka stochastyki*, Wydawnictwo naukowe *NOVUM*, Płock 2005.

Dr Maciej Major
Institute of Mathematics
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2
PL – 30-084 Cracow
e-mail: *mmajor@up.krakow.pl*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY A ICH RIEŠENIE V ZÁVISLOSTI OD DEFINOVANIA ELIPSY

ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this methodological contribution we concerned with three ways how to define the ellipse. We give definitions such that ellipse as the set points, an ellipse as the affine image of a circle and an ellipse (conic) as the geometric locus of line intersections of two corresponding projective pencils. These definitions give also some properties that we use to solve constructive tasks related to an ellipse. There is 11 tasks in which solutions we apply characteristic properties of the ellipse definitions there.

Úvod

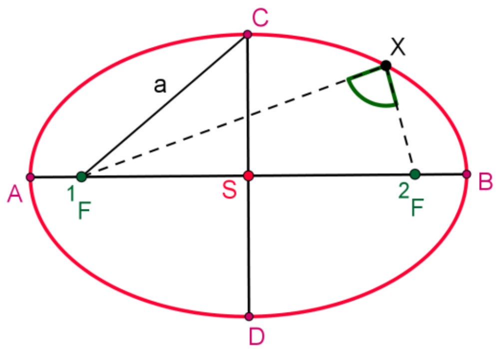
V metodickom príspevku predkladáme rôzne spôsoby definície elipsy, z toho vyplývajúce vlastnosti a ich použitie pri riešení konštrukčných úloh o elipse.

Prvý spôsob definovania elipsy

Definícia 1. *Elipsa je množina bodov v rovine, ktoré majú od dvoch pevných rôznych bodov stály súčet vzdialeností, ktorý je väčší ako vzdialenosť pevných bodov.*

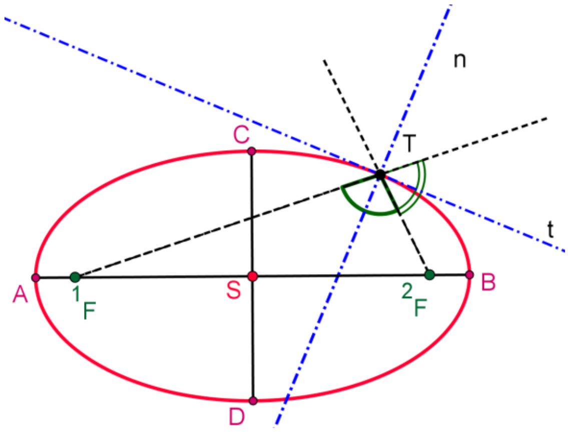
Označme pevné body ${}^1F$, ${}^2F$ a nazvime ich **ohniská**, ľubovoľný bod elipsy nech je X, potom platí $\left|{}^1FX\right| + \left|{}^2FX\right| = 2a$.

Úsečky ${}^1FX$, ${}^2FX$ nazývame **sprievodiče**, uhol ${}^1FX\ {}^2F$ nazývame **vnútorný uhol sprievodičov**.



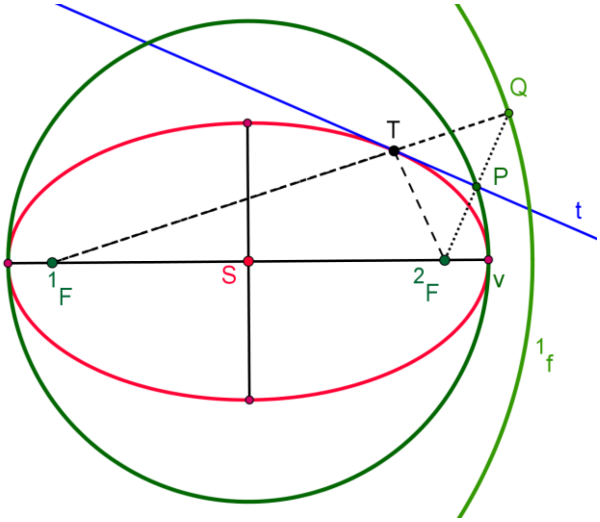
Úsečka AB je **hlavná os** elipsy, jej dĺžka sa rovná $2a$, úsečka CD je **vedľajšia os** elipsy, jej dĺžku označíme b, S je **stred** elipsy, vzdialenosť $\left|{}^1FS\right| = \left|{}^2FS\right| = e$ nazývame **lineárnou výstrednosťou (excentricita)** a platí $a^2 = b^2 + e^2$.

Priamka, ktorá má s elipsou jeden spoločný bod a jej ostatné body sú všetky vonkajšie body elipsy, je **dotyčnicou** t elipsy; spoločný bod sa nazýva dotykový bod T.
Priamka kolmá na dotyčnicu v dotykovom bode je **normála** elipsy. Označme ju n.



Zrejme platí:
Elipsa má v každom bode jedinú dotyčnicu, ktorá rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov. Vonkajší uhol sprievodičov je susedný uhol k vnútornému uhlu sprievodičov.
Z vyššie uvedeného platí:

a) Množina bodov súmerne združených s jedným ohniskom podľa všetkých dotyčníc elipsy je kružnica opísaná z druhého ohniska s polomerom $2a$. Túto kružnicu označme f. (Existujú dve takéto kružnice.)
b) Množina piat kolmíc spustených z ohniska elipsy na jej dotyčnice je kružnica opísaná zo stredu elipsy s polomerom a. Túto kružnicu označme v.

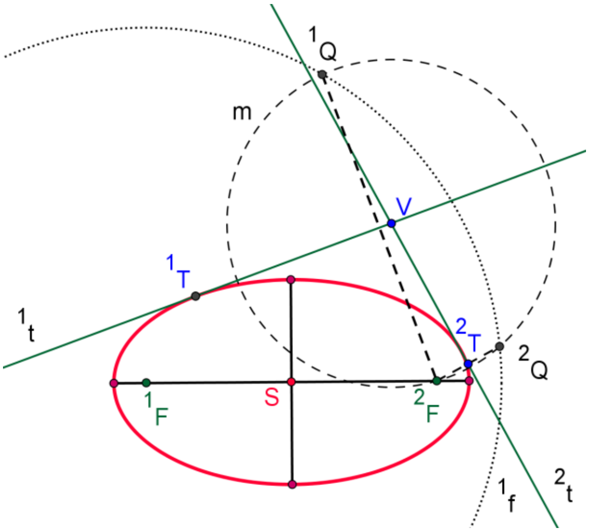


Na základe uvedených vlastností vyriešime dve konštrukčné úlohy.

Úloha 1. *Daná je elipsa s osami AB, CD a bod V ležiaci zvonka elipsy. Zostrojte z bodu V dotyčnice k danej elipse.*
Riešenie 1.
Využijeme body ${}^1Q$, ${}^2Q$ súmerne združené k ohnisku ${}^2F$ podľa hľadaných dotyčníc ${}^1t$, ${}^2t$.

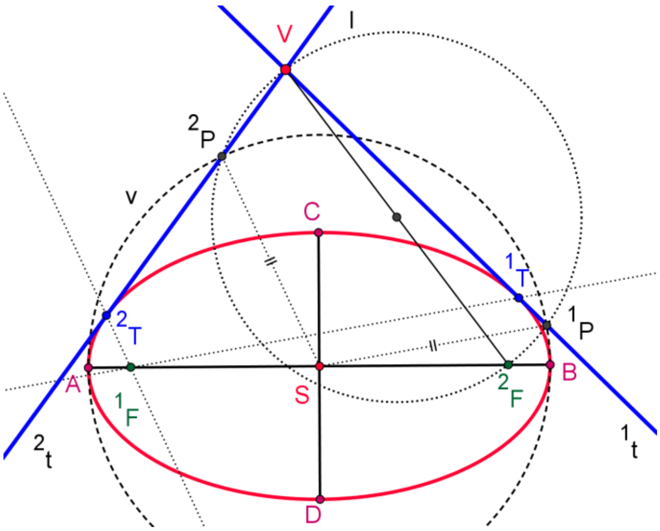
a) Zostrojíme kružnicu m so stredom v bode V a polomerom $|V\,{}^2F|$, body ${}^1Q$, ${}^2Q$ budú ležať na tejto kružnici, pretože platí $|{}^1QV| = |{}^2QV| = |{}^2FV|$.

b) Zostrojíme kružnicu ${}^{1}f$ opísanú z ohniska ${}^{1}F$ a polomerom $2a$. Body ${}^{1}Q, {}^{2}Q$ ležia aj na tejto kružnici.
c) Osi súmernosti úsečiek ${}^{2}F\,{}^{1}Q$ a ${}^{2}F\,{}^{2}Q$ sú hľadané dotyčnice ${}^{1}t, {}^{2}t$.
d) Úloha má dve riešenia, pretože kružnice m a ${}^{1}f$ sa vždy pretínajú v dvoch bodoch.



Riešenie 2.
Využijeme päty ${}^{1}P, {}^{2}P$ kolmíc spustených napr. z ohniska ${}^{2}F$ na hľadané dotyčnice ${}^{1}t, {}^{2}t$.

a) Podľa Tálesovej vety musia body ${}^{1}P, {}^{2}P$ ležať na kružnici l opísanej nad úsečkou ${}^{2}FV$ ako priemerom, lebo trojuholníky ${}^{2}F\,{}^{1}PV$ a ${}^{2}F\,{}^{2}PV$ sú pravouhlé s pravými uhlami pri ${}^{1}P$ a ${}^{2}P$.
b) Body ${}^{1}P$ a ${}^{2}P$ ležia na kružnici v opísanej okolo stredu S s polomerom a.
c) Kružnice l a v sa pretnú v bodoch ${}^{1}P, {}^{2}P$, t. j. v pätách kolmíc spustených z ohniska ${}^{2}F$ na hľadané dotyčnice ${}^{1}t$ a ${}^{2}t$. Priamky $V\,{}^{1}P$ a $V\,{}^{2}P$ sú hľadané dotyčnice, ktorých dotykové body ${}^{1}T, {}^{2}T$ zostrojíme na základe vlastností ${}^{1}F\,{}^{1}T \parallel S\,{}^{1}P$, ${}^{1}F\,{}^{2}T \parallel S\,{}^{2}P$.



d) Úloha má dve riešenia, lebo kružnice l a v sa pretnú v dvoch bodoch.

Úloha 2. *K elipse danej osami AB, CD zostrojte dotyčnice rovnobežné s daným smerom* s .

Riešenie 1.

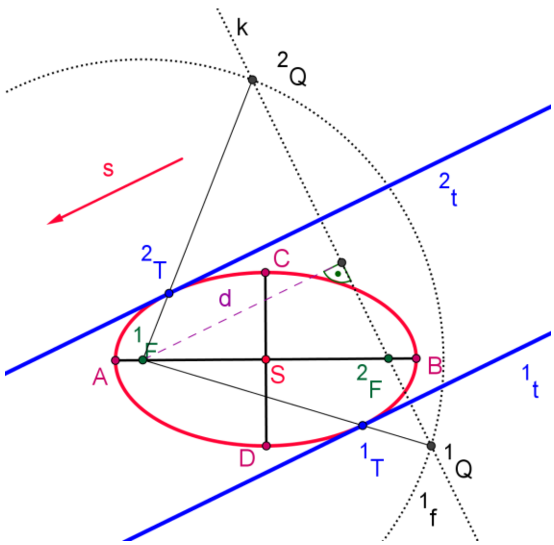
Využijeme opäť body ${}^1Q, {}^2Q$ súmerné s ohniskom ${}^2F$ podľa dotyčníc.

a) Body ${}^1Q, {}^2Q$ súmerné k ohnisku ${}^2F$ podľa hľadaných dotyčníc ${}^1t, {}^2t$ ležia na kolmici k zostrojenej z ohniska ${}^2F$ na daný smer, pretože ${}^1t \parallel {}^2t \parallel s$.

b) Zostrojíme kružnicu ${}^1f$ z ohniska ${}^1F$ s polomerom $2a$ (tak ako v riešení predchádzajúcej úlohy).

c) Kolmica k pretne kružnicu ${}^1f$ v dvoch bodoch ${}^1Q, {}^2Q$ súmerne združených s ohniskom ${}^2F$ podľa hľadaných dotyčníc ${}^1t, {}^2t$. Osi úsečiek ${}^2F\,{}^1Q, {}^2F\,{}^2Q$ sú hľadané dotyčnice ${}^1t, {}^2t$. Body dotyku ležia na úsečkách ${}^1F\,{}^1Q, {}^1F\,{}^2Q$.

d) Úloha má dve riešenia, lebo vzdialenosť d kolmice k od stredu ${}^1F$ kružnice ${}^1f$ sa nanajvýš rovná $\left|{}^1F\,{}^2F\right|$ a je menšia ako $2a$. Preto existujú dva body ${}^1Q, {}^2Q$.



Riešenie 2.

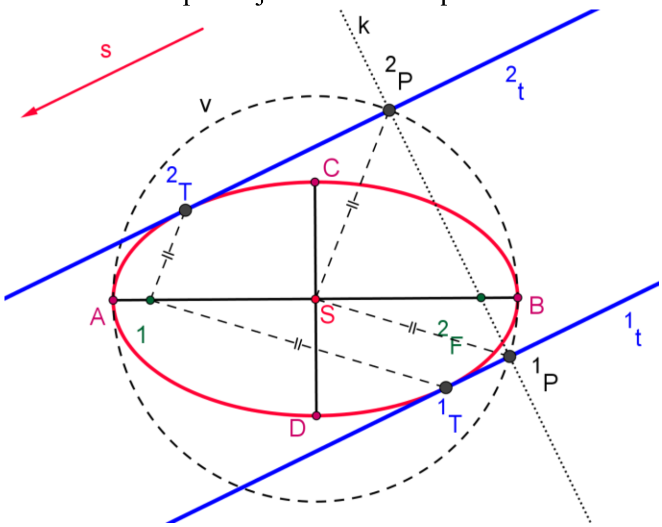
Využijeme päty ${}^1P, {}^2P$ kolmíc spustených z ohniska ${}^2F$ na hľadané dotyčnice ${}^1t, {}^2t$.

a) Päty ${}^1P, {}^2P$ kolmíc spustených z ohniska ${}^2F$ ležia na kolmici k , zostrojenej z ohniska ${}^2F$ na daný smer s , pretože ${}^1t \parallel {}^2t \parallel s$.

b) Body ${}^1P, {}^2P$ súčasne ležia na kružnici v opísanej zo stredu S s polomerom a .

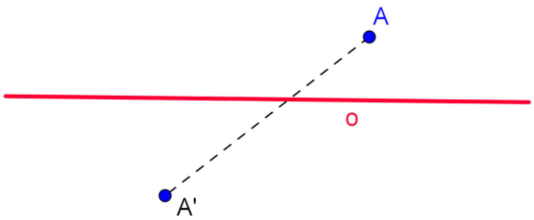
c) Zostrojíme priesečníky ${}^1P, {}^2P$ kolmice k a kružnice v . Priamky ${}^1t, {}^2t$ zostrojené bodmi ${}^1P, {}^2P$ rovnobežne so smerom s sú hľadané dotyčnice. Ich body dotyku ${}^1T, {}^2T$ určíme z vlastností ${}^1F\,{}^1T \parallel S\,{}^1P$, ${}^1F\,{}^2T \parallel S\,{}^2P$, kde S je stred elipsy.

d) Úloha má dve riešenia.



Druhý spôsob definovania elipsy

Medzi známe geometrické zobrazenia patrí aj *osová afinita* v rovine.
Osová afinita v rovine je určená osou o a odpovedajúcimi bodmi – vzorom a obrazom. Os o je množina samodružných bodov.



Osová afinita má tieto vlastnosti:

1. Zachováva incidenciu bodov a priamok.
2. Odpovedajúce si priamky sa pretínajú na osi, alebo sú s ňou rovnobežné.
3. Zachováva rovnobežnosť priamok.
4. Zachováva deliaci pomer troch bodov priamky.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že obrazom bodu v afinite je bod a obrazom priamky je priamka. Položme si otázku: *Čo je obrazom kružnice v afinite*?
Odpoveď na položenú otázku nájdeme pomocou analytickej geometrie.
Rovnica kružnice v pravouhlej súradnicovej sústave, keď kružnica má stred v začiatku súradnicovej sústavy a polomer r, je $x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$.
Použijeme afinné zobrazenie s analytickým vyjadrením

$$x' = \frac{a}{r}x \qquad (2)$$
$$y' = \frac{b}{r}y \qquad 0 < b < a$$

potom tieto rovnosti sú ekvivalentné s rovnosťami

$$x = \frac{r}{a}x' \qquad (3)$$
$$y = \frac{r}{b}y'$$

Po dosadení rovníc (3) do (1) dostaneme

$$\frac{r^2}{a^2}x'^2 + \frac{r^2}{b^2}y'^2 = r^2, \qquad (4)$$

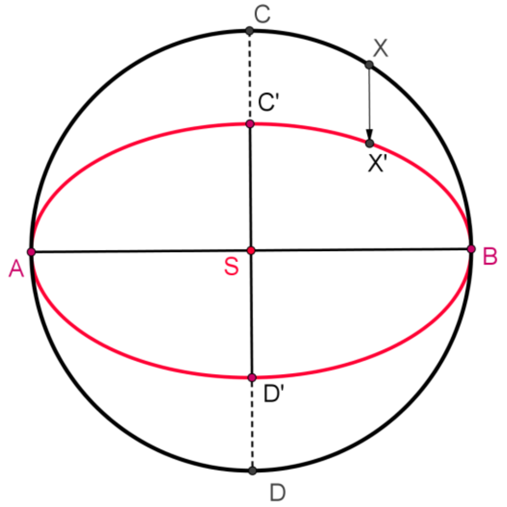
po úprave

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Krivku vyjadrenú rovnosťou (5) nazývame **elipsou**. Ak by sme položili $a = b$, potom rovnica (5) by bola rovnicou kružnice.
Z toho vyplýva:

Afinným útvarom ku kružnici je elipsa alebo kružnica a obrátene, ku každej elipse existuje kružnica, ktorá je s ňou afinná.

Ak sme definovali elipsu ako afinný obraz kružnice, môžeme riešiť konštrukčné úlohy o elipse s využitím afinity medzi kružnicou a elipsou.



Úloha 3. *Elipsa je daná osami AB, CD. Pomocou afinity zostrojte ďalší bod elipsy a dotyčnicu v ňom.*

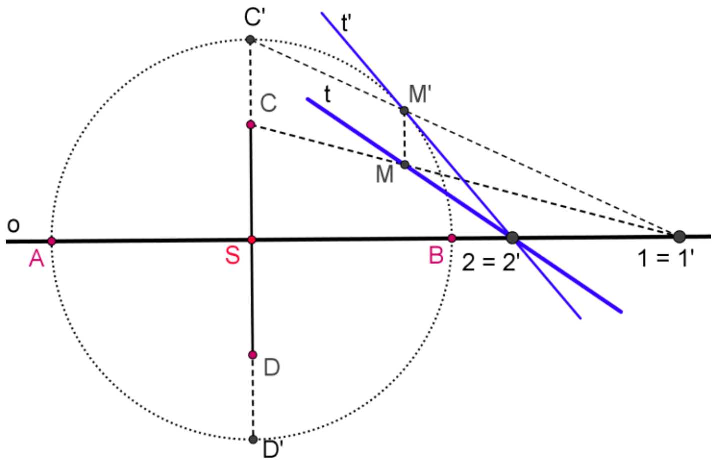
Riešenie 1.

Elipse priradíme obraz – kružnicu k' zostrojenú nad priemerom AB. V tomto prípade priamka AB je osou afinity, smer afinity je CC', kde C' je priesečník priamky SC s kružnicou k'.

Na kružnici k' zvoľme ľubovoľný bod M'. Na elipse mu bude odpovedať bod M nasledovne:

Bodu M' na elipse bude odpovedať bod M, $MM' \| CC'$. Bodmi C', M' položíme priamku $C'M'$, ktorá pretne os afinity (priamku AB) v bode $1 = 1'$. Potom bod M bude ležať na priamke MM' a $1C$.

Dotyčnicu v bode M zostrojíme s využitím vlastnosti osovej afinity. Dotyčnica t' v bode M' pretne os afinity v bode $2 = 2'$.

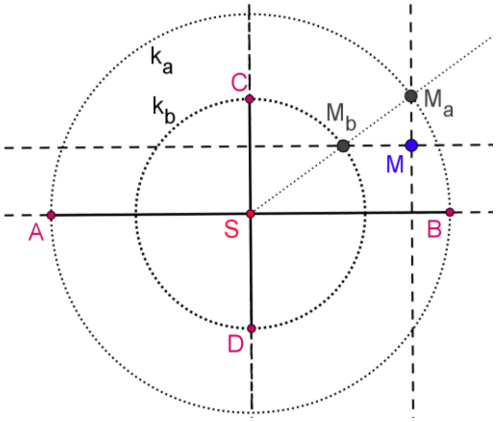


Priamka $2M$ je dotyčnicou elipsy v bode M.

Riešenie 2.

Použijeme afinný vzťah medzi elipsou a kružnicou tak, že raz opíšeme kružnicu nad priemerom AB, vtedy osou afinity bude priamka AB, druhú kružnicu opíšeme nad priemerom CD, vtedy bude os afinity priamka CD. Prvá z kružníc má polomer a, druhá má polomer b. Ľubovoľná polpriamka zostrojená so začiatkom v bode S pretína kružnicu k_a v bode M_a a kružnicu k_b v bode M_b. Bodom M_a vedieme kolmicu na os AB; bodom M_b vedieme kolmicu na CD. Ich priesečník M je bodom elipsy.

Túto konštrukciu bodov elipsy nazývame **trojuholníková** konštrukcia alebo **zástavková** konštrukcia.



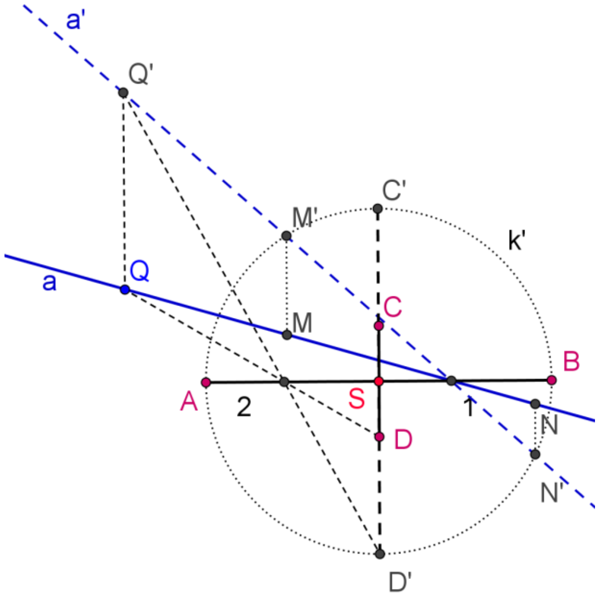
Úloha 4. *Zostrojte priesečníky priamky a s nenarysovanou elipsou, ktorá je daná osami.*

Riešenie

a) Nad priemerom AB zostrojíme kružnicu, ktorá bude v osovej afinnite s danou elipsou. Označme body C' a D' na kružnici, ktoré odpovedajú bodom C a D elipsy.

b) Priamke a priradíme priamku a', je určená bodom Q' a bodom 1. Bod Q' v afinite zodpovedá ľubovoľne zvolenému bodu Q na priamke a.

c) Zostrojíme priesečníky priamky a' s kružnicou, označíme ich M' a N'. Body M, N na priamke a budú priesečníky priamky a s nenarysovanou elipsou.

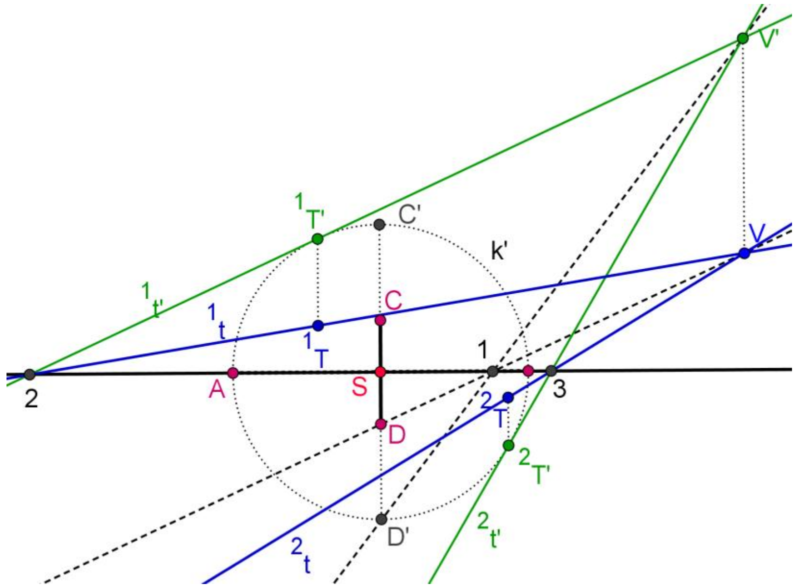


Úloha 5. *Daná je elipsa osami AB, CD. Bodom V ležiacim zvonka elipsy zostrojte dotyčnice k danej elipse.*

Riešenie

a) Nad úsečkou AB ako priemerom zostrojme kružnicu k', ktorá je afinným obrazom danej elipsy. Priamka AB je osou afinity a smer je kolmý na os. Bodom C, D budú odpovedať body C', D' na kružnici k'.

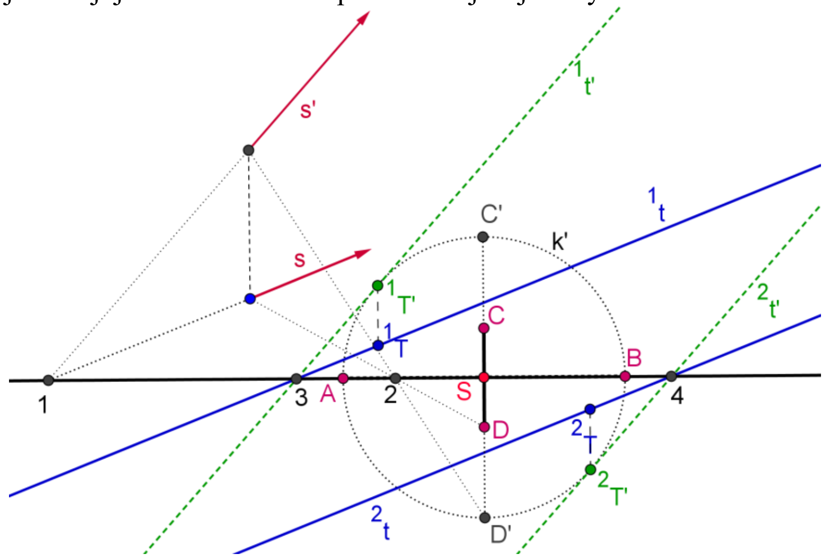
b) K bodu V zostrojíme afinný obraz V'. Zostrojíme ho pomocou bodov $D, D', 1$.
c) Z bodu V' zostrojíme dotyčnice ${}^1t', {}^2t'$ ku kružnici k' a dotykové body označíme ${}^1T', {}^2T'$.
d) Bodmi 2 a V je určená dotyčnica ${}^1t$ a bodmi 3, V bude určená dotyčnica ${}^2t$.
e) Dotykové body ${}^1T, {}^2T$ zostrojíme na základe incidencie a smeru afinity.



Úloha 6. *Elipsa je daná osami* AB, CD. *Zostrojte dotyčnice k danej elipse, ktoré sú rovnobežné s daným smerom.*

Riešenie

a) Najskôr zostrojíme obraz s' smeru s v afinite, ktorej os bude priamka AB.
b) Zostrojíme dotyčnice ${}^1t', {}^2t'$ ku kružnici k', ktorá je afinným obrazom danej elipsy.
c) Ďalej zostrojujeme ako v riešení predchádzajúcej úlohy.



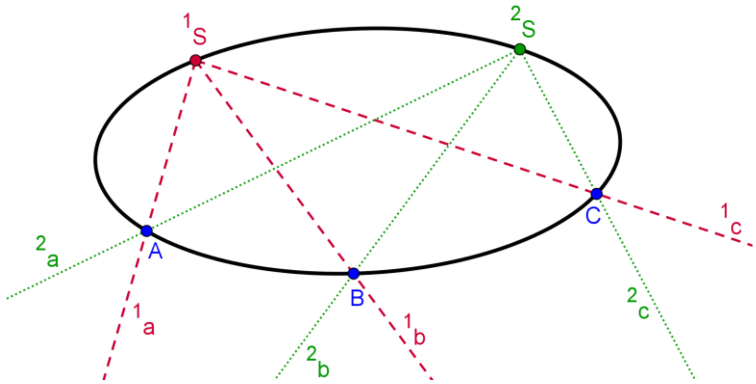
Tretí spôsob definovania elipsy

V tejto časti príspevku sa od čitateľa vyžaduje znalosť základov geometrických zobrazení v projektívnej rovine, a to perspektívnosť a projektívnosť zväzkov priamok a bodových radov.

Určíme projektívny vzťah dvoch nesúmiestnych zväzkov priamok ${}^1S\left({}^1a\,{}^1b\,{}^1c\ldots\right)$ a ${}^2S\left({}^2a\,{}^2b\,{}^2c\ldots\right)$ troma pármi zodpovedajúcich si priamok ${}^1a\,{}^2a$, ${}^1b\,{}^2b$, ${}^1c\,{}^2c$. Priesečníky A, B, C týchto dvojíc priamok ležia na kužeľosečke k, danej touto projektívnou príbuznosťou. Ďalšie body kužeľosečky k nájdeme tak, že budeme obidva zväzky dopĺňať ďalšími dvojicami zodpovedajúcich si priamok.

Teda:

Kužeľosečka (elipsa) je geometrické miesto priesečníkov zodpovedajúcich si priamok v dvoch nesúmiestnych projektívnych zväzkoch priamok.

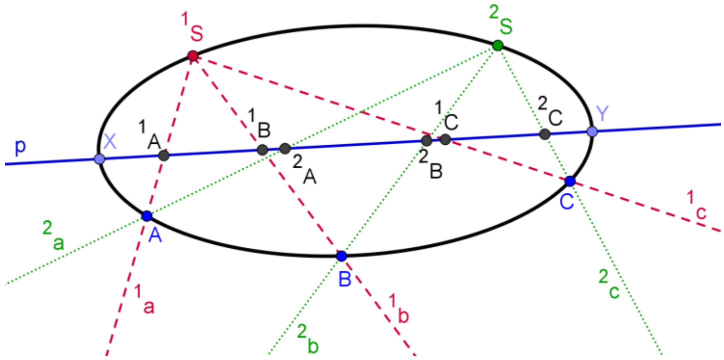


Úloha 7. *Zostrojte priesečníky priamky s kužeľosečkou.*

Riešenie

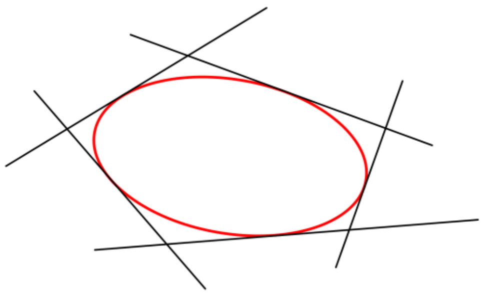
Nech kužeľosečka je daná dvoma nesúmiestnymi zväzkami priamok ${}^1S\left({}^1a\,{}^1b\,{}^1c\ldots\right)$, ${}^2S\left({}^2a\,{}^2b\,{}^2c\ldots\right)$ a nech daná priamka je p.

Nech priesečníky priamok ${}^1a, {}^1b, {}^1c, \ldots,$ resp. ${}^2a, {}^2b, {}^2c, \ldots,$ s priamkou p sú body ${}^1A, {}^1B, {}^1C, \ldots,$ resp. ${}^2A, {}^2B, {}^2C, \ldots$. Na priamke p tak dostávame dva súmiestne bodové rady, ktoré sú, pravda, v projektívnom vzťahu. Ak tieto dva súmiestne, priame, projektívne rady bodov budú mať nejaký samodružný bod X, tento bod bude prislúchať kužeľosečke k, lebo sa v ňom pretnú dve zodpovedajúce si priamky daných zväzkov $\left({}^1S, {}^2S\right)$. Vieme však, že ak nejde o identitu, takéto rady môžu mať najviac dva rozličné samodružné bdy. Ak ide o identitu, každý bod priamky p je samodružný a celá priamka prislúcha kužeľosečke k. Tento prípad môže byť iba pri degenerovaných kužeľosečkách.



K pojmu kužeľosečka môžeme dospieť aj takto:

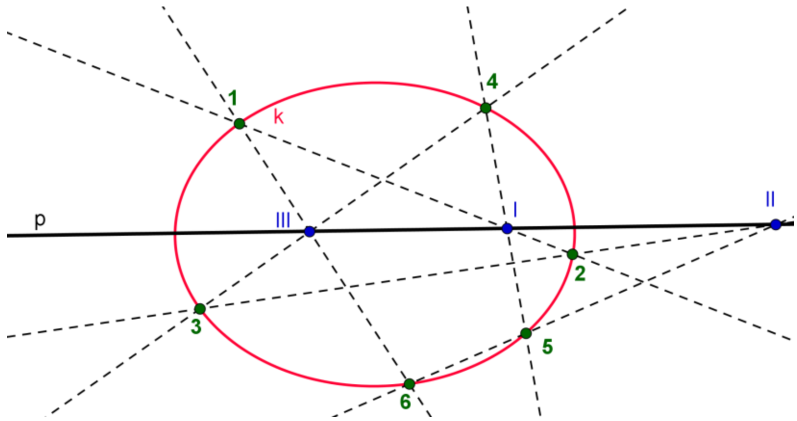
Útvar duálny ku kužeľosečke je súhrn priamok, ktoré spájajú zodpovedajúce si body nesúmiestnych projektívnych bodových radov. Aj pre tento duálny útvar zavádzame pojem kužeľosečky a hovoríme, že všetky priamky tohto útvaru sú dotyčnicami istej kužeľosečky.



Pretože kužeľosečku určíme jej piatimi bodmi, resp. dotyčnicami, šesť bodov, resp. dotyčníc, jednej kužeľosečky musí už byť navzájom nejakým spôsobom viazaných. O druhu tejto väzby hovoria dve navzájom duálne vety: *Pascalova* a *Brianchonova*.

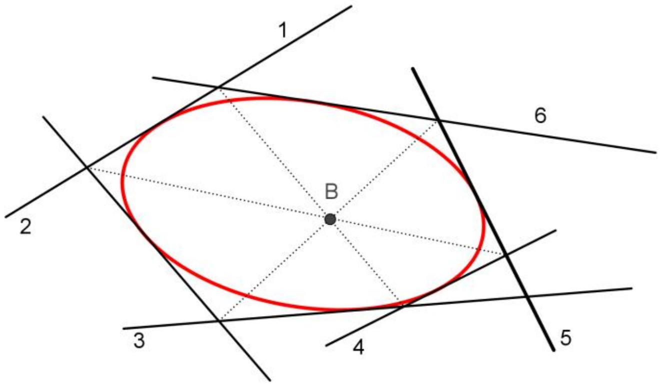
Pascalova veta

Nutná a postačujúca podmienka, aby šesť bodov 1,2,3,4,5,6, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, ležalo na jednej kužeľosečke k, je, aby priesečníky spojníc 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 ležali na jednej priamke p (***Pascalova priamka***).



Brianchonova veta

Nutná a postačujúca podmienka, aby šesť priamok 1,2,3,4,5,6, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom, boli dotyčnicami jednej kužeľosečky k, je, aby spojnice priesečníkov 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 prechádzali jedným bodom B (***Brianchonov bod***).



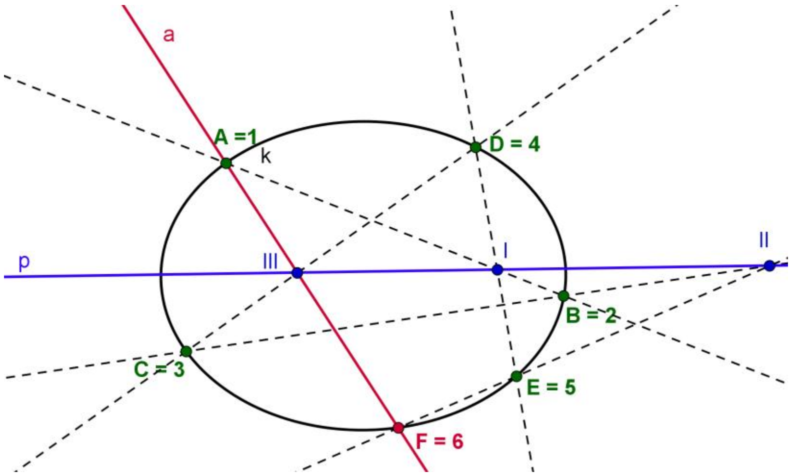
Pascalovu a Brianchonovu vetu môžeme použiť na riešenie niektorých konštrukčných úloh aj o elipse.

Úloha 8. *Kužeľosečka k je daná piatimi bodmi A, B, C, D, E, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Niektorým z týchto bodov zostrojme ľubovoľnú priamku a (nie dotyčnicu). Zostrojte druhý priesečník priamky a s kužeľosečkou.*

Riešenie

Keďže priamka *a* nie je dotyčnicou kužeľosečky k, pretína ju ešte v ďalšom bode. Nech priamka *a* prechádza bodom *A*, ďalší jej priesečník označíme *F*.

Na zostrojenie použijeme Pascalovu vetu.

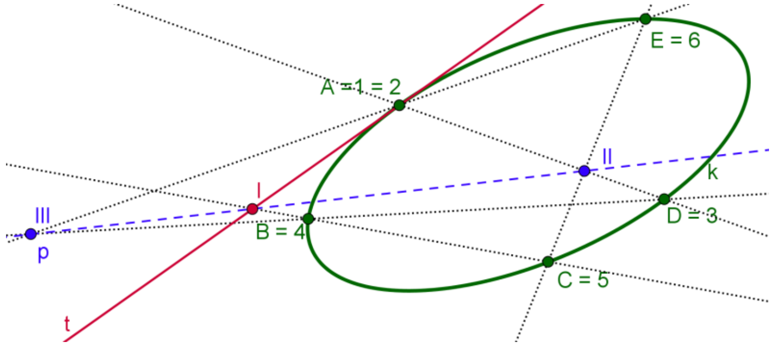


Úloha 9. *Kužeľosečka k je daná piatimi bodmi A, B, C, D, E, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. V jednom z nich , napr. v A, zostrojte dotyčnicu.*

Riešenie

Dotyčnicu môžeme považovať za limitnú polohu sečnice. Teda bod *A* budem považovať za dva body, ktoré v limitnom prechode splynuli, tým sečnica v limitnej polohe bude dotyčnicou.

Označme $A = 1 = 2$, ďalšie číslovanie je ľubovoľné. Pre Pascalovu priamku zostrojíme body *II* (23 a 56) a *III* (61 a 34). Pascalova priamka spojnicu 45 pretne v bode 1. ktorým bude prechádzať dotyčnica *t*.



K úlohám 8 a 9 môžeme sformulovať duálne úlohy a na ich riešenie použiť Brianchonovu vetu.

Úloha 10. *Kužeľosečka k je daná piatimi dotyčnicami a, b, c, d , e, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Zostrojte na jednej z* nich bod dotyku.

Úloha 11. *Kužeľosečka k je daná piatimi dotyčnicami a, b, c, d ,e, z ktorých žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Na jednej z nich, napr. a, zvoľte bod A* a *zostrojte ním dotyčnicu k danej kužeľosečke.*

LITERATÚRA

[1] Medek, V.- Šedivý, O.: *Deskriptívna geometria pre gymnázia*. SPN Bratislava, 1986 (český preklad). ISBN: 14-297-87-03

[2] Šedivý, O. a kol.: *Geometria 2 pre študentov učiteľského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách.* SPN Bratislava 1987. ISBN: 067-466-87G2X

[3] Čižmár, J.: *Grupy geometrických transformácií.* Alfa Bratislava 1984

[4] Pijak, V. a kol.: *Konštrukčná geometria.* SPN Bratislava 1985

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc..
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: osedivy@ukf.sk

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk

OBJAVOVANIE ELIPSY MANIPULÁCIOU S KRUŽNICAMI

EVA BARCÍKOVÁ, JÁN ŠUNDERLÍK

ABSTRACT. In our article we consider different approach to concept of conic section within a wider concept of investigation with circles. We briefly contrast the usage of two approaches to the same content form inductive – inquiry approach and deductive - transmissive approach widely used in our mathematics education.

Úvod

Výskum vo vyučovaní ako aj v teórii vyučovania matematiky obsahuje mnoho pozitívnych výsledkov o nových prístupoch, kedy žiaci dosahujú komplexnejšie, ako aj trvácnejšie vedomosti, medzi ktoré patrí aj objavné vyučovanie[1]. Na druhej strane sa tieto poznatky dostávajú do praxe len veľmi pomaly. Problémom implementácie objavného vyučovania sa venujú viacerí autori ako napríklad Walker (2007). Zozbieral problémy, s ktorými sa stretávajú učitelia z praxe pri implementácii objavného vyučovania. Spomedzi mnohých definovaných problémov sme si vybrali jeden, konkrétne nedostatok vhodných materiálov pre objavné vyučovanie. Vzhľadom na pomaly prebiehajúcu reformu si myslíme si, že je vo významnej miere prítomný aj na Slovensku. V nasledovnom príspevku skúsime predostrieť jeden prístup poskytujúci učiteľom matematiky námet na vyučovaciu hodinu a poukazujúci aj na spôsob pretvárania tradičného materiálu nachádzajúceho sa v niektorých učebniciach. Tento materiál sa pokúsime rozšíriť o induktívny prístup k problému, ktorý považujeme za nevyhnutnú súčasť pri vytváraní pojmu. Vybrali sme si kužeľosečky, ktoré bývajú prevažne zavádzané v rámci analytickej geometrie. Na rozdiel od analytického vyjadrenia dobre osvojených pojmov bod, priamka rovina, a kružnica je analytické vyjadrenie kužeľosečky často bez predchádzajúceho dostatočného pochopenia pojmu a jeho postavenia v rámci syntetickej geometrie. Kužeľosečky chápané ako množina bodov danej vlastnosti budú následne použiteľné aj v geometrických konštrukciách a pri riešení praktických úloh. Zdĺhavosť ich bodovej konštrukcie pravítkom je v súčasnosti ľahko prekonateľná použitím dynamických geometrických systémov.

V ďalšej časti sa pokúsime popísať metodický prístup k zavedeniu pojmu elipsa prostredníctvom objavovania geometrického miesta bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od dvoch objektov. Na konkrétnom príklade ukážeme prístup ako aj časti z uvedeného skúmania v rámci matematickej reprezentácie a modelovania. Z dôvodu rozsahu tohto príspevku neuvádzame matematizáciu reálneho problému, ale priamo prechádzame na univerzálne modely.

Uvedený prístup k objavovaniu geometrického miesta bodov danej vlastnosti môže mať viacero úrovní objavovania, ktoré závisia od prístupu učiteľa matematiky. Podstata jednotlivých úrovní objavného vyučovania je rozdelená podľa toho, kto je nositeľom aktivity v jednotlivých častiach vyučovacej hodiny. Ako sa uvádza v publikácii [4] autor

[1] . Pozri teoretické východiská projektu PRIMAS www.primas-project.eu

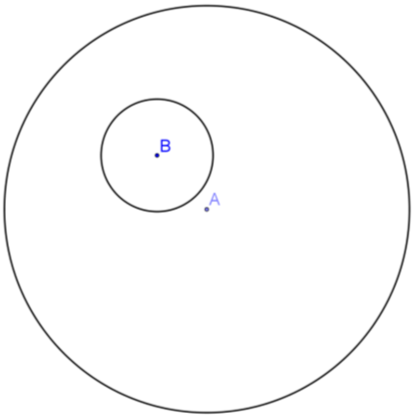
Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu 7RP 244380 PRIMAS promote inquiry-based learning in mathematics and science at both primary and secondary levels across Europe

charakterizoval šesť úrovní objavovania na vyučovaní v závislosti od toho, či je nositeľom aktivity učiteľ alebo žiak. Autori ďalej charakterizovali šesť hlavných častí objavnej hodiny: kladenie otázok, návrh prístupu k problému, implementácia daného prístupu, analýza údajov a vyhodnotenie, prezentovanie výsledkov a aplikácia získaných poznatkov. Preto v rámci objavného vyučovania je vhodné posúvať samotnú formuláciu otázok ako aj plánovanie a realizáciu objavovania viac na stranu žiakov.

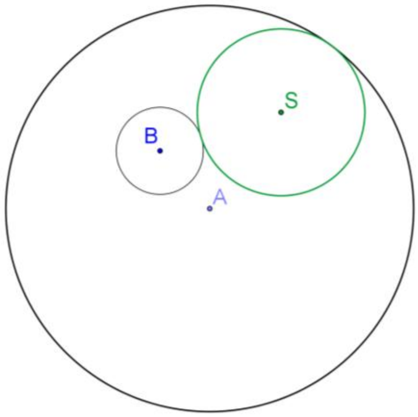
1. Objavovanie vlastnosti

Uvedený materiál popisuje zosumarizované kroky možného prístupu. Pri použití v triede je potrebné spracovanie pomocou pedagogiky objavného vyučovania, kde žiaci sú vedení k formulovaniu vlastných predpokladov ich overeniu alebo zamietnutiu. Popri vysvetlovaniu súvislostí navrhujeme možné vhodné otázky učiteľa (U) pre žiakov spolu s očakávanými správnymi odpoveďam žiakov (Ž), po ktorých je možné pokračovať v ďalšom objavovaní.

Pri objavovaní vychádzame z polohy dvoch daných kružníc so stredom A a polomerom a a so stredom B a polomerom b. (obr 1.) úlohou je nájsť tretiu kružnicu, ktorá sa má dotýkať daných dvoch kružníc (obr. 2.). Stred hľadanej dotykovej kružnice označme S a jej polomer označme r.



Obrázok 1: Dve kružnice v rovine



Obrázok 2

U: Žiaci majú za úlohu zamyslieť sa nad polohou bodu S a jeho vzdialenosti od daných kružníc (v zmysle vzdialenosti bodu S od bodov dotyku ku kružniciam).

Ž : Jeho vzdialenosť od obidvoch kružníc je rovnaká (rovná r).

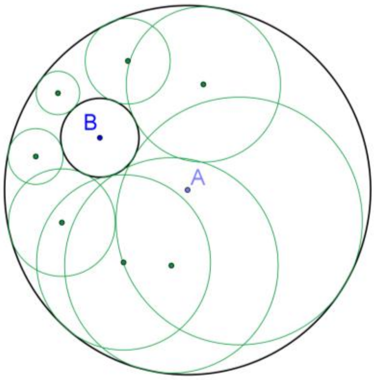
Z odpovedi na túto otázku vyplývajú ďalšie otázky:

U: Je viac takých kružníc, ktoré sa dotýkajú daných dvoch kružníc? Je nami zostrojená kružnica jediná?

Ž: Kružníc je viacej.

U: Je viac takých bodov, ktorých vzdialenosť od dvoch kružníc je rovnaká? Aké sú to body?

Ž: Bodov je viac. Sú to stredy dotykových kružníc.



Obrázok 3

Vzdialenosti stredu ľubovoľnej dotykovej kružnice od daných kružníc sú rovnaké.

Otázkou pre žiakov je, či to platí aj pre vzdialenosti stredu dotykovej kružnice od stredov daných kružníc.

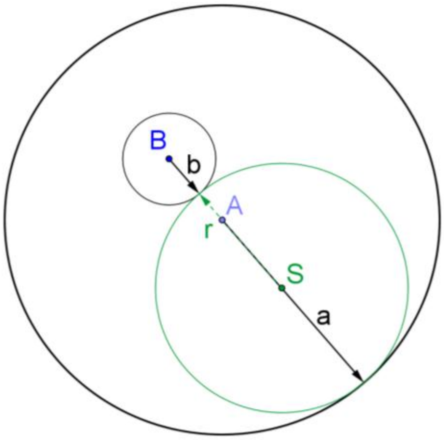
Polomery a a b sú dané. Polomer r je neznáma. Pre vzdialenosť bodu S od bodov A a B platí :

$$|AS| = a - r \ \dots \ r = a - |AS|$$

$$|BS| = b + r \ \dots \ r = |BS| - b$$

$$|AS| - a = -|BS| + b$$

$$|AS| + |BS| = a + b$$



Obrázok 4

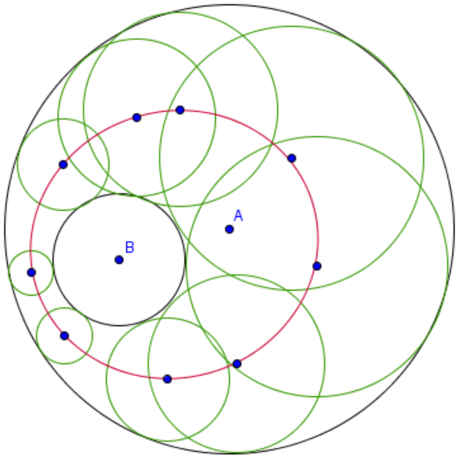
Čo platí pre vzdialenosť stredov A a B a hodnotu $a+b$?

Vzhľadom na to, že $a+b$ je stále rovnaká hodnota považujeme ju za konštantu k. Potom platí $|AS| + |BS| = k$.

Požiadame žiakov tento vzťah interpretovať slovne, zdôrazníme, že body A a B sú dané a k je konštantná veľkosť.

Ž: Vzťah $|AS| + |BS| = k$ znamená : *súčet vzdialeností bodu S od dvoch daných bodov je konštantná*.

Bod S reprezentuje všetky hľadané body, ktorých je v rovine nekonečne veľa. Všetky tieto body tvoria množinu bodov danej vlastnosti (obr. 5). Poznáme charakteristickú vlastnosť tejto množiny. V ďalšom kroku skonštruujeme bod patriaci tejto množine. Nebudeme viac uvažovať o daných kružniciach ale len o ich stredoch ako dvoch daných bodoch.



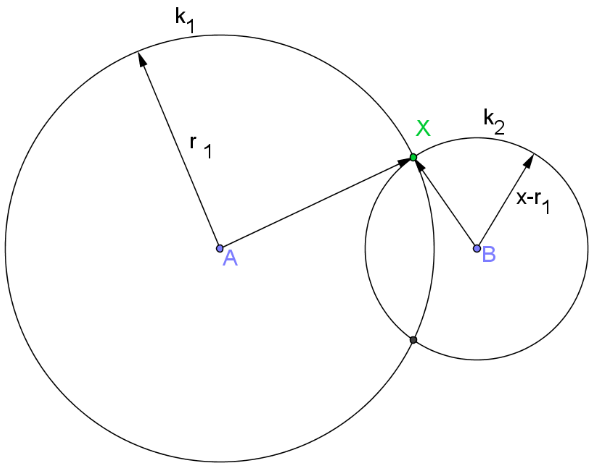
Obrázok 5

2.

Na základe vyslovenej vlastnosti zostrojíme ľubovoľný bod tejto množiny. Využitím dynamickosti softvéru GeoGebra následne vizualizujeme celú množinu. Tento krok má význam pre upevnenie vedomostí osvojených pri objavnom procese:

Zostrojíme jeden bod *X*, ktorého súčet vzdialeností od dvoch daných bodov je konštantný (rovný konštante *x*):

Nech sú dané dva body v rovine *A* a *B*. Súčet ich vzdialeností je $x = r_1 + r_2$. Vzdialenosť X od bodu *A* je r_1 a jeho vzdialenosť od bodu *B* je r_2. Hodnotu *x* poznáme a hodnotu r_1 si môžeme ľubovoľne zvoliť tak, že $0< r_1>x$. Potom $r_2 = x- r_1$. Množina všetkých bodov, ktorých vzdialenosť od bodu *A* je r_1 je kružnica k_1 (A, r_1). Množina všetkých bodov , ktorých vzdialenosť od bodu *B* je $(x-r_1)$ je kružnica k_2 $(B, x-r_1)$. Priesečník týchto kružníc je hľadaný bod *X* (X_1, X_2), ktorého súčet vzdialeností od bodov *A* a *B* je *x* $(r_1+ (x-r_1)= x)$.



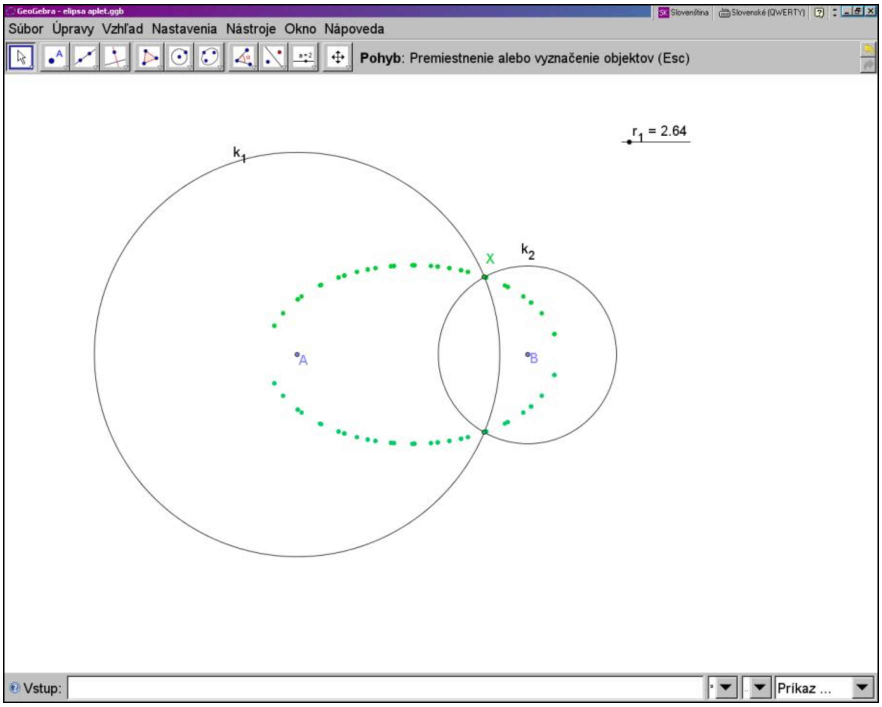
Obrázok 6

Polomer r_1 je premenná patriaca do otvoreného intervalu $r_1 \in \left(0, x\right)$ a môže nadobúdať všetky hodnoty z tohto intervalu. V závislosti od nej sa mení hodnota $r_2 = (x-r_1)$. Zmenou týchto hodnôt sa aj mení poloha bodu *X* . Zmenu hodnoty r_1 vizualizujeme pomocou nástroja *Posuvník*. Priesečníky kružníc budú pri pohybe zanechávať stopy, vďaka čomu vykresľujú množinu bodov. Táto množina bodov danej vlastnosti je elipsa (obr. 7)[2].

Objavovanie pokračuje skúmaním ďalších súvislostí napríklad :

Aká je závislosť vzdialenosti bodov A a B a konštantou x? Ako sa zmení množina bodov ak sa konštanta x rovná vzdialenosti bodov A a B a keď je menšia ako táto vzdialenosť? Ako sa zmení hľadaná množina bodov keď sa zmení vzájomná poloha kružníc v úvodnom probléme?

Po objavovaní bude nasledovať formálna definícia a základné pojmy týkajúce sa elipsy. Následne môže byť elipsa použitá pri riešení konštrukčných úloh.



Obrázok 7

Záver

V navrhovanom prístupe k vyučovaniu sa sústredíme na dva ciele. Prvým je osvojenie si spôsobu myslenia, prístupu k objavovaniu nových pojmov a obohatenie vlastných vedomostí prostredníctvom manipulácie s už osvojenými pojmami. V našom prípade bol východiskový známy pojem kružnica, s ktorým sa študenti stretávajú v každodenných situáciách a teda je dostatočne intuitívne aj formálne osvojený. Druhým cieľom je poukázanie na proces osvojovania si pojmu elipsa v širšom kontexte jej vzťahu k iným geometrickým útvarom postupným objavením. Aj napriek tomu, že uvedený prístup je iba malou ukážkou jedného prístupu ku skvalitneniu vyučovania matematiky nepriamo dáva námet aj na tvorbu a objavovanie ďalších geometrických bodov daných vlastností.

[2] Pozri [3]

LITERATÚRA

[1] Walker, M.: *Teaching inquiry based science*. LaVergne, TN: Lightning Source.

[2] www.primas-project.eu

[3] J. Štalmašek: *Geometrické konštrukcie.* SVTL BRATISLAVA, 1959

[4] Fradd, S.H., Lee, O., Sutman, F.X., & Saxton, M.K. (2001). *Promoting science literacy with English language learners through instructional materials development: A case study*. Billingual Research Journal, 25 (4), 417-439

PaedDr. Eva Barcíková
PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta porodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku č.1
SK – PSČ 94974
e-mail: eva.barcikova@ukf.sk
e-mail: jsunderlik@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

SYMBOLIC MATH GUIDE – MATEMATICKÝ SOFTVÉR GRAFICKEJ KALKULAČKY TI-89 VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA SŠ

STANISLAVA BELÁKOVÁ

ABSTRACT. Symbolic Math Guide is a software application that is part of TIs´ ongoing research aimed at helping students learn how to apply symbolic and algebraic transformations using TI-89. Symbolic Math Guide provides step-by-step problem-solving transformations for several classes of symbolic computations from algebra, pre-calculus and calculus.

Úvod

Kalkulačky, ako ich názov naznačuje, patria do kategórie zariadení výpočtovej techniky – ktorá sa rozšírila obzvlášť rýchlo v posledných desaťročiach. Kalkulačka je najmladším členom rodiny výpočtových prostriedkov a pri jej konštrukcii sa vychádzalo zo skúseností s jej staršími príbuznými, rôznymi počítacími strojmi, bez ktorých by nemohla vzniknúť. V súčasnej dobe sa už vyjasňujú možnosti uplatnenia jednotlivých kategórií výpočtových prostriedkov. Dochádza ku špecializácii výrobkov, výskumných základní podporujúcich ich výrobu a pre každú kategóriu sa rysuje príslušná trieda riešených úloh. Kalkulačky si tiež vytvorili svoj vlastný okruh použitia, pre ktorý by používanie iných prostriedkov výpočtovej techniky bolo nepohodlné a neekonomické Väčšina kalkulačiek je navrhnutá tak, aby ich bolo možné používať bez zvláštnych vedomostí a odborných skúšok. Vždy však bude významný rozdiel medzi tým ako bude využívať kalkulačku školený používateľ a ako ju bude používať laik.

Symbolic Math Guide

Symbolic Math Guide je softvér matematických aplikácií grafickej kalkulačky TI-89, ktorý nám umožňuje postupovať pri riešení problémov krok za krokom ako v algebre tak aj v infinitezimálnom počte. Zahŕňa v sebe nasledujúce príkazy:

Simplify	Jednočleny Mnohočleny Výrazy so zlomkami Výrazy s odmocninami	Logaritmické a exponenciálne výrazy Trigonometrické výrazy Diferenčné rovnice Všeobecné výrazy
Expand	Logaritmické a exponenciálne výrazy	Trigonometrické rovnice Všeobecné výrazy
Solve	Lineárne rovnice Kvadratické rovnice Racionálne rovnice	Iracionálne rovnice Logaritmické a exponenciálne rovnice Všeobecné výrazy
Compute	Derivácie	Neurčité integrály

Tabuľka 1

Základná príručka práce s kalkulačkou v Symbolic Math Guide

V ponuke aplikácií APPS si vyberieme možnosť Symbolic Math Guide a potvrdíme klávesov ENTER. Označíme typ súboru, ktorý chceme otvoriť, pričom máme tri možnosti: Current, Open a New. Zadáme názov súboru a názov premennej a potvrdíme. Ak chceme opustiť Symbolic Math Guide, stlačíme klávesy 2nd QUIT.

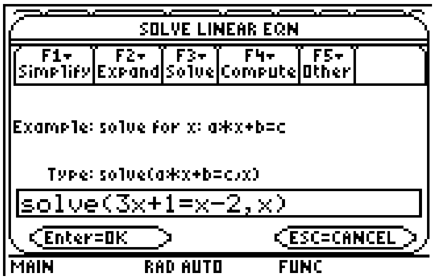
Riešené príklady v prostredí Symbolic Math Guide

V nasledujúcej časti uvádzame riešené príklady s použitím grafickej kalkulačky TI-89 a jej matematického softvéru Symbolic Math Guide.

Príklad 1

Riešte rovnicu 3x + 1 = x - 2

Dostaneme sa do Symbolic Math Guide a zvolíme nový problém, stlačíme klávesu F2 1:New Problem a následne F3 1: Linear Eqn. Vložíme rovnicu a pridáme do zápisu premennú x a potvrdíme klávesov ENTER:

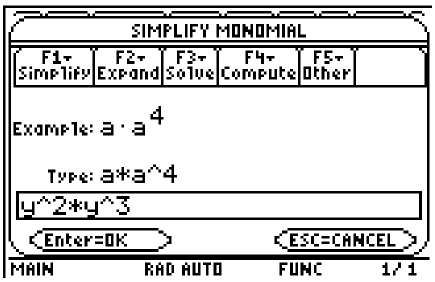


Obrázok 1

Príklad 2

Vypočítajte $y^2.y^3$

Podobne ako na predošlom príklade pracujeme v Symbolic Math Guide zvolením nového problému. Stlačíme klávesu F1 s voľbou 1: Monomial, napíšeme zápis a potvrdíme:

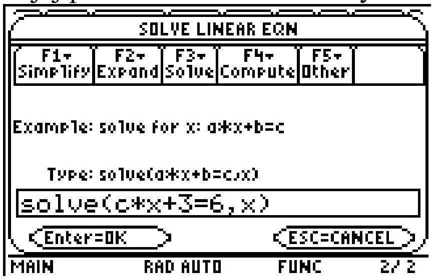


Obrázok 2

Príklad 3

Riešte rovnicu s parametrom *c* : *c*.x + 3 = 6

V Symbolic Math Guide, nový problém a stlačením klávesy F3, voľbou príkazu 1: Linear Eqn., zadaním rovnice a jej potvrdením dostávame výsledok:



Obrázok 3

Záver

O ďalších možnostiach využitia matematického softvéru Symbolic Math Guide ako aj o iných možnostiach využitia funkcií grafických kalkulačiek sa čitateľ môže oboznámiť v prácach uvedených v literatúre.

LITERATÚRA

[1] Beláková, S.: *Počítačom podporované vyučovanie algebry*, dizertačná práca, Nitra, FPV UKF, 2009.

[2] Frantová, P.: *Modernizácia obsahu a foriem výučby matematiky na SŠ a VŠ využitím grafického kalkulátora*, dizertačná práca, Nitra, FPV UKF, 2007.

[3] http://texasinstruments.com

PaedDr. Stanislava Beláková, PhD.
Oddelenie matematiky
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Radlinského 9
SK – 812 37 Bratislava
e-mail: stanislava.belakova@stuba.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ŘEŠITELNOST JISTÝCH GRUP PROSTORŮ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU

JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA

ABSTRACT. The contribution is devoted to the construction and basic properties of the certain group of two-dimensional solution spaces of second-order linear homogeneous differential equations. In particular, there is proved that the mentioned group is solvable.

Matematické vzdělávání studentů univerzitního studia (budoucích učitelů matematiky i matematických odborníků) i studentů matematických disciplín na vysokých školách technického zaměření vyžaduje orientovat studenty na propojení různých matematických teorií za účelem hlubšího pochopení souvislostí mezi studovanými součástmi matematiky. V tomto příspěvku, který úzce navazuje na příspěvky [2, 3, 14], je rovněž zdůrazněn klasický vztah látky z oblasti matematické analýzy a teorie algebraických struktur, konkrétně vztah obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu a jejich prostorů řešení s teorií grup.

Studium lineárních diferenciálních rovnic s použitím algebraických, geometrických i topologických metod představuje v brněnské matematické komunitě významnou tradici již od padesátých let minulého století, založenou zejména v aktivitách vědecké školy profesora Otakara Borůvky [5]. Řada hlubokých, zajímavých výsledků byla také získána žákem, a posléze uznávaným blízkým spolupracovníkem profesora Borůvky, Františkem Neumanem [18-21]. V návaznosti na zmíněnou literaturu věnovanou studiu globálních vlastností lineárních diferenciálních rovnic a naše dřívější příspěvky [2, 3] obsahuje prezentovaný příspěvek důkaz řešitelnosti (v Galoisově smyslu) jisté grupy prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu. Je podstatně využit hlavní výsledek článku [14], který, v návaznosti na teorii řad grup motivovanou Galoisovým zkoumáním řešitelnosti algebraických rovnic a v souvislosti s moderní teorií rozšíření těles, poskytuje důkaz řešitelnosti jisté grupy lineárních diferenciálních operátorů tvořících levé strany lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu.

Připomeňme standardně používané označení: Je-li H normální podgrupa grupy G (nazývaná také invariantní podgrupa nebo normální dělitel), píšeme $H \triangleleft G$. Dále, posloupnost podgrup H_i $(i = 0, 1, ..., n)$ grupy G taková, že

$$\boldsymbol{1} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G \qquad (\mathcal{S})$$

(zde $\boldsymbol{1}$ označuje jednotkovou podgrupu grupy G), se nazývá subnormální řada grupy G a příslušné podílové grupy H_i / H_{i-1} $(i = 1, 2, ..., n)$ se nazývají faktory dané řady. Jsou-li všechny faktory řady $(\mathcal{S})$ komutativní, nazývá se tato řada řešitelná. Grupa se nazývá řešitelná, jestliže má alespoň jednu řešitelnou subnormální řadu ([7], [11, kap. 9], [14, s. 116], [17, §57, s. 361], [22, 10.22]).

V poměrně rozsáhlé literatuře (kromě výše zmíněných titulů uveďme dále [9, 10]) lze nalézt množství klasických výsledků o řešitelných grupách. Připomeňme alespoň známou větu Feita-Thompsona nazývanou také věta o lichém řádu, která říká, že každá konečná grupa lichého řádu je řešitelná. (Článek [10] je vytištěn na 225 stranách!).

Příspěvek vznikl s finanční podporou výzkumného záměru České Republiky MSM 0021630529.

Nyní připomeneme potřebné pojmy a označení z příspěvků [2, 3] a zopakujeme konstrukci grupy lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu, které tvoří levé strany obyčejných homogenních diferenciálních rovnic tvaru

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \,. \tag{1}$$

Použitý pojmový aparát je převzat z monografií [1], [16], [19], [22] a prací [2], [12], [13], [20] a [21]. Množinu všech reálných čísel budeme značit $\boldsymbol{R}$; pod označením $\boldsymbol{C}(J)$ budeme rozumět komutativní okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu $J\subset \boldsymbol{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí. Analogicky okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu J, které mají ve všech bodech $x \in J$ všechny (spojité) derivace až do řádu n včetně pro nějaké přirozené číslo n, budeme označovat $\boldsymbol{C}^n(J)$. Nechť $J\subset \boldsymbol{R}$ je otevřený interval v množině reálných čísel; nevylučujeme přitom případ $J = \boldsymbol{R}$. Množinu všech diferenciálních rovnic (1), v nichž $p, q\in \boldsymbol{C}(J)$, $p(x)\neq 0$, $x\in J$, označíme v souladu s [13] $\boldsymbol{A}_2(J)$. Dále označíme I_d identický operátor na $\boldsymbol{C}^2(J)$, tj. $I_d\, y = y$ pro každou funkci $y\in \boldsymbol{C}^2(J)$, a položíme $D = \dfrac{d}{dx}$, tedy $Dy(x) = y'(x)$ pro každou funkci $y \in \boldsymbol{C}^2(J)$. Nechť pro dvojici funkcí $p\in \boldsymbol{C}(J)$, $q\in \boldsymbol{C}(J)$ označuje $L(p,q)$ diferenciální operátor

$$L(p, q) = D^2 + p(x)\, D + q(x)\, I_d \,.$$

V tomto označení má rovnice (1) tvar $L(p,q)y = 0$. Dále klademe

$$\boldsymbol{LA}_2(J)= \{L(p, q):\boldsymbol{C}^2(J)\to \boldsymbol{C}(J);\ [p, q]\in \boldsymbol{C}(J)\times \boldsymbol{C}(J),\ p(x)\neq 0,\ x\in J\}, \tag{2}$$

tj. $\boldsymbol{LA}_2(J)$ označuje množinu všech výše popsaných diferenciálních operátorů.

Věta 1: ([3], Tvrzení 1) *Nechť $J \subset \boldsymbol{R}$ je otevřený interval, $\boldsymbol{LA}_2(J) = \{L(p, q);\ p, q\in \boldsymbol{C}(J), p(x)\neq 0,\ x\in J\}$. Pro libovolnou dvojici diferenciálních operátorů $L(p_1, q_1)$, $L(p_2, q_2) \in \boldsymbol{LA}_2(J)$ položíme*

$$L(p_1, q_1) \cdot L(p_2, q_2) = L(p_1 p_2 ,\ p_1 q_2 + q_1).$$

Potom $(\boldsymbol{LA}_2(J), \cdot)$ je nekomutativní grupa s jednotkovým prvkem $L(1,0)$.

Důkaz: Viz [13]. Poznamenejme pouze, že jedničkou zkonstruované nekomutativní grupy $\boldsymbol{LA}_2(J)$ je operátor $L(1 ,0)$ a inverzní prvek k operátoru $L(p, q)$ je operátor $L(\frac{1}{p}, -\frac{q}{p})$.

V dalším textu ještě využijeme následující významnou podgrupu této grupy. Označme $\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J)$ podmnožinu grupy $\boldsymbol{LA}_2(J)$ definovanou rovností

$$\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J) = \{L(p, q)\ ;\ L(p, q)\in \boldsymbol{LA}_2(J),\ p(x) \equiv 1\},\ \text{tedy}\ \boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J) = \{L(1, q\,);\ q\in \boldsymbol{C}(J)\}\,.$$

V práci [2] je uveden důkaz, že *$(\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J),\cdot)$ je invariantní (komutativní) podgrupa grupy $(\boldsymbol{LA}_2(J),\cdot)$, izomorfní s $(\boldsymbol{C}(J), +)$.*

Tak jako v předcházejících příspěvcích na konferencích FPV Univerzity Konštantína Filozofa ([2], [3]) využijeme existující jedno-jednoznačnou korespodenci mezi množinou $\boldsymbol{LA}_2(J)$ tvořenou všemi operátory $L(p, q)$, $p, q\in \boldsymbol{C}(J)$, $p(x) \neq 0$, $x\in J$ a množinou všech prostorů řešení $\boldsymbol{VA}_2(J)$ diferenciálních rovnic $L(p, q)y = 0$. Existence této korespodence vyplývá z výsledků studia lineárních diferenciálních rovnic – srv. rovněž výsledky monografie Františka Neumana [19]. Tato korespodence umožňuje zavést strukturu nekomutativní grupy do množiny prostorů $\boldsymbol{VA}_2(J)$, případně strukturu nekomutativní hypergrupy (s nosičem $\boldsymbol{VA}_2(J)$) na základě příslušné struktury na množině diferenciálních operátorů $\boldsymbol{LA}_2(J)$. Popíšeme podrobněji potřebnou konstrukci (s využitím úvah v článcích

[3, 12] a s odkazem na ně). Pro každý dvourozměrný prostor $V \in \boldsymbol{VA}_2(J)$ zvolme pevně jeho bázi $\{\varphi_V, \psi_V\}$, tedy fundamentální systém řešení lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu ($\varphi_V, \psi_V \in \boldsymbol{C}^2(J)$)

$$y'' + \frac{D[\varphi_V, \psi_V]}{W[\varphi_V, \psi_V]} y' + \frac{W[\varphi_V', \psi_V']}{W[\varphi_V, \psi_V]} y = 0, \tag{3}$$

kde $D[\varphi_V, \psi_V] = \begin{vmatrix} \varphi_V'' & \psi_V'' \\ \varphi_V & \psi_V \end{vmatrix}$ a $W[f, g]$ značí Wronského determinant dvojice funkcí $[f, g]$, srv. [2] str. 13, 14. Diferenciální rovnici (3) lze zapsat ve tvaru $L(p_V, q_V)y = 0$, kde

$$p_V(x) = \frac{D[\varphi_V, \psi_V]}{W[\varphi_V, \psi_V]}, \quad q_V(x) = \frac{W[\varphi_V', \psi_V']}{W[\varphi_V, \psi_V]}.$$

(Zde $W[\varphi_V, \psi_V] \neq 0$ pro každé $x \in J$, protože funkce φ_V, ψ_V jsou lineárně nezávislé, rovněž $D[\varphi_V, \psi_V] \neq 0$ pro každé $x \in J$).

V každém prostoru $V \in \boldsymbol{VA}_2(J)$ zvolme libovolně, ale pevně jednu bázi $\{\varphi_V, \psi_V\}$ a označme $\Phi(\boldsymbol{VA}_2(J))$ systém všech takových bází $\{\varphi_V, \psi_V\}$, $V \in \boldsymbol{VA}_2(J)$. Dále uvažujme bijektivní zobrazení

$$F\colon \boldsymbol{LA}_2(J) \to \boldsymbol{VA}_2(J)$$

definované předpisem $F(L(p,q)) = V$, kde V je prostor řešení

$$V = \{c_1\varphi(x) + c_2\psi(x);\ c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}\}$$

diferenciální rovnice $L(p,q)y = 0$ s bází (tj. fundamentálním systémem řešení této rovnice) $\{\varphi_V, \psi_V\} \in \Phi(\boldsymbol{VA}_2(J))$. Na soustavě prostorů $\boldsymbol{VA}_2(J)$ definujme binární operaci

$$\bullet\colon \boldsymbol{VA}_2(J) \times \boldsymbol{VA}_2(J) \to \boldsymbol{VA}_2(J)$$

předpisem

$$V \bullet W = F(F^{-1}(V) \cdot F^{-1}(W)) = F(L(p_V, q_V) \cdot L(p_W, q_W))$$

pro každou dvojici prostorů $V, W \in \boldsymbol{VA}_2(J)$. Z věty 1 nyní bezprostředně vyplývá

Věta 2: *Buď $J \subseteq \boldsymbol{R}$ otevřený interval. Dvojice $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$ je nekomutativní grupa mohutnosti kontinua s neutrálním prvkem $V(1, e^{-x})$. Zobrazení $F\colon \boldsymbol{LA}_2(J) \to \boldsymbol{VA}_2(J)$ je izomorfismus grupy diferenciálních operátorů $(\boldsymbol{LA}_2(J), \cdot)$ na grupu prostorů řešení $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$ diferenciálních rovnic $L(p, q)y = 0$, $L(p, q) \in \boldsymbol{LA}_2(J)$.*

Poznamenejme, že v článku [2] na str. 13, 14 byla odvozena diferenciální rovnice, jejíž prostor řešení $V(\omega_1, \omega_2)$ ($\{\omega_1, \omega_2\} \in \Phi(\boldsymbol{VA}_2(J))$) je součinem prostorů řešení $V(\varphi_1, \varphi_2)$, $V(\psi_1, \psi_2)$ diferenciálních rovnic

$$[F^{-1}(V(\varphi_1, \varphi_2))]y = 0, \ [F^{-1}(V(\psi_1, \psi_2))]y = 0,$$

v daném pořadí, v grupě $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$. Konkrétně, jsou-li $V(\varphi_1, \varphi_2)$, $V(\psi_1, \psi_2) \in \boldsymbol{VA}_2(J)$) prostory řešení diferenciálních rovnic

$$L\left(\frac{D[\varphi_1, \varphi_2]}{W[\varphi_1, \varphi_2]}, \frac{W[\varphi_1', \varphi_2']}{W[\varphi_1, \varphi_2]}\right) y = 0, \ L\left(\frac{D[\psi_1, \psi_2]}{W[\psi_1, \psi_2]}, \frac{W[\psi_1', \psi_2']}{W[\psi_1, \psi_2]}\right) y = 0, \text{ tj.}$$

$$y'' + \frac{D[\varphi_1, \varphi_2]}{W[\varphi_1, \varphi_2]} \cdot y' + \frac{W[\varphi_1', \varphi_2']}{W[\varphi_1, \varphi_2]} \cdot y = 0,$$

$$y'' + \frac{D[\psi_1,\psi_2]}{W[\psi_1,\psi_2]}\cdot y' + \frac{W[\psi_1',\psi_2']}{W[\psi_1,\psi_2]}\cdot y = 0$$

v daném pořadí, potom prostor $V(\omega_1,\omega_2) = V(\varphi_1,\varphi_2) \bullet V(\psi_1,\psi_2)$ je prostorem řešení lineární diferenciální rovnice

$$y'' + \frac{D_1(x)}{D_4(x)}\cdot y' + \frac{D_2(x)+D_3(x)}{D_4(x)}\cdot y = 0, \text{ kde}$$

$$D_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1''\psi_1'' + \varphi_2''\psi_1 & \varphi_1''\psi_2'' + \varphi_2''\psi_2 \\ \varphi_1\psi_1'' + \varphi_2\psi_1 & \varphi_1\psi_2'' + \varphi_2\psi_2 \end{vmatrix},$$

$$D_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1''\psi_1' + \varphi_2''\psi_1'' & \varphi_1''\psi_2' + \varphi_2''\psi_2'' \\ \varphi_1\psi_1' + \varphi_2\psi_1'' & \varphi_1\psi_2' + \varphi_2\psi_2'' \end{vmatrix},$$

$$D_3(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1'\psi_1 + \varphi_2'\psi_1' & \varphi_1'\psi_2 + \varphi_2'\psi_2' \\ \varphi_1''\psi_1 + \varphi_2''\psi_1' & \varphi_1''\psi_2 + \varphi_2''\psi_2' \end{vmatrix},$$

$$D_4(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_1' & \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_2' \\ \varphi_1'\psi_1 + \varphi_2'\psi_1' & \varphi_1'\psi_2 + \varphi_2'\psi_2' \end{vmatrix}.$$

Jak již bylo uvedeno v článku [14], vede v některých případech cesta k důkazu řešitelnosti základní grupy přes ověření stabilizace řetězce komutantů (na úrovni triviální podgrupy) rychleji než prostřednictvím pracného ověřování komutativity faktorů existující subnormální řady podgrup, o níž se dokazuje, že (tato řada) je tedy řešitelná.

Připomeňme, že podgrupa *G'* grupy *G* generovaná množinou komutátorů $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ všech dvojic prvků $[a, b] \in G \times G$ se nazývá komutant grupy *G*. Komutant *G''* grupy *G'* se nazývá druhý komutant grupy *G*. Obvyklé označení je také $G' = G^{(1)}, G'' = G^{(2)}$, atd. Obecně $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Komutant $G^{(n)}$ se také nazývá *n*-tá derivace grupy *G* a řetězec komutantů grupy *G*

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots$$

je také nazýván derivovaný řetězec grupy *G*.

Věta 3: ([23, Věta 10.31, s.172], [14, Věta 5, s. 117]). *Buď G grupa. Tyto podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Grupa G je řešitelná.

(ii) Existuje celé kladné číslo n s vlastností $G^{(n)} = \mathbf{1}$.

(iii) Existuje řešitelná subnormální řada grupy G.

Užitím věty 6, [14] dokážeme, že grupa prostorů $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$ je řešitelná. Na základě faktu, že vlastnost řešitelnosti grupy se zachovává při grupovém izomorfismu, by zmíněný výsledek vyplynul z věty 6, [14], ale následující postup umožní čtenáři nahlédnouti do struktury důkazu věty 6, [14].

Buď $J \subseteq \boldsymbol{R}$ otevřený interval. Připomeňme, že prostor $V(1, e^{-x}) = \{y = c_1 + c_2 e^{-x}; c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}\}$ je jedničkou (neutrálním prvkem) grupy $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$. Zopakujme ještě, že v článku [2] na str. 12, 13 je dokázána věta (Tvrzení 2), která říká, že $\boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J) \lhd \boldsymbol{LA}_2(J)$.

Věta 4: *Buď* $J \subseteq \boldsymbol{R}$ *otevřený interval. Potom*

$$\{V(1, e^{-x})\} = (\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)'' \lhd (\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)' = (\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J), \bullet) \lhd (\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet).$$

Tedy grupa $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$ je řešitelná.

Důkaz: Podle výše uvedené poznámky platí

$$F^{-1}(\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J)) = \boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J) \lhd \boldsymbol{LA}_2(J) = F^{-1}(\boldsymbol{VA}_2(J)).$$

Nechť $V(\varphi_1,\varphi_2)$, $V(\psi_1,\psi_2) \in \boldsymbol{VA}_2(J))$ jsou libovolné prostory. Označme $L(p_1,p_2) = F^{-1}(V(\varphi_1,\varphi_2))$, $L(q_1, q_2) = F^{-1}(V(\psi_1,\psi_2))$. Platí

$$[L(p_1, p_2), L(q_1, q_2)] = L^{-1}(p_1, p_2)\cdot L^{-1}(q_1, q_2)\cdot L(p_1, p_2)\cdot L(q_1, q_2) = L\left(\frac{1}{p_1}, -\frac{p_2}{p_1}\right)\cdot$$

$$L\left(\frac{1}{q_1}, -\frac{q_2}{q_1}\right)\cdot L(p_1 q_1, p_1 q_2 + p_2) = L\left(\frac{1}{p_1 q_1}, -\frac{q_2 + p_2 q_1}{p_1 q_1}\right)\cdot L(p_1 q_1, p_1 q_2 + p_2) =$$

$L(1, f) \in \boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J) = F^{-1}(\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J))$, kde

$$f(x) = \frac{1}{p_1(x) q_1(x)}\cdot\left[q_2(x)(p_1(x) - 1) + p_2(x)(1 - q_1(x)\right],\ x \in J.$$

Podgrupa grupy $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)$ generovaná množinou komutátorů $[V(\varphi_1,\varphi_2), V(\psi_1,\psi_2)]$, $V(\varphi_1,\varphi_2)$, $V(\psi_1,\psi_2) \in \boldsymbol{VA}_2(J)$, tj. komutant $(\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)'$ je tedy grupa $(\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J), \bullet)$. Dále, nechť nyní $V(\xi_1,\xi_2)$, $V(\eta_1,\eta_2) \in \boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J)$, $F^{-1}(V(\xi_1,\xi_2)) = L(1, q) \in \boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J)$, $F^{-1}(V(\eta_1,\eta_2)) = L(1, v) \in \boldsymbol{L}_{11}\boldsymbol{A}_2(J)$. Platí:

$$[L(1, q), L(1, v)] = L^{-1}(1, q)\cdot L^{-1}(1, v)\cdot L(1, q)\cdot L(1, v) = L(1,-q)\cdot L(1,-v)\cdot L(1,v+q) =$$

$L(1, 0) = F^{-1}(V(1, e^{-x}))$, takže $[V(\xi_1,\xi_2), V(\eta_1,\eta_2)] = V(1, e^{-x})$. Tedy platí

$(\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{A}_2(J), \bullet)' = (\boldsymbol{VA}_2(J), \bullet)'' = \{V(1, e^{-x})\}$, takže věta je dokázána. □

Na závěr uveďme, že rozsáhlá literatura je věnována algebraické teorii lineárních diferenciálních rovnic (jejíž podstatná část se nazývá Galoisova teorie lineárních diferenciálních rovnic) – připomínáme alespoň tituly publikací [8, 23, 24], v nichž lze nalézt odkazy na další bohatou literaturu. Mimo jiné, s využitím diferenciálních okruhů a těles nulové charakteristiky jsou konstruovány algoritmy poskytující Liouvillova řešení lineárních diferenciálních rovnic (tj. řešení vytvářená z racionálních funkcí algebraickými operacemi s užitím exponenciální funkce a integrace). Moderní algoritmy pro výpočet Liouvillových řešení jsou založeny na diferenciální Galoisově teorii. Tento přístup k nalezení algoritmu všech Liouvillových řešení lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu nad $\boldsymbol{C}[x]$ (okruhem polynomů jedné proměnné nad tělesem komplexních čísel) byl prezentován J. Kovacicem v roce 1986 (Journal of Symbolic Computation, 2, s. 3-43). Poznamenejme, že některé algoritmy pro řešení rovnic druhého řádu jsou známy již z první poloviny devatenáctého století a náležejí – jak ostatně název napovídá – J. Liouvilleovi – 1839, [8, 23, 24]. Lze říci, že námi prezentované výsledky nejsou obsaženy mezi konkrétními důsledky zmíněné algebraické teorie diferenciálních rovnic, neboť tato – ač značné šíře – je orientována jiným směrem. Podstatný přínos k současnosti algebraické teorie diferenciálních rovnic náleží profesoru Michaelu Singerovi a jeho vědecké škole, srv. [24].

LITERATURA

[1] BERAN, LADISLAV. *Grupy a svazy*. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1974. 358 s. Matematický seminář SNTL.

[2] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *O nekomutativní grupě lineárních prostorů hladkých funkcí dimenze dvě.* In: Acta Mathematica 11, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2008. s. 11-16. ISBN 978-80-8094-396-7.

[3] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu.* In: Acta Mathematica 13, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2010, s. 43-47. ISBN 978-80-8094-781-1.

[4] BORŮVKA, OTAKAR. *Základy teorie grupoidů a grup*. 1. vyd. Praha, Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 216 s.

[5] BORŮVKA, OTAKAR. *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, VEB Verlag, Berlin 1967; extended English version *Linear Differential Transformations of the Second Order*, English Univ. Press, London, 1973.

[6] DIBLÍK, JOSEF, RŮŽIČKOVÁ MIROSLAVA. *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS, vydavatelstvo Žilinské univerzity, Žilina 2008. ISBN 978-80-8070-891-7.

[7] DRÁPAL, ALEŠ. *Teorie grup - základní aspekty*. Praha : Karolinum, 2009. 208 s. ISBN 80-246-0162-1.

[8] FAKLER, WINFRIED. *On second order homogeneous linear differential equations with Liouvillian solutions.* Elsevier Preprint 1997, s. 1-25.

[9] FEIT, WALTER, THOMSON, JOHN, G. *A solvability criterion for finite groups and some consequences.* Proc. Nat. Acad. Sci. 48 (1962), 968-970.

[10] FEIT, WALTER, THOMSON, JOHN, G. *Solvability of groups of odd order*. Pacific. J. Math. 13 (1963), s. 775-1029.

[11] HALL, MARSHALL, J. *The Theory of Groups.* The Macmillan Company, New York 1959. (Ruský překlad : *Tĕorija grupp* – překl. N.V. Djumin, Z. P. Žilinskaja, red. L.A. Kalužnin – Izd. innostrannoj lit., Moskva 1962).

[12] CHVALINA, JAN, MOUČKA, JIŘÍ. *Action of join spaces of continuous functions on hypergroups of second-order linear differential operators.* In: 6. Mezinárodní matematický Workshop. Brno : FAST VUT Brno, 2007. 10 s.

[13] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Join spaces of linear ordinary differential operators of the second order.* 2003. vyd. Brno: MU, 2003. 10 s. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 13, s. 77 – 86.

[14] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Solvability of certain groups of second-order linear differential operators.* 10th Internat. Conference APLIMAT, February 2011. Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2011, 113-119. ISBN 978-80-89313-51-8.

[15] CHVALINA, JAN. *On a certain cascade with the phase set formed by solution spaces of second-order linear homogeneous differential equations.* Dynamical

System Modelling and Stability Investigations, Internat. Conf. Thesis of Conf. Reports, Kyiv 2009, s. 20-21.

[16] KALAS, JOSEF, RÁB, MILOŠ. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vyd., Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[17] KUROŠ, ALEKSANDR GENNADIJEVIČ. *Teorija grupp*. 3. vyd. Nauka Moskva 1967. 648 s.

[18] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Criterion of global equivalence of linear differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 97 A (1984), s. 217–221.

[19] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991)

[20] NEUMAN, FRANTIŠEK. *A survey of global investigations of lineary differential equations.* Proc. of XXVIII. International Colloquium, Brno, University of Defence, Brno 2010, 7 s., ISBN 978-80-7231-722-6.

[21] NEUMAN, FRANTIŠEK. *On a representation of linear differential equation.* In: Mathematical and Computer Modelling 52 (2010), s. 355-360, ISSN 0895-7177.

[22] PROCHÁZKA, LADISLAV, BICAN, LADISLAV, KEPKA, TOMÁŠ, NĚMEC, PETR. *Algebra.* Academia Praha 1990.

[23] SINGER, MICHAEL, F. *Introduction to the Galois theory of linear differential equations.* arXiv:712.4124v2 [math.CA] 10 jan 2008, s. 1-83.

[24] van der PUT, MARIUS, SINGER, MICHAEL. F. *Galois Theory of Linear Differential Equations.* Grundlehrer der math. Wissenschaften, Vol. 328, Springer-Verlag, Berlin – New York – Heidelberg 2003.

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta pedagogická
Masarykova Univerzita
Poříčí 7
603 00 Brno
Česká Republika
e-mail: beranek@ped.muni.cz

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Ústav matematiky
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Vysoké učení technické
Technická 8
616 00 Brno
Česká Republika
e-mail:chvalina@feec.vutbr.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

NĚKOLIK ZAJÍMAVÝCH VĚT Z TEORIE ČÍSEL A JEJICH UŽITÍ V ŠKOLSKÉ MATEMATICE

RŮŽENA BLAŽKOVÁ, IRENA BUDÍNOVÁ

ABSTRACT. The theory of numbers concerns with properties of natural or whole numbers. Some results in number theory are easy to state and easy to prove. The paper presents some theorems of divisibility of natural numbers and their advantage in school mathematics.

Úvod

Teorie čísel a zejména její část týkající se dělitelnosti v oboru přirozených čísel nabízí mnoho zajímavých námětů, kterých je možné ve školské matematice využívat konkretizací a využíváním induktivních postupů. Uvádíme několik vět, které se mohou uplatnit v přímé výuce na základní nebo střední škole tak, že se pracuje s konkrétními čísly v oboru čísel přirozených, řada z nich se může zobecnit na obor čísel celých. Přitom důkazy těchto vět jsou poměrně jednoduché a žáci, kteří mají zájem o matematiku, je zpravidla vyžadují.

Při řešení úloh s využitím těchto vět se procvičuje zejména základní učivo (zápis čísla v desítkové soustavě, operace s přirozenými čísly, práce s mocninami, jednoduché úpravy číselných a algebraických výrazů aj.). Vhodnou formou se ilustruje možnost dokazování matematických vět. Žáci se mohou seznámit s postupy a metodami důkazů matematických vět, s vhodnými algebraickými úpravami, zvláštními obraty, jednoduchostí i vtipem, který se u důkazů uplatňuje.

Ve školské matematice, zejména na základní škole, využíváme induktivních postupů, žáci si mohou volit konkrétní čísla a pozorovat výsledky operací a postupů s nimi prováděných. Příklady často přinášejí překvapivé výsledky. Vhodnými metodami práce je systém „od hry k důkazům“, kdy se úlohy formulují jako hry s čísly a postupně se zobecňují a dokazují. Úlohy jsou výhodné i pro diferencovanou práci, kdy žáci, kteří mají menší předpoklady pro studium matematiky, pracují s konkrétními čísly, nadanější žáci mohou pracovat v obecnější rovině a žáci, kteří mají hlubší zájem o matematiku, se mohou seznamovat s formulací matematických vět a jejich důkazy.

Úlohy se mohou využít i v rámci pregraduální přípravy budoucích učitelů matematiky, kdy se ilustrují možnosti induktivních a deduktivních postupů při řešení matematických úloh.

Několik zajímavých vět

Označení: Symbolem $\overline{abc}$ budeme označovat trociferné číslo zapsané ciframi a, b, c, jeho rozvinutý zápis je $100a + 10b + c$. Sudé číslo se vyjádří zápisem $2k$, liché číslo zápisem $2k + 1$ nebo $2k - 1$.

Příspěvek byl zpracován v rámci řešení Výzkumného záměru VZ MSM 0021622443 Speciální potřeby žáků v kontextu RVP pro základní vzdělávání.

Nejprve uvádíme jednoduché věty (bez důkazu) týkající se součtu nebo součinu přirozených čísel, které žáci snadno ověří, např.

- Součet každých dvou lichých (sudých) čísel je číslo sudé.
- Součet libovolného sudého a libovolného lichého čísla je číslo liché.
- Součet dvou lichých, po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný čtyřmi.
- Součin libovolných dvou lichých čísel je číslo liché.
- Součin libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je číslo sudé.
- Součin libovolných dvou sudých čísel je dělitelný čtyřmi.

Dále uvádíme několik zajímavých vět, v kterých dokazujeme některé vlastnosti přirozených čísel. Většina uvedených vět platí i v oboru čísel celých. Ilustrujeme vhodné obraty, které se mohou v důkazech vět využívat.

Věta 1: Dokažte, že rozdíl libovolného trojciferného čísla a čísla zapsaného opačným pořadím cifer je vždy dělitelný čísly 9 a 11.

Důkaz: Čísla zapíšme pomocí jejich rozvinutého zápisu:
$(100\,a + 10\,b + c) - (100\,c + 10\,b + a) = 99\,a - 99\,c = 9\,.\,11\,(a - c).$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné trojciferné číslo a zapište číslo s opačným pořadím číslic. Odečtěte od většího čísla číslo menší. Čím je dělitelný tento rozdíl?

Další zajímavá modifikace: Zvolte si trojciferné číslo tak, aby počet stovek byl alespoň o 2 větší než počet jednotek. Zapište číslo s opačným pořadím číslic a odečtěte od většího čísla číslo menší. Rozdíl je trojciferné číslo. Zapište číslo s opačným pořadím číslic a obě čísla sečtěte. Pokud jste správně počítali, výsledek je vždy 1 089. Platnost tohto tvrzení ověříme velmi jednoduše. Věta 1 uvádí vlastnost rozdílu dvou trojciferných čísel. Toto číslo je násobkem čísla 99, číslo $a - c$ je rozdílem dvou jednociferných přirozených čísel, a to je tedy číslo jednociferné. Násobky čísla 99, které jsou trojcifernými čísly jsou: 198, 297, 396, 495, 594, 693, 729, 891. Pokud je rozdílem dvou trojciferných čísel některé z nich a toto číslo sečteme s číslem s opačným pořadím číslic, dostaneme číslo, u kterého je součet jednotek 9, součet desítek je 90 + 90 = 180 a součet stovek je 900. Tedy

$$900 + 180 + 9 = 1089.$$

Věta 2: Jestliže p je prvočíslo větší než 3, pak je vždy jedno z čísel $p - 1,\ p + 1$ dělitelné šesti. Dokažte.

Důkaz: Je třeba dokázat, že jedno z čísel $p - 1$ nebo $p + 1$ je dělitelné dvěma a zároveň třemi. Jestliže p je prvočíslo větší než 3, pak čísla $p - 1$ i $p + 1$ jsou sudá, tedy obě jsou dělitelná dvěma. Čísla $p - 1, p, p + 1$ jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla, tedy jedno z nich je dělitelné třemi. Číslo p to není, neboť je prvočíslo. Tedy je to některé z čísel $p - 1$ nebo $p + 1$.

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné prvočíslo větší než 3. Všimněte si, že jeho předchůdce nebo jeho následovník je dělitelný šesti.

Věta 3: Jsou dána čísla $a, b,$ žádné z nich není dělitelné třemi. Pak alespoň jedno z čísel $a + b$ nebo $a - b$ je dělitelné třemi.

Důkaz: Pokud čísla a, b nejsou dělitelná třemi, pak je můžeme vyjádřit ve tvaru
$a = 3x + 1$ *nebo* $a = 3x + 2$, $b = 3y + 1$ nebo $b = 3y + 2$.
$a + b = 3x + 1 + 3y + 2 = 3(x + y + 1)$
$a - b = 3x + 1 - (3y + 1) = 3(x - y)$
Součet je dělitelný třemi, jestliže čísla a, b jsou z různých zbytkových tříd, rozdíl je dělitelný třemi, jestliže čísla a, b jsou ze stejných zbytkových tříd.

Věta 4: Dokažte, že součet šesti trojciferných čísel zapsaných týmiž ciframi, avšak v různém pořadí, je vždy dělitelný číslem 222.

Důkaz: Trojciferná čísla zapíšeme pomocí rozvinutého zápisu:

$$100\,a + 10\,b + c$$
$$100\,a + 10\,c + b$$
$$100\,b + 10\,a + c$$
$$100\,b + 10\,c + a$$
$$100\,c + 10\,a + b$$
$$100\,c + 10\,b + a$$

Součet těchto čísel je $222\,a + 222\,b + 222\,c = 222(a + b + c)$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si tři různá jednociferná čísla a pomocí nich zapište všechna trojciferná čísla (bez opakování). Všechna tato čísla sečtěte a součet vydělte součtem tří zvolených jednociferných čísel. Vždy vyjde podíl 222.

Věta 5: Dokažte, že šesticiferné číslo tvaru $\overline{abcabc}$ (vytvořené z trojciferného čísla zapsaného dvakrát za sebou) je vždy dělitelné čísy 7, 11, 13.

Důkaz: Šesticiferné číslo zapíšeme pomocí jeho rozvinutého zápisu:
$100\,000a + 10\,000b + 1\,000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001\,c =$
$1\,001\,(100a + 10b + c) = 7\,.\,11.\,13\,(100a + 10b + c).$

Modifikace ve školské matematice: Zvolte si libovolné trojciferné číslo a zapište šesticiferné číslo tak, že trociferné číslo zapíšete dvakrát za sebou. Toto číslo vydělte sedmi, získaný podíl vydělte číslem 11 a další získaný podíl vydělte číslem 13. Jaké číslo jste získali?

Věta 6: Dokažte, že jestliže trojciferné číslo $\overline{abc}$ je dělitelné číslem 37, pak každé číslo $\overline{bca}$ nebo $\overline{cab}$ je dělitelné číslem 37.

Důkaz: Číslo $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ je násobkem čísla 37, můžeme jej vyjádřit jako $37\ k$.
Číslo $\overline{bca} = 100b + 10c + a$ upravíme tak, že a vyjádříme jako rozdíl $1\ 000\ a – 999a$. Pak
$100\ b + 10\ c + 1\ 000\ a – 999a = 10(100a + 10b + c) - 999\ a = 37\ k\ .\ 10 + 37\ .\ 27a =$
$= 37(10k + 27a)$

Číslo $\overline{cab}$ upravíme analogicky:
$100c + 10a + b = 100c + 10\ 000a – 9\ 990a + 1\ 000b – 999b = 10\ 000a + 1\ 000\ b + 100c$
$– 9\ 999a – 999b = 100(100a + 10b + c) – 999(10a + b) = 37k\ .\ 100 + 37\ .\ 27(10a – b)=$
$= 37\left[100k + 27(10a - b)\right].$

Modifikace ve školské matematice: Vyberte si libovolný trojciferný násobek čísla 37, z tohto násobku (číslo $\overline{abc}$) vytvořte nové číslo tak, že číslici, která je zapsána na místě stovek, přesunete na místo jednotek (získáte číslo $\overline{bca}$). Je toto číslo dělitelné číslem 37? Podobně vytvořte z původního násobku nové číslo tak, že číslici zapsanou na místě jednotek přemístíte na místo stovek (získáte číslo $\overline{cab}$). Je toto číslo dělitelné číslem 37?

Věta 7: Dokažte, že součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný třemi.

Důkaz: $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2\ .\ 2^n = 2^n\ (1 + 2) = 3\ .\ 2^n$

Věta 8: Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný sedmi.

Důkaz: $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2\ .\ 2^n + 2^2\ .\ 2^n = 2^n\ (1 + 2 + 4) = 7\ .\ 2^n$

Věta 9: Dokažte, že číslo $2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ je dělitelné třemi.

Důkaz: Výraz upravíme tak, že vždy ze dvou členů vytkneme vhodnou (lichou) mocninu čísla 2:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100} = 2^1(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \ \ldots\ + 2^{99}(1 + 2) = 3\ (2^1 + 2^3 + \ldots + 2^{99}).$

Věta 10: Dokažte, že číslo $4^1 + 4^2 + \ \ldots\ + 4^{100}$ je dělitelné pěti.

Důkaz: Využijeme postupu důkazu věty 9.
$4^1 + 4^2 + \ \ldots\ + 4^{100} = 4^1(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + \ \ldots + 4^{99}(1 + 4) = 5(4^1 + 4^3 + \ldots + 4^{99})$

Věta 11: Dokažte, že každé číslo tvaru $10^n + 8$ je pro každé přirozené číslo n je dělitelné číslem 18.

Důkaz: Dokážeme, že číslo $10^n + 8$ je dělitelné dvěma a zároveň devíti. Tato čísla jsou tvaru 108, 1 008, 1 0008, atd., mají na místě jednotek 8, jsou tedy dělitelná dvěma. Ciferný součet těchto čísel je 1 + 8 = 9, tedy čísla jsou dělitelná devíti. Proto číslo $10^n + 8$ je dělitelné číslem 18.

Věta 12: Dokažte, že výraz $n^4 - n^2$ je dělitelný číslem 4 pro každé přirozené n.

Důkaz: $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n-1)n^2(n+1)$. Pokud n je sudé, je $n = 2k$, pak $(2k-1).\ 4k^2.(2k+1) = 4\ k^2(4k^2 - 1)$
Pokud n je liché, je $n = 2k + 1$, pak $2k(2k+1)^2(2k+2) = (4k^2 + 4k)(2k+1)^2 =$
$= 4(k^2 + k)(2k+1)^2$.

Věta 13: Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je $n^3 - n$ dělitené číslem 6.

Důkaz: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$,
Výraz $(n-1)n(n+1)$ je dělitelný šesti, neboť jsou to tři po sobě jdoucí čísla, z nichž alespoň jedno je dělitelné dvěma a jedno z nich je dělitelné třemi.

Věta 14: Dokažte, že číslo $n(n^2 - 7)$ je dělitelné číslem 6 pro každé přirozené n.

Důkaz: Úpravou výrazu obdržíme: $n(n^2 - 7) = n(n^2 - 1 - 6) = n\left[(n-1)(n+1) - 6\right] =$
$= (n-1)n(n+1) - 6n$.
Výraz $(n-1)n(n+1)$ je dělitelný šesti, viz Věta 13.

Věta 15: Dokažte, že číslo $n^3 + 2n$ je pro všechna přirozená čísla n dělitelné třemi.

Důkaz: Využijeme matematickou indukci.

1. Pro $n = 1$ je $1^3 + 2\ .\ 1 = 3$ – věta platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro $n = k$ a dokážeme, že platí i pro $k + 1$.

$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$. Výraz $(k^3 + 2k)$ je dělitelný třemi z předpokladu, takže věta platí pro všechna n.

Věta 16: Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy dělitelný devíti.

Důkaz: Označme tři po sobě jdoucí čísla $n-1, n, n+1$.
Potom $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3(n^3 + 2n)$.
S využitím Věty 15 je výraz $(n^3 + 2n)$ dělitelný třemi, tedy věta platí.

Věta 17: Dokažte, že číslo 21 dělí číslo $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ pro každé přirozené n.

Důkaz: Větu dokážeme matematickou indukcí.

1. Pro $n = 1$ je $4^2 + 5^1 = 21$, tedy věta platí.
2. Předpokládáme, že věta platí pro $n = k$ přirozené, dokážeme že platí pro $n = k + 1$.

$4^{k+2} + 5^{2k+1} = 4^1\ .\ 4^{k+1} + 5^2\ .\ 5^{2k-1} = 4\ .\ 4^{k+1} + (4 + 21)\ .\ 5^{2k-1} = 4(4^{k+1} + 5^{2k-1}) + 21.\ 5^{2k-1}$.
Z využitím předpokladu, že 21 dělí číslo $(4^{k+1} + 5^{2k-1})$, je věta dokázána.

Věta 18: Dokažte, že číslo $2^{n+2}.3^n + 5n - 4$ je dělitelné číslem 25 pro libovolné přirozené číslo n.

Důkaz: Větu dokážeme matematickou indukcí.

1. Pro n = 1 je $2^3.\ 3 + 5 - 4 = 25$, věta platí.

2. Předpokládáme , že věta platí pro $n = k$, dokážeme větu pro $k + 1$.
$2^{k+3}. 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 2 . 2^{k+2} . 3 . 3^k + 5k + 1 = 6 .(2^{k+2} . 3^k) + 30k - 25k + 25 - 24 = 6 .(2^{k+2} . 3^k + 5k - 4) - 25k + 25$. Výraz $.(2^{k+2} . 3^k + 5k - 4)$ je dělitelný číslem 25 na základě předpokladu, tedy číslo $2^{n+2}.3^n + 5n - 4$ je dělitelné číslem 25.

Věta 19: Jestliže n je sudé přirozené číslo, pak číslo $3^n + 63$ je násobkem čísla 72.

Důkaz: Jestliže n je sudé, je $n = 2k$. Pak $3^{2k} + 63 = 9^k + 63 = 9^k - 1 + 64$. Číslo $9^k + 63$ je násobkem čísla 9, číslo $9^k - 1$ je násobkem čísla 8, neboť je dělitelné číslem (9 – 1). Tedy číslo $3^n + 63$ je násobkem čísel 8 a 9, tedy je násobkem čísla 72.

Věta 20: Dokažte, že číslo $5^{2n+1}. 2^{n+2} + 3^{n+2}. 2^{2n+1}$ je násobkem čísla 19 pro každé přirozené n.

Důkaz: $5^{2n+1}. 2^{n+2} + 3^{n+2}. 2^{2n+1} = 5 . 5^{2n} . 2 . 2^n + 3^2 .3^n . 2 . 2^{2n} = 20 . 25^n . 2^n + 18 . 3^n . 4^n = 20 . 50^n + 18 . 12^n = (19 + 1). 50^n + (19 - 1). 12^n = 19(50^n + 12^n) + 50^n - 12^n$.
Číslo $50^n - 12^n$ je násobkem čísla 19, neboť je dělitelné číslem $50 - 12 = 38 = 2 . 19.$

LITERATÚRA

[1] Acheson, D.: *1 089 a další parádní čísla*, překlad anglického originálu *1 089 and All That: A Journey into Mathematics* , Praha, Dokořán, 2002, ISBN 80-7363-024-7

[2] Davidov, U.S., Znám. Š: *Teória čísel,* Bratislava, Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1972

[3] Kuřina, F., Půlpán Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky,* Praha, Academia, 2006, ISBN 80-200-1366-0

[4] Znám, Š.: *Teória čísel,* Bratislava, Alfa, vydavatelstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1977

RNDr. Růžena Blažková, CSc .
Mgr. Irena Budínová, Ph.D.
Katedra matematiky
Fakulta Pedagogická
Masarykova univerzita
Poříčí 31
ČR – 603 00 Brno
e-mail: blazkova@ped.muni.cz, irena.budinova@seznam.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

IDEAL EXHAUSTIVENESS AND LIMIT THEOREMS FOR (ℓ)-GROUP-VALUED MEASURES

ANTONIO BOCCUTO, XENOFON DIMITRIOU

ABSTRACT. We present some results about existence and σ-additivity of suitable limit measures, taking values in (ℓ)-groups, in the setting of ideal convergence. We use the concept of ideal exhaustiveness and extend earlier results given in [2] in the real case.
KEY WORDS: (ℓ)-group, ideal, ideal order convergence, ideal exhaustiveness, limit theorem.

1 Introduction

Limit theorems for (ℓ)-group-valued measures with respect to ideal (or filter) pointwise convergence have been studied e.g. in [4, 5, 6, 7]. In particular some versions of Brooks-Jewett, Vitali-Hahn-Saks, Nikodým and Dieudonné-type theorems were given by requiring some additional conditions on the limit measure.

In this paper we prove, under suitable hypotheses, some versions of limit theorems in the context of (ℓ)-groups, by requiring the simple ideal order pointwise convergence of the measure sequences, with respect to a common order sequence. In particular, in the case of a sequence of measures defined on a separable σ-algebra, we obtain some results on existence and on σ-additivity of the limit measure. We use the powerful tool of ideal exhaustiveness, investigated in [8], and we extend some results proved in [2] for real-valued measures.

2 Preliminaries

We recall the basic notions and concepts which will be useful in the sequel.

Definitions 2.1 Let R be a Dedekind complete (ℓ)-group. Then we have:

(a) R is said to be *super Dedekind complete* iff for any nonempty set $A \subset R$, bounded from above, there exists a countable subset $A^* \subset A$, with $\sup A = \sup A^*$.

(b) A sequence $(p_n)_n$ of positive elements of R is called an (O)*-sequence* iff it is decreasing and $\wedge_n p_n = 0$, where the symbol $\wedge$ denotes the lattice infimum. A sequence $(x_n)_n$ in R is said to be *order-convergent* (or (O) *-convergent*) to $x \in R$ iff there is an (O)-sequence $(p_l)_l$ with the property that for each $l \in \mathbb{N}$ there is $n_l \in \mathbb{N}$ with $|x_n - x| \le p_l$ for every $n \ge n_l$, and in this case we write $(O)\lim_n x_n = x$.

Remark 2.2 Observe that a sequence $(x_n)_n$ (O)-converges to x if and only if there is an (O)-sequence $(q_n)_n$ with $|x_n - x| \le q_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ (see also [10]).

Definitions 2.3 (a) We say that $(x_n)_n$ is (O)-*Cauchy* iff there exists an (O)-sequence $(p_l)_l$ with the property that for every $l \in \mathbb{N}$ there is $n_l \in \mathbb{N}$ with $|x_n - x_m| \le p_l$ for every $n, m \ge n_l$.

Supported by Universities of Perugia and Athens.
2010 AMS Subject Classification: 28B15, 54A20.

(b) An (ℓ)-group R is said to be *weakly σ-distributive* iff $\wedge_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\left(\vee_{t=1}^{\infty} a_{t,\varphi(t)}\right)=0$ whenever $(a_{t,l})_l$ is an (O)-sequence for each $t\in\mathbb{N}$.

Definitions 2.4 (see also [11]) (a) A family of sets $\mathcal{I}\subset\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is called an *ideal* of $\mathbb{N}$ iff $A\cup B\in\mathcal{I}$ whenever $A,B\in\mathcal{I}$ and for each $A\in\mathcal{I}$ and $B\subset A$ we get $B\in\mathcal{I}$. An ideal is said to be *non-trivial* iff $\mathcal{I}\neq\emptyset$ and $\mathbb{N}\notin\mathcal{I}$. A non-trivial ideal $\mathcal{I}$ is said to be *admissible* iff it contains all singletons. Given an ideal $\mathcal{I}$ of $\mathbb{N}$, we call *dual filter* of $\mathcal{I}$ the set $\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathcal{I}):=\{\mathbb{N}\setminus A: A\in\mathcal{I}\}$.

(b) We say that an admissible ideal $\mathcal{I}$ of $\mathbb{N}$ is a P*-ideal* iff for any sequence $(A_j)_j$ in $\mathcal{I}$ there are sets $B_j\subset\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}$: $A_j\Delta B_j$ is finite for all $j\in\mathbb{N}$ and $\cup_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathcal{I}$.

Remark 2.5 Observe that the ideal $\mathcal{I}_{\text{fin}}$ of all finite subsets of $\mathbb{N}$ and the ideal $\mathcal{I}_d$ of all subsets of $\mathbb{N}$ of asymptotic density zero are P-ideals. Other examples of P-ideals can be found in [11].

Definitions 2.6 (a) Let $\mathcal{I}$ be an admissible ideal of $\mathbb{N}$. A sequence $(x_n)_n$ in R $(O\mathcal{I})$-*converges to* $x\in R$ iff there exists an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$ with $\{n\in\mathbb{N}: |x_n-x|\le\sigma_l\}\in\mathcal{F}$ for all $l\in\mathbb{N}$.

(b) We say that $(x_n)_n$ is $(O\mathcal{I})$-*Cauchy* iff there exists an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$ with the property that for all $l\in\mathbb{N}$ there is a set $A_l\in\mathcal{I}$: $|x_n-x_m|\le\sigma_l$ whenever $n,m\in\mathbb{N}\setminus A_l$.

Note that $(O\mathcal{I}_{\text{fin}})$-convergence coincides with (O)-convergence (see also [4]).

The following result (see [1, Lemma 2.8]) allows us to replace countably many (O)-sequences with one (O)-sequence.

Lemma 2.7 *Let R be a super Dedekind complete and weakly σ-distributive (ℓ)-group, assume that $\{(r_n^{(k)})_n: k\in\mathbb{N}\}$ is a countable family of (O)-sequences in R and let there exist a $w\in R$ with $|r_n^{(k)}|\le w$ for all $n,k\in\mathbb{N}$. Then there is an (O)-sequence $(b_j)_j$: for all $j,k\in\mathbb{N}$ there exists $n=n(j,k)\in\mathbb{N}$ with $r_n^{(k)}\le b_j$.*

We now turn to some notions and properties of (ℓ)-group valued measures. Let R be a Dedekind complete (ℓ)-group, G be any abstract nonempty set and $\Sigma\subset\mathcal{P}(G)$ be any σ-algebra.

Definitions 2.8 (a) A finitely additive bounded map $\mu:\Sigma\to R$ is said to be σ*- additive* on Σ iff for every disjoint sequence $(H_n)_n$ in Σ we get $(O)\lim_n v(\mu)(\cup_{l=n}^{\infty}H_l)=0$, where $v(\mu)(A)=\vee_{B\in\Sigma,B\subset A}|\mu(B)|$, $A\in\Sigma$, denotes the semivariation of μ.

(b) The measures $\mu_j:\Sigma\to R$, $j\in\mathbb{N}$, are *uniformly σ-additive* on Σ iff for each disjoint sequence $(H_n)_n$ in Σ we get $(O)\lim_n[\vee_j v(\mu_j)(\cup_{l=n}^{\infty}H_l)]=0$.

(c) We say that the measures $\mu_j : \Sigma \to R$, $j \in \mathbb{N}$, are *equibounded* on Σ iff there is a $w \in R$ with $|\mu_j(A)| \le w$ for all $j \in \mathbb{N}$ and $A \in \Sigma$.

(d) If λ is a σ-additive non-negative real-valued measure defined on Σ and $A, B \in \Sigma$, then the λ*-distance* between A and B is defined by $d_\lambda(A,B) := \lambda(A \Delta B)$, where Δ denotes the symmetric difference. It is well-known (see [9]) that (Σ, d_λ) is a complete pseudometric space on which the operations of union, intersection and complement are continuous.

Let $\mathcal{I}$ be any fixed admissible ideal of $\mathbb{N}$. We now recall the notions of $\mathcal{I}$-exhaustiveness (see also [8]).

Definitions 2.9 (a) A sequence $\mu_n : \Sigma \to R$, $n \in \mathbb{N}$ is called $\mathcal{I}$*-exhaustive at* $E \in \Sigma$ iff there exists an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$ (depending on E): for each $l \in \mathbb{N}$ there exist $\delta > 0$ and $A \in \mathcal{I}$ (depending on l and E) with $|\mu_n(E) - \mu_n(F)| \le \sigma_l$ whenever $d_\lambda(E,F) < \delta$ and $n \in \mathbb{N} \setminus A$. The sequence $(\mu_n)_n$ is said to be $\mathcal{I}$*-exhaustive on* Σ iff it is $\mathcal{I}$-exhaustive at E for all $E \in \Sigma$.

(b) The sequence $(\mu_n)_n$ is *globally* $\mathcal{I}$*-exhaustive on* Σ iff there is an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$: for any $l \in \mathbb{N}$ and $E \in \Sigma$ there are $\delta > 0$ and $A \in \mathcal{I}$ (depending on l and E) with $|\mu_n(E) - \mu_n(F)| \le \sigma_l$ for all $F \in \Sigma$ with $d_\lambda(E,F) < \delta$ and $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

(c) We say that $(\mu_n)_n$ is *uniformly* $\mathcal{I}$*-exhaustive on* Σ iff there is an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$: for every $l \in \mathbb{N}$ there exist $\delta > 0$ and $A \in \mathcal{I}$ (depending only on l) with $|\mu_n(E) - \mu_n(F)| \le \sigma_l$ for all $E, F \in \Sigma$ with $d_\lambda(E,F) < \delta$ and for any $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

(d) A sequence $(\mu_n)_n$ is called *exhaustive at* E (*exhaustive, globally exhaustive, uniformly exhaustive on* Σ) iff it is $\mathcal{I}_{fin}$-exhaustive at E ($\mathcal{I}_{fin}$-exhaustive, globally $\mathcal{I}_{fin}$-exhaustive, uniformly $\mathcal{I}_{fin}$-exhaustive on Σ) respectively.

3 The main results

We recall the following result ([7, Proposition 3.4]), which will be useful in the sequel.

Proposition 3.1 *Let* R *be any Dedekind complete* (ℓ)*-group,* $(x_{i,j})_{i,j}$ *be a double sequence in* R, $\mathcal{I}$ *be any* P*-ideal,* $\mathcal{F}$ *be its dual filter, and suppose that* $(O\mathcal{I})\lim_i x_{i,j} = x_j$ *for every* $j \in \mathbb{N}$. *Then there is a set* $B_0 \in \mathcal{F}$ *with* $(O)\lim_{h \to +\infty, h \in B_0} x_{h,j} = x_j$ *for all* $j \in \mathbb{N}$.

Remark 3.2 Observe that, if the limits in the hypothesis of Proposition 3.1 exist with respect to a common (O)-sequence, then also the limits in the thesis can be taken with respect to a same (O)-sequence (see also [4]).

We now give some theorems about existence and properties of the limit measure with respect to $(O\mathcal{I})$-convergence in the context of (ℓ)-groups, extending results proved in [2] in the case $R = \mathbb{R}$. We begin with the following

Theorem 3.3 *Let $\mathcal{I}$ be any admissible ideal of $\mathbb{N}$ and assume that there exists a countable dense subset $\mathcal{B}:=\{F_j : j\in\mathbb{N}\}$ of (Σ, d_λ). Let $(\mu_n)_n$ be a globally $\mathcal{I}$-exhaustive sequence of measures with $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(F_j) =: \mu(F_j)$ for all $j\in\mathbb{N}$ and for some set function $\mu:\mathcal{B}\to R$, with respect to a common (O)-sequence. Then μ has a finitely additive extension $\mu_0:\Sigma\to R$ with $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)=\mu_0(E)$ for all $E\in\Sigma$ and with respect to a same (O)-sequence.*

Proof : Let $(\tau_l)_l$ be an (O)-sequence related with global $\mathcal{I}$-exhaustiveness, and choose arbitrarily $E\in\Sigma$. Then for each $l\in\mathbb{N}$ there exist $\delta>0$ and $C\in\mathcal{I}$ with $|\mu_n(E)-\mu_n(F)|\le\tau_l$ for every $F\in\Sigma$ with $d_\lambda(E,F)<\delta$ and $n\in\mathbb{N}\setminus C$. Pick $\bar{j}\in\mathbb{N}$ with $d_\lambda(E,F_{\bar{j}})<\delta$. By the Cauchy criterion (see also [4, Proposition 2.14]) there is an (O)-sequence $(\sigma_l)_l$: for all j, $l\in\mathbb{N}$ there is a set $C_l^{(j)}\in\mathcal{I}$ with $|\mu_k(F_j)-\mu_n(F_j)|\le\sigma_l$ whenever $k,n\in\mathbb{N}\setminus C_l^{(j)}$. In particular we get

$$|\mu_k(E)-\mu_n(E)|\le|\mu_k(E)-\mu_k(F_{\bar{j}})|+|\mu_k(F_{\bar{j}})-\mu_n(F_{\bar{j}})|+$$
$$+|\mu_n(F_{\bar{j}})-\mu_n(E)|\le 2\tau_l+\sigma_l$$

whenever k, $n\in\mathbb{N}\setminus(C\cup C_l^{(\bar{j})})$. Thanks to the Cauchy criterion, this proves the existence of a map $\mu_0:\Sigma\to R$, extending μ, with the property that $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)=\mu_0(E)$ with respect to a common (O)-sequence, independent of E. It is easy to see that μ_0 is finitely additive. □

This result is a sufficient condition for existence and σ-additivity of the limit measure.

Theorem 3.4 *Let (Σ, d_λ) be separable, $\mathcal{B}=\{F_j : j\in\mathbb{N}\}$ be as in Theorem 3.3 and $\mathcal{I}$ be a P-ideal. If $(\mu_n)_n$ is a uniformly $\mathcal{I}$-exhaustive sequence of equibounded, σ-additive measures and $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(F_j)=:\mu(F_j)$ for all $j\in\mathbb{N}$ with respect to a common (O)-sequence, then there are a set $M_0\subset\mathbb{N}$: $\mathbb{N}\setminus M_0\in\mathcal{I}$ and a σ-additive extension μ_0 of μ, defined on Σ,with $(O)\lim_{n\in M_0}\mu_n(E)=\mu_0(E)$ for all $E\in\Sigma$ with respect to a same (O)-sequence.*

Proof: Let $\mathcal{F}$ be the dual filter of $\mathcal{I}$. By uniform $\mathcal{I}$-exhaustiveness of $(\mu_n)_n$ we get the existence of an (O)-sequence $(\sigma_j)_j$: for every $j\in\mathbb{N}$ there are a $\delta_j>0$ and a set $A_j\in\mathcal{I}$ with $|\mu_n(E)-\mu_n(F)|\le\sigma_j$ whenever $E,F\in\Sigma$ with $d_\lambda(E,F)<\delta_j$ and $n\notin A_j$. For every $j\in\mathbb{N}$, set $M_j^{'}:=\mathbb{N}\setminus A_j$. Since $\mathcal{I}$ is a P-ideal, in correspondence with the sequence $(M_j^{'})_j$ there exists a sequence $(M_j)_j$ of subsets of $\mathbb{N}$: $M_j\Delta M_j^{'}$ is finite for all $j\in\mathbb{N}$ and $\cap_j M_j\in\mathcal{F}$. Let $M:=\cap_j M_j$ and $Z_j:=M\setminus M_j^{'}$ for all j. Note that $Z_j\subset M_j\setminus M_j^{'}$ is finite for every $j\in\mathbb{N}$. Thus for all $j\in\mathbb{N}$ we get $|\mu_n(E)-\mu_n(F)|\le\sigma_j$ whenever $E,F\in\Sigma$ with $d_\lambda(E,F)<\delta_j$ and $n\in M\setminus Z_j$.

Moreover, thanks to Proposition 3.1 and Remark 3.2, there are an (O)-sequence $(b_l)_l$ and a set $B_0 \in \mathcal{F}$: for every j, $l \in \mathbb{N}$ there exists $\overline{n} \in B_0$: $|\mu_n(F_j) - \mu(F_j)| \le b_l$ whenever $n \ge \overline{n}$, $n \in B_0$: without loss of generality we can choose $\overline{n} \in B_0 \cap M$. Let $M_0 := B_0 \cap M$. Note that $M_0 \in \mathcal{F}$, the sequence $(\mu_n)_n$ is uniformly $\mathcal{I}_{\text{fin}}$-exhaustive and even globally $\mathcal{I}_{\text{fin}}$-exhaustive too, and $(O)\lim_{n\in M_0}\mu_n(F_j) = \mu(F_j)$ with respect to a common (O)-sequence. From this and Theorem 3.3 used with $(\mu_n)_{n\in M_0}$ and $\mathcal{I}_{\text{fin}}$ there exists a finitely additive extension μ_0 of μ, defined on Σ, with $(O)\lim_{n\in M_0}\mu_n(E) = \mu_0(E)$ for each $E \in \Sigma$ and with respect to a same (O)-sequence (independent of E). So, M_0 is the requested set. This proves the first part of the assertion.

Finally, since the measures μ_n, $n \in M_0$, are equibounded, σ-additive and pointwise convergent on Σ to a set function μ_0 with respect to a same (O)-sequence, then by [3, Theorem 3.6] they are uniformly σ-additive, and hence μ_0 is σ-additive. □

We now prove a theorem on the existence of the order ideal limit measure without requiring ideal exhaustiveness.

Theorem 3.5 *Let R be a super Dedekind complete and weakly σ-distributive (ℓ)-group, $\mathcal{A}$ be an algebra of sets generating Σ and $\mu_n : \Sigma \to R$, $n \in \mathbb{N}$, be a sequence of equibounded, uniformly σ-additive measures with the property that $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)$ exists in R for each $E \in \mathcal{A}$. Then $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)$ exists in R for all $E \in \Sigma$.*

Proof: Let $\Lambda := \{E \in \Sigma : (O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)$ exists in $R\}$. By hypothesis, $\mathcal{A} \subset \Lambda$. If we show that Λ is a monotone class, then $\Lambda = \mathcal{A}$ and the result will be proved.

Let $(E_m)_m$ be a monotone sequence of elements of Λ with $\lim_m E_m = E$ in the set-theoretic sense. Since $E_m \in \Lambda$ for all m, then the equibounded sequence $(\mu_n(E_m))_n$ is $(O\mathcal{I})$-Cauchy, then for any $m \in \mathbb{N}$ there exists an (O)-sequence $(\sigma_l^{(m)})_l$: for all $l, m \in \mathbb{N}$ there is an element $C_{l,m} \in \mathcal{I}$ with $|\mu_p(E_m) - \mu_q(E_m)| \le \sigma_l^{(m)}$ whenever $p, q \notin C_{l,m}$. Since the μ_n's are equibounded, the family $\{\sigma_l^{(m)} :\ l,\ m \in \mathbb{N}\}$ satisfies the hypotheses of Lemma 2.7. By Lemma 2.7 there is an (O)-sequence $(\tau_s)_s$: to every $s, m \in \mathbb{N}$ there corresponds $l \in \mathbb{N}$ with $\sigma_l^{(m)} \le \tau_s$. So it follows that for every $s, m \in \mathbb{N}$ there exists a set $C_{s,m} \in \mathcal{I}$ with $|\mu_p(E_m) - \mu_q(E_m)| \le \tau_s$ for all $p, q \notin C_{s,m}$. Moreover, since $(\mu_n)_n$ is uniformly σ-additive, there exists an (O)-sequence $(\pi_s)_s$: to each $s \in \mathbb{N}$ there corresponds an integer $\overline{m}$ with $|\mu_n(E_{\overline{m}}) - \mu_n(E)| \le \pi_s$ for all $n \in \mathbb{N}$. Thus for all $p, q \notin C_{s,\overline{m}}$ we get:

$$\begin{aligned}&|\mu_p(E) - \mu_q(E)| \le |\mu_p(E) - \mu_p(E_{\overline{m}})| + |\mu_p(E_{\overline{m}}) - \mu_q(E_{\overline{m}})| + \\ &+ |\mu_q(E_{\overline{m}}) - \mu_q(E)| \le 2\pi_s + \tau_s.\end{aligned}$$

So the sequence $(\mu_n(E))_n$ is $(O\mathcal{I})$-Cauchy, and thus the limit $(O\mathcal{I})\lim_n \mu_n(E)$ exists in R (see also [4]). Thanks to arbitrariness of $E \in \Sigma$, we get the assertion. □

REFERENCES

[1] A. BOCCUTO - D. CANDELORO, *Sobczyk-Hammer decompositions and convergence theorems for measures with values in l-groups*, Real Anal. Exch. **33**, 91-106 (2008).

[2] A. BOCCUTO - P. DAS - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Ideal exhaustiveness, weak convergence and weak compactness in Banach spaces*, 2011, submitted.

[3] A. BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Countably additive restrictions and limit theorems in* (ℓ)*-groups*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia **57** (2010), 121-134.

[4] A. BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Basic matrix theorems for* $(\mathcal{I})$*-convergence in* (ℓ)*-groups*, Math. Slovaca (2011), to appear.

[5] A. BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Schur lemma and limit theorems in lattice groups with respect to filters*, Math. Slovaca (2011), to appear.

[6] BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Brooks-Jewett-type theorems for the pointwise ideal convergence of measures with values in* (ℓ)*-groups*, Tatra Mountains Math. Publ. **49** (2011), to appear.

[7] A. BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU, *Some versions of limit and Dieudonné-type theorems with respect to filter convergence for* (ℓ)*-group-valued measures*, Central European J. Math. (2011), to appear.

[8] A. BOCCUTO - X. DIMITRIOU - N. PAPANASTASSIOU - W. WILCZYŃSKI, *Ideal exhaustiveness, continuity and* (α)*-convergence for lattice group-valued functions*, Intern. J. Pure Appl. Math. **70** (2) (2011), 211-227.

[9] J. DIESTEL, Sequences and series in Banach spaces, Springer-Verlag, 1984.

[10] K. KITOVER - A. W. WICKSTEAD, *Operator norm limits of order continuous operators*, Positivity **9** (2005), 341-355.

[11] P. KOSTYRKO - T. ŠALÁT - W. WILCZYŃSKI, I*-convergence*, Real Anal. Exch. **26** (2000/2001), 669-685.

Doc. Antonio Boccuto, PhD.
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia,
I – 06123 Perugia (Italy)
e-mail: boccuto@yahoo.it, boccuto@dmi.unipg.it

Dr. Xenofon Dimitriou
Department of Mathematics, University of Athens, Panepistimiopolis
Athens 15784 (Greece)
e-mail: xenofon11@gmail.com, dxenof@math.uoa.gr

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

VYUŽITIE SKALÁRNEHO SÚČINU VEKTOROV NA FORMOVANIE A UPEVŇOVANIE ARGUMENTAČNÝCH ZRUČNOSTÍ ŽIAKOV

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRACT. We present some particularities of teaching vectors, scalar product and analytic geometry at French – Slovak bilingual high schools. The argumentative part of such methods is highlighted.

Úvod

Geniálnu myšlienku prepojiť aritmetiku a geometriu, ktorá znamenala prelom v novodobých dejinách matematiky, pripisujeme francúzskemu matematikovi a filozofovi René Descartovi (1596-1650) ([4], str. 396 a nasledujúce). Tlmočníkom sa stala analytická geometria.

Geometria je krásna, no zároveň náročná, geometrické dôkazové úlohy patria medzi najťažšie v stredoškolskej matematike. Analytická geometria vnáša do tejto problematiky akúsi ľahkosť a vzdušnosť, pre niekoho možno až všednosť: vytvára prostredie, v ktorom sa pracuje s geometrickými pojmami, no úlohy sú riešené algebrickými metódami. Tu chceme zdôrazniť, že napriek relatívnej jednoduchosti ponúka aj analytická geometria vynikajúce nástroje na dokazovanie. A práve vďaka tejto jednoduchosti sú dôkazové techniky zvládnuteľné širokou skupinou žiakov.

Analytická geometria sa ukázala byť vhodnou aj pre pojem vektor a ďalšie pojmy, ktoré s ním súvisia. V príspevku priblížime spôsob, akým sme vyučovali niektoré časti učiva o skalárnom súčine vo francúzsko-slovenských bilingválnych triedach na Gymnáziu Metodova v Bratislave. Osobitosťou tohto spôsobu je dôraz kladený na argumentáciu.

Analytická geometria a vektory v bilingválnych francúzsko-slovenských triedach

V týchto triedach sa matematika vyučuje špirálovým spôsobom. Takéto vyučovanie umožňuje hlbšie zakorenenie pojmov, vzťahov a súvislostí medzi pojmami vo vedomí žiakov a posilňuje schopnosť ich aktivácie v operačnej časti pamäte. Vďaka špirálovému usporiadaniu učiva má učiteľ istú voľnosť pri zaraďovaní jednotlivých tematických celkov v rámci konkrétneho ročníka. Pre podrobnejšie informácie odporúčame napr. [2].

Vo Francúzsku sa žiaci prvýkrát stretávajú s pojmom *vektor* už na základnej škole (collège) a následne v každom ročníku gymnázia. V bilingválnych triedach je to každý rok, niekedy viackrát v jednom ročníku. Vo fyzike sa pracuje s vektormi už na začiatku prvého ročníka, preto je vhodné preberať prvý blok učiva o vektoroch v matematike ako úplne prvý tematický celok. Má rozsah asi 10 vyučovacích hodín, jeho obsahom sú:

1) definícia vektora, súčet vektorov, násobenie vektora skalárom, nulový vektor, opačné vektory, rovnobežník;
2) v pravouhlej súradnicovej sústave: súradnice vektora, všetky pojmy z 1) a ďalej: rovnobežník a riešenie vektorových rovníc, dĺžka vektora, trojuholník, súradnice stredu úsečky, súradnice ťažiska v trojuholníku.

V druhom polroku 1. ročníka sa o. i. preberá rovnica priamky, rovnobežnosť, kolmosť

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 278-076UK-4/2010 FMFI UK

a v inom bloku lineárne funkcie. Vektory sa tu síce nespomínajú, ale v ďalších ročníkoch sa získané poznatky prepájajú s poznatkami o vektoroch.

V druhom ročníku je v každom polroku zaradený blok učiva venovaný vektorom. Záleží iba od učiteľa, či preberie každý z nich súvisle alebo v niekoľkých etapách. Blok prvého polroku je kvôli svojej abstraktnosti mimoriadne náročný, je totiž venovaný vektorovej aritmetike bez použitia súradníc. Prináša pojmy kolineárnosť bodov, lineárna závislosť vektorov, vektorové rovnice rovnobežníka, stredu úsečky, ťažiska. Dominantnou technikou je riešenie vektorových rovníc. Druhý blok druhého ročníka, ktorý je venovaný vektorom, aplikuje metódy analytickej geometrie v rovine na všetky doteraz známe pojmy. Bez dôkazu, len na základe pozorovania, je možné prijať i súradnice kolmých vektorov. Novinkou je rovnica kružnice ako množiny bodov rovnako vzdialených od daného pevného bodu a napokon analytické vyjadrenie niektorých zobrazení v rovine: posunutie, stredová súmernosť, v niektorých špeciálnych prípadoch aj osová súmernosť.

To je teda obsah a časové rozloženie učiva, ktoré sa preberá pred uvedením pojmu *skalárny súčin*. Ten je zaradený v osnovách tretieho ročníka. Vo fyzike sa v tom istom ročníku preberá *práca sily*, ktorá má so skalárnym súčinom priamy súvis. Podľa okolností sme niekedy stihli prebrať na hodinách matematiky aspoň úvod do skalárneho súčinu skôr, než bol potrebný na fyzike. Inokedy to nebolo možné a skalárny súčin prišiel na rad, keď už bola práca sily na fyzike prebraná. V oboch prípadoch sa však dalo vyťažiť zo vzniknutej situácie: v prvom z nich matematika vytvárala terén pre fyziku, v druhom zasa matematika profitovala z toho, s čím sa už žiaci stretli na fyzike, a pomáhala im vsadiť príslušné poznatky do nových matematických pojmov a súvislostí.

Vo štvrtom ročníku je v osnovách matematiky opätovný návrat k vektorom, a síce v prostredí analytickej geometrie v trojrozmernom priestore. Do repertoára nástrojov pribudne vektorový súčin. Upevňujú a rozširujú sa dovtedajšie poznatky, vyskytnú sa nové príklady využitia skalárneho súčinu. Žiaci ho spontánne používajú pri riešení úloh. Mozaika vedomostí sa stále rýchlejšie dopĺňa, vytvárajú a upevňujú sa ďalšie súvislosti.

Logické zápisy a ich vplyv na úroveň argumentácie

Jedným z dôležitých cieľov matematiky ako školského predmetu je naučiť žiakov správne logicky uvažovať a argumentovať. Úloha učiteľa je tu podstatná [3]: „*...ak je učiteľ presvedčený o dôležitosti dôkazu a argumentácie, využíva tieto pri riešení úloh, sú aj jeho žiaci vedení k zdôvodňovaniu svojho postupu, k validácii vyslovených hypotéz a k chápaniu dôkazu ako nevyhnutnej súčasti pravdivosti tvrdenia. Naopak, ak učiteľ považuje dôkaz za zbytočnú záťaž žiakov a nepodstatný prvok pre vyučovanie, ak pri riešení úlohy zdôrazňuje skôr osvojenie si algoritmu správneho riešenia, tak aj prístup žiakov bude jemu podobný.*“

Učiteľ môže u svojich žiakov budovať logické myslenie a schopnosť argumentovať nielen pri precvičovaní dôkazových techník v tzv. dôkazových úlohách. Je vhodné vytvárať priestor pre argumentáciu pri riešení rôznorodých úloh, a to zo všetkých oblastí matematiky. Systematický dôraz kladený na argumentáciu pri riešení úloh pomôže žiakom prejsť od prístupu „ako“ k prístupu „prečo“.

V bilingválnych francúzsko-slovenských osnovách matematiky nie je výroková logika samostatným tematickým celkom. Na druhej strane, argumentácia a zdôvodňovanie opodstatnenosti postupu riešenia sa vyžadujú dokonca i v pomerne jednoduchých úlohách. Od učiteľa sa teda očakáva, že bude vytvárať a využívať vhodné situácie na formovanie logického myslenia žiakov. Takto sa buduje, utvrdzuje a precvičuje správna formulácia s použitím logických spojok, negácií a kvantifikovania (nie nevyhnutne pomocou kvantifikátorov). Pri riešení úloh, a to nielen dôkazových, sa často používajú implikácie alebo ekvivalencie, pričom sa zdôrazňuje ich miesto v argumentácii.

V nasledujúcej časti uvádzame tri modelové úlohy „ako ušité" na použitie skalárneho súčinu. Využíva sa v nich ekvivalencia medzi kolmosťou vektorov a nulovou hodnotou skalárneho súčinu týchto vektorov. Riešenia sú zapísané spôsobom, ktorý zdôrazňuje ekvivalentnosť jednotlivých krokov resp. tvrdení. Podobné zápisy sme vyžadovali aj v riešeniach žiakov. Spočiatku s obavami, že to bude viesť k formalizmu. S uspokojením však môžeme konštatovať, že žiaci s priemerným až nadpriemerným matematicko-logickým uvažovaním si používanie ekvivalencií hravo osvojili. Navyše, pomáhalo im pri vytváraní súvislostí namiesto memorovania postupov. Zároveň sa stalo dôležitým prostriedkom pri pestovaní a cibrení správnej argumentácie na pomerne vysokej úrovni.

Všeobecná rovnica priamky

Priamka p prechádza bodom $A[x_A, y_A]$ a nenulový vektor $\vec{n}(a, b)$ je na ňu kolmý. Odvoďme rovnicu tejto priamky.

Riešenie:

Označme $M[x, y]$ ľubovoľný bod v rovine, máme $\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A)$.

Platí: $M[x, y] \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A) \cdot a + (y - y_A) \cdot b = 0$,

čiže $M[x, y] \in p \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$.

Posledné dve rovnice sú rovnicami priamky p, pričom rovnica $ax + by - ax_A - by_A = 0$ má tvar $ax + by + c = 0$. (1)

Zistili sme toto: bod M roviny leží na priamke p práve vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú rovnicu (1). Platí to pre všetky typy priamok: horizontálne, zvislé aj šikmé. Preto budeme rovnicu (1) nazývať *všeobecná rovnica priamky*. ▫

Rovnica výšky v trojuholníku

Je daný trojuholník s vrcholmi $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B], C[x_C, y_C]$. Odvoďme rovnicu výšky v_C na stranu AB.

Poznámka: Vďaka vedomostiam z nižších ročníkov sú žiaci vyzbrojení dostatočnými kompetenciami vyriešiť takúto úlohu. Ich spôsob je však pomerne ťažkopádny. V skutočnosti používajú „prirodzený postup", ktorý kopíruje postup konštrukcie výšky v_C v trojuholníku ABC, pritom ale uplatňujú metódy analytickej geometrie. Práve preto je vhodné venovať časť vyučovacej hodiny tomu, aby žiaci hľadali rovnicu samostatne resp. vo dvojiciach. Učiteľ by nemal podľahnúť obavám, že to bude stratený čas. Opak je totiž pravdou: na základe vlastnej skúsenosti s ťažkopádnosťou svojho postupu dokážu žiaci oceniť výhody nového spôsobu riešenia, kde sa používa skalárny súčin, a sú motivovaní osvojiť si ho.

Riešenie:

Máme $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ a $\overrightarrow{CM} = (x - x_C, y - y_C)$, kde $M[x, y]$ je ľubovoľný bod v rovine.

Platí: $M[x, y] \in v_C \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$M[x, y] \in v_C \Leftrightarrow (x - x_C) \cdot (x_B - x_A) + (y - y_C) \cdot (y_B - y_A) = 0$

$M[x, y] \in v_C \Leftrightarrow x \cdot (x_B - x_A) + y \cdot (y_B - y_A) - x_C(x_B - x_A) - y_C(y_B - y_A) = 0$.

Toto už je rovnica priamky v_C v tvare $ax + by + c = 0$, kde $a = x_B - x_A$, $b = y_B - y_A$, $c = -x_C(x_B - x_A) - y_C(y_B - y_A)$. ▫

Rovnica kružnice s priemerom AB

Odvoďte rovnicu kružnice k s priemerom AB, pričom $A[x_A, y_A], B[x_B, y_B]$.
Riešenie:
Body kružnice k sú bodmi Talesovej kružnice s priemerom AB, teda platí:

$$M[x,y] \in k \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$M[x,y] \in k \Leftrightarrow (x - x_M) \cdot (x_B - x_A) + (y - y_M) \cdot (y_B - y_A) = 0 \qquad (2)$$

Súradnice každého bodu kružnice k spĺňajú rovnicu (2) a naopak, ak je (2) splnená pre nejakú dvojicu (x, y), tak bod $P[x, y]$ nutne leží na kružnici k. Preto je rovnica (2) hľadanou rovnicou. ▫

Poznámka: Mnohí študenti sú prekvapení, že rovnica kružnice nemusí byť v žiadnom z tvarov, ktoré predtým poznali. Vo svojich riešeniach zvyčajne pokračujú v úpravách, až kým nedostanú tvar $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$, kde S$[x_S, y_S]$ je stred a r polomer kružnice k.

Žiacke riešenia úloh

Postrehli sme, že žiaci sa prostredníctvom „barličky“, ktorou je formálny zápis ekvivalencie, pomerne rýchlo naučia argumentovať (zdôrazniť kľúčové informácie a vzťahy a opierať sa o ne). Riešenia žiakov bývajú často sprevádzané náčrtmi, na tomto mieste sa ale uspokojíme iba s výpočtami a úpravami. Uvedené riešenia sme vybrali kvôli elegancii a nadhľadu, s ktorými autori podčiarkli úlohu vstupných údajov pri zvolenej metóde, a tiež kvôli správnemu použitiu ekvivalencie.

Úloha 1

Nájdite rovnicu osi úsečky AB, kde $A[3; -7], B[-1; 4]$.
Riešenie:
Os q úsečky AB je na AB kolmá a prechádza jej stredom S, pričom $S = \left[\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right] = \left[\frac{3-1}{2}; \frac{-7+4}{2}\right] = [1; -1{,}5]$.

$$\begin{aligned} M[x,y] \in q &\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} \perp \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_S) \cdot (x_B - x_A) + (y - y_S)(y_B - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1) \cdot (-4) + (y - 1{,}5) \cdot 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x + 11y + 4 - 16{,}5 = 0 \end{aligned}$$

Os úsečky AB má rovnicu $-4x + 11y - 12{,}5 = 0$.

Úloha 2

Nájdite rovnicu guľovej plochy γ s priemerom AB, kde $A[3; -7; 0], B[-1; 5; 4]$.
Riešenie 1:
Podobne ako pri Talesovej kružnici, aj tu máme pravé uhly:

$$\begin{aligned} M[x,y,z] \in \gamma &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A)\cdot(x - x_B) + (y - y_A)\cdot(y - y_B) + (z - z_A)\cdot(z - z_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+1) + (y+7)\cdot(y-5) + z\cdot(z-4) = 0 \end{aligned}$$

Guľová plocha γ má rovnicu $(x-3)\cdot(x+1) + (y+7)\cdot(y-5) + z\cdot(z-4) = 0$.

Záver

Na riešení niekoľkých úloh sme ilustrovali, ako je možné využiť súvislosť medzi kolmosťou vektorov a nulovou hodnotou skalárneho súčinu nielen pri samotnom hľadaní rovníc kriviek a plôch, ale tiež na budovanie a posilňovanie argumentačných kompetencií u žiakov stredných škôl. Prostredie analytickej geometrie teda nepochybne poskytuje možnosti formovať a upevňovať logické myslenie žiakov a ich schopnosť argumentovať.

Žiaľ, v aktuálnych osnovách matematiky pre gymnáziá *ISCED 3a* nezostalo pre vektor miesto a analytická geometria je v cieľových požiadavkách [5] značne oklieštená. Napriek tomu veríme, že riaditelia gymnázií vyčlenia v rámci voliteľných predmetov dostatočný priestor pre vyučovanie matematiky a učitelia budú naďalej učiť aj analytickú geometriu. A to i preto, že lineárna algebra a vektorový počet, ktoré v bakalárskom štúdiu nadväzujú na analytickú geometriu, majú rozsiahle využitie v matematických, informatických i fyzikálnych odboroch ako i vo väčšine odborov prírodovedného, technického či ekonomického zamerania.

LITERATÚRA

[1] Bestrová, M.: *Argumentácia a dôkaz pri riešení úloh*. Dizertačná práca. FMFI UK, Bratislava, 2009

[2] Čerňanová, V.: *Osnovy matematiky pre gymnáziá – lineárne alebo špirálové?* In: Zborník z konferencie didZA 2009, Žilina, ISBN 978-80-554-0049-5

[3] Gazdová, Z.: *Didaktická analýza dôkazov*. Dizertačná práca. FMFI UK, Bratislava, 2010

[4] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN Bratislava, 1989, ISBN 80-08-00014-7

[5] http://www.statpedu.sk/files/documents/katalog%20cielovych%20poziadaviek /matematika_cp.pdf

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Ústav informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita
Ilkovičova 3
SK – 812 19 Bratislava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

THE RESEARCH ON SOLVING BY PUPILS MATHEMATICAL TASKS

CZAPLIŃSKI ADAM, MAJOR JOANNA, MAJOR MACIEJ

ABSTRACT. The theme of this paper are selected issues concerning the pupils work on nonstandard mathematical tasks.

The essence of mathematics, understood as a field of human activity is to solve a task. Mathematics is seen here as a science, which developed in the course of working on tasks, subjectively new definitions and theorems. The same mathematical concepts are constructed. In the course of defining terms, formulating and proving theorems about them appears a question: *What is something like*? This is a somewhat static view of mathematics. At the same time you can ask yourself: *How is it done*? The second one, a dynamic perspective on notions and mathematical reasoning, is often combined with an algorithmic approach to solving tasks and mathematical problems.

In the mathematics we should distinguish two aspects: algorithmic and conceptual. Both aspects seem to be equally important in teaching mathematics. The first is associated with having clear procedures leading with 100% certainty to achieving a specific result, the second is a heuristic.

Conceptual presentation characterize the attitude of mind solving a certain problem on the global orientation in a situation on operating a notion as a whole, without a tendency to breaking it into elements. It is typical to search for some interpretation, a picture, there occur attempts to present a studied situation in a certain model (Filip, Rams, 2000).

The theme of this paper are selected issues concerning pupils' work on nonstandard mathematical tasks. Pupils were placed in an untypical situation for them. It was suggested that they would work on tasks that mathematical layer was associated with Pigeonhole principle. Both the content itself and the application of the rule are not covered in the school curriculum.

Topics of tasks and their solutions in the mathematical layer were connected with the intuitive use by school students of that principle. Pigeonhole principle was the basis for designing tasks that reveal interesting facts about the students work on mathematical tasks. So it was interesting for us to see what methods of solving pupils chose and what argument they opted for measures in situations in which they couldn't solve the tasks in an algorithmic way. Research method was an analysis of written pupils' work. The study was conducted in the 2009/2010 school year in three high school classes (2 class). Pupils of two classes attended school in Staszów, other pupils learnt in Kraków. A total of 60 pupils participated in the study. Pupils attained average results in science. The questionnaire research consisted of eight math problems. In this paper we present and discuss selected ones. Here are the selected three tasks.

1. Eight people got into a lift in a 6 floor block. Is it possible that each of the passengers get off a different floor?
2. A group of 10 people greeted shaking hands. Are in this group of people at least two people who shook hand with the same number of people? Explain your answer.
3. In one classroom there are 40 students. Are among them four pupils celebrating

birthdays in the same month? Explain your answer.

Last task of the questionnaire was:

4. Formulate principle that allowed you to solve each task.

Its aim was to inspire pupils to reflect on solutions to the previous tasks. Analyzing the solutions of the first task it must be noted that 20 pupils did not attempt to solve the problem. Many pupils (7 respondents) indicated that the answer to the question formulated in the content of the task was *yes*. Pupils gave additional conditions that were not included in the content of the task, such as *one person got off on the ground floor and one on the roof*. Of course, with such assumptions, although they are contrary to reality, the given answer is correct. Some respondents answered that the situation described in the text of the task couldn't happen, *because there are fewer floors than people (12 people) or there are more people than the floors (11 people)*. It should be mentioned that only one person gave the correct answer, based on the figure, the solution of a task[7].

Some respondents gave answers indicating a negligence in the process of solving tasks of certain conditions set out in the contents of tasks:

- Yes, the situation is possible, they 2 persons will get off at the same time,
- $10-8=2$, 2 people can get off on the same floor[8],
- it can happen then get off the lift and in the lift two people will be left[9].

Analyzing the solution of task 2 it must be noted that the eight respondents reported the answer 'yes' or 'no' without a justification. The study revealed that many pupils (25 people) rely on not mentioned assumption in the task that each person greats remaining 9 people. Here is an example statement of a pupil: *Yes, because everyone shakes hands with everyone except himself, that is greets nine persons.* However, in four works a following statement is given: *If everyone shakes hand with everyone, everyone will shake hands with 9 people.* The application in the form of a conditional expression may indicate that respondents notice the fact that additional assumption in the body was not formulated. Those pupils obtained a partial solution to the task. It is worth paying attention to the dual interpretation of the respondents' content tasks. Approximately 40% of the respondents stated that *if anyone shakes hands with 9 people so in particular they greet 2 people.* Remaining people think differently - if someone greets 9 people, they don't greet 2 people.

Some respondents participating in research concluded from this fact that person A greets person B so A and B have the same number of friends.

Here is what one of the pupils wrote: *If two people are greeted, they have the same number of friends.*

Often, the procedure performed by the respondents was to perform operations $10:2=5$, and then conclude that 5 people shook hand with the same number of people. One can assume that these 7 students tried to „at all costs" use numerical data included in the content of the task. These people tried to execute an operation on numbers that appeared in the content of the task and close the solution of the problem within the framework of the algorithm: Perform actions on numbers occurring in the contented the task and give an answer to the question included in the content of the task. There was also

[7]Examined wrote numbers of floors and indicated (with arrows), "the deployment" of people (marked by dots) on each floor.

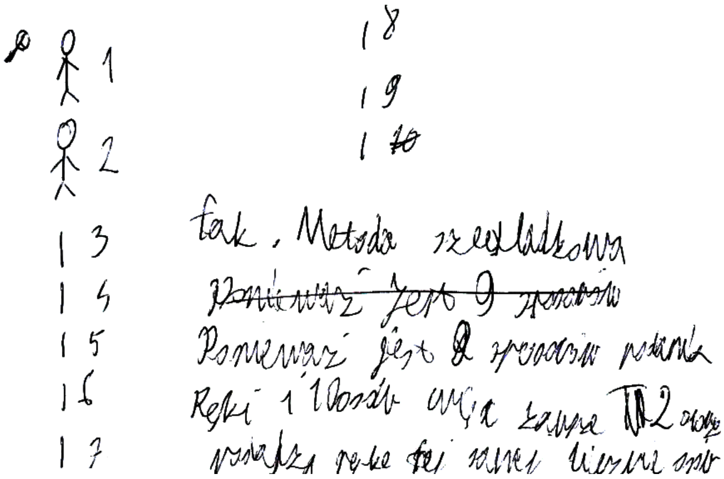
[8]The solution given by 8 people.

[9]The solution given by one person.

a solution in which the question is: Are *in this group at least two people who shook hands with the same number of people* identified with the question: Are *in this group of people at least two people who shook hands with the same person*. In one solution, the information appears: *The situation of the task is possible if someone forgets who one greeted.*

It is also worth noting wrong reasoning of two persons, who indicated that the situation described in the content of the task couldn't happen. Pupils argued the answer in the following way: it cannot *happen that someone will greet 10 people, because he would greet himself*. It can be assumed that respondents concluded that the task had a condition where the number of people was identical with the number of handshakes made by one person.

In the case of this task one solution occurred, in which the examined presented a reasoning, which used the Pigeonhole principle. Here is the solution.



Referring to the solutions of task 3 it should be noted that very many people gave the following answer: *No, because there would have to be 48 people in the class.* The vast majority of remaining answers shows the developed probabilistic thinking in students.

Here are the statements of the respondents.

- This is possible because it might happen that we were all born in the same month, and maybe, for example 40 people in January, etc.;
- Yes, because in the world there are a lot of people, lots of classes, and 365 days a year and 12 months, so sooner or later it will happen that in a grup of 40 persons there are students who were born in the same month;
- I think that with so many pupils more birthdays in the classroom may happen;
- Yes, in each class there may be as many as 15 people having birthday in the same month;
- This is a stupid question, because we do not know the dates of birth, and yet in one month up to 40 people could be born ;
- It is impossible to calculate, because everyone can be born in the same month;
- It is possible but not certain;
- Everything is possible.

These statements show that respondents notice the fact that under identical conditions different phenomena may occur. In other words, their statements show non-deterministic perception of reality. Simultaneously, studies reveal the difficulties of lack of understanding of the situation in the task. Some students interpreted the conditions in task as if they were about the fact that 4 people were born in the same established month.

Quite a large group of people at work on task 3 made mathematical operations such as: $\frac{12}{40}=30\%$; $\frac{12\cdot 100}{40}=\frac{1200}{40}$; $\frac{12\cdot 100\%}{40}=30\%$; *Yes,* $40:12=36$ *r* 4; $\frac{1}{12}\cdot 40=\frac{40}{12}=3\frac{4}{12}$

and this completed the task. Only about 10% of them tried to interpret the result. Here are the examples of pupils' answers.

- Yes, I think, that among these 40 people four persons have birthday in the same month. We have 12 months $40:12=3\frac{4}{12}=3\frac{1}{3}$ resulted in more than 3, *so in one month, four people were born*;
- Not because the 36 remaining 4, so only 3 people were born in the same month.

The solutions presented by this group pupils show that people inextricably link the performance of tasks certain operations on numbers occurring in the content the task. The argument behind this rationale is the fact that about 90% of the students when working on other tasks acted similarly.

It is also worth noting that in the case of solutions of this task statements appeared to indicate the intuitive use by the respondents Pigeonhole principle. Here are the statements.

- *Yes, it may be because 12 months* $\cdot 3=36$ *months* $40-36=4$. *If the class counts 3 students who were born in every month, there will be 4 students who were born from January to April.*
- *Yes, because there are not many months to a maximum of 3 where each had a birthday.*
- *Yes, because there are much more than 36 pupils, so it means that there must be at least 4 students who celebrate birthdays in the same month.*

In conclusion the research revealed a lot of different interpretations of the contents of tasks, both for the semantic layer and mathematical one. The variety of tasks in the semantic layer, the tasks associated with content describing the situations of the surrounding reality and the world of mathematics, influenced negatively on the respondents noticing the similarity of tasks with regard to their mathematical layer. Many respondents (19 people) did not attempt to solve the last task of the questionnaire study, moreover 5 people reported answer; *I don't know.* 11 people said, *there is no such rule*. It is also worth mentioning the statements of the respondents which, although not related to the tasks of the questionnaire study, characterized the work of all mathematical tasks:

- *to solve the tasks where you need to think* (one person);
- *think logically and take everything in mind* (two persons);
- use you own knowledge and skills (one person).

Respondents attempting to address the common structure of mathematical tasks indicated the following relationships:

- *use of formulas for division, multiplication, addition* (8 persons);
- *Put the balls into boxes in one boxthere will be at least 2 balls* (1 person).

It is worth noting that one of the respondents knew the meaning of the Pigeonhole principle. The results also indicate to the vast majority of low skills in the skills of the tested including one trick mind situation described in the text of the task, and so the ability to conduct conceptual reasoning.

The results indicate a strong tendency of learners to solving the task by bringing the text to perform certain mathematical operations associated with the numbers appearing in the content of the task. Such conduct reflects an attempt to solve the task algorithmic of the process and linking it with the performance of arithmetic operations. This is confirmed by our interviewees sometimes involved in the tasks of the questionnaire study, e.g. *I do not know how to calculate, I can not arrange activities; I do not know what to calculate*. We can assume that the work on content analysis of job tasks, including mathematical analysis of its structure is summarized by the pupils to a minimum. It consists most likely in capturing by the pupils numerical data appearing in the content of the task, and the next phase of work on the task of data manipulation. According to the task of resolving it allows to obtain answers to the task.

A lot of empty works shows the helplessness of respondents to the tasks that are not algorithmic. Inability to see any common structure of tasks may result from both the gaps in knowledge and skills in mathematics, as well as in low maturity of students to conduct conceptual reasoning, and for those students who solved the task and did not answer the question contained in the task 4 the lack of reflection on the solution of individual tasks (*no backward glance*). Respondents who worked on particular tasks often had no need *to look forward* that is seeking similar tasks due to the data system and method of solution. There were situations in which the examined solved several of tasks intuitively using the Pigeonhole principle and others did not. It should be noted that much better results were achieved in case of individual pupils to solve problems that refer to reality, than those purely mathematical. Some pupils are creative when working on tasks that describe issues related to everyday life.

Statements given by the tested suggest that some of these situations as described in the text of the task compare with their own life experiences. Even sometimes they directly affect them. Statements indicate that some subjects treat the task as a presentation of some aspects of life, which introduces the discussion on the subject. The tendency described here was indicated in task 3.

Research also indicates that some pupils use in working on tasks the concept of function, including constructing the mutually unambiguous mapping. These few solutions show in our opinion a large exceeding the average, mathematical maturity in this area.

It can be concluded that a failure to attempt to solve particular task and observe pupils' difficulties when working on atypical tasks corresponds to the results of PISA research concerning knowledge and skills of Polish 15 years-olds (see Dąbrowski, 2008).

REFERENCES

[1] Dąbrowski M., *Pozwólmy dzieciom myśleć, o umiejętnościach matematycznyc polskich trzecioklasistów*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa, 2008.

[2] Filip J., Rams T., *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza ,,Impuls", Kraków, 2000.

[3] Górnicki J., *Okruchy matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009.

[4] Nowik J., *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo Nowik, Opole, 2009.

[5] Polya G., *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009.

[6] Treliński G., *Kształcenie matematyczne w klasach początkowych*, Kielce, 1995.

Adam Czapliński, Joanna Major, Maciej Major
Institute of Mathematics
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2
PL – 30-084 Cracow
e-mail: czaplinski.adam@gmail.com
e-mail: jmajor@up.krakow.pl
e-mail: mmajor@up.krakow.pl

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

NOVÉ MOŽNOSTI MOTIVÁCIE – SKÚSENOSTI S POUŽÍVANÍM SYSTÉMU WEBWORK

ZOLTÁN FEHÉR

ABSTRACT. This contribution deals with the importance of application of homework problems and use of ICT in educational process. Our experiences show that the WeBWorK homework system supports learning activities, encourages self-activity of students. We present the statistical analysis outcomes of results on homework problems solutions and student examinations.

Úvod

Sme svedkami neustáleho rozvoja informačných technológií vo všetkých oblastiach života a je samozrejmé, že sa to objaví v rôznych formách aj v školskom prostredí. Odráža sa v zavedení nových metód vzdelávania, čo prináša stále nové možnosti pre účastníkov vyučovacieho procesu. Informačné a komunikačné technológie môžeme využiť v rôznych fázach pedagogickej práce a je veľa spôsobov ako ich implementovať do výučby. Jedna z týchto možností je uskutočnenie riešenia a vyhodnotenia domácich úloh v elektronickej forme.

Na vysokých školách študenti absolvujú štúdium obvykle v rámci prednášok a seminárov. S frontálnou metódou vyučovania, ktorá sa väčšinou uplatňuje aj v prípade matematických predmetov, často súvisí aj nízka samostatná aktivita študentov. Akými metódami by sme mohli zvýšiť aktívny prístup študentov? Ako motivovať na priebežnú prácu počas celého semestra? Okrem pravidelných písomných testov priebežnú aktivitu študentov môže podporovať aj zavedenie domácich úloh. Motiváciou pre študenta môže byť získanie bodov do záverečného hodnotenia (skúška).

V tomto príspevku sme naše skúmanie zamerali na dve hlavné otázky:

I. Samostatná práca študentov – v našom prípade vypracovanie domácich úloh – ako ovplyvňuje študijné výsledky? Chceme zistiť, či väčší počet bodov získaných z domácich úloh zlepšili aj priemerné študijné výsledky t.j. hodnotenie skúšky. Môžeme predpokladať závislosť študijných výsledkov od úspešnosti riešenia domácich úloh?
II. Študenti počas semestra (ne)pracujú pravidelne. Sledovaním postupu študentov v riešení domácich úloh chceme získať prehľad o pravidelnosti ich študijnej činnosti.

O používaní systému WeBWorK

Na Ekonomickej fakulte Univerzity J. Selyeho v Komárne používanie systému *WeBWorK* na realizáciu domácich úloh sa zaviedlo v školskom roku 2008/2009 zásluhou Józsefa Bukora z Katedry matematiky a informatiky.

Príspevok vznikol v rámci grantu MŠ SR KEGA č. 001UJS-4/2011.

WeBWorK[1] je interaktívny systém na sprístupnenie individualizovaných domácich úloh z matematiky prostredníctvom internetu. Systém WeBWorK vytvorili a vyvíjali od roku 1995 dvaja profesori Katedry matematiky z University of Rochester (štát New York, USA), *Arnold Pizer* a *Michael Gage*. Ako je to uvedené v predstavení WeBWorK-u, systém rozšíri možnosti vyučovacieho procesu v niekoľkých smeroch. WeBWorK poskytne študentom okamžitú spätnú väzbu o správnosti výsledku úlohy a v prípade nesprávnej odpovede majú viac pokusov na opravu. Domáce úlohy sú individualizované, každý študent po prihlásení pracuje na vlastnej sade úloh. WeBWorK je voľne dostupný na používanie.

V školskom roku 2010/2011 možnosť vypracovať domáce úlohy prostredníctvom WeBWorK-u mali študenti Ekonomickej fakulty z troch matematických predmetov v 1. a 2. ročníku bakalárskeho štúdia. Hlavným cieľom zavedenia WeBWorK-u bolo podnecovať aktívny prístup k štúdiu s tým, že ponúka študentom úlohy na precvičovanie učiva zo seminárov, dáva príležitosť na získanie bodov do záverečného hodnotenia a v neposlednom rade ich prinúti k pravidelnej práci. Študenti mohli získať maximálne 10% bodov do záverečného hodnotenia, ale riešenie úloh nebolo povinné. To nám dáva možnosť presvedčiť sa o vhodnosti nášho spôsobu motivácie študentov.

Úlohy sprístupnené na WeBWorK-u boli pripravené v súlade s učivom daných predmetov, v prvom ročníku boli zaradené aj úlohy na opakovanie stredoškolského učiva. Naše kurzy sú dostupné na webovej adrese http://www.mat-inf.fpv.ukf.sk/webwork2 pod názvami SJEGTK a UJS_SJE. Študenti sa prihlasujú do systému vlastným heslom z ľubovolného miesta, kde majú prístup na internet. Systém každému užívateľovi vygeneruje individuálnu sadu úloh tak, že počet úloh aj zadanie jednotlivých úloh bude totožný pre každého, zmenia sa číselné údaje. Každá úloha je vytvorená tak, aby obsahoval aspoň jeden parameter, ktorý nadobúda náhodné hodnoty z daného intervalu alebo z množiny. Individualizácia je jedna z hlavných výhod WeBWorK-u. Ďalšie výhody sú dostupnosť, prehľadnosť, podporovanie samostatnej práce, okamžitá spätná väzba. Pre učiteľa ponúka jednoduché vytvorenie a modifikovanie úloh, priebežný prehľad práce študentov a vyhodnotenie úspešnosti riešenia. Hlavná nevýhoda je možnosť zneužitia prihlásenia, tiež sa nedá kontrolovať samostatnosť riešenia. Formulácia niektorých úloh dáva príležitosť na tipovanie výsledku, alebo riešenie metódou pokus-omyl.

Metodika spracovania údajov

Základné súbory pozorovania tvorili študenti 1. ročníka bakalárskeho štúdia v zimnom a letnom semestri, a študenti 2. ročníka v zimnom semestri školského roka 2010/2011. Na skupinách týchto študentov sme sledovali študijné výsledky (hodnotenie skúšky) a tiež výsledné skóre v riešení domácich úloh (ďalej len DÚ).

Výsledky študentov pre našu analýzu sme zaznamenali v spojení s disciplínami MAT1, MAT2 a MAT3 a k nimi patriacimi sadami domácich úloh. Uvedieme stručný popis predmetov, čo korešponduje aj s obsahom DÚ. Predmet MAT1 (1.roč/z.sem.) je zameraný na matematickú analýzu, na vyšetrenie priebehu funkcie, na deriváciu, integrál a ich aplikácie. Prvú časť predmetu MAT2 (1.roč/l.sem.) tvorí lineárna algebra, matice, determinanty a riešenie sústavy lineárnych rovníc. Druhá časť je venovaná funkciám viac premenných, obsahuje úlohy na parciálne derivácie a ich aplikácie, lokálne a globálne

[1] http://webwork.maa.org/wiki/Introduction

extrémy. Základ učiva MAT3 (2.roč/z.sem.) tvorí výpočet pravdepodobnosti, základné typy rozdelení náhodnej premennej a ich charakteristiky.

Predmet	Počet študentov	Počet domácich úloh
MAT1	208	83
MAT2	170	122
MAT3	146	103

Tabuľka 1: Prehľad celkového počtu študentov a domácich úloh

Pre jednotlivé predmety boli vypracované sady úloh s uvedeným počtom (pozri tab.1). Sady úloh boli zvyčajne rozdelené podľa obsahu úloh do 2 – 4 častí, a boli sprístupnené študentom na internete s vopred stanoveným termínom ukončenia. Vyhodnotenie úloh a vytvorenie štatistických výstupov patrí do základných funkcií WeBWorK-u. Systém vypočíta výsledné skóre každého študenta (štandardne 1 úloha = 1 bod), skóre uvedie aj v percentách, a výsledky sa exportujú napr. do súboru Excel. Študijné výsledky jednotlivých ročníkov pochádzajú z Akademického informačného systému univerzity. Pre výpočty sme používali numerické hodnoty klasifikačnej stupnice (A = 1; B = 1,5; C = 2; D = 2,5; E = 3; FX = 4).

Na analýzu štatistických súborov budeme používať základnú popisnú štatistiku, na vyšetrenie závislostí sa použijú metódy korelačnej analýzy a lineárnej regresie [1].

Štatistické vyhodnotenie údajov

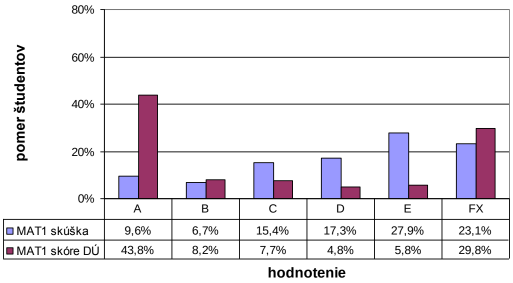
Základné charakteristiky sme zhrnuli do tabuľky 2.

predmet	Priemer 1 (hodn. skúšky)	Smer. odch. 1 (hodn. skúšky)	Priemer 2 (skóre DÚ %)	Smer. odch. 2 (skóre DÚ %)
MAT1	2,70	0,93	67,01	36,02
MAT2	2,57	0,70	75,00	32,63
MAT3	2,70	0,82	33,74	31,23

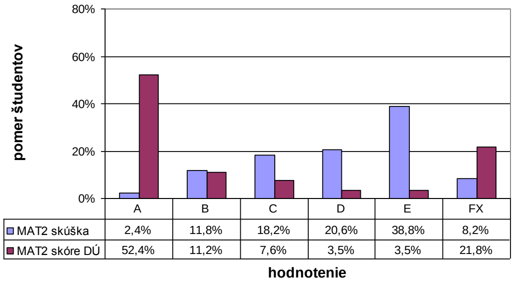
Tabuľka 2.

Najlepší výsledok dosiahli študenti skupiny MAT2: priemerne 2,57 resp. 75,0%. Zistili sme aj počet študentov úspešných na 1. termín skúšky: v skupine MAT2 je 111 (65,3%), v skupine MAT3 je 90 (61,6%). Pre skupinu MAT1 nemáme údaje.

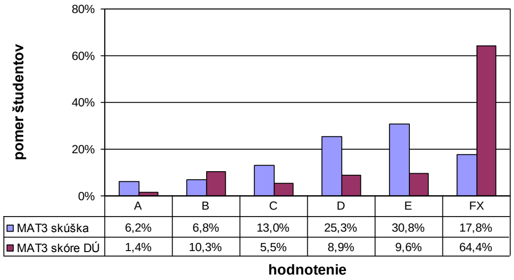
Ďalej sme spravili histogramy rozdelenia študijných výsledkov (obrázok 1a, 1b, 1c). Pre lepšie porovnanie troch rozdelení uvádzame relatívnu početnosť študentov. Do obrázkov sme pridali aj druhý rad stĺpcov, rozdelenie hodnotenia podľa skóre DÚ, s cieľom porovnať jednotlivé rozdelenia. Skóre DÚ sme rozdelili do 6 intervalov, podobne ako sa hodnotí skúška podľa klasifikačnej stupnice, teda úspešnosť 0-50% je FX, od 50% do 100% je hodnotené postupne od E do A.



Obrázok 1a: Rozdelenie hodnotenia MAT1



Obrázok 1b: Rozdelenie hodnotenia MAT2



Obrázok 1c: Rozdelenie hodnotenia MAT3

Pre každý predmet platí, že približne polovica študentov získalo hodnotenie skúšky od A do D. V rozdelení podľa skóre DÚ v prvom ročníku (t.j. MAT1 a MAT2) je rovnako najvyšší počet študentov s výborným hodnotením (A) 43,8% a 52,4%, ale tiež vysoký počet malo hodnotenie FX. V druhom ročníku (MAT3) až 64,4% študentov splnilo DÚ pod 50%-nou hranicou.

Ďalšia časť nášho vyšetrenia je zameraná na zistenie závislosti hodnotenia skúšky od skóre DÚ. Spravili sme intervalové triedenie, skóre DÚ sme rozdelili do 5 rovnomerných intervalov dĺžky 20%. Potom sme vypočítali priemerný študijný výsledok študentov podľa intervalov. Výsledky sú uvedené v tabuľke 3.

Intervaly	0 – 20%	20 – 40%	40 – 60%	60 – 80%	80% - 100%
MAT1-priemer	3,46	3,58	3,13	2,67	2,25
MAT2-priemer	3,39	3,17	3,00	2,68	2,30
MAT3-priemer	3,12	2,87	2,38	1,90	2,32

Tabuľka 3.

Rozdiel priemerov v intervaloch s najnižšou a najväčšou úspešnosťou je 1,21; 1,09 a 0,80. V prípade MAT1 a MAT2 to znamená rozdiel dvoch hodnôt v klasifikačnej stupnici. Vykonali sme regresnú analýzu pre jednotlivé skupiny.

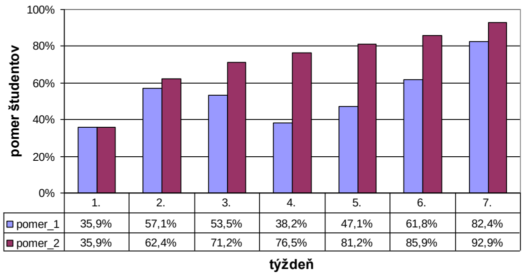
predmet	koef. kor.	koef. α	t	p	koef. β
MAT1	- 0,9473	- 0,0167	- 5,12	0,014	3,854
MAT2	- 0,9876	- 0,0134	- 10,91	0,002	3,577
MAT3	- 0,8426	- 0,0127	- 2,71	0,073	3,154

Tabuľka 4.

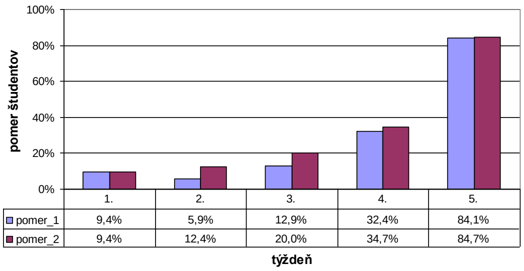
V tabuľke 4. uvádzame koeficient korelácie a koeficienty α, β regresnej priamky (rovnica priamky má tvar $y = \alpha . x + \beta$), ďalej hodnotu *t*-testu pre koeficient α, a *p*-hodnotu *t*-testu.

Pre predmet MAT1 sme zistili rovnicu lineárnej regresie v tvare $y = - 0{,}0167x + 3{,}854$. Pre koeficient $\alpha = - 0{,}0167$ je *p*-hodnota *t*-testu 0,014. Na hladine významnosti 0,05 nulovú hypotézu nezávislosti študijných výsledkov od skóre DÚ zamietame. Môžeme predpokladať lineárnu závislosť, teda o 10% vyššie skóre DÚ spôsobuje v priemere lepší výsledok skúšky o 0,167. Pre predmet MAT2 tiež môžeme potvrdiť existenciu lineárnej závislosti, ale v prípade MAT3 predpoklad nezávislosti študijných výsledkov od skóre DÚ nezamietame (na hladine významnosti 0,05).

Posledným bodom nášho skúmania je sledovanie a vyhodnotenie pravidelnosti samostatnej práce študentov počas semestra na základe riešenia DÚ. Údaje sme zisťovali len v letnom semestri 2010/11 pre predmet MAT2. Z tohto predmetu boli sprístupnené dve sady úloh, prvá časť z lineárnej algebry a druhá časť z funkcie viac premenných. Počas semestra sme každý týždeň zaznamenali aktuálne skóre DÚ od sprístupnenia balíka úloh po ich uzavretie. Určili sme pomer študentov k celkovému počtu 170, ktorí v danom týždni riešili aspoň jednu úlohu (hodnota pomer_1 na obrázkoch 3a, 3b).



Obrázok 3a: MAT2 – lineárna algebra



Obrázok 3b: MAT2 – funkcie viac premenných

Pre porovnanie sme uviedli aj pomer študentov, ktorí mali nenulové celkové skóre v danom týždni od sprístupnenia úloh (na obrázkoch 3a, 3b: pomer_2). V prípade dvoch častí úloh je viditeľný rozdiel v percentuálnom pomere študentov. Prvej časti úloh od začiatku semestra sa venovalo v niektorých týždňoch aj nadpolovičná väčšina študentov, v poslednom siedmom týždni sa zapojilo do riešenia 82,4% študentov. Na riešenie druhej časti úloh bolo k dispozícii päť týždňov, počas tohto obdobia pomerne málo študentov sa venovalo úlohám. O pravidelnosti teda hovoriť nemôžeme, riešenie ponechali na posledný týždeň, kedy 84,1% študentov pracovalo na DÚ. Z hodnoty pomer_2 sa dá zistiť aj týždenné zvýšenie relatívneho počtu nových užívateľov v systéme.

Ďalšia analýza ukázala, že v prvej časti úloh bolo 12 študentov, ktorí každý týždeň skórovali, v druhej časti už len 2. Spočítaním týždňov sme zistili, že každý študent pracoval v priemere 3,76-krát počas sprístupnenia prvej a 1,45-krát počas druhej časti. Ak nezapočítame tých, ktorí domáce úlohy neriešili, tak tento priemer je 4,04 resp. 1,71. Pomer študentov, ktorých pravidelnosť týždenných pokusov je nad priemerom bolo 58,2% (aspoň 4 pokusy) v prvej časti, a 34,7% (aspoň 2 pokusy) v druhej časti úloh. Pokladáme za pozitívny výsledok, že väčšina študentov, ktorí sa zapojili do riešenia sa snažili dosiahnuť maximálne skóre, v prvej časti 71,5% a v druhej časti 59,7% študentov dosiahlo výsledné skóre od 90% do 100%. Celkovo z predmetu MAT2 by podľa skóre DÚ získalo hodnotenie „A-výborne“ 52,4% študentov (pozri *obr.1b*). Úspešnosť zavedenia DÚ potvrdzuje aj to, že v dvoch skupinách 1. ročníka je počet študentov, ktorí sa vôbec nevenovali úlohám pomerne nízke 12,0% a 7,6%. V 2. ročníku je táto hodnota 29,5%.

Záver

Naše skúsenosti s používaním systému WeBWorK potvrdzujú potrebu využívania domácich úloh vo vysokoškolskom vyučovaní aj dôležitosť využitia IKT. Na základe štatistického vyhodnotenia v prípade dvoch sledovaných skupín študentov sme preukázali lineárnu závislosť študijných výsledkov od úspešnosti v riešení domácich úloh, pre študentov 2. ročníka predpoklad lineárnej závislosti sme zamietli. Sledovaním priebežných výsledkov skupiny MAT2 v riešení domácich úloh sme poukázali na významné rozdiely v pravidelnosti práce počas semestra. Pravidelnosť sa dá zistiť len v niektorých prípadoch, väčšina študentov sa venuje štúdiu príležitostne. Do riešenia úloh sa zapojila veľká väčšina študentov, viacerí z nich aj so snahou dosiahnuť maximálne skóre, teda možnosť získania bodov do záverečného hodnotenia dostatočne motivovala študentov. Záverom môžno konštatovať, že nové možnosti ktoré prináša systém WeBWorK pozitívne podporujú študijnú činnosť a podnecujú aktívny prístup k štúdiu.

LITERATÚRA

[1] Lamoš, F., Potocký, R.,: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika – štatistické analýzy*, Bratislava, vydavateľstvo UK, 1998, ISBN 80-223-1262-2.

[2] http://webwork.maa.org

[3] http://webwork.maa.org/wiki/Main_Page

RNDr. Zoltán Fehér, PhD.
Katedra matematiky a informatiky
Ekonomická fakulta
Univerzita J. Selyeho
P.O.Box 54
SK – 945 01 Komárno
e-mail: feherz@selyeuni.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

UČEBNÉ ŠTÝLY A VYUČOVANIE GEOMETRIE U MLADŠÍCH ŽIAKOV

MÁRIA GABAJOVÁ

ABSTRACT. Learning styles are very important for learning and teaching. We can use knowledge of these styles in mathematics lessons and so ensure individual approach for each pupil in this way.

Úvod

Učenie a učenie sa sú zložité procesy ovplyvňované mnohými faktormi. Jedným z najpodstatnejších faktorov je osobnosť človeka. Osobnosť je v odbornej literatúre chápaná ako „*psychologická realita, ktorú tvoria komponenty biologického a sociálneho pôvodu*“ (Kováč, 1985) alebo ako „*súhrn sociálnych rolí alebo vzťahov*“(Drlíková a kol., 1992) či „*súhrn psychických vlastností alebo osobitostí indivídua*“ (Drlíková a kol.,1992). Každý človek je indivíduum so svojimi vlastnosťami, schopnosťami a predpokladmi, preto aj pri učení je vhodné pristupovať ku každému individuálne. V podmienkach školy je však často krát nemožné, aby sa učiteľ venoval len jednému žiakovi. Teda otázka znie, ako zabezpečiť, aby si každý žiak počas hodiny našiel ten svoj najvhodnejší učebný postup alebo povedané inak, aby boli splnené podmienky vyhovujúce učebnému štýlu každého žiaka.

1. Učebné štýly

Každý kto vstupuje do učebného procesu by mal poznať, aký učebný štýl mu vyhovuje. Učebný štýl je definovaný ako „*súbor postupov, ktoré v určitom období jednotlivec preferuje pri učení sa*“ (Turek, 2005). Učebný štýl je istým spôsobom vrodený, ale nadobudnutými skúsenosťami sa môže časom zmeniť alebo jednotlivec začne viac preferovať iný. Učebné štýly sa dajú zistiť pomocou rôznych testov (napríklad v knihe Inovácie v didaktike od Ivana Tureka: príloha F, príloha G) resp. na základe osobných skúseností - či vyhovuje písaný text alebo nakreslený obrázok. Pri mladších žiakoch však nemôžeme chcieť, aby poznali svoj učebný štýl. Navyše pri mladých rozvíjajúcich sa organizmoch sa aj učebné štýly časom môžu zmeniť.

Poznáme niekoľko klasifikácií učebných štýlov v závislosti od typu prevládajúcej inteligencie alebo prevládajúceho zmyslového vnímania, ktoré jedinec preferuje pri prijímaní informácií.

Učebné štýly podľa zmyslových preferencií (Turek, 2005)

a) vizuálny – neverbálny (zrakovo – obrazový): jedinec najlepšie prijíma informácie v obrazovej podobe
b) auditívny (sluchový): človek najlepšie spracováva informácie, ak sú v podobe hovorenej reči a teda využíva hlavne sluch pri prijímaní informácií
c) vizuálny – verbálny (zrakovo-slovný): pri preferovaní tohto učebného štýlu, človek najlepšie prijíma informácie čítaním alebo pozorovaním

Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011

d) kinestetický (pohybový): jedinec sa najlepšie učí, ak môže manipulovať s predmetmi, priamo môže vyrábať niečo, robiť pokusy.

Učebné štýly podľa prevládajúceho typu inteligencie (Blaško, 2011)

Americký psychológ H. Gardner zadefinoval 9 rôznych druhov inteligencií, ktoré tvoria navzájom nezávislé systémy rôznych druhov schopností. Typy inteligencie: jazyková, logicko - matematická, priestorová, hudobná, pohybová, interpersonálna, intrapersonálna, prírodná a existencionálna.

Na základe rešpektovania jednotlivých inteligencií sa vytvorili k nim prislúchajúce učebné štýly:

a) jazykový (lingvistický) učebný štýl: človek sa najlepšie učí čítaním, písaním alebo počúvaním slov
b) logicko – matematický učebný štýl: jedinec prijíma informácie, ak vidí súvislosti, môže experimentovať, hľadať logické prepojenia, nové riešenia, kategorizovať
c) priestorový (vizuálny) učebný štýl: človek sa učí vnímaním farieb, obrazov, grafov, schém, zobrazovaním reálnych predmetov do priemetní, modelovaním objektov
d) pohybový učebný štýl: jedinec preferuje prijímanie informácií vtedy, ak sa môže vecí dotýkať, manipulovať s nimi, riešiť hlavolamy v trojrozmernej podobe, vykonávaním pohybov
e) hudobný (muzikálny) učebný štýl: žiak sa učí najlepšie počúvaním piesní, hudby, v rytmoch alebo pri počúvaní hudby
f) interpersonálny učebný štýl: človek sa najlepšie učí pri práci s inými ľuďmi, ak si môže ujasniť pojmy a vzťahy pri rozhovore s inými, rád spoznáva ľudí, ich vlastnosti
g) intrapersonálny učebný štýl: pri tomto učebnom štýle sa prijímajú najlepšie informácie, ak jednotlivec sa učí vlastným tempom, má pri práci kľud, učí sa najlepšie samostatnou prácou, dávaním si cieľov, hodnotením svojej činnosti
h) prírodný učebný štýl: jedinec sa najlepšie učí v prírodnom prostredí, o rastlinách a zvieratách, rozpoznávaním, triedením a zoskupovaním javov a vecí
i) existencionálny učebný štýl: človek vníma a preferuje klasické hodnoty dobra a krásy, rád diskutuje na témy týkajúce sa spoločnosti, má rád nadhľad, hľadá spojitosť medzi javmi

V škole sa nachádzajú žiaci s rôznymi typmi učebných štýlov. Málokto preferuje len jeden učebný štýl, zvyčajne kombinuje 2 alebo 3 druhy. Učiteľ svojich žiakov niekedy nemusí ani testovať, aby vedel, aký učebný štýl preferujú. Sám vie časom odhadnúť, že jeden žiak má radšej šport, iný logické úlohy a ďalší rád číta knihy. Pre učiteľa by bolo veľmi náročné zostaviť hodinu tak, aby vyhovel každému jednotlivému žiakovi. Čo učiteľ môže spraviť je, že počas hodiny vystrieda viacero učebných štýlov a tým aj zabezpečí ako keby individuálny prístup k jednotlivým žiakom, každý žiak si vo výučbe nájde „to svoje“.

2. Učebné štýly na hodinách geometrie

Pod geometriou si mnohí mladší žiaci predstavujú hlavne rysovanie a tí starší aj počítanie objemov, obsahov a povrchov. Žiaci však s takýmito na prvý pohľad jednoduchými úlohami mávajú problémy. Z našich skúseností, ale aj z niektorých medzinárodných štúdií ako napríklad štúdia TIMSS vyplýva, že žiaci majú pomerne nízku úroveň geometrickej predstavivosti a nie každému z nich vyhovuje štýl práce: „učebnica-pero-papier a slová učiteľa“. Nová školská reforma umožnila učiteľom prispôsobiť si čas aj na jednotlivé tematické celky z matematiky a preto majú viac priestoru na striedanie rôznych učebných štýlov.

Na základnej škole Černyševského sme sa snažili využiť možnosti, ktoré poskytuje nová školská reforma v rámci školskej geometrie a žiakom ukázať tú príjemnú stránku tejto oblasti matematiky. Ukázalo sa, že stačí zmena učebného štýlu a žiaci si dokážu geometriu obľúbiť. Pracovali sme v triedach piatych a štvrtých ročníkov (počty žiakov v tabuľke č.1).

trieda	počet žiakov
4.A	12
4.B	24
5.A	23
5.B	15

Tabuľka 1

Ako pomôcky sme používali na jednotlivých hodinách buď tangram rôznej hrúbky (1mm, 0,5 cm a 0,9 cm) alebo plastelínu a špajle. Téma hodiny bolo oboznámenie sa so základnými geometrickými útvarmi a ich vlastnosťami.

Počas hodiny sme sa zamerali na učebné štýly podľa prevládajúceho typu inteligencie.

Priebeh vyučovacej hodiny: Na začiatku hodiny sme deťom vysvetlili, čím sa budeme zaoberať, spýtali sme sa, aké geometrické útvary poznajú. Deti vymenovali rôzne: štvorec, kocka, kosoštvorec, kváder, guľa, úsečka,..... V ďalšej fáze sme sa opýtali, aký je rozdiel medzi týmito útvarmi. Žiaci odpovedali: „ Kocka je 3D útvar a štvorec 2D útvar.“ „Kocku môžeme chytiť a štvorec iba nakresliť na papier.“ Je zaujímavé, že niektorí žiaci sa zamysleli, či existujú 1D útvary a aj 0D útvary. Za 1D útvar považovali úsečku a priamku a za 0D bod. Spoločne s deťmi sme vytvorili tabuľku (tab. č. 2.) a na základe nej logicky nasledovali otázky, či existujú aj 4D útvary a viac.

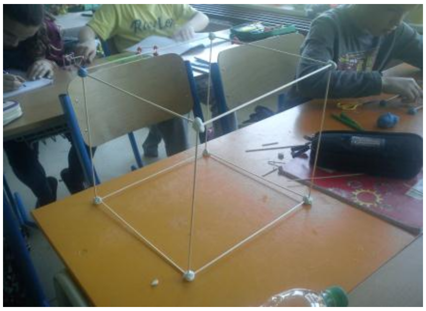
3D útvary	2D útvary	1D útvary	0D útvary
kocka	štvorec	úsečka	bod
guľa	kosoštvorec	priamka	
kváder	obdĺžnik		

Tabuľka 2

V ďalšom kroku sme sa začali s deťmi zamýšľať nad tým, čo je to hrana, stena a vrchol telesa. Využili sme na to dieliky tangramu, ktorý bol upravený. Tangram je považovaný za hlavolam zložený z rovinných geometrických útvarov, ale deti dokážu vnímať aj ich hrúbku a aj takéto útvary považovať za priestorový, pretože podľa nich rovinné útvary sa „nedajú chytiť do ruky“. Diskutovali sme o tom aký je rozdiel medzi priestorovým a rovinným útvarom. Žiaci mali na porovnanie tangramy rôznych hrúbok 0,2 mm, 0,5 cm a 1 cm. Dokonca aj pri tom najtenšom tangramovom dieliku si žiaci dokázali predstaviť, že bočná stena takéhoto dielika má tvar obdĺžnika. Každé dieťa malo pred sebou dieliky tangramu o hrúbke 0,5 cm. Spoločne sme si zobrali dielik tangramu v tvare kvádra a spočítali sme jednotlivé počty hrán, stien a vrcholov, to isté sme urobili pri trojbokom kolmom hranole a štvorbokom kolmom hranole s podstavou kosodĺžnika. Deti si všimli súvislosti medzi počtom hrán podstavy a počtom stien, vrcholov a všetkých hrán:

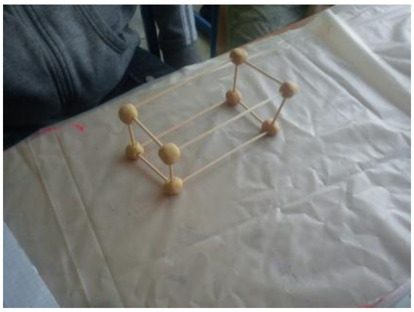
počet hrán telesa = počet hrán podstavy × 3
počet stien telesa = počet hrán podstavy + 2
počet vrcholov telesa = počet hrán podstavy × 2

Opýtali sme sa koľko stien, vrcholov a hrán by mal útvar s podstavou päťuholníka, šesť uholníka, 20-uholníka a žiaci si už dokázali postupne odvodiť správne odpovede, bez toho, aby museli vidieť daný útvar alebo aby ho mali nakreslený. Keď sme dospeli k telesu s podstavou 100-uholníka, žiaci sami odpovedali, že vlastne sa už začína podobať podstava na kruh a teleso na valec.
Potom sme dali vytvoriť deťom z plastelíny a špajlí kocku. Vedeli, že špajle musia byť rovnako dlhé a guľôčok z plastelíny potrebujú 8. Niektorý vykrikovali: „Tie paličky sú vlastne hrany a plastelína vrcholy.“ (obr. č.1)

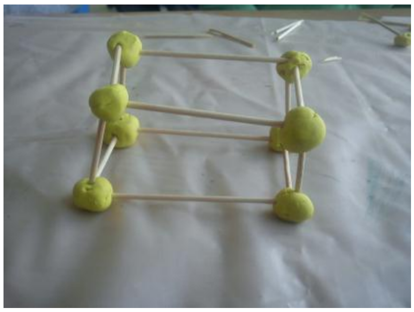


Obrázok 1

Kocku zvládli žiaci pomerne rýchlo. Ďalšie teleso, ktoré postavili, bol kváder. Tu však boli problémy, pretože deti nevedeli, ako vlastne majú začať. Tak sme sa opýtali, aký tvar majú steny kvádra. Odpoveď: „obdĺžnik“. Spýtali sme sa, či v triede môžu nájsť niečo podobné kvádru: „skriňa, kniha,...“ Postupne deti vytvorili kvádre (obr. č. 2), aj keď niektoré neboli celkom presné (obr. č. 3).

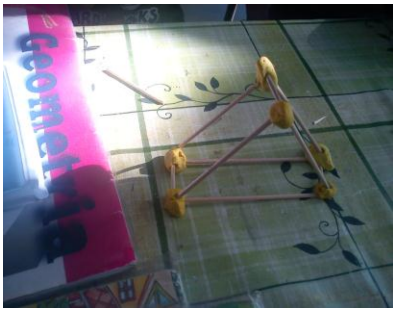


Obrázok 2

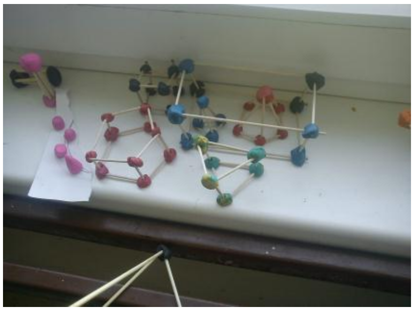


Obrázok 3

Neskôr na ďalších hodinách si vytvorili trojboký hranol (obr. č.4), ihlan a potom už podľa fantázie tvorili ďalšie trojrozmerné geometrické útvary. (obr. č. 5)



Obrázok 4



Obrázok 5

Jazykový učebný štýl: Tento učebný štýl sa využíva na hodinách najčastejšie. Učiteľ opisuje javy, predmety a vzťahy medzi nimi. Žiaci používajú učebnice a píšu do zošitov. U žiakov sme ho však využili hlavne pri kladení otázok a slovnom opise telies, pri argumentácii, ako dospeli k záverom o počte hrán, stien a vrcholov telies.

Matematicko-logický učebný štýl: Uplatnili sme ho pri odvodzovaní počtu hrán, stien a vrcholov telies, teda zostavili akýsi jednoduchý vzorec. Určili vzájomné vzťahy jednotlivých prvkov telesa. Precvičili si počítanie z pamäti. Kategorizovali jednotlivé geometrické útvary.

Priestorový učebný štýl: Uplatnili sme ho, keď si žiaci museli predstaviť kolmý hranol s podstavou 5 a viac uholníka, pri používaní jednotlivých dielikov tangramu predstavujúceho rôzne geometrické útvary, tvorení geometrických telies.

Pohybový učebný štýl: Deti vytvárali reálne modely a bolo vidieť, že im chýba istá manuálna zručnosť, pretože takýchto aktivít majú na hodinách pomerne málo. Môžeme im zadať rôzne hlavolamy ako napríklad, ako postaviť zo 6 rovnakých paličiek 4 trojuholníky. Môžu si telesá otáčať z rôznych strán.

Interpersonálny učebný štýl: Niektoré deti prirodzene začali spolupracovať vo dvojiciach, ujasňovali si jednotlivé parametre telies, porovnávali si dĺžky. Pri tvorbe telies z našich skúseností je vhodné vytvárať maximálne dvojice, pri väčšom počte žiakov v skupinke sa už deti začínajú nudiť, pretože nič nerobia a spoliehajú sa na druhých. Treba však dávať pozor aj pri výbere vhodnej dvojice, aby jedno dieťa sa len nečinne neprizeralo. Veľmi pekné útvary dokážu vyrobiť, aj keď je dvojica vytvorená z dvoch menej zručných žiakov, pokiaľ obidvaja radi spolupracujú s druhými. Deti si môžu vzájomne pomáhať, vysvetľovať.

Intrapersonálny učebný štýl: Deti si samé môžu určiť, ako budú postupovať pri plánovaní vytvorenia telesa, zhodnotiť, či boli úspešné alebo nie, môžu samostatne pracovať, pretože každé má vlastné pomôcky a nie je odkázané čakať na druhých.

Prírodný učebný štýl: Na hodine sme ho síce nestihli využiť, ale môžeme poukázať na spojitosť prírody a pravidelných geometrických telies napríklad v soli je pravidelná kryštalická mriežka tvaru kvádra, kremík, ktorý má tiež pravidelnú kryštalickú mriežku a môžeme v tejto mriežke vidieť pravidelné geometrické útvary, sa využíva v počítačoch a podobne. Môže sa podporiť diskusia o ochrane životného prostredia.

Existencionálny učebný štýl: Tu sa uplatnil pri hľadaní vzájomných súvislostí medzi jednotlivými telesami, že pokiaľ je podstava štvoruholník, tak tie počty jednotlivých prvkov budú rovnaké. Môžeme podiskutovať s deťmi, ako by to asi vyzeralo pri štvorrozmerozmernom alebo viacrozmernom priestore, ako môže byť bod bezrozmerný, o nekonečnosti úsečky, nekonečnosti vesmíru.

Deti boli počas hodiny sústredené a z ich reakcií „takáto matematika sa mi páči“ bolo jasné, že hoci to na prvý pohľad môže vyzerať ako hranie sa, chápu to ako súčasť matematiky. Pani učiteľky boli samé prekvapené ako sa deti, ktoré sú zvyčajne označované ako hyperaktívne, sústredili pri vytváraní telies. Práve deťom, u ktorých je prevládajúca pohybová inteligencia, vyhovovalo, že môžu urobiť niečo iné ako len písať, čítať a počúvať. Deti si mohli lepšie uvedomiť súvislosti a vzťahy pri poznávaní telies, pretože každý si našiel ten svoj spôsob, ktorý mu pri prijímaní informácií vyhovoval.

Záver

Zaradiť rôzne učebné štýly do vyučovacieho procesu nie je náročné, ale vyžaduje si to od pedagóga schopnosť správne a pohotovo reagovať . Je nutné si uvedomiť, čo charakterizuje jednotlivé učebné štýly a ako ich správne používať. Ak na hodine učiteľ strieda vysvetľovanie s kladením otázok a s praktickými cvičeniami, to ešte neznamená, že používa rôzne učebné štýly. Rozdelenie detí do skupín nemusí byť rozvíjanie interpersonálnej inteligencie a podobne aj prinesenie jedného modelu telesa ešte neznamená rozvíjanie priestorovej či pohybovej inteligencie.

Správnym a vhodným zaradením učebných štýlov do vyučovacích hodín môže učiteľ výrazným spôsobom podporiť rozvíjanie rôznych druhov inteligencie u žiakov. Vhodnou kombináciou štýlov zároveň umožní žiakom prijímať a spracovávať informácie spôsobom, ktorý je pre nich vhodný a väčšina žiakov si tak dokáže nájsť individuálnu cestu k práve preberanému učivu.

LITERATÚRA

[1] Blaško, M.: *Úvod do modernej didaktiky I.*, Košice, Katedra inžinierskej pedagogiky Technická univerzita, 2011, http://web.tuke.sk/kip/main.php?om=1300&res=low&menu=1310

[2] Drlíková, E. a kol.: *Učiteľská psychológia*, Bratislava, SPN, 1992, ISBN 80-08-00433-9

[3] Turek, I.: *Inovácie v didaktike*, Bratislava, Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, 2005, ISBN 80-8052-230-8

Mgr. Mária Gabajová
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina.
842 48 Bratislava
e-mail: gabajova@fmph.uniba.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ON CONVERGENCE WITH A FIXED REGULATOR IN RIESZ GROUPS

MILAN JASEM

ABSTRACT. In this paper the notion of a convergence with a fixed regulator in Riesz groups is introduced and basic properties of this convergence in isolated abelian Riesz groups are established. Further, Cauchy sequences in isolated abelian Riesz groups are investigated. Obtained results generalize some assertions on lattice ordered groups.

Introduction

Luxemburg and Zaanen introduced notions of a u-uniform convergence and of a relatively uniform convergence of sequences in vector lattices in [11]. Such type of convergence under the name of convergence with a regulator has been also investigated by Vulikh [16] and Veksler [15]. In this type of convergence different sequences can have different regulators. Černák and Lihová [4] and Černák [1] investigated convergence with one fixed regulator for all sequences in Archimedean lattice ordered group. Related notions for MV-algebras were studied in [2]. Relatively uniform convergence in Archimedean lattice ordered groups was dealt with by Černák and Lihová [5], Černák and Jakubík [3], Jakubík and Černák [8] and Martinez [12]. Riesz groups lie very closely to lattice ordered groups. They were investigated by Fuchs [6], Teller [14], Rachůnek [13] and by the author [9].

Preliminaries

We review some notions and notations used in the paper.

Let G be a partially ordered group (notation po-group). The group operation will be written additively. Hence, throughout this paper 0 will denote a zero element.

We denote $G^+ = \{x \in G;\ x \geq 0\}$.

If $A \subseteq G$, then we denote by $U(A)$ and $L(A)$ the set of all upper bounds and the set of all lower bounds of the set A in G, respectively.

For $A = \{a_1, ..., a_n\}$ we shall write $U(a_1, ..., a_n)$ ($L(a_1, ..., a_n)$) instead of $U(\{a_1, ..., a_n\})$, ($L(\{a_1, ..., a_n\})$).

If $A_1, ..., A_n \subseteq G$, then $A_1 + ... + A_n = \{a_1 + ... + a_n;\ a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\}$.

If $A_1 = ... = A_n = A$, then we set $nA = A_1 + ... + A_n$.

A po-group G is called directed if $U(x,y) \neq \emptyset$, $L(x,y) \neq \emptyset$ for each $x, y \in G$.

A Riesz group is any po-group G which is directed and satisfies the Riesz interpolation property, i. e., for each $a_i, b_j \in G$, $(i, j = 1, 2)$ such that $a_i \leq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ there exists $c \in G$ such that $a_i \leq c \leq b_j$ $(i, j = 1, 2)$.

For basic properties of Riesz groups see Fuchs [7].

We use N for the set of all positive integers.

A po-group G is called isolated if $a \in G$ and $na \geq 0$ for some $n \in N$ implies $a \geq 0$.

Support of Slovak Vega Grants 1/0198/09 and 1/0071/09 is acknowledged.

Let G be a po-group. An element $a \in G^+$ is said to be Archimedean if, whenever
$b \in G^+$ and $nb \leq a$ for each $n \in N$, then $b = 0$.

The absolute value $|x|$ of an element x of a lattice ordered group is defined by $|x| = -x \vee x$.

The absolute value $|x|$ of an element x of a Riesz group is defined by $|x| = U(x, -x)$. We review some properties of absolute value in Riesz groups.

The following assertions hold for any elements x, y of an isolated Riesz group H and any $n \in N$ (see [7, p. 160]).

(P_1) $|x| \subseteq U(0)$,
(P_2) $|x| = |-x|$,
(P_3) $n|x| = |nx|$,
(P_4) if H is abelian, then $|x| + |y| \subseteq |x + y|$.

For any isolated abelian Riesz group H the following statements are valid for each x, y $\in H$, $m, n \in N$ (see [10, p. 132]).

(P_5) If $m \leq n$, then $n|x| \subseteq m|x|$.
(P_6) If $y \in n|x|$, then there exists $z \in |x|$ such that $nz \leq y$.

We will also need the following assertions concerning Riesz groups:

(A_1) Let H be a Riesz group, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in H$. Then
$U(a_1, \ldots, a_n) + U(b_1, \ldots, b_m) = U(a_1 + b_1, \ldots, a_1 + b_m, \ldots, a_n + b_m)$ [7, p. 157].

(A_2) Let H be an isolated abelian Riesz group, $n \in N$. Then $n|x| + n|y| \subseteq n|x + y|$.
(It follows from (P_3) and (P_4).)

Lemma 1. Let H be an isolated abelian Riesz group, $a, b \in H$.
(i) If $na \leq nb$ for some $n \in N$, then $a \leq b$.
(ii) If $na = nb$ for some $n \in N$, then $a = b$.
(iii) If $n|a| \subseteq n|b|$ for some $n \in N$, then $|a| \subseteq |b|$.
(iv) If $n|x| = n|y|$ for some $n \in N$, then $|x| = |y|$.

Proof: (i) If $a, b \in H$ and $na \leq nb$ for some $n \in N$, then $0 \leq n(b - a)$. This yields $0 \leq b - a$ and hence $a \leq b$.
(ii) It is a consequence of (i).
(iii) Let $x \in |a|$, $n \in N$. Then according to (P_3) we get $nx \in n|a| \subseteq n|b| = |nb|$. This implies $nx \geq nb, nx \geq -nb$. From (i) it follows that $x \geq b$, $x \geq -b$. Thus $x \in U(b, -b) = |b|$. Hence $|a| \subseteq |b|$.
(iv) It is a consequence of (iii). □

Lemma 2. Let G be a po-group, $A, B, C, D \subseteq G$. Then
(i) $nA + nB = n(A + B)$,
(ii) if $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, then $A + B \subseteq C + D$.

Proof: It is obvious. □

Note that $x \leq y$ if and only if $U(y) \subseteq U(x)$ for any elements x and y of a po-group.

Convergences in ordered algebraic systems

Luxemburg and Zaanen introduced notions of a u-uniform convergence and of a relatively uniform convergence of sequences in vector lattices in their monograph [11] in the following way.

Definition 1. Let V be a vector lattice, $u \in V$, $u \geq 0$. It is said that a sequence (x_n) in V converges u-uniformly to an element $x \in V$ if the following condition is satisfied:
(C_1) for each $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ there exists $n_0 \in N$ such that $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ for each $n \in N$, $n \geq n_0$.

Definition 2. Let V be a vector lattice. We say that a sequence (x_n) in V relatively uniformly converges to an element $x \in V$, whenever (x_n) converges u-uniformly to x for some $u \in V$, $u \geq 0$.

Černák and Lihová [4] equivalently replaced ε in the Definition 1 by $1/k$ where, $k \in N$, and adopted definition of Luxemburg and Zaanen for lattice ordered groups as follows.

Definition 3. Let G be a lattice ordered group, $u \in G$, $u > 0$. We say that a sequence (x_n) in G u-uniformly converges to $x \in G$, if the following condition is satisfied:
(C_2) for each $k \in N$ there exists $n_0 \in N$ such that $k|x_n - x| \leq u$ for each $n \in N$, $n \geq n_0$.

The element u in the Definition 3 is called a convergence regulator.

Relatively uniform convergence in lattice ordered groups is defined analogously as in vector lattices above.

If $G = R$, where R is the additive group of all real numbers with the natural linear order, then the notion of u-convergence for any $u \in G$, $u > 0$ coincides with the usual convergence.

Now, we extend the notion of u-uniform convergence to Riesz groups.

Recall that any lattice ordered group is an isolated Riesz group and any Archimedean lattice ordered group is an isolated abelian Riesz group.

The definition of Černák and Lihová of the u-uniform convergence with small adap- tation can be used also for Riesz groups.

Definition 4. Let H be a Riesz group, (x_n) a sequence in H, $u \in H$, $u \geq 0$. It is said that a sequence (x_n) in H u-converges to an element $x \in H$, written $x_n \to_u x$, if the following condition is satisfied:
(C_3) for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$, such that $U(u) \subseteq k|x_n - x|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$.

If $x_n \to_u x$ then we say that x is a u-limit of (x_n).

In the relatively uniform convergence different sequences can have different convergence regulators.

If we take the same regulator for all sequences we get convergence which is called convergence with a fixed regulator.

Basic properties of convergence with a fixed regulator

In the rest of this paper we consider the convergence with the same regulator for all sequences.

Černák and Lihová [5] have shown that if convergence regulator in lattice ordered group is not archimedean then a sequence can have more limits. So, it is convenient to have an Archimedean element in the role of convergence regulator.

Throughout the rest of the paper H will be an isolated abelian Riesz group and an Archimedean element u of H will be a fixed convergence regulator. Since there is no danger of confusion, from now on we shall write $x_n \to x$ instead of $x_n \to_u x$.

Theorem 1. Let (x_n) be a sequence in H, $x, y \in H$.
If $x_n \to x$ and $x_n \to y$, then $x = y$.

Proof: If $x_n \to x$ and $x_n \to y$, then for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq 2k|x_n - x|$, $U(u) \subseteq 2k|x_n - y|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. From this, (P_2), (P_3), (A_1), (A_2), and Lemma 2 it follows that $U(2u) = 2U(u) \subseteq 2k|x_n - x| + 2k|x_n - y| = 2k|x - x_n| + 2k|x_n - y| \subseteq 2k|x - x_n + x_n - y| = 2k|x - y| = |2k(x - y)|$. This yields $2u \geq 2k(x - y)$. Then Lemma 1 (i) yields $u \geq k(x - y)$.

Since k is an arbitrary element of N and u an Archimedean element in H, we have $x - y = 0$. Hence $x = y$. □

Theorem 1 generalizes Theorem 2.3 of Černák and Lihová [4].

Theorem 2. Let (x_n) and (y_n) be sequences in H, $x, y \in H$.
Let $x_n \to x$ and $y_n \to y$. Then
(i) $x_n + y_n \to x + y$,
(ii) $-x_n \to -x$,
(iii) $x_n - y_n \to x - y$.

Proof: (i) If $x_n \to x$ and $y_n \to y$, then for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq 2k|x_n - x|$, $U(u) \subseteq 2k|y_n - y|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. From this, (A_2) and (P_3) it follows that $2|u| = 2U(u) \subseteq 2k|x_n - x| + 2k|y_n - y| \subseteq 2k|(x_n - x) + (y_n - y)| = 2|k((x_n + y_n) - (x + y))|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. By Lemma 1 (iii), $|u| \subseteq k|(x_n + y_n) - (x + y)|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. Hence we get $x_n + y_n \to x + y$.
(ii) If $x_n \to x$, then for each $n \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq k|x_n - x|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. In view of (P_2) we have $U(u) \subseteq k|-x_n + x| = k|-x_n - (-x)|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. Hence $-x_n \to -x$.
(iii) It is a consequence of (i) and (ii). □

Theorem 2 (i) generalizes assertion (i) of Lemma 3.1 [4].

Theorem 3. Let (x_n), (y_n) and (z_n) be sequences in H, $a \in H$. Let $x_n \leq y_n \leq z_n$ for each $n \in N$, $x_n \to a$, $z_n \to a$. Then $y_n \to a$.

Proof: If $x_n \to a$ and $z_n \to a$, then for each $k \in N$ then there exists $n_k \in N$, such that $U(u) \subseteq k|x_n - a| = |kx_n - ka|$, $U(u) \subseteq k|z_n - a| = |kz_n - ka|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. This implies $u \geq ka - kx_n$, $u \geq kz_n - ka$. Then $ka - u \leq kx_n$, $kz_n \leq ka + u$. Since $kx_n \leq ky_n \leq kz_n$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$, we obtain $ka - u \leq ky_n \leq ka + u$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. This implies $ka - ky_n \leq$ u, $ky_n - ka \leq u$. Hence $U(u) \subseteq U(ky_n - ka, ka - ky_n) = |ky_n - ka| = k|y_n - a|$ for each $n \in N$, $n \geq n_k$. This yields $y_n \to a$. □

Theorem 4. If a sequence (x_n) in H is convergent, then the sequence (x_n) is bounded in H.

Proof: Let $x_n \to x$. From this follows that for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such

that $U(u) \subseteq k|x_n - x|$ for all $n \in N, n \geq n_k$.
Hence for $k = 1$ we get that there exists $n_1 \in N$ such that $U(u) \subseteq |x_n - x| = U(x_n - x, x - x_n)$ for all $n \in N, n \geq n_1$. This yields $x - x_n \leq u, x_n - x \leq u$. From this we obtain $x - u \leq x_n \leq x + u$ for all $n \in N, n \geq n_1$.

Denote $t = n_1 - 1$ Since H is a directed group, there exists a lower bound b of the set $\{x_1, ..., x_t, x - u\}$ and an upper bound c of the set $\{x_1, ..., x_t, x + u\}$ in H. Thus $b \leq x_p \leq c$ for each $p \in N$.

Hence the sequence (x_n) is bounded in H. □

Cauchy sequences

Definition 5. A sequence (x_n) in H is called a Cauchy sequence, if for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq k|x_m - x_n|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$.

Theorem 5. Any convergent sequence in H is a Cauchy sequence.
Proof: If $x_n \to x$, then for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq 2k|x_m - x|, U(u) \subseteq 2k|x_n - x|$ for all $m, n \in N, m, n \geq n_k$. From this, Lemma 2, ($A_1$) and ($A_2$) it follows that $2|u| = U(u) + U(u) \subseteq 2k|x_m - x| + 2k|x_n - x| = 2k|x_m - x| + 2k|x - x_n| \subseteq 2k|x_m - x + x - x_n| = 2k|x_m - x_n|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. According to Lemma 1(iii), $U(u) = |u| \subseteq k|x_m - x_n|$ for each $m, n \in N, m,n \geq n_k$. Therefore (x_n) is a Cauchy sequence. □

Let C be the set of all Cauchy sequences in H.
Theorem 6. Let (x_n) and $(y_n) \in C$. Then
(i) $(x_n + y_n) \in C$,
(ii) $(-x_n) \in C$,
(iii) $(x_n - y_n) \in C$.
Proof: (i) Let (x_n) and $(y_n) \in$ C. Then for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq 2k|x_m - x_n|, U(u) \subseteq 2k|y_m - y_n|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. Then from ($A_1$) and ($A_2$) it follows that $2|u| = U(u) + U(u) \subseteq 2k|x_m - x_n| + 2k|y_m - y_n| \subseteq 2k|x_m - x_n + y_m - y_n| = 2k|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. By Lemma 1 (iii),
$U(u) = |u| \subseteq k|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. Hence $(x_n + y_n) \in C$.
(ii) Let $(x_n) \in C$. Then for each $k \in N$ there exists $n_k \in N$ such that $U(u) \subseteq k|x_m - x_n|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. In view of ($P_2$) we have $U(u) \subseteq k|x_m - x_n| = k|-x_m + x_n| = k|-x_m - (-x_n)|$ for each $m, n \in N, m, n \geq n_k$. Therefore $(-x_n) \in C$.
(iii) It is a consequence of (i) and (ii). □

Theorem 6 (i) generalizes assertion (iii) of Lemma 3.8 [4].

Let $(x_n), (y_n) \in C$. We put $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$. Further we set $(x_n) \leq (y_n)$ if and only if $x_n \leq y_n$ for each $n \in N$.

If $x_n = 0$ for each $n \in N$, then we denote the sequence (x_n) by (0).

From Theorem 6 it follows that the following assertion is valid.
Theorem 7. $(C, +, \leq)$ is an isolated abelian Riesz group with zero (0).

LITERATÚRA

[1] Černák Š.: *Convergence with a fixed regulator in Archimedean lattice ordered groups,* Math. Slovaca 56, 2006, 167-180.

[2] Černák.: *Convergence with a fixed regulator in lattice ordered groups and applications to MV-algebras*. Soft Computing 12, 2008, 453-462.

[3] Černák Š., Jakubík J.: *Weak relatively uniform convergences on abelian lattice ordered groups* (to appear).

[4] Černák Š., Lihová J.: *Convergence with a regulator in lattice ordered groups*. Tatra Mt. Math. Publ. 39, 2005, 35-45.

[5] Černak Š., Lihová J.: *Relatively uniform convergence in lattice ordered groups*. Selected question of algebra. Collection of papers dedicated to the memory of N. Ja. Medvedev, Altai State Univ. Barnaul, Barnaul, 2007, 218-241.

[6] Fuchs L.: *Riesz groups*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III, Vol. XIX, 1965, 1-34.

[7] Fuchs L.: *Teilweise geordnete algebraische Structuren*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

[8] Jakubík J., Černák Š.: *Relatively uniform convergences in Archimedean lattice ordered groups*, Math. Slovaca 60, 2010, 447- 460.

[9] Jasem M.: *Isometries in Riesz groups*. Czech. Math. J. 36, 1986, 35-43.

[10] Jasem M.: *Weak relatively uniform convergence in Riesz groups*. Contr. Gen. Alg. 19, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2010, 127-138.

[11] Luxemburg W. A., Zaanen A. C.: *Riesz spaces*. Vol. I, North Holland Publ., Amsterdam-London 1971, ISBN 0-7204-2451-8.

[12] Martinez J.: *Polar functions III. On irreducible maps vs. essential extensions of archimedean l-groups with unit*. Tatra Mt. Math. Publ. 27, 2003, 189-211.

[13] Rachůnek J.: *Isometries in ordered groups*. Czech. Math. J. 34, 1984, 334-341.

[14] Teller J. R.: *On partially ordered groups satisfying the Riesz interpolation property*. Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1965, 1392-1400.

[15] Veksler A. I.: *On a new construction of the Dedekind completion of vector lattices and of l-groups with division*. Siberian Math. J. 10, 1969, 891-896.

[16] Vulikh B. Z.: *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces*. Wolters-Noordhoff Sci. Publ., Groningen 1967.

RNDr. Milan Jasem, CSc.
Institute of Information Engineering, Automation and Mathematics
Faculty of Chemical and Food Technology
Slovak Technical University
Radlinského 9
SK – 812 37 Bratislava
e-mail: `milan.jasem@stuba.sk`

PARADOXY ČI CHYBY?

MICHAELA KLEPANCOVÁ, MAREK VARGA

ABSTRACT. *In the article we deal with problems "to find mistake". If we ignore any important premise, then we get untrue result. To solve these problems help students more thoughtfully understand mathematical theories.*

Úvod

Dňa 4. apríla 2011 poskytlo obchodné centrum Mlyny svoje vstupné priestory Fakulte prírodných vied UKF na akciu „Vedecký jarmok". Jednotlivé katedry mali možnosť nájsť to najzaujímavejšie vo svojej disciplíne a pritiahnuť tak pozornosť jednak študentov základných a stredných škôl, ale aj náhodných okoloidúcich. Samozrejme, katedry fyziky, chémie, biológie stavili predovšetkým na experimenty, na zážitky z predvedených pokusov, či vyskúšaných priamo divákmi. V tejto ťažkej konkurencii sa pracovníci Katedry matematiky FPV UKF skúsili presadiť predovšetkým pomocou rôznych hlavolamov. Spomenuli by sme napríklad zostavenie telesa z jeho siete, zostavenie telesa z rôznych jeho častí, riešenie algebrogramov. Veľkej pozornosti sa však tešili i úlohy z teórie čísel, pracovne nazvané „čítanie myšlienok" – po zadaní určitých operácii sme dokázali povedať dotyčnému (ak bol správny počtár, čo tiež nie vždy platilo), na aké číslo či slovo práve myslí. No a v obľube vôbec nezaostávali ani úlohu typu „nájdi chybu" – čitateľovi sme predložili krátky a jasný výpočet, ktorý nás žiaľ priviedol k zjavnej nepravde... Na ukážku by sme mohli spomenúť snáď prácu s mocninami:

$$-1=\left(-1\right)^{3}=\left(-1\right)^{\frac{6}{2}}=\left[\left(-1\right)^{6}\right]^{\frac{1}{2}}=1,$$

resp. úpravy výrazov:

$$a=b\;\Rightarrow\;ab=b^{2}\;\Rightarrow\;ab-a^{2}=b^{2}-a^{2}\;\Rightarrow a\left(b-a\right)=\left(b-a\right)\left(b+a\right)\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;a=b+a\;\Rightarrow a=2a\;\Rightarrow\;1=2.$$

Pri týchto problémoch sa skutočne dožadovali vysvetlenia nielen žiaci a študenti, ale i náhodní okoloidúci, ktorí sa považovali za šikovných počtárov po vyriešení viacerých algebrogramov či geometrických úloh...

Nájdite chybu...

So spomenutými úlohami typu „nájdi chybu" sme však vyvolali záujem aj na mnohých seminároch z matematickej analýzy, a to v rôznych jej oblastiach. Študenta zrejme na úvod potešíme tým, že zadanie úlohy sa tvári, že riešenie už je hotové – stačí len prikývnuť... Táto časť vyvoláva záujem, nájsť potom skutočnú chybu v „riešení", ktoré by nám v podstate vyhovovalo (ak ho schválime, netreba nič robiť) nemusí byť vždy jednoduchá záležitosť. Na ukážku sme vybrali pre tento článok niekoľko úloh z teórie limít, z diferenciálneho i integrálneho počtu, či z teórie nekonečných radov, ktoré svojou podstatou vlastne slúžia k hlbšiemu porozumeniu danej problematiky.

Problém 1.

Všetky kone na svete sú rovnakej farby. Toto tvrdenie overíme matematickou indukciou. Nech najskôr $n=1$, potom jediný kôň je samozrejme rovnakej farby, akej je... Predpokladajme teraz, že máme množinu n koní, ktoré sú rovnakej farby. Zoberme množinu $n+1$ koní. Postavme ich do jediného radu, trebárs vedľa seba. Podľa predpokladu je prvých n koní rovnakej farby. Avšak, ak sa na naše kone pozrieme z druhej strany, podľa indukčného predpokladu je opäť prvých n koní rovnakej farby. To však znamená, že všetkých $n+1$ koní je rovnakej farby.

Problém 2.

Funkcia $\sigma: y=\operatorname{sgn} x$ je samozrejme nespojitá v bode $a=0$, a súčasne je v tomto bode diferencovateľná, totiž platí $\sigma'(0)=\infty$. Ďalej, platí známa veta „ak je funkcia diferencovateľná v nejakom bode, je v tomto bode spojitá“. Vysvetlite tento paradox!

Problém 3.

Použitím l´Hospitalovho pravidla pri výpočte limity dostávame $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\cos x\right)$, pričom druhá limita neexistuje. Avšak použitím elementárnych postupov máme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$. Ktorý postup je správny, resp. kde sme urobili chybu?

Problém 4.

Nech je daná funkcia $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$. Z Lagrangeovej vety aplikovanej na funkciu f a interval $\langle 0;x\rangle$ vyplýva, že existuje také číslo $c\in(0;x)$, pre ktoré platí $x^2\sin\frac{1}{x}=x\left(2c\sin\frac{1}{c}-\cos\frac{1}{c}\right)$. Ak vyjadríme posledný člen v zátvorke, dostaneme $\cos\frac{1}{c}=2c\sin\frac{1}{c}-x\sin\frac{1}{c}$ (*). Ak $x\to 0$, tak aj $c\to 0$. Potom z (*) vyplýva, že $\lim\limits_{c\to 0}\cos\frac{1}{c}=0$. Vieme však, že neexistuje limita $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$. Vysvetlite tento paradox!

Problém 5.

Využitím tabuľky primitívnych funkcií a Newton – Leibnizovej formuly ľahko dostávame $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-1}^{1}=0$. Je tento výpočet korektný?

Problém 6.

Zrejme platí $\int\limits_0^{\pi} dx = [x]_0^{\pi} = \pi$. Na druhej strane však dostávame $\int\limits_0^{\pi} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} \Big| z = \mathrm{tg}\, x \Big| = \int\limits_0^{0} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$. Vysvetlite tento paradox!

Problém 7.

Výpočtom možno overiť, že platí $\int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^{t} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{t\to\infty} \left[\ln\left|x^2+1\right| \right]_0^t = \infty$, a teda nevlastný integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$ diverguje. Avšak platí tiež $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \frac{2x}{x^2+1} dx = 0$ pre akékoľvek $k > 0$. Nie sú tieto výsledky protirečivé?

Problém 8.

V ľubovoľnej zbierke vzorcov zo strednej školy vieme nájsť, že pre súčet nekonečného geometrického radu platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Ako to, že potom je možné dostať pre súčet nekonečne veľa kladných čísel záporný výsledok, napr. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n = -\frac{1}{4}$?

Problém 9.

Nekonečný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ zrejme konverguje, a taktiež pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \geq -\frac{1}{n}$. Z porovnávacieho kritéria by teda malo vyplývať, že aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ konverguje. Keďže však ide o záporne vzaté členy harmonického radu, uvedený rad v skutočnosti diverguje. Ktoré tvrdenie je teda korektné?

Problém 10.

Uvažujme číselný rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Pre jeho členy platí jednak $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, jednak dostávame $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1)-(1-1)+\ldots = 1$[1]. Čo je teda vlastne súčtom daného radu?

[1] Uvedený rad taliansky matematik *Grandi* vysvetľoval ako dôkaz existencie Boha. Ukazuje totiž, ako možno z ničoho stvoriť niečo…

Problém 11.

Johann Bernoulli (1667 – 1748) našiel súčet teleskopického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ pomocou takýchto úprav: $1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Žiaľ, takýmto spôsobom sa mu hneď podarilo ukázať, že platí aj $2 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots - \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots\right) = \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Ktoré číslo je teda súčtom daného radu?

Záver

Dôležité tvrdenia, o ktorých platnosti sme sa v matematike presvedčili, obyčajne nazývame matematické vety. Sú veľmi precízne sformulované – ich autor vždy starostlivo skúma, ktoré podmienky sú pre platnosť jeho tvrdenia nevyhnutné, a ktoré už nevyžaduje. Pozabudnutie niektorého z predpokladov často radikálne mení význam už „vety“, a väčšinou spôsobuje, čo sa týka matematiky až katastrofické závery...

Vyššie uvedené úlohy sú založené na podobnom princípe – v predložených „riešeniach“ sme (pokiaľ možno čo najnenápadnejšie) zamlčali nejakú skutočnosť, a tým prišli k zjavne nesprávnym záverom. Skúmanie týchto úloh iste prinesie študentom hlbšie pochopenie príslušných matematických teórií.

LITERATÚRA

[1] Varga, M.: Niektoré aspekty problémového vyučovania matematickej analýzy; dizertačná práca

[2] Varga, M.: Zbierka úloh z matematickej analýzy; Nitra, UKF, 2010, ISBN 978-80-8094-712-5

[3] Veselý, J.: Matematická analýza pro učitele; Praha, Matfyzpress, 1997, ISBN 80-85863-23-5

[4] attachment:/254/priklady%20MI.pdf (dostupné 25.8.2011)

Mgr. Michaela Klepancová
KM FPV UKF
Trieda A. Hlinku 1
SK – 94974 Nitra
e-mail: michaela.klepancova@ukf.sk

PaedDr. Marek Varga, PhD.
KM FPV UKF
Trieda A. Hlinku 1
SK – 94974 Nitra
e-mail: mvarga@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

PARTICIPÁCIA MIND MAPPINGU PRI ROZVÍJANÍ HOLISTICKÉHO CHÁPANIA MATEMATICKÝCH POJMOV

LÝDIA KONTROVÁ

ABSTRACT. The article discusses the issue of using the mind maps for teaching mathematics. The mind mapping is the flexible tool and it can be adapted to describe most task and concepts of mathematics. Mathematical knowledge has the character of a network and mathematics should be interpreted for the students in its relationships. The mind maps can be help for problem solving, for exploration, memorizing, concentration, motivation, organization, for improving memory, brainstorming during of the teaching mathematics.

Úvod

V článku chceme prezentovať možnosti zefektívnenia vyučovania vyššej matematiky, v prvých ročníkov technických vysokých škôl, pomocou využitia metódy *Mind mappingu*, t.j. implementovaním myšlienkových, pojmových, kognitívnych máp do procesu jej vyučovania. Matematické vedomosti majú charakter siete. Matematické pojmy, definície, vety, algoritmy a pravidlá sú navzájom poprepájané medzi sebou, ako aj s vonkajším svetom. Ak chceme, aby študenti matematiku chápali a napredovali v nej, *musíme im ju prezentovať vo vzťahoch* (matematické pojmy medzi sebou, matematické pojmy a reálny svet) [1].

Začiatky *Mind mappingu* sú spojené s menom Angličana Tonyho Buzana, ktorý koncom 70-tych rokov 20. storočia navrhol pojmové mapy ako techniku robenia si poznámok [2].

Mind mapping je tiež podľa Fishera označením pre „všetky postupy, ktoré znázorňujú myslenie nejakým zobrazením“ [3]. Ide o vizuálne znázornenie, ktoré pozostáva zo slov, pojmov, myšlienok, symbolov, obrázkov a potrebných spojníc, vyjadrujúcich vzájomné vzťahy medzi nimi. Je to efektívny nástroj na zachytenie myšlienok, informácií a poznámok, identifikáciu kľúčových pojmov, zobrazenie faktov do celkovej a zmysluplnej štruktúry, pomôcka pri vytváraní asociácií, ktoré by sa inak mohli stratiť. Podobne ako kartografická mapa je to dobrý spôsob ako myslenie zviditeľniť.

Myšlienka tvorby pojmových máp je však v skutočnosti omnoho staršia. Už veľký filozof René Descartes vo svojej *Rozprave o metóde ako dobre viesť svoj rozum a hľadať pravdu v prírodných vedách*, uvádza medzi štyrmi základnými pravidlami tzv. karteziánskej metódy, *pravidlo analytického postupu* - rozkladať veci zložité na čo možno najjednoduchšie, *pravidlo syntézy* - postupovať v správnom poriadku od ľahšieho k ťažšiemu, zhrnúť vzťahy a závislosti od jednoduchých až k poznaniu najzložitejších javov a *pravidlo kontroly* - dbať pri riešení každej otázky na to, aby sa čo možno najúplnejšie prihliadalo na jej rozličné súvislosti a aspekty.

Príspevok bol spracovaný v rámci riešenia projektu KEGA č. 046ŽU – 4/2011: *Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky*

Prečo práve Mind mapping

„Nosíme v sebe mnoho máp, ktoré nám pomáhajú nachádzať cestu miestami, ktoré poznáme a miestami, kde sme nikdy neboli.“

Zmeny, ktoré zaznamenávame v oblasti vzdelávania za posledné desaťročie, súvisia predovšetkým s implementovaním počítačových technológií do všetkých oblastí života, teda aj do oblasti vzdelávania. Objavuje sa iný prístup k získavaniu a tiež zapamätávaniu si informácií. Pre dnešnú „*internetovú generáciu*“ je charakteristická práca s ikonami, symbolmi, kľúčovými slovami (pri použití internetových prehliadačov), pohybovanie sa v informačnej sieti po relevantných cestách. Často využívame „vonkajšiu pamäť“, (počítač alebo internet).Viac ako kedykoľvek predtým používame kontextuálne myšlienkové mapy vo všetkých oblastiach života.

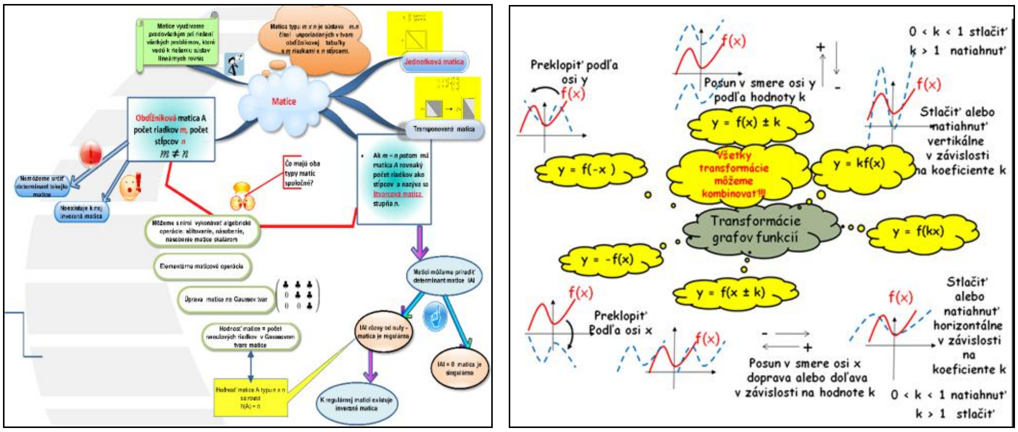
Ďalším faktorom, ktorý núti učiteľov na vysokých školách prehodnotiť prístup k vyučovaniu vyššej matematiky, je stále viac sa diferencujúca sieť stredných škôl, čo do obsahu a rozsahu vyučovania tohto predmetu. Kým pred desiatimi rokmi až 80% študentov prichádzajúcich na vysoké školy technického zamerania absolvovalo maturitnú skúšku z matematiky, dnes ich počet dosahuje len asi 15%. Úroveň vedomostí prichádzajúcich študentov je často neporovnateľná. Jednou z možností ako zmenšiť tieto rozdiely je metóda využitia pojmových a myšlienkových máp. V závere článku prinášame výsledky pedagogického experimentu zameraného na testovanie efektívnosti práve takejto vyučovacej metódy.

Využitie myšlienkových máp pri vyučovaní matematiky

Matematický svet je sieťou navzájom prepojených faktov a pojmov. Poznanie korelácií medzi nimi je nevyhnuté k preniknutiu do sveta matematiky. Myšlienkové mapy študentom umožnia zorientovať sa v pavučine matematických pojmov a sú tiež:

- Pomôckou pri identifikácii kľúčových pojmov, súvislostí medzi nimi, vytváraní zmysluplnej štruktúry, umožňujú pochopiť potrebné väzby a vzťahy.
- Umožňujú implementovať nové informácie do širšieho kontextu.
- Kombinácia slov a obrazu zapája do procesu učenia sa obe hemisféry mozgu a zefektívňuje učenie sa matematiky.
- Napomáhajú rozvíjaniu kognitívnych zručností, schopností analýzy, triedenia a syntézy pojmov.
- Umožňujú a podnecujú konvergentné, divergentné, kritické, strategické a komplexné matematické myslenie.
- Sú efektívnou mnemotechnickou pomôckou (nápoveďou), tvar, farby, štruktúra mapy umožní lepšie zapamätanie si informácií.
- Rozvíjajú holistické, komplexné chápania matematických pojmov a vlastností.
- Podporujú rozvoj metakognitívnych zručností – učiť sa učiť, rozmýšľať o vedomostiach.

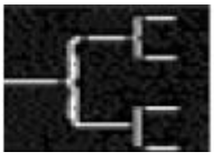
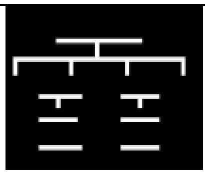
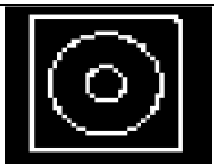
Ukázalo sa tiež, že zaradenie myšlienkových máp do procesu vyučovania, posúva učenie sa matematiky viac smerom k získavaniu neformálnych matematických vedomostí, ktoré implikujú schopnosť využitia matematiky pri riešení problémov každodenného života. Pri učení sa matematiky je veľkým problémom práve silná nadväznosť učiva; napríklad, ak študent neovláda počítanie so zlomkami, mocninami a odmocninami, nemôže následne zvládnuť základné derivačné vzorce (napríklad vzorec: $(x^n)' = nx^{n-1}$). Vhodné „pripomenutie“ dôležitých faktov, vzťahov, vzorcov prostredníctvom myšlienkovej mapy sa ukázalo ako dobrý „záchranný most“, vďaka ktorému si študenti aktualizovali potrebné vedomosti a úspešnejšie zvládali nové učivo. Pedagogický experiment, ktorý sme realizovali, mal za cieľ potvrdiť relevantnosť implementovania myšlienkových máp, ako už spomenutých mostov. Pri výučbe sme využívali pojmové mapy pre pripomenutie poznatkov zo stredoškolskej matematiky a tiež mapy, ktoré ponúkali komplexný a holistický pohľad na preberané témy. Obrázok 1 predstavuje pojmovú mapu prvého typu (*Transformácie grafov funkcií*) a mapu druhého typu (*Matice*), ktorá podáva komplexný pohľad na pojmy preberané v rámci témy Maticový počet.

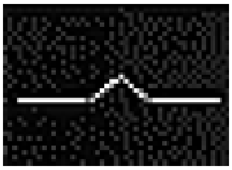
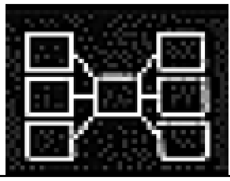
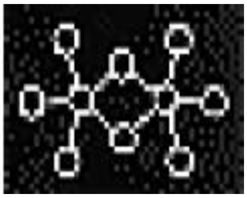


Obrázok 1: Pojmové mapy Matice a Transformácie grafov funkcií

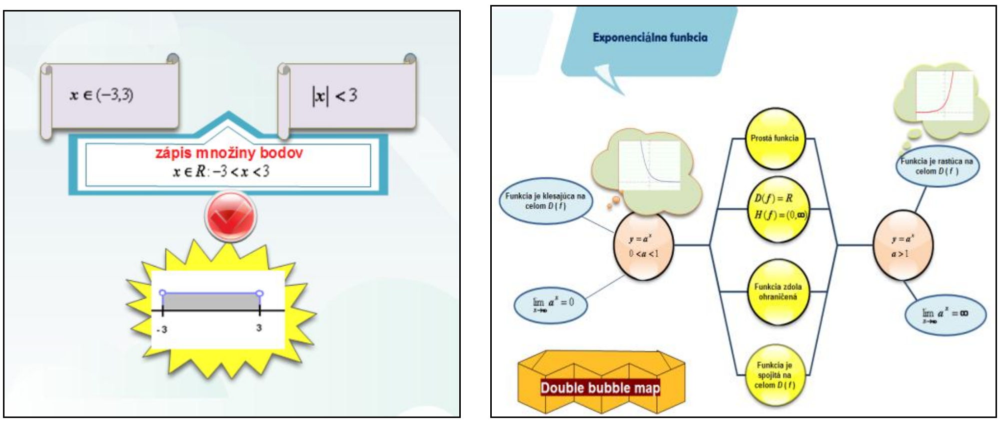
Mapovanie hierarchií matematických pojmov pomocou konkrétnych schém

Pri vytváraní pojmových máp sme využili viacero druhov schém. Každá z týchto konkrétnych schém podporuje niektorú z matematických činností a pomáha rozmýšľať o pojme a jeho štruktúre v rôznych intenciách, ako napríklad: odkrývanie analógií pojmov, diferenciácia pojmov, porovnávanie, hľadanie príčiny a následku, analyzovanie, kontextualizovanie, klasifikovanie. V Tabuľke 1 uvádzame niektoré z nich.

Názov	Vizualizácia	Využitie
Brace map (svorka)		Používa sa na analýzu objektov; na ľavej strane je kľúčový pojem, vo vetvách sú jeho hlavné a vedľajšie časti.
Tree map (strom)		Používa sa na klasifikovanie matematických pojmov a myšlienok; použili sme ju napríklad pri opakovaní kvadratických rovníc (typy, spôsoby riešenia, počet koreňov).
Circle map (kružnicová mapa)		Používa sa na braimstormingové nápady a zobrazenie postupného rozširovania poznatkov z danej témy.

Bridge map (most)		Táto mapa je vhodným nástrojom pre aplikovanie procesu hľadania a videnia analógií matematických pojmov. Na obrázku 2 je tento typ mapy využitý pri téme *Zápis množiny prvkov* daných vlastností.
Multi flow (multiprúdová mapa)		Používa sa na analýzu príčin a následkov. Pri vyučovaní matematických pojmov ju môžeme použiť na znázornenie predpokladov matematických viet a dôsledkov matematických tvrdení.
Bubble map (bublinová mapa)		Používa sa na popis, znázornenie vlastností matematických pojmov. Zlepšuje schopnosti študentov identifikovať kľúčový pojem v súvislosti s parciálnymi pojmami.
Double bubble map (dvojitá bublinová mapa)		Pomôcka na komparáciu opozitných pojmov. Do dvoch stredov zapisujeme porovnávané matematické pojmy. Do spoločných bublín uvedieme zhodné vlastnosti a do samostatných rozdiely. Na obrázku 2 je uvedená dvojitá bublinová mapa na zobrazenie vlastností exponenciálnej funkcie.

Tabuľka 1: Schémy myšlienkových máp



Obrázok 2:Bridge map a Double bubble map

Kvantitatívna analýza výsledkov testovania

Po vytvorení viacerých matematických pojmových máp sme pristúpili k realizácii pedagogického experimentu, cieľom ktorého bolo zistiť, či implementovanie myšlienkových máp do procesu vyučovania matematiky bude mať pozitívny vplyv na študijné výsledky z matematiky. Na základe formulácie cieľa pedagogického experimentu sme stanovili hypotézu:

H_1: *Študenti vzdelávaní s podporou myšlienkových a pojmových máp dosiahnu na konci experimentálneho vyučovania minimálne rovnocennú úroveň vedomostí ako študenti vyučovaní bez využitia mind mappingu.*

Pri výbere subjektov experimentu, v snahe získať dve čo najviac ekvivalentné skupiny, sme sa rozhodli pre náhodný výber zo študentov 1. ročníka Stavebnej fakulty Žilinskej univerzity v Žiline. Títo absolvovali v akademickom roku 2008/2009 v zimnom semestri predmet Matematika 1, obsahom ktorého sú: základy lineárnej algebry, analytická geometria a diferenciálny počet reálnej funkcie jednej premennej.

Rozhodujúca pri výbere kontrolnej a experimentálnej skupiny bola zhoda v odbornej spôsobilosti vyučujúceho, (v oboch skupinách viedol 3 – hodinové cvičenie ten istý odborný asistent), zhoda v obsahu a rozsahu preberaného učiva a zhoda v časovo-tematických plánoch. Počet respondentov v oboch skupinách bol zhodne 28.

Do vyučovania predmetu Matematika 1 v experimentálnej skupine bola každý týždeň, v rámci cvičení, zaradená práca s myšlienkovými mapami.

Kontrolná skupina absolvovala tradičné vyučovanie predmetu Matematika 1.

Po prebratí učiva obe skupiny riešili zhodný vedomostný test, ktorý obsahoval 10 úloh. Maximálny počet získaných bodov v teste bol 30. Realizácia experimentu na verifikáciu hypotézy H_1 prebehla podľa experimentálneho plánu bez pretestu. Nasledujúca tabuľka prezentuje percentuálnu úspešnosť riešenia posttestu v jednotlivých skupinách.

	n	%	$\bar{x}$	s_x^2
Experimentálna skupina	28	69,1%	23,5	26,8
Kontrolná skupina	28	60,1%	20,4	23,7

Tabuľka 2: Základné štatistické charakteristiky súborov

Pristúpime k verifikácii hypotézy H_1. Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$. Účinok experimentálnej metódy (dosiahnuté výsledky testu pri vyučovaní matematiky s podporou mind mappingu) sme považovali za náhodný výber z normálneho rozdelenia $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Účinky druhej metódy (výsledky testu pri tradičnom vyučovaní) sme považovali za náhodný výber z normálneho rozdelenia $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ sú neznáme parametre. Máme dané dva nezávislé súbory n=28, m=28. Vypočítali sme výberové charakteristiky a použitím F - testu sme zistili, že rozdiel medzi ich rozptylmi nie je štatisticky významný.

Z tohto dôvodu sme rozdielnosť medzi skupinami testovali dvojvýberovým *Studentovým t-testom* s rovnosťou rozptylov.

Testovali sme hypotézu o tom, či sú účinky oboch vyučovacích metód rovnaké

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ proti H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

Testovacie štatistiky majú hodnotu T = 2,276 a hodnota p = 0,01313.

Pri porovnaní s kritickými hodnotami *t-testu* sme dostali

$T = 2,276 > t_{0,05}(54) = 2,0048$.

Nulovú hypotézu preto zamietame. Výberový priemer sa na zvolenej hladine významnosti líši od hodnoty priemeru základného súboru.
Pri použití uvedených vyučovacích metód boli dosiahnuté rozdielne študijné výsledky. Ak použijeme jednostrannú hypotézu

H_0: $\boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$ proti H_1: $\boldsymbol{\mu_1} > \boldsymbol{\mu_2}$,

potom H_0 zamietame na hladine významnosti α ak $T > t_{2\alpha}(n + m - 2)$. Toto sa v našom prípade potvrdilo, nakoľko platí

$$2{,}276 > \boldsymbol{t_{2\alpha}}(n + m - 2) = \boldsymbol{t_{0,1}}(54) = 1{,}676.$$

Jednostrannú nulovú hypotézu zamietame a rozdiel medzi strednými hodnotami pre daný výberový súbor považujeme za štatisticky významný. Pomocou štatistických metód sme potvrdili, že študenti vyučovaní inovatívnou vyučovacou metódou s využitím myšlienkových máp, dosiahli lepšie študijné výsledky, ako študenti vyučovaní tradičnou metódou.

Pedagogický experiment nás presvedčil o pozitívnom vplyve zaradenia myšlienkových máp do procesu vyučovania matematiky. Študenti vnímali kladne predovšetkým fakt, že pojmové mapy im umožnili zaviesť systém do množstva informácií, faktov a pojmov, ktorými disponujú, získať nadhľad nad preberanou problematikou.

LITERATÚRA

[1] Majovská, R.: *Mind Mapping in Mathematical education*, STU Bratislava, 2009 Virtual University 2009, s. 1-5. 978-80-89316-11-3.

[2] Buzan, T. – Buzan, B.: *The Mind Map*, BBC Books, London, 1993.

[3] Fischer, R.: *Učíme děti myslet a učit se*, Praha, Portál, 2004, s.172, ISBN 80-7178-966-6.

[4] Malacká, Z.: *Problems of teaching maths at college technical direction*, In: XXIX international colloquium on the management of educational process, Brno, 2011, ISBN 978-80-7231-779-0.

[5] Gunčaga, J.: *Modernisation and Innovation of the Calculus Teaching / Ján Gunčaga, Jozef Fulier, Petr Eisenmann.* In: Teaching Mathematics : innovation, new trends, Research. Ružomberok. Katolícka univerzita, 2009. - ISBN 978-80-8084-418-9. - S.

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta humanitných vied
Žilinská Univerzita v Žiline
Univerzitná 8061
SK – 026 01 Žilina
e-mail: lydia.kontrova@fpv.uniza.sk

PROJEKTOVÉ VYUČOVANIE NA HODINÁCH MATEMATIKY V DIGITÁLNOM VÝUČBOVOM PROSTREDÍ

LILLA KOREŇOVÁ

Abstract. In this paper we are going to focus on the project method of education with the use of digital technologies in education on high schools. In the second part of this post we demonstrate a few examples of the project method of education which has been tested by math teachers within the project "Modernization of the educational process ".

Úvod

V posledných rokoch sa aj na Slovensku zväčšuje snaha učiteľov motivovať študentov na stredných školách k štúdiu matematiky novými (alebo staro-novými) vyučovacími metódami a formami, využívaním digitálnych technológií ako aj o spestrenie obsahu matematického vzdelávania o úlohy z reálneho života, kontextové úlohy a pod. Jeden z výborných metód ako vniesť „reálny život“ do vyučovania matematiky je projektová metóda s využitím digitálnych technológií, ktoré sú študentom veľmi blízke.

V rámci Národného projektu „Modernizácia vzdelávacieho procesu na stredných školách“ (UIPŠ) sme navrhli a odskúšali niekoľko námetov takéhoto projektového vyučovania.

Projektové vyučovanie v digitálnom prostredí

V Pedagogickom slovníku nájdeme pod heslom „projektová metóda“ nasledovnú definíciu: “Je to vyučovacia metóda, pri ktorej žiaci sú vedení k riešeniu komplexných problémov a získavajú skúsenosti praktickou činnosťou a experimentovaním. Projektové vyučovanie je potom také vyučovanie, v ktorom projektová metóda je hlavnou vyučovacou metódou. ” (Průcha, 1995)

Začiatky projektového vyučovania siahajú do začiatku 20. storočia, keď poprední predstavitelia americkej pragmatickej pedagogiky J. Dewey a W. H. Killpatrick rozpracovali problémové a projektové vyučovanie ako prostriedok demokratizácie a humanizácie výučby a školy. (Turek, 2010)

Problémy, ktoré žiaci riešia v projektovom vyučovaní sú komplexné a ich riešenie si vyžaduje poznatky z viacerých vied (tradičných vyučovacích predmetov), problémy riešia skupiny žiakov (kooperatívne vyučovanie) najmä z vlastného záujmu a riešenia vedú ku konkrétnym výsledkom, produktom, písomným referátom a pod. Takéto komplexné problémy sa nazývajú projekty.(Turek, 2010)

Projektové vyučovanie môže byť jedným z mostov prepojujúcich školy so životom obce i širšej verejnosti.(Valenta J., 1993)

Projektové vyučovanie však spája žiakov v súčasnosti s realitou života a okolitého prostredia hlavne cez digitálne technológie, pretože ich využívanie je pre nich úplne prirodzené. Digitálne technológie ako počítač, internet, digitálny fotoaparát, mobil a ďalšie sú výborným prostriedkom pri práci na projektoch pre študentov a to nielen pri zbere

Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011

informácií, ale aj pri spracovávaní údajov, modelovaní reálnych situácií, pri výpočtoch aj prezentácií výsledkov.

Projektová metóda teda navodzuje podľa (Valenta J., 1993):

- cielenú učebnú činnosť, premyslenú a organizovanú
- vyhovuje potrebám a záujmom žiakov a pedagogickej organizácii učiteľa
- činnosť koncentrovanú okolo určitej základnej idey
- navodzuje činnosť zameranú prakticky a smerujúcu k použiteľnosti v živote
- činnosť prinášajúcu zmeny v celku osobnosti žiaka, zvlášť cestou skúseností
- činnosti za ktorú žiak preberá zodpovednosť.

Postup pri projektovom vyučovaní sa skladá z týchto etáp (Turek, 2010):

1. voľba témy projektu (jej špecifikácia, určenie cieľov a výstupov)
2. plánovanie riešenia projektu (vypracovanie postupu, rozdelenie do čiastkových úloh, rozdelenie žiakov do skupín, atď.)
3. riešenie projektu (realizácia plánu)
4. zverejnenie výsledkov riešenia projektu (zhodnotenie práce na projekte).

Podľa (Lukáč, S. a kol., 2010) pri projektovej metóde sa mení pozícia učiteľa, ktorý sa pre žiakov stáva spolupracovníkom, poradcom, usmerňuje ich činnosť, nevysvetľuje novú látku, ale poskytuje zdroje a podnety pre prácu žiakov.

V súvislosti s vyučovaním matematiky sa otvára otázka, či projektová metóda je vhodná aj pre rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov.

V prípade, že učiteľ vhodne vybral tému a triedu, v ktorej projekt realizuje, dochádza k tomu, že žiaci sú nútení tvoriť, hľadať, vymýšľať. Majú možnosť voliť si smer, či zameranie svojho projektu. (Dillingerová, 2007)

Učiteľ môže mať pocit, že len časť projektu sa venuje matematike a tým mu projekt uberá priestor pre výučbu matematických kompetencií. Z hľadiska celkovej výchovy človeka je to postoj falošný, pretože práca na projektoch a v tíme je veľmi cenná. Možnosti, ako nájsť vhodné aplikačné prostredie pre projekty a pritom nestratiť ťažisko výučby mimo oblasť matematiky je použiť výpočtovú techniku ako nástroj pre aplikáciu matematických zručností. (Vaníček, 2009)

Pre súčasných žiakov je využívanie digitálnej techniky (počítača, internetu, softvérov, mobilov, digitálnych fotoaparátov a pod.) vo vyučovaní určitým spojením medzi vyučovacím predmetom (predmetmi) a reálnym životom, kde tieto technológie bežne používajú. Študenti sú často aj v domácom prostredí informovaní o riešení rôznych projektov v skutočnom živote napríklad od ich rodičov, starších súrodencov a pod. Dnes je bežné, že zamestnanci rôznych firiem v rámci svojho zamestnania pracujú na riešení projektov rôzneho druhu a v určitej miere využívajú na riešenie IKT, na školách sa učitelia zapájajú do projektov za účelom získania grantov a účelových financií.

V Štátnom vzdelávacom programe (ISCED 3A) sa definuje vzdelávacia oblasť Matematika a práca s informáciami ako oblasť, ktorá rozvíja myslenie žiakov, ktoré je potrebné pri riešení praktických problémov reálneho života s využitím matematických modelov myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácií (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky). (MŠVVaŠ_SR, 2011)

Na základe týchto skutočností môžeme považovať projektové vyučovanie s využitím digitálnych technológií za jeden z veľmi aktuálnych metód vyučovania.

Aby projektová metóda s využívaním IKT mohla dobre fungovať, musí byť splnený predpoklad kreatívneho, vzdelaného, inovatívneho a digitálne gramotného učiteľa.

Učiteľ formuje svojich žiakov svojim priamym i nepriamym pôsobením, svojou kvalifikovanosťou, odbornosťou, pedagogickým majstrovstvom a tiež osobným príkladom. Ak chceme vychovať mladých ľudí informačne zručných, kreatívnych, so schopnosťou riešiť problémy reálneho života samostatne, tak učiteľ (nielen matematiky) musí mať hodiny pre svojich „klientov" pripravené kompetentne, tvorivo, zaujímavo, moderne. (Žilková, 2009)

V rámci Národného projektu „Modernizácia vzdelávacieho procesu na stredných školách" (UIPŠ) sa uskutočnilo kontinuálne vzdelávanie učiteľov matematiky, kde sme v rámci školení oboznamovali učiteľov matematiky s novými metódami a formami vyučovania s využitím digitálnych technológií.

Niekoľko námetov zo školského prostredia

Uvádzame niekoľko námetov projektového vyučovania s využitím digitálnych technológií, ktoré boli aj v minulom školskom roku odskúšané na niektorých stredných školách.

Námet projektového vyučovania č.1: Zelený cyklistický okruh mesta Bratislavy

Pilotáž tejto projektovej metódy zrealizovala p. Valéria Kosnová na Súkromnom gymnáziu Žitavská v Bratislave, v 3.A triede s počtom študentov 23. Projektu bolo venovaných 9 vyučovacích hodín a 2 hodiny exkurzie. (Kosnová, 2011)

Cieľ projektu pre žiakov bol navrhnúť zelený cyklistický okruh mesta Bratislavy s prepojením na už vybudované cyklistické trasy mimo centra, vypočítať ich dĺžku, finančne vyhodnotiť a optimalizovať náklady na ich vybudovanie.

Čiastkové úlohy projektu učiteľka formulovala žiakom nasledovne: „Realizujte prieskum súčasného stavu cyklotrás v Bratislave a okolí. Navrhnite z nich časti cyklotrás vhodné do zeleného okruhu. Pomocou IKT navrhnite nové cyklotrasy. Zmapujte nespevnené časti cyklotrasy a určte ich dĺžku. Zhodnoťte kompatibilitu navrhovaného zeleného okruhu s existujúcimi medzinárodnými cyklotrasami. Vyhodnoťte finančné náklady na dobudovanie nových častí cyklotrás. Zhodnoťte atraktívnosť zeleného okruhu z hľadiska zdravého životného prostredia, športových a kultúrnych aktivít, historických pamiatok a pod."

Výstupom projektu mala byť cyklistická mapa zeleného okruhu mesta Bratislavy, návrh finančných nákladov realizácie projektu, prezentovanie projektu v elektronickej forme. Realizácia projektu trvala 9 vyučovacích hodín v škole, ďalej skupinová cyklistická obhliadka, spracovanie výsledkov a príprava prezentácie v rámci domácej prípravy. V rámci tohto projektu žiaci používali kalkulačku, mapy (digitálne), dynamické konštrukcie pripravené v programe GeoGebra, interaktívnu tabuľu a notebooky.

V prvej, motivačnej fáze prebehla diskusia o problémoch cyklotrás a o historickom centre Bratislavy
(**http://www.bratislava.sk/vismo/dokumenty2.asp?id_org=700000&id=77897&p1=191167** ,
http://www.cyklotrasy.sk/ , **http://www.bkis.sk/**)

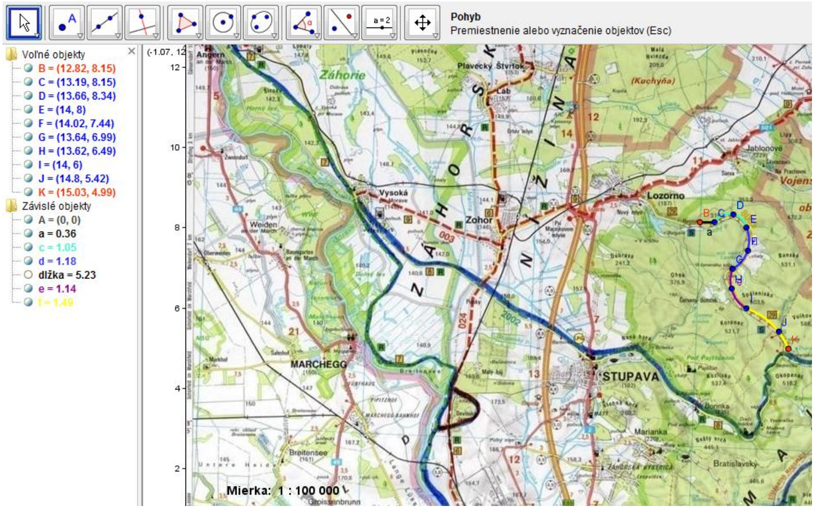
Motivačná fáza bola ukončená prezentovaním osnov žiackych projektov na interaktívnej tabuli.

Po motivačnej časti vznikla vzájomná diskusia žiakov a učiteľky:

• ako využiť vedomosti z prebranej kapitoly zobrazenia,
• ako získať fotodokumentáciu, mapy (možnosť exkurzie, internetu),
• ako zmapovať už existujúce cyklotrasy,
• ako vypočítať dĺžku nových navrhovaných častí cyklotrás,
• do akej podoby a akým spôsobom prezentovať výsledky práce,

Učiteľka so žiakmi vypracovala harmonogram realizácie projektu, určila čiastkové úlohy a kritéria hodnotenia. Učiteľ vstupoval do tohto procesu ako konzultant a čiastkovo kontroloval plnenie úloh a termínov.

Podľa stanovených cieľov a úloh žiaci pracovali v tímoch na počítačoch, pričom v oboch projektoch využívali matematický softvér GeoGebra. Využívali vedomosti okrem matematiky (najmä zobrazenie, mierka, pomer a pod.) aj z predmetov geografia a informatika.



Obrázok 1: ukážka časti žiackeho projektu v softvéri GeoGebra

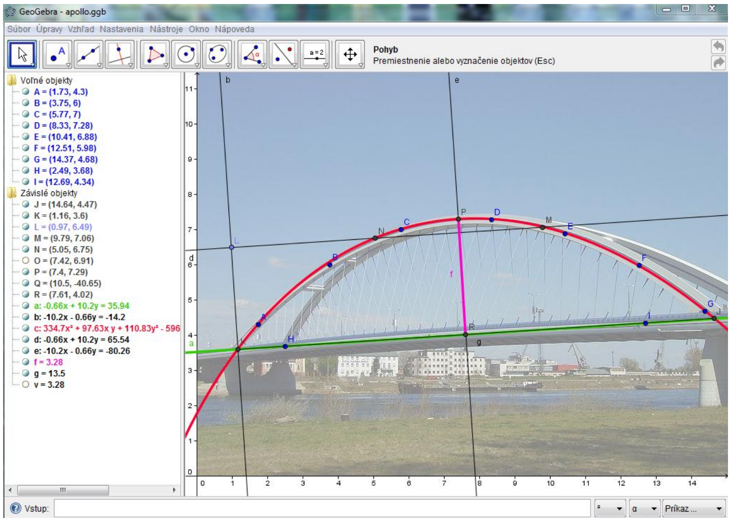
<u>Námet projektového vyučovania č.2: Most Apollo v Bratislave</u>

Pilotáž tejto projektovej metódy zrealizovala p. Miroslava Síthová na Strednej odbornej škole geodetickej v Bratislave. (Síthová, 2011)

Cieľom projektu pre žiakov bolo zistiť parametre mosta Apollo v Bratislave meraním a matematickým modelovaním, porovnať výsledky s údajmi dostupnými na internete.

Učiteľka formulovala čiastkové úlohy projektu pre žiakov: odfotiť most Apollo, odmerať dĺžku mosta s určitou presnosťou (a dostupnou technikou), vymodelovať pomocou softvéru GeoGebra parabolu v tvare mosta, pomocou podobnosti (mierky, pomeru) dopočítať a zistiť ďalšie parametre, ako výška a pod., vytvoriť projekt ako prezentáciu a porovnať výsledky s údajmi na internete. Výstupom projektu mal byť PowerPoint prezentácia. Realizácia projektu trvala 5 vyučovacích hodín v škole a v teréne, spracovanie výsledkov a príprava prezentácie v rámci domácej prípravy. V rámci tohto projektu žiaci používali internet, softvér GeoGebra, softvér PowerPoint, notebooky, ako aj bicykel s cyklopočítačom.

V prvej, motivačnej fáze prebehla diskusia o predmete projektu, o jeho obsahu a spôsobe realizácie, určenie kritérií, času ukončenia a spôsobu prezentácie. Študenti navrhli rôzne spôsoby meraní dĺžky mosta, napríklad pomocou bicykla s cyklopočítačom. Prebehla diskusia aj o presnosti rôznych meracích metód. Počas samostatnej práce žiakov učiteľka vstupovala do procesu ako konzultant a čiastkovo kontroloval plnenie úloh a termínov. Podľa stanovených cieľov a úloh žiaci pracovali v tímoch na počítačoch, pričom využívali digitálny fotoaparát na odfotenie mosta. Na hodine informatiky sa naučili preniesť a upraviť obraz do počítača. Pomocou softvéru GeoGebra vytvorili matematický model krivky mostového oblúka a využitím poznatkov z matematiky (vlastnosti a graf kvadratickej funkcie, pomer) ako aj z geografie a informatiky vytvorili svoj projekt v softvéri PowerPoint.



Obrázok 2: ukážka žiackej práce v softvéri GeoGebra

Záver

Našim cieľom bolo navrhnúť a odskúšať niekoľko námetov projektového vyučovania v digitálnom prostredí v rámci hodín matematiky na stredných školách. Na konci realizácie projektového vyučovania na každej škole sme zisťovali dotazníkom postoje žiakov k matematike, k danému projektovému vyučovaniu ako aj k využívaniu digitálnych technológií (konkrétne softvéru GeoGebra) na hodinách matematiky. Z objektívnych príčin sme nemohli realizovať pilotáž, kde by sme zisťovali efektívnosť danej vyučovacej metódy, vplyv projektového vyučovania v digitálnom prostredí na matematickú gramotnosť žiakov, preto sme sa zatiaľ uspokojili s prieskumom postojov študentov.

Na otázku, či hodiny matematiky boli pre žiakov počas trvania projektového vyučovania zaujímavejšie a atraktívnejšie odpovedalo až 53% žiakov „určite áno“ a ďalších 40% „asi áno“.

Na otázku, či si žiaci myslia, že využívanie softvéru GeoGebra im pomáhalo počas trvania riešenia projektu (hlavne názornosťou a jednoduchosťou ovládania), odpovedalo až 49% žiakov „určite áno“ a ďalších 33% „asi áno“.

Na otázku, či si žiaci myslia, že riešenie projektov s využitím IKT zlepšilo ich vzťah k matematike, odpovedalo až 38% žiakov „určite áno“ a ďalších 47% „asi áno“.

Z uvedeného vyplýva, že väčšine žiakov sa javí projektové vyučovanie v digitálnom prostredí ako zaujímavejšie, atraktívnejšie a viac motivujúce. Práca so softvérom GeoGebra je tiež podľa názorov študentov prínosom. V nie poslednom rade žiaci prejavili súhlas s myšlienkou, že takýto inovatívny spôsob vyučovania môže zlepšiť ich vzťah k matematike ako predmete.

LITERATÚRA

[1.] Dillingerová, M. 2007. *Kapitoly z vyučovania matematiky.* Bratislava : FMFI UK Bratislava, 2007. 07-000753.

[2.] Fulier, J., Šedivý, O. 2001. *Motivácia a tvorivosť v matematike.* Nitra : UKF v Nitre, 2001. ISBN 80-8050-445-8.

[3.] Kosnová, V. 2011. Projektové vyučovanie v geometrii s využitím IKT pre študentov gymnázií. *Záverečná práca kontinuálneho vzdelávania Modernizácia vzdelávania na SŠ s podporou IKT v rámci národného projektu Modernizácia vzdelávacieho procesu na stredných školách.* Bratislava : Ústav informácií a prognóz školstva, 2011.

[4.] Lukáč, S. a kol. 2010. *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre stredné školy.* Košice : elfa s. r. o., 2010. ISBN 978-80-8086-149-0.

[5.] MŠVVaŠ_SR. 2011. Štátny vzdelávací program. *www.statpedu.sk/.* [Online] 2011. http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program.alej.

[6.] Průcha, J.–Walterová,E. 1995. *Pedagogický slovník.* Praha : Portál, 1995. ISBN 80-7178-252-1.

[7.] Rybak, A. 2008. Indywidualizacja kształcenia w systemach zdalnej edukacji. [aut.] T., Siemieniecki, B. Lewowicki. *Współczesne problemy kształcenia na odległość.* Toruń : Adam Marszałek, 2008, s. 180-190.

[8.] Schubert, S., Schwill, A. 2004. *Didaktik der Informatik.* Heidelberg : Spektrum, 2004. ISBN 3-8274-1382-6.

[9.] Síthová, M. 2011. Motivačné úlohy z matematiky pre študentov SOŠ geodetickej. *Záverečná práca kontinuálneho vzdelávania Modernizácia vzdelávania na SŠ s podporou IKT v rámci národného projektu Modernizácia vzdelávacieho procesu na stredných školách.* Bratislava : Ústav informácií a prognóz školstva, 2011.

[10.] Turek, I. 2010. *Didaktika.* Bratislava : Iura Edition, spol. s. r. o., 2010. ISBN 978-80-8078-322-8.

[11.] UIPŠ. Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť. *www.modernizaciavzdelavania.sk.* [Online] elfa s. r. o. [Dátum: 31. august 2011.] https://www.modernizaciavzdelavania.sk/.

[12.] Valenta J., Kasíková H. a kol. 1993. *Pohledy: projektová metóda ve škole a za školou.* Praha : IPOS ARTAMA, 1993. ISBN 80-7068-066-0.

[13.] Vaníček, J. 2009. *Počítačové kognitívní technologie ve výuce geometrie.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. ISBN 978-80-7290-394-8.

[14.] Vankúš, P. 2007. *Influence of didactical games on pupils' attitudes towards mathematics.* Larnaca : University of Cypru, 2007. ISBN 978-9963-671-25-0.

[15.] Žilková, K. 2009. *Školská matematika v prostredí IKT.* Bratislava : UK Bratislava, 2009. ISBN 978-80-223-2555-4.

PaedDr. Lilla Koreňová, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: korenova@fmph.uniba.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKOV VÝSTUPNÉHO TESTU PRE 6. ROČNÍK ZŠ PROJEKTU KEGA 3/7001/09

MÁRIA KÓŠOVÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ

ABSTRACT. The aim of the project KEGA 3/7001/09 in the school year 2010/2011 was to compare knowledge level of pupils from 6th grade of primary school in the experimental and control group, the knowledge of pupils from schools with Hungarian and Slovak teaching language, the pupils with and without failure learning and the level of boy knowledge and the level of girl knowledge. This paper also deals with the reliability of the outcoming test and the item analysis of the test.

Úvod

Obsah tohto príspevku tvorí štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu. Tento je súčasťou riešenia projektu KEGA 3/7001/09 s názvom *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií – alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA*. V rámci tohto projektu prebieha experiment, ktorý začal náhodným rozdelením škôl zapojených do výskumu na experimentálne a kontrolné, vypracovaním a napísaním vstupného a výstupného testu. V každom roku riešenia sú pripravené materiály pre niektorý ročník ZŠ. V minulom školskom roku (2009/2010) bol tento výskum venovaný príprave učebných materiálov a overeniu efektívnosti ich použitia vo vyučovaní v 5. ročníku ZŠ. Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu v predchádzajúcom roku riešenia projektu je uvedené v článku [6]. Cieľom tohto výskumu v školskom roku 2010/2011 je príprava učebných materiálov predmetu matematika pre žiakov 6. ročníka ZŠ a overenie efektívnosti vyučovania pomocou týchto materiálov v školskej praxi. Tieto materiály sú zamerané hlavne na zvyšovanie matematických kompetencií pri riešení úloh z bežného života a tým aj na prípravu žiakov na medzinárodné testovanie vedomostí. Podrobnejšie informácie o tomto projekte ako aj znenie testov možno nájsť na internetovej stránke www.kega.fss.ukf.sk.

Hlavná hypotéza výskumu a výskumná vzorka

Hlavnou hypotézou výskumu je hypotéza

H0: *Pripravené materiály efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 6. ročníka ZŠ.*

Výskumnú vzorku tvorí 737 žiakov 6. ročníka základných škôl zo štyroch okresov Nitrianskeho kraja. Niektoré školy sú školy s vyučovacím jazykom maďarským.

Metodológia a nástroje výskumu

Ako metóda výskumu bol použitý experiment. Školy boli teda náhodne rozdelené do dvoch skupín - školy experimentálne a školy kontrolné. V experimentálnej skupine je 16 škôl, kontrolnú skupinu tvorí 13 škôl. Ako výskumné nástroje boli použité didaktické testy – vstupný a výstupný test. Vstupný test bol použitý iba na začiatku experimentu (t. z.

Príspevok je podporovaný projektom KEGA 03/7001/09

minulý rok). Výsledky tohto vstupného testu sú spracované v článku [5]. Výstupnými testami sa porovná úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej a kontrolnej skupine na konci každého školského roku.

Výstupný test a ďalšie hypotézy výskumu

Výstupný test obsahoval 6 úloh, z ktorých každá pozostávala z niekoľkých podúloh. Všetky otázky v úlohách boli otvorené. Obsahová validita testu bola posúdená učiteľmi 6. ročníka ZŠ. Test bol najskôr odskúšaný na jednej z experimentálnych škôl a na základe toho boli niektoré úlohy mierne upravené. Každá z úloh mala pridelený určitý počet bodov. Každý žiak mohol získať celkovo maximálne 30 bodov (Súčet).

Na základe výsledkov výstupného testu sa overuje nasledovná hypotéza:

H1: *Úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej skupine je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v kontrolnej skupine v prospech experimentálnej skupiny.*

Okrem tejto hypotézy sme si stanovili overiť aj ďalšie hypotézy:

H2: *Úroveň vedomostí v školách s vyučovacím jazykom slovenským nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v školách s vyučovacím jazykom maďarským.*
H3: *Úroveň vedomostí chlapcov nie je významne odlišná od úrovne vedomostí dievčat.*
H4: *Úroveň vedomostí žiakov s poruchou učenia je významne odlišná od úrovne vedomostí ostatných žiakov.*
H5: *Úroveň vedomostí žiakov v školách s experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom slovenským nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v školách s experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom maďarským.*

Výsledky výstupného testu a verifikácia hypotéz

Vzhľadom na to, že *p*-hodnoty testov normality (Kolmogorov – Smirnov test, Shapirov – Wilkov test) sú menšie ako 0,05, nemožno rozdelenie počtu bodov v žiadnej zo skupín (pre experimentálnu skupinu (E) a kontrolnú skupinu (K), pre skupinu škôl s vyučovacím jazykom slovenským (SJ) a maďarským (MJ), pre skupinu dievčat (Z) a chlapcov (M), s poruchou učenia (Ano) a bez poruchy učenia (Nie), pre skupinu experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom slovenským (ESJ) a skupinu experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským (EMJ)) považovať za normálne. S ohľadom na veľký rozsah náhodného výberu môžeme na testovanie rovnosti stredných hodnôt v základných súboroch použiť dvojvýberový *t-test*.

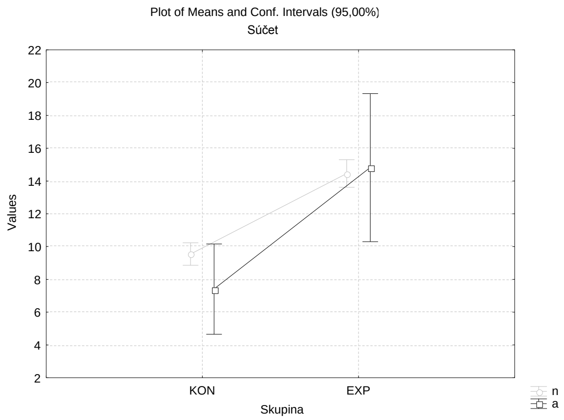
Výsledky *t-testu* a *F-testu* sme spolu s popisnými štatistikami zhrnuli do tabuľky 1.

Z výsledkov *t - testu* (t = -9,26, p = 0,000 je zrejmé, že rozdiel vo vypočítaných priemeroch pre experimentálnu skupinu (14,48) a kontrolnú skupinu (9,41) je štatisticky významný v prospech experimentálnej skupiny. Variabilita vedomostí žiakov v týchto dvoch skupinách je tiež významne odlišná. (F = 1,71, p = 0,000). Rozdiel, ktorý bol zistený medzi skupinou žiakov zo škôl s vyučovacím jazykom slovenským a skupinou žiakov zo škôl s vyučovacím jazykom maďarským nie je štatisticky významný (t = -1,76, p = 0,08). Rovnako nie je štatisticky významná ani odlišnosť vo variabilite vedomostí v týchto dvoch skupinách (F = 1,24, p = 0,08). Avšak vidíme, že rozdiel medzi priemerom experimentálnej skupiny škôl s vyučovacím jazykom slovenským a experimentálnej skupiny škôl s vyučovacím jazykom maďarským je štatisticky významný (t = 3,05, p = 0,002) v prospech škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Rovnako je štatisticky významný aj rozdiel v ich variabilite (F = 1,79, p = 0,000). Najmenší rozdiel medzi priemermi a smerodajnými odchýlkami bol zistený medzi skupinou dievčat a chlapcov, samozrejme štatisticky nevýznamný. Z tabuľky 1 môžeme tiež vidieť, že rozdiel v priemeroch skupiny žiakov s poruchami učenia a bez porúch učenia je prekvapujúco štatisticky nevýznamný (t = 0,83, p = 0,41). Hodnota *F - testu* (F = 1,39, p = 0,1) potvrdzuje, že dokonca aj variabilita medzi týmito dvoma skupinami je štatisticky nevýznamná.

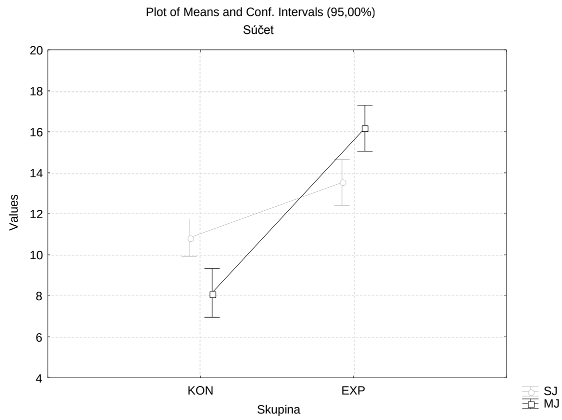
Tabuľka 1

skup. 1, skup. 2	Popisné štatistiky - aritmetický priemer počtu bodov (Priemer), smerodajná odchýlka (Sm. o.), počet platných hodnôt (Počet), hodnota t-testu (t) a jeho P-hodnota (p), hodnota F-testu (F) a jeho P-hodnota(p)									
	Priemer skup. 1	Priemer skup. 2	Sm. o. skup. 1	Sm. o. skup. 2	Počet skup. 1	Počet skup. 2	t	p	F	p
E, K	14,48	9,41	8,28	6,34	385,00	352,00	-9,26	0,00	1,71	0,00
SJ, MJ	12,33	13,48	8,05	7,23	441,00	209,00	-1,76	0,08	1,24	0,08
Z, M	12,24	11,87	7,70	7,97	374,00	363,00	-0,64	0,52	1,07	0,50
Ano, Nie	11,11	12,12	9,14	7,75	44,00	693,00	0,83	0,41	1,39	0,10
ESJ, EMJ	13,52	16,17	8,93	6,68	246,00	139,00	3,05	0,00	1,79	0,00

Na obrázkoch 1a, 1b sú znázornené priemery počtu bodov spolu s 95% intervalmi spoľahlivosti zvlášť pre skupinu K a skupinu E postupne pre skupiny Ano – Nie, SJ – MJ.



Obr. 1a. Grafy priemerov pre E a K v skupine Ano a v skupine Nie



Obr. 1b. Grafy priemerov pre E a K v skupine SJ v skupine MJ

Tabuľka 2

skup. 1, skup.2	Mannov -Whitneyov U test								
	Súč. por. skup. 1	Súč. por. skup. 2	U	Z	p	Z uprav	p	Počet skup. 1	Počet skup. 2
E, K	165931,5	106021,5	43893,5	-8,27	0,000	-8,27	0,000	385	352
SJ, MJ	138501,5	73073,5	41040,5	-2,26	0,024	-2,26	0,024	441	209
Z, M	140157,0	131796,0	65730,0	-0,74	0,457	-0,75	0,456	374	363
Ano, Nie	1858,0	2058,0	868,0	0,83	0,404	0,84	0,403	44	44
ESJ, EMJ	43893,0	30412,0	13512,0	3,42	0,001	3,42	0,001	246	139

Vzhľadom nato, že rozdelenie počtu bodov nemožno považovať v základných súboroch za normálne a tiež sa vyskytla aj významná odlišnosť rozptylov na overenie hypotéz H1 – H5 sme použili aj neparametrický *Mannov –Whitneyov U test* (aby sme neporovnávali výberové súbory s veľmi odlišným rozsahom, vybrali sme náhodnú vzorku 44 žiakov zo skupiny žiakov bez poruchy učenia). Vo všetkých piatich prípadoch sme dostali podobné výsledky ako sú výsledky získané *t - testom*. Výsledky *Mannovho – Whitneyovho U testu* zapísané v tabuľke 2.

Z výsledkov *t - testu* aj *U - testu* vyplýva platnosť hypotézy *H1*. Pre oba testy totiž platí, že *p* - hodnota je menšia ako nami zvolená hladina významnosti 0,05 a teda štatistickú hypotézu *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v skupinách E a K rovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov za test v skupinách E a K je identické*, zamietame. To znamená, že platí alternatívna hypotéza *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v skupinách E a K nerovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov v skupinách E a K nie je identické*. Možno teda tvrdiť, že priemer počtu bodov v experimentálnej skupine (14,48) je významne vyšší ako priemer v kontrolnej skupine (9,41). V skupinách *SJ* a *MJ* dochádza k rozporu vo výsledkoch *t - testu* a *U - testu*. Podľa *t - testu* (tabuľka1) nemožno zamietnuť hypotézu o rovnosti stredných hodnôt, čo potvrdzuje platnosť našej hypotézy *H2*. Avšak podľa *U - testu* (tabuľka 2) naopak túto hypotézu zamietame a tvrdíme, že priemer škôl s vyučovacím jazykom slovenským (12,33) je významne nižší ako priemer škôl s vyučovacím jazykom maďarským (13,48). Nakoľko v prípade dvojvýberového *t – testu* nebola splnená podmienka normality, tak konštatujeme, že priemer škôl s vyučovacím jazykom maďarským je významne vyšší ako priemer škôl s vyučovacím jazykom slovenským. Ak sa zameriame iba na výsledky experimentálnej skupiny škôl s vyučovacím jazykom slovenským a experimentálnej skupiny škôl s vyučovacím jazykom maďarským zistíme, že podľa výsledkov oboch testov je *p* - hodnota menšia ako 0,05, čo vedie k zamietnutiu štatistickej hypotézy *Stredné hodnoty súčtu bodov za test v jednotlivých skupinách sú rovnaké* resp. *Rozdelenie počtu bodov za test je v skupinách identické*. Odtiaľ vyplýva neplatnosť hypotézy *H5*. Po rozklade súboru na 4 skupiny KON SJ, KON MJ, EXP SJ, EXP MJ sme však zistili, že medzi každými dvoma skupinami zo spomínaných štyroch je významný rozdiel, čo vidieť v tabuľke 3. To okrem iného znamená aj to, že v oboch skupinách škôl (s vyučovacím jazykom slovenským a s vyučovacím jazykom maďarským) došlo k významnému zlepšeniu vedomostí. Avšak, ak sa pozrieme na obrázok °1b zistíme, že rozdiel v rámci kontrolnej skupiny škôl je významný v prospech škôl s vyučovacím jazykom slovenským a naopak, rozdiel v experimentálnej skupine je významný v prospech škôl s vyučovacím jazykom maďarským. *P* - hodnoty pre skupiny žiakov s poruchami učenia (Ano), bez porúch (Nie) a chlapci (m), dievčatá (z) sú väčšie ako 0,05, čo znamená nezamietnutie štatistickej hypotézy o rovnosti stredných hodnôt počtu bodov za test v základných súboroch (jednotlivých skupinách) resp. identickosti rozdelenia počtu bodov za test. To predstavuje potvrdenie platnosti hypotézy *H3*, úroveň vedomostí chlapcov nie je významne odlišná od úrovne vedomostí dievčat. Naopak sa prekvapivo nepotvrdila hypotéza *H4*. Medzi výsledkami žiakov s poruchami učenia a žiakov bez porúch učenia nie je signifikantný rozdiel. Tento prekvapujúci výsledok však nie je spôsobený významným rozdielom v experimentálnej skupine.

Tabuľka 3

skupina	LSD test viacnásobného porovnania priemerov		
	KON MJ (8,1429)	EXP SJ (13,524)	EXP MJ (16,173)
KON SJ (10,831)	0,00925	0,00016	0,00000
KON MJ (8,1429)		0,00000	0,00000
EXP SJ (13,524)			0,00078

Rozdelením žiakov na 4 skupiny KON ano, KON nie, EXP ano, EXP nie a urobením viacnásobného porovnania priemerov dostaneme výsledky uvedené v tabuľke 4. Odtiaľ vidíme, že prekvapivo nie je významný rozdiel medzi žiakmi s poruchami učenia a bez porúch učenia už v kontrolnej skupine. V oboch skupinách žiakov (s poruchami učenia aj bez porúch učenia) je významný rozdiel medzi kontrolnou a experimentálnou skupinou. Túto zmenu možno vidieť aj na obrázku 1a.

Tabuľka 4

skupina	LSD test viacnásobného porovnania priemerov		
	KON nie (9,5485)	EXP ano (14,818)	EXP nie (14,460)
KON ano (7,4091)	0,190743	0,000971	0,000017
KON nie (9,5485)		0,001312	0,000000
EXP ano (14,818)			0,826052

Analýza kvality výstupného testu

Vypočítame popisné štatistiky počtu bodov za test bez ohľadu na skupiny, koeficient reliability testu a urobíme položkovú analýzu testu. Koeficient reliability by mal byť aspoň 0,65. Aby bolo možné prijať rozhodnutie na základe jednej skúšky je potrebná reliabilita nad 0,85 (Rosa, 2007, s. 34).

V tabuľke 5 uvádzame spomínané popisné štatistiky počtu bodov za test.

Tabuľka 5

Premenná	Popisné štatistiky							
	N platných	Priemer	Medián	Modus	Početnosť modusu	Minimum	Maximum	Sm. odch.
Súčet	737	12,06106	11	9	43	0	30	7,83337

Tabuľka 6

Premenná	Popisné štatistiky								
	Priemer	Sm. odch.	Medián	Modus	Početnosť modusu	Min.	Max.	Percento žiakov s max. počtom bodov	Percento žiakov s 0 bodmi
Detský čaj	1,936	2,234	1	0	334	0	6	13,704	45,389
Záhradný domček	2,645	2,386	2	0	229	0	6	23,747	31,072
Deň Zeme	2,885	1,362	4	4	386	0	4	52,374	8,277
Skóre	1,502	1,732	1	0	328	0	5	10,720	44,505
Telefónne linky	1,358	1,528	1	0	342	0	4	16,689	46,604
Cesta do Viedne	1,772	1,766	1	0	271	0	5	12,212	36,771

V tabuľke 6 možno vidieť položkovú analýzu testu, teda charakteristiky počtu bodov za úlohy. Týmito charakteristikami sú konkrétne aritmetický priemer, medián, modus, smerodajná odchýlka. Ale tiež percento žiakov, ktorí dosiahli maximálnu úspešnosť riešenia a percento žiakov, ktorí získali z úlohy 0 bodov. Ak je percento žiakov s maximálnym počtom bodov alebo s 0 bodmi aspoň 80%, úloha je podozrivá. Z údajov v posledných dvoch stĺpcoch tabuľky 6 vidíme, že žiadna úloha nie je podozrivá. Len jediná úloha, úloha *Deň Zeme*, má modus rovný maximálnemu možnému počtu bodov za danú úlohu, teda 4. Táto má práve aj najvyššie percento žiakov, ktorí získali maximálny počet bodov a najnižšie percento žiakov s 0 bodmi. Modus ostatných úloh je rovný 0.

Pre zistenie reliability výstupného testu sme vypočítali koeficient reliability *Cronbachova alfa*, ktorá je rovná 0,787. Táto hodnota poukazuje na dostatočnú reliabilitu tohto testu. Pre ďalšie potvrdenie reliabilty sme po rozdelení úloh na párne a nepárne úlohy vypočítali aj *Spearmanov – Brownov* koeficient reliability rovný 0,833 a *Guttmanov* koeficient reliability rovný 0,829, ktoré to tiež potvrdzujú.

Záver

Na základe výsledkov výstupného testu možno konštatovať, že materiály pripravené pre učiteľov a prostredníctvom nich pre žiakov 6. ročníka ZŠ efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 6. ročníka ZŠ. Výstupný test je dostatočne reliabilný. Zistili sme tiež, že nie je signifikantný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na pohlavie a tiež vzhľadom na poruchy učenia.

LITERATÚRA

[1] Anděl, J.: Statistické metódy. Praha: MAtfyzpress, 2003, ISBN 80-86732-08-8.

[2] Gavora P.: Úvod do pedagogického výskumu. Bratislava: UK, 2001, ISBN 80-223-1628-8

[3] Kaňová E.:Tvorba didaktických testov z pravdepodobnosti a ich analýza. In: Zborník zo VI. Vedeckej konferencie doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov, Nitra: Edícia Prírodovedec č. 159, 2005, ISBN 80-8050-813-5

[4] Rosa. V.: Metodika tvorby didaktických testov. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2007

[5] Rybanský Ľ.-Vrábelová M.: Štatistické spracovanie výsledkov vstupného testu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z vedeckej konferencie Pedagogická veda a školská prax v historickom kontexte (28. Január 2010), Katedra pedagogiky Filozofickej fakulty Univerzity sv. Cyrila a Metoda v Trnave, 2010 ISBN

[6] Rybanský Ľ.-Vrábelová M.: Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. Ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z VIII. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre (16. – 17. September 2010), Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2010 ISBN 978-80-8094-781-1

[7] Zvára, K. – Štěpán, J.: Pravdepodobnost a matematická statistika. Praha: Matfyzpress, Bratislava: VEDA, 2001, ISBN 80-2240736-4

Mgr. Mária Kóšová,
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK – 94974Nitra
e-mail: maria.kosova@ukf.sk

RNDr. Ľubomír Rybanský,
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK – 94974Nitra
e-mail:
lubomir.rybansky@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

UČÍME TVORIVOSTI A VZÁJOMNEJ KOOPERÁCII

RENÁTA KUNOVÁ

ABSTRACT. The aim of our article is to proclaim the opportunities of developing of key competencies through work in pairs with possibility of using computing skills to create PowerPoint presentations. Furthermore, we are showing how to teach mathematics through problem solving using computer technology and appropriate motivation.

1 Motivácia a tvorivosť na hodinách matematiky

Motivácia vyvoláva, usmerňuje a ovplyvňuje správanie a myslenie detí. Je jedným z dvoch najdôležitejších faktorov efektívneho učenia. Druhým predpokladom sú schopnosti žiaka.

Výkon = motivácia x schopnosti.

Správna motivácia k učeniu môže kompenzovať nižšie schopnosti žiaka a ovplyvniť jeho výkon v škole. Veľký význam zohráva počiatočná motivácia, uvedomenie si vlastných motívov a vonkajších prekážok a schopnosť aktívne prekonávať tieto prekážky.

V školskej praxi rozlišujeme dva druhy motivácie:

Vnútorná motivácia, ktorá sa prejavuje záujmom o samotnú činnosť. Školské prostredie má uspokojovať prirodzenú zvedavosť detí aj v prípadoch, keď ich školský predmet príliš nezaujíma, vtedy ich môžu niektoré aktivity v škole zaujať, pretože im umožňujú tvorivosť a sebavyjadrenie a sú pre nich zábavné. Nezanedbateľným prejavom je radosť z úspechu. Mnoho autorov ho považuje za hlavný motív učenia. Úspech v učení zvyšuje sebavedomie, je dôkazom určitých schopností, zvyšuje osobnú prestíž žiaka v triede. Užitočnosť pre život, praktické využitie v reálnom svete je ďalším faktorom vnútornej motivácie.

Vonkajšia motivácia je taká, ktorú žiak vykonáva pre iný cieľ, pre pochvalu, obdiv, známku (Fulier, Šedivý, 2001).

Motivácia a správny výber vyučovacej metódy je jeden zo základných predpokladov úspešného a efektívneho vyučovania. Tieto dva aspekty musí mať na zreteli každý učiteľ, ktorý chce predstúpiť pred svojich žiakov.

V našom príspevku chceme poukázať na možnosti rozvíjania kľúčových kompetencií prostredníctvom práce vo dvojiciach s možnosťou využitia počítačov na tvorbu prezentácií v programe PowerPoint. Ďalej chceme ukázať, ako učíme matematiku prostredníctvom riešenia úloh s využitím počítačovej techniky a vhodnou motiváciou.

2 Učenie vo dvojiciach

Výhody výučby „prostredníctvom spolužiakov“ poznali už Gréci a Rimania. Aj Komenský poznamenal: „ Qui docet, discit“ (kto učí iných, učí seba).

Partnerské učenie je postup, ktorý prospieva:

- vyučujúcemu dieťaťu,
- vyučovanému dieťaťu, ktoré dostáva pomoc,
- učiteľovi, ktorý organizuje prácu v triede.

Ako môže byť takýto spôsob výučby výhodný pre obe strany? Žiak, ktorý učivo zvládne rýchlejšie, týmto spôsobom konsoliduje svoje vedomosti, nachádza nové významy a rozširuje svoj pojmový materiál. Tiež mu to pomáha viac porozumieť samotnému procesu vzdelávania, ukazuje mu prekážky v učení a spôsoby prekonávania týchto prekážok. Žiak, ktorý pomoc dostáva, má z tejto spolupráce výhodu. Dostáva sa mu značnej individuálnej pozornosti s rýchlou spätnou väzbou o jeho práci. Verbálna interakcia s kamarátom je osobitá a úspešná, keď funguje obojstranne kvalitne (Fisher, 2002).

Práca vo dvojici je významným doplnkom práce učiteľa a žiakov. Nenahrádza prácu učiteľa, ktorý má väčší prehľad o danej problematike, má zvládnuté rôzne postupy a prístupy na osvojovanie nových poznatkov. Aby táto metóda bola úspešná, je zo strany učiteľa dôležité podporovať ako vyučujúcich, tak vyučovaných žiakov a dbať na rozvíjanie kladných sociálnych vzťahov. Pri takomto vyučovaní žiaci dostávajú príležitosť vyučovať druhých a súčasne učiť samých seba.

3 Realizácia metódy

K uplatneniu tejto metódy sme sa rozhodli pri osvojovaní a precvičovaní tematického celku *Sústavy rovníc s dvoma neznámymi* v kvarte (štvrtý ročník osemročného gymnázia) a na voliteľnom predmete seminár z matematiky v treťom ročníku štvorročného gymnázia. Hlavným cieľom pri zavádzaní tejto metódy bolo naučiť žiakov diskutovať o výbere najlepšej, najvhodnejšej a časovo najúspornejšej metóde pri riešení sústav rovníc s dvoma neznámymi. Realizácia prebiehala vždy na začiatku vyučovacej hodiny (10 minút) v priebehu 8 vyučovacích hodín. Po realizácii sme metódu vyhodnotili slovne a dvojice, ktoré pracovali aktívne vo všetkých troch aktivitách (1. Vzájomná pomoc, 2. Riešenie úloh, 3. Tvorba prezentácie v programe PowerPoint), sme hodnotili aj známkou.

4 Výber témy Riešenie sústav lineárnych rovníc

Tematický celok *Lineárne rovnice. Sústavy rovníc* je súčasťou učebných osnov pre gymnáziá (osemročné štúdium), ktoré schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky 2.4.1997 pod číslom 1797/97-15 s platnosťou od 1.9.1997 a podľa novej koncepcie súčasťou ISCED 2.

Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky (2009) v kapitole *1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy* hovoria iba o opísaní a geometrickej interpretácii množiny všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Na voliteľnom predmete seminár z matematiky však so žiakmi riešime aj sústavy s tromi neznámymi, kde okrem metód osvojených na základnej škole, ich oboznámime aj s metódami riešenia sústav rovníc pomocou determinantu a použitím eliminačnej metódy.

Prácu vo dvojiciach s tvorbou prezentácií sme zvolili vo štvrtom ročníku osemročného gymnázia a v treťom ročníku štvorročného gymnázia. Žiaci nižšieho stupňa riešili sústavu s dvoma neznámymi, pričom dostali zadanie úlohy, alebo si mohli sami vymyslieť text úlohy. Žiaci vyššieho stupňa dostali sústavu s tromi neznámymi a ich úlohou bolo vytvoriť k nej slovné zadanie vychádzajúce z reálnej situácie.

Prácu vo dvojiciach sme začali po osvojení základných metód na riešenie sústav rovníc (sčítacia, substitučná, porovnávacia). Žiaci mali už osvojené základné ekvivalentné úpravy pre riešenie lineárnych rovníc. Pri riešení rovníc je nutné žiakov naučiť riešiť rovnice na úrovni predmetného modelu manipulačnej činnosti, ktoré stoja na dvoch zásadách. Z_1 - rovnosť sa nemení, ak obe strany podrobíme rovnakej zmene. Z_2 - riešiť rovnicu znamená uskutočniť sériu zmien, ktoré vedú k rovnosti typu „neznáma = známa“. Pochopenie týchto zásad, ich aktívne osvojenie tvorí podstatu „rovnicového“ myslenia. (Hejný, 1990).

Pred rozdelením do dvojíc žiaci riešili úlohy, pri ktorých sme sledovali, ako majú osvojené metódy riešenia sústav. Podľa stupňa osvojenia sme ich zadelili do dvojíc a následne na 8 vyučovacích hodinách sme aplikovali v úvode hodín metódu práce vo dvojiciach. Prvé dve hodiny boli venované spoločnej diskusii o zadanom príklade, vzájomnej pomoci pri výbere metódy. Slabší žiak si mohol overiť svoj myšlienkový postup a vlastnú realizáciu výpočtu. Na ďalších troch hodinách pribudlo riešenie slovných úloh, v ktorých sami museli zostaviť sústavu, vyriešiť ju. Tu sme pristúpili aj k bodovému hodnoteniu prvých troch najúspešnejších dvojíc. Na ďalších 3 vyučovacích hodinách vytvárali na danú slovnú úlohu prezentáciu pomocou programu PowerPoint a so svojou prezentáciou vystúpili pred spolužiakmi. Prezentácia mala obsahovať aspoň tri snímky, kde by bolo zadanie úlohy, riešenia a predstavenie autorov. Keďže žiaci už majú skúsenosti s tvorbou prezentácií z iných predmetov, aj z matematického krúžku, tak pri tvorbe využívali rôzne animácie, vkladali obrázky, fotografie. Novinkou pre nich bolo písanie matematického textu pomocou programu Microsoft Equation 3.0.

5 Získané kompetencie a postoje žiakov

Naše vzdelávanie smeruje k získavaniu kompetencií, ktoré sú nevyhnutné na zvládnutie úloh, ktoré pred žiakmi stoja v reálnom živote. Našimi aktivitami rozvíjame u žiakov nasledovné kompetencie a postoje:

- matematizujú jednoduché reálne situácie s využitím písmen vo význame čísla,
- poznaním písmen vo význame čísla žiak získava pocit, že je bohatší o dôležité využiteľné vedomosti,
- na čísla sa pozerajú ako na prostriedky objektívneho poznania reality,
- matematizujú a riešia reálnu situáciu pomocou rovníc a ich sústav,
- poznanie rovníc im dáva rýchlejší a univerzálnejší prostriedok riešenia úloh,
- smelšie kvantifikujú realitu okolo seba,
- prostredníctvom možnosti kontroly výpočtov sa spoliehajú na výsledky zistené počtovými výkonmi,
- tvoria a riešia úlohy, v ktorých aplikujú osvojené poznatky o číslach a počtových výkonoch a algebrickom aparáte,
- rozvíjajú interpersonálne kompetencie,
- rozvíjajú svoju počítačovú gramotnosť.

6 Názory žiakov, ktorí sa podieľali na tvorbe prezentácií:

Práca vo dvojiciach má podľa mňa určité výhody. Po zadaní príkladu, sme si ho zapísali, mohli sme o príklade diskutovať a vzájomne si poradiť. Sústavu sme vyriešili. Keď nám vyšiel rovnaký výsledok, vedeli sme, že sme počítali dobre. Keď sme mali odlišné výsledky, porovnali sme postupy našich riešení, našli sme chybu a opravili sme ju.

Práca na počítačoch počas hodiny matematiky bola pre mňa veľmi zaujímavá. Páčilo sa mi, že sme nepracovali jednotlivo ale vo dvojiciach. Sami sme si mohli zvoliť modelovú situáciu z reálneho života, ktorú sme použili ako text slovnej úlohy. Nezvyčajný pre nás bol spoločný spôsob riešenia a možnosť prezentácie v programe PowerPoint.

(Žiačka IV.D osemročné gymnázium)

Práca vo dvojiciach je efektívnejšia nielen z hľadiska času, ale aj z hľadiska rozdelenia úloh a vzájomnej kooperácie. Veľmi oceňujem pôsobivejší spôsob učenia a zapamätania si postupu riešenia, ale aj rozvíjanie medziľudských vzťahov.

(Žiačka III.A štvorročné gymnázium)

7 Reflexia uskutočnenej metódy

1.Čo sa nám osvedčilo:
Práca vo dvojiciach fungovala dobre, žiaci sa vzájomne dopĺňali, hoci medzi sebou komunikovali, nepôsobilo to rušivo. Pri zadávaní úlohy museli žiaci byť maximálne pozorní, pretože zadanie dostali ústnou formou, ktorá je bližšia reálnej situácii ako písomná forma. Po dvoch hodinách vzájomnej pomoci medzi žiakmi i následnom precvičovaní s učiteľom sme pristúpili k hodnoteniu tejto spolupráce. Bodové hodnotenie včasného a správneho riešenia, ktoré na záver vyústilo do výslednej známky, podnietilo súťaživý charakter hodiny. Pozitívny ohlas medzi žiakmi mala aj práca na PC, tvorba prezentácie a jej následná ukážka pred spolužiakmi.

2.Aké boli problémy:
Niektoré dvojice neboli počas 8 vyučovacích hodín stabilné, čo ovplyvnila absencia žiakov. Toto malo vplyv na záverečné hodnotenie. Výslednú známku získala len dvojica, ktorá pracovala počas celého experimentu a spoločne vypracovala a prezentovala úlohu na PC.

3.Čo by sme robili inak:
Kládli by sme väčší dôraz na výber dvojíc, prípadne na výber skupiny pri kooperatívnej činnosti, aby sme zvýšili efektivitu práce.

8 Záver

Naším príspevkom sme chceli poukázať na to, že vyučovací proces neustále podlieha zmenám. V predchádzajúcom období kľúčovú úlohu zohrával učiteľ, žiaci boli len pasívni poslucháči, zapisovatelia hotových informácií. V dnešnej škole je učiteľ akýmsi organizátorom vyučovania, žiaci svojou aktívnou prácou zasahujú a tvoria vyučovaciu hodinu. Obsahová stránka vzdelávania zostáva nezmenená, no do popredia sa dostáva stránka kompetenčná, čo žiaci dokážu, ako vedia využiť získané schopnosti, zručnosti v rôznych životných situáciách.

LITERATÚRA

[1] Hejný. M.: *Teória vyučovania matematiky 2*, vysokoškolská učebnica, mesto-Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990, ISBN 80-08-01344-3

[2] Fisher. R.: *Učme děti myslet a učit se*, publikácia, mesto-Praha, Portál, 2002, ISBN 80-7178-966-6

[3] Fulier. J., Šedivý. O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, publikácia, mesto-Nitra, Fakulta prírodných vied UKF, 2001, ISBN 80-8050-445-8

[4] *Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky*, Štátny pedagogický ústav, Bratislava, 2009

[5] *Štátny vzdelávací program pre 2. stupeň základnej školy v Slovenskej republike ISCED 2 – nižšie sekundárne vzdelávanie,* Štátny pedagogický ústav, Bratislava

RNDr. Renáta Kunová
Gymnázium Janka Kráľa, Ul .SNP 3
SK – 953 42 Zlaté Moravce
e-mail: kunovarenata@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

VÝCHOVNÝ ASPEKT KONTEXTOVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

VLADIMÍRA LAŠŠÁKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRACT. In this paper we discuss contextual mathematical tasks with dimension of the fostering of pupils in areas as environmental protection, prevention of addictions and other important issues. We speak about some rules for creation of such tasks and we give five examples of the tasks. The goal of our paper is to motivate teachers for the using of such tasks and to give them some ideas for creation of their own tasks.

Úvod

Keď sa hovorí o vyučovaní matematiky, často sa za dobrú a úspešnú vyučovaciu hodinu považuje taká hodina, keď sa učiteľovi alebo učiteľke podarí efektívne žiakom a žiačkam sprostredkovať určité učivo tak, aby ho pochopili a následne boli schopní teoretické znalosti aplikovať pri riešení konkrétnych úloh. Mohlo by sa zdať, že niekedy sa takmer zabúda na to, že vyučovací proces nemá len vzdelávací cieľ, ale mal by spĺňať tiež výchovnú funkciu. S touto diskrepanciou obsahu edukácie sa stretávame aj vo vyučovaní školskej matematiky. Pritom sa do matematiky dá implementovať výchovný aspekt napríklad prostredníctvom obsahu riešených úloh. Cieľom nášho článku je uviesť niektoré pravidlá tvorby a predstaviť konkrétny návrh matematických úloh spĺňajúcich okrem rozvoja matematických vedomostí tiež výchovnú úlohu. Uvedené úlohy môžu slúžiť ako inšpirácia pre učiteľov a učiteľky matematiky pri tvorbe vlastných úloh s výchovným aspektom.

Pravidlá tvorby kontextových úloh s výchovným aspektom

Pod pojmom **kontextové úlohy** rozumieme úlohy, ktoré nadväzujú na nejaký kontext, väčšinou z reálneho života. Kontextové úlohy sú mimoriadne silným nástrojom v rukách učiteľov a učiteliek matematiky. Umožňujú vyučovací proces efektívne prepojiť s realitou života a tiež vhodne začleniť do vyučovania výchovný aspekt.

Sullivan, Zevenberg a Mousley (2003, str. 109) upozorňujú, že je potrebné zaoberať sa dvoma úrovňami socio-kultúrneho kontextu matematických úloh. Prvou úrovňou je kontext úlohy odkazujúci na reálnu alebo fiktívnu situáciu, do ktorej vkladáme danú úlohu. Takéto zakotvenie matematiky napomáha k tomu, že sa úloha stáva pochopiteľnejšou a reálnejšou. Iná forma kontextu je pedagogický kontext, čiže širšie vzdelávacie prostredie, v ktorom je matematika vyučovaná.

Pri tvorbe a výbere konkrétnej kontextovej úlohy treba zohľadniť niekoľko skutočností.

V prvom rade si treba uvedomiť, ako vplýva zadanie konkrétnej úlohy na motiváciu žiakov a žiačok. Zohľadniť treba nielen vekové osobitosti žiakov a žiačok, ale tiež sociálny a kultúrny kontext, v ktorom sa vyučovací proces odohráva.

Nemenej dôležité je vystríhať sa pred tým, aby kontextová úloha znemožnila niektorým žiakom a žiačkam participovať na jej riešení. Ako príklad si vezmime úlohu, kde pracujeme s informáciami týkajúce sa telefonovania a posielania textových správ

Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011

z mobilného telefónu. V takomto prípade nie je vhodné predpokladať, že každý z triedy vlastní mobilný telefón a je potrebné overiť, či sa medzi žiakmi a žiačkami nenachádzajú aj takí, ktorí s telefonovaním z mobilného telefónu nemajú žiadnu skúsenosť. V prípade, že to tak je, treba ozrejmiť náležitosti, ktoré sú potrebné na vyriešenie danej úlohy. Mimoriadne veľkú pozornosť tomuto riziku treba venovať v prípade, že zadávame žiakom a žiačkam za úlohu samostatne zozbierať informácie, s ktorými chceme ďalej pracovať, napríklad si zaznamenať do tabuľky, koľko času sledujú televízny prijímač počas jednotlivých dní v týždni alebo koľko času priemerne strávia hrou na počítači. Treba prihliadať na možnosť, že nie každý má doma televíziu alebo počítač a z tohto dôvodu do úloh doplniť alternatívne zadanie. V opačnom prípade by riešenie kontextovej úlohy mohlo viesť k demotivácii jedinca.

Ukážky konkrétnych kontextových úloh s výchovným aspektom

Štátny vzdelávací program (ISCED 3A, 2008) zdôrazňuje potrebu **environmentálnej výchovy** žiakov. Spomína sa tu rozvíjanie vedomia individuálnej zodpovednosti za vzťah človeka k prostrediu ako spotrebiteľa a výrobcu. Úlohou vyučovacieho procesu je viesť jedinca k tomu, aby vedel oceniť a citlivo pristupovať k prírode ako aj ku kultúrnemu dedičstvu. Žiaci a žiačky by sa mali naučiť tiež hodnotiť objektívnosť a závažnosť informácií o stave životného prostredia a mali by byť schopní komunikovať o nich. Mnohí ľudia si ani v dospelosti neuvedomujú, aké má ich správanie dopad na životné prostredie a stav životného prostredia je pre nich niečím, čo nemôžu ovplyvniť. Neuvedomujú si, že na okolitú prírodu a prostredie majú vplyv aj malé, každodenné rozhodnutia. Na to by sme mali prihliadať pri výbere informácií o tejto problematike, ktoré žiakom a žiačkam poskytneme. Keď žiakom a žiačkam zadávame matematické úlohy, ktorých obsah sa týka vplyvu ľudí na životné prostredie, je vhodné uvádzať konkrétne príklady, ktoré poznajú zo svojho okolia a tiež praktické tipy, ako je možné pri vykonávaní bežných činností brať do úvahy aj následné dopady na prírodu. V úlohách sa môžeme venovať spotrebe elektrickej energie a vody alebo napríklad spôsobom ako eliminovať množstvo odpadu (minimalizácia, opätovné používanie a recyklácia). Niektorí argumentujú, že na to, aby sa počas vyučovania týmto témam venovali nemajú čas. Avšak o čo je časovo náročnejšie v úlohách stromy sadiť ako ich rúbať?

Úloha 1: Jakub umýva riad. Prietok vody je 300 litrov za hodinu. Jakubovi v izbe zazvoní telefón. Cesta z kuchyne do izby mu trvá pol minúty, telefonát vybaví za 6 minút, cesta z izby do kuchyne mu trvá ďalšiu pol minútu.

a) Po návrate do kuchyne zistí, že nechal pustenú vodu. Koľko vody počas jeho neprítomnosti vytieklo?

b) Koľkým ľuďom by táto voda vystačila na pitie na jeden deň, keď počítame, že človek denne vypije v priemere 2,5 litra vody?

Poznámky k úlohe 1:

Prietok vody môžu jednoducho zistiť aj samotní žiaci a žiačky. Vhodnou príležitosť je napríklad napĺňanie fliaš určených na polievanie kvetov. Tento spôsob má výhodu v tom, že pri ňom uplatňujeme zásadu aktivity, pričom údaj získaný takýmto spôsobom si žiaci a žiačky vedia lepšie predstaviť.

Úloha 2: Andrej si všimol, že jeho mama priemerne počas mesiaca spotrebuje 3/4 balíka obsahujúceho 500 listov kancelárskeho papiera.

a) Koľko papierov spotrebuje Andrejova mama ročne?

b) Koľko balíkov papiera by Andrejova mama ušetrila, keby na ne tlačila dokumenty obojstranne?

c) Akými ďalšími spôsobmi by Andrejova mama mohla zredukovať spotrebu papiera? O koľko?

Poznámka k úlohe 2: Pri tejto úlohe je užitočné hovoriť aj o ekologickom dopade spotreby papiera – výrub stromov, výroba papiera a zbytočne vyprodukovaný odpad. Podúloha c) by mala viesť k diskusii na túto tému.

Ak chceme, aby sa žiaci a žiačky viac zamysleli nad vlastnou spotrebou papiera, môžeme im za domácu úlohu zadať, aby sledovali, koľko papiera spotrebujú za týždeň a následne s takto získanými údajmi pracovať – výroba grafu, vypočítanie priemernej spotreby papiera na jedného žiaka a pod.

Úloha 3: Otecko sa rozhodol pripraviť nedeľný obed. Zvyčajne varí bez pokrievky a trvá mu to približne 1,5 hodiny. Na internete sa však dočítal, že varenie s pokrievkou môže skrátiť čas prípravy jedla až o 60 %.

a) Koľko bude trvať uvarenie obeda, keď sa rozhodne využiť pokrievku?

b) Koľko energie tým ušetrí, keď uvažujeme príkon platničky 4 kW (Množstvo minutej elektrickej energie sa bežne udáva v kWh, pričom 1 kWh je energia, ktorú spotrebuje zariadenie s príkonom 1 kW za hodinu.)

Poznámka k úlohe 3: V úlohe v záujme odbúravania rodových stereotypov nedeľný obed pripravuje otec.

Prevencia závislostí je ďalšou závažnou výchovnou témou, pričom jej závažnosť je daná aj neustále sa zvyšujúcim počtom ľudí, ktorých život je nejakou formou závislosti priamo ovplyvnený (Kolibáš – Novotný, 2007, str. 10). Preto je dôležité ukazovať žiakom a žiačkam praktické výhody plynúce z odmietania závislostí (ekonomické hľadisko, na ktoré môžeme nenásilne poukazovať na hodinách matematiky, či zdravotné hľadisko, ktoré môže byť včlenené do vyučovania biológie, či ekológie). Okrem informovanosti by mala byť prevencia na školách zameraná tiež na rozvíjanie rozhodovacích schopností jednotlivca (tzv. schopnosť povedať „nie“), budovanie pozitívneho sebahodnotenia a rozvoj otvorenej komunikácie.

Úloha 4: Ema denne vyfajčí 8 cigariet. Cena balíčka obsahujúceho 10 ks cigariet je 1,5 €.

a) Koľko peňazí minie Ema na cigarety za mesiac?

b) Koľko peňazí minie Ema na cigarety ročne?

c) Ema si už dlhšie chce kúpiť iPod, ktorý stojí 180 €. Ako dlho by musela nefajčiť, aby si za ušetrené peniaze mohla tento iPod kúpiť?

d) Porozmýšľajte, čo iné by si mohla z ušetrených peňazí kúpiť, keby nefajčila mesiac alebo rok.

Poznámka k úlohe 4: V rámci vyučovania matematiky sa nám naskytá široká škála možností ako poukázať na negatívne dôsledky fajčenia. Dobrou cestou môže byť poukázanie na okamžitú výhodu, ktorú prináša to, keď sa človek rozhodne nefajčiť – ekonomické hľadisko. Dôsledkom, ktorý si mladí fajčiari a fajčiarky neradi uvedomujú je celkové zhoršenie zdravotného stavu, kondície a riziko vzniku rôznych ochorení, napr. rakoviny pľúc a impotencie.

Úloha 5: Kristínin brat si všimol, že Kristína v poslednej dobe viac a viac času trávi za počítačom. Prekážalo mu, že ho k počítaču nepúšťa a preto sa rozhodol zistiť, prečo trávi pri počítači toľko času. Opýtal sa jej a ona mu odpovedala, že má veľa školských povinností, na ktoré počítač potrebuje. Jeho však táto odpoveď neuspokojila a preto sa rozhodol týždeň sledovať, koľko času venuje Kristína jednotlivým činnostiam pri počítači. Výsledky svojho sledovania zhrnul do nasledujúcej tabuľky, do ktorého zaznamenával približný čas v minútach:

	Komunikácia s kamarátmi a kamarátkami	Robenie úloh, príprava na vyučovanie	Hranie hier	Surfovanie na internete, čítanie článkov
Pondelok	140	80	140	40
Utorok	120	110	120	70
Streda	200	80	60	30
Štvrtok	130	60	90	80
Piatok	130	30	100	50
Sobota	260	20	230	60
Nedeľa	200	110	140	30

a) Zostavte kruhový graf vyjadrujúci, percentuálne zastúpenie jednotlivých činností, ktoré Kristína robí pri počítači.

b) Zostavte stĺpcový graf vyjadrujúci, koľko času strávi Kristína pri počítači počas jednotlivých dní.

c) Zostavte stĺpcový graf vyjadrujúci, koľko času strávi Kristína pri počítači počas jednotlivých dní školskou prípravou.

d) Interpretujte, čo môžete zistiť z jednotlivých grafov.

e) Vyrobte podobnú tabuľku a grafy o tom, ako trávite čas pri počítači vy. V prípade, že vo voľnom čase netrávite čas pri počítači, vyrobte podobnú tabuľku a grafy o tom, ako trávite svoj voľný čas (stačí, keď vyberiete niekoľko činností, ktorým sa venujete najčastejšie).

Poznámka k úlohe 5: V posledných rokoch sa čoraz častejšie stretávame s fenoménom závislostí na internete a počítačových hrách. Hranie počítačových hier sa stáva problémom vtedy, keď dĺžka času, ktorý človek obetuje hraniu prekročí určitú únosnú hranicu a človek sa venuje hraniu na úkor iných činností. Žiaci a žiačky by mali mať reálnu predstavu o tom, aké množstvo času strávia pri počítači a mali by si uvedomovať, aké je pre nich dôležité tráviť svoj voľný čas aktívne. Na to je zameraná podúloha e).

Záver

V predkladanom článku sme sa venovali dôležitej a aktuálnej téme, rozvoju výchovnej stránky edukácie v rámci vyučovania školskej matematiky. Cieľom článku boli ilustrovať použitie kontextových matematických úloh ako prostriedku na rozvoj matematických vedomostí žiakov a žiačok ale aj na podporu výchovnej stránky edukačného procesu. V článku uvádzame niektoré pravidlá tvorby kontextových úloh a ako jadro článku konkrétne ukážky kontextových matematických úloh s problematikou environmentálnej výchovy a prevencie závislostí. Veríme, že uvedené úlohy budú slúžiť ako ilustrácia a motivácia pre učiteľov matematiky na tvorbu a používanie kontextových matematických úloh s výchovným aspektom.

LITERATÚRA

[1] Fulier, J. – Šedivý, O.: *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Edícia Prírodovedec, publikácia č. 87, Nitra, 2001, ISBN 80-8050-445-8

[2] Kolibáš, E. – Novotný, V.: *Alkohol, drogy, závislosti. Psychické poruchy spojené s užívaním návykových látok*, Bratislava, Univerzita Komenského, 2007, ISBN 978-80-223-2315-4

[3] Pavlovičová, G., Švecová, V.: *Pracovné dielne z geometrie*, Nitra, Fakulta prírodných vied UKF, 2009, ISBN 978-80-8094-566-4

[4] Kohanová, I.: *Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky*, Acta Mathematica, Vol. 13., Nitra, Univerzita Konštantína Filozofa, ISBN 978-80-8094-781-1, s. 127-132

[5] Regecová, M. – Slavíčková, M.: *Financial Literacy of Graduated Students*, Acta Didactica Universitatis Comenianae-Mathematics, 10, Bratislava, Univerzita Komenského, ISBN , s. 121-147

[6] Sullivan, P. – Zevenberg, R. – Mousley, J.: *The Contexts of Mathematics Tasks and the Context of the Classroom: Are We Including all Students?,* Mathematics Education Research Journal, 15, 2, 2003, ISSN 1033-2170, s. 107-121

[7] Vallo, Dušan: *Rôzne metódy riešenia jednej úlohy,* Matematika, fyzika, informatika, 18, 7, 2009, ISSN 1210-1761, s. 396-407

[8] Vallo, D., Záhorská, J., Ďuriš, V. (2010): *Aspects interactive software Geogebra in geometric*, Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovaní, Nitra, FPV UKF v Nitre, ISBN 978-80-8094-853-5, s. 65-71

Bc. Vladimíra Laššáková
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: vladka.lassakova@gmail.com

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

UČEBNICA, Z KTOREJ JE RADOSŤ ŠTUDOVAŤ MATEMATIKU

TOMÁŠ LENGYELFALUSY, DANA LENGYELFALUSYOVÁ

ABSTRACT. The contribution deals with characteristics of the textbooks of mathematics by Dr. Franz Močnik (1814 – 1892). We point out progressive features of his works on selected samples and we highlight his pedagogical mastery within them. The textbooks of mathematics by Dr. Franz Močnik became models for other textbook writers until the mid-20 th century.

Úvod

Vyučovanie matematiky je nemysliteľné bez dobrých učebníc matematiky, bez dobrej metodickej pripravenosti učiteľov a bez zapálenosti učiteľov matematiky pre radosť z učenia. Ten, kto v sebe spájal všetky tie tri podmienky, resp. požiadavky bol Dr. Franz Močnik, autor desiatok učebníc matematiky, skúsený a zapálený pedagóg, matematik, metodik a určujúca osobnosť vyučovania matematiky v druhej polovici 19. storočia. V tomto príspevku chceme priblížiť osobnosť autora učebníc matematiky, charakterizovať jeho učebnice a na základe konkrétnych príkladov poukázať na pokrokové prvky v jeho učebniciach a na jeho metodické majstrovstvo.

Autor učebníc matematiky Dr. Franz Močnik

Dr. Franz Močnik (František, Ferencz, Franciscu) sa narodil 1. októbra 1814 v Cerknom v Slovinsku. V rokoch 1821 – 1824 navštevoval Ľudovú školu v Indriji a v rokoch 1824 – 1832 Gymnázium s lýceom v Ľubľane. Študoval teológiu na seminári v Gorzi, a matematiku v Grazi, kde v roku 1840 získal aj doktorát z filozofie. V rokoch 1846 – 1849 ako profesor elementárnej matematiky pôsobil na Technickej akadémii v Ľvove a v rokoch 1849 – 50 na univerzite v Olomouci, kde bol dekanom filozofie. V roku 1850 bol menovaný inšpektorom reálnych a národných škôl v Krain a od roku 1860 s titulom školný radca sa stal inšpektorom pre ľudové školy a reálky v Grazi. Od roku 1869 až do svojho odchodu na dôchodok v roku 1871 bol hlavným školským inšpektorom Štajerska s pôsobiskom v Grazi a zemským inšpektorom prvej triedy. V roku 1871 ho Franz Jozef I. prijal do rytierskeho stavu. Zomrel 30. novembra 1892 v Grazi.

Tento pôvodom slovinský matematik mal mimoriadne veľký vplyv na vyučovanie matematiky na ľudových a stredných školách v celej Rakúsko – Uhorskej monarchii v druhej polovici 19. storočia. Stal sa celorakúskym autorom učebníc matematiky pre ľudové a stredné školy. Písal po nemecky, ale jeho učebnice boli preložené do všetkých jazykov Monarchie. Bol veľmi všestranným matematikom so zmyslom pre aplikáciu matematických vedomostí do každodennej praxe a s nadaním pre metodiku vyučovania matematiky. Močnikove učebnice sú prehľadné, dobre členené metodicky správne spracované. Nové pojmy a dôležité vety sú zvýraznené. V každom paragrafe sú najprv uvedené nové pojmy a tvrdenia, ktoré často sú aj dokázané a potom nasledujú riešené príklady, ktoré sú vždy patrične okomentované. V závere kapitol, resp. v závere učebníc sú neriešené úlohy na precvičovanie.

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 3/7090/09 Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek

Obr.1: Dr. Franz Močnik (1814 – 1892)

Dr. Močnik napísal celkovo 52 učebníc matematiky pre ľudové, ale prevažne pre stredné školy, ktoré boli preložené do všetkých jazykov Monarchie a vyšli v mnohých vydaniach až do začiatku 20. storočia. Autor týchto učebníc svojim majstrovským prístupom k spracovaniu učiva ovplyvnil aj ďalších autorov učebníc až do polovice 20. storočia. Čo sa týka rozsahu, jednotlivé učebnice mali od 32 do 655 strán, ale najčastejšie okolo 300 – 350. Nie vždy boli určené pre daný ročník, ale pre stupeň štúdia (pre nižšie triedy stredných škôl, pre vyššie triedy stredných škôl a pod.). Jediné, čo sa dá vytýkať Močnikovým učebniciam je to, že príliš šetril priestorom (papierom) a často je v jeho učebniciach text veľmi zhustený, čo do určitej miery zhoršuje názornosť.

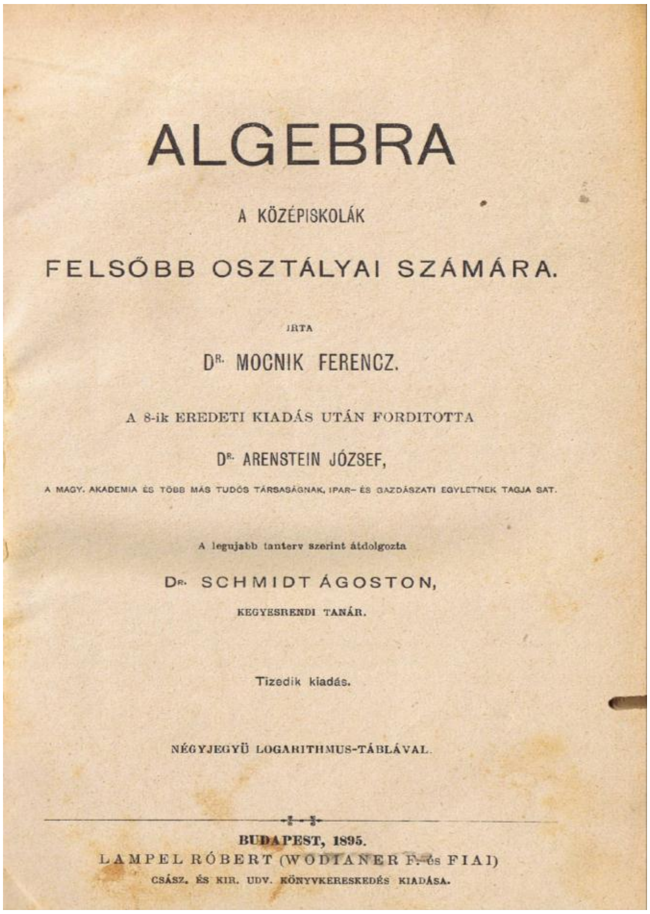
Algebra pre vyššie triedy stredných škôl

Ako sme v úvode spomínali pokúsime sa charakterizovať Močnikove učebnice na základe konkrétnych ukážok z jeho tvorby. Ako vzor sme si vybrali učebnicu Algebry pre vyššie triedy stredných škôl. Autori tohto príspevku mali k dispozícii 10. vydanie prepracovanej učebnice na základe prekladu 8. nezmeneného vydania z roku 1895. Na titulnej strane učebnice môžeme prečítať nasledovné: "Algebra pre vyššie triedy stredných škôl. Napísal Dr. Mocnik Ferenc. Na základe 8. pôvodného vydania preložil Dr. Arenstein József. Na základe najnovších učebných osnov prepracoval Dr. Schmidt Ágoston, piarista. Desiate vydanie so švormistnou logaritmickou tabuľkou. Budapest 1895."

Učebnica má celkom 371 strán v nasledovnom členení:

- strany 1 – 4 Úvod,
- strany 5 – 250 Samotná učebnica členená na 10 úsekov. Celá učebnica je ďalej členená na paragrafy tak, že číslovanie paragrafov je priebežné. Celkovo je 85 §,
- strany 251 – 340 Appendix I. Otázky a úlohy jednotlivým úsekom. Táto časť, ktorá je zdanlivo iba prílohou, obsahuje celkom 606 otázok a úloh k jednotlivým úsekom (kapitolám) učebnice.

- strany 341 – 365 Appendix II. Systematizácia poznatkov z elementárnej algebry. V tejto časti autor uvádza 231 najdôležitejších vzorcov a vzťahov, ktoré v učebnici používa. Podrobný a systematický prehľad učiva je doplnený aj historickým prehľadom najdôležitejších osobností a udalostí v súvislosti s algebrou,
- strany 366 – 368 Podrobný obsah celej učebnice,
- strany 370 – 371 Logaritmické tabuľky

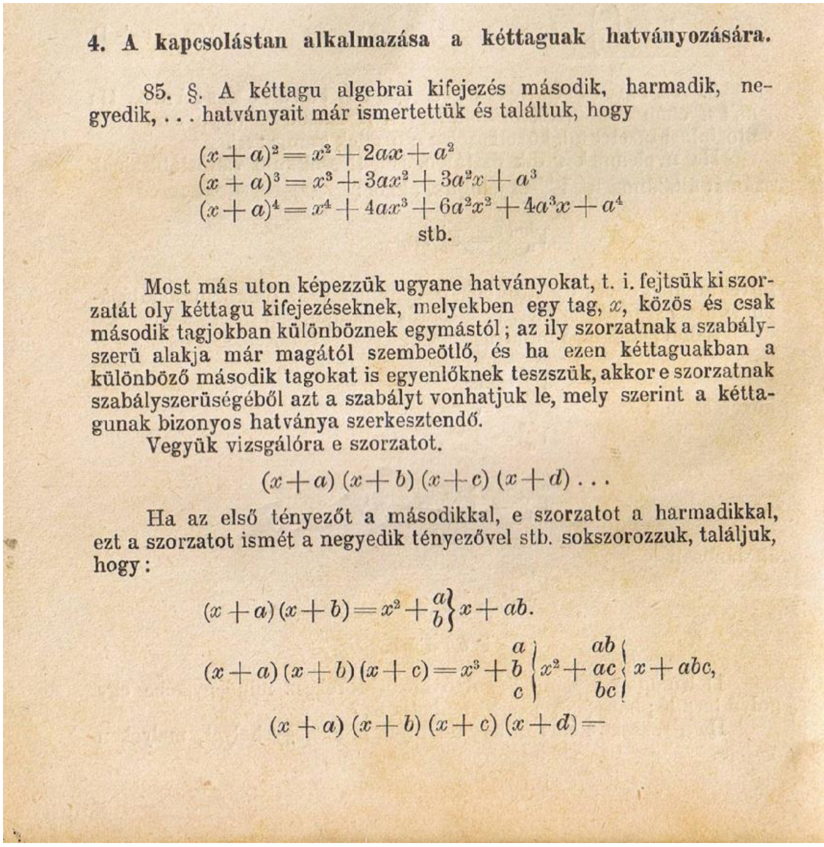

ALGEBRA
A KÖZÉPISKOLÁK
FELSŐBB OSZTÁLYAI SZÁMÁRA.
IRTA
DR. MOCNIK FERENCZ.
A 8-ik EREDETI KIADÁS UTÁN FORDITOTTA
DR. ARENSTEIN JÓZSEF,
A MAGY. AKADEMIA ÉS TÖBB MÁS TUDÓS TÁRSASÁGNAK, IPAR- ÉS GAZDÁSZATI EGYLETNEK TAGJA SAT.
A legujabb tanterv szerint átdolgozta
DR. SCHMIDT ÁGOSTON,
KEGYESRENDI TANÁR.
Tizedik kiadás.
NÉGYJEGYŰ LOGARITHMUS-TÁBLÁVAL.
BUDAPEST, 1895.
LAMPEL RÓBERT (WODIANER F. és FIAI)
CSÁSZ. ÉS KIR. UDV. KÖNYVKERESKEDÉS KIADÁSA.

Obr. 2: Titulná strana Močnikovej učebnice z roku 1895

Učebnica je určená pre vyššie triedy stredných škôl a skutočne obsahuje kompletné učivo algebry v tom období potrebné k maturitnej skúške z matematiky. Z pohľadu dnešných požiadaviek obsahovala aj mnohé také podkapitoly, ktoré v súčasnosti nie sú v učive stredných škôl. Treba podotknúť fakt, že v tom období neexistovali kalkulačky a preto v učebnici sa venuje náležitá pozornosť aj výpočtom druhej a tretej odmocniny, výpočtom logaritmov pomocou logaritmickej tabuľky a precvičovaniu elementárnych zručností pri počítaní s desatinnými číslami.

V nasledovných riadkoch predstavíme spomínanú učebnicu podľa jednotlivých úsekov (kapitol), ale neuvádzame všetky podrobnosti, nakoľko rozsah tohto príspevku to nedovoľuje. Zameriavame sa iba na tie prvky, ktoré sú z dnešného pohľadu zaujímavé, resp. prekvapivé.

- 1. úsek: základné algebrické operácie, zlomky a operácie so zlomkami, najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok viacerých čísel, deliteľnosť, prvočíselný rozklad daného prirodzeného čísla.
- 2. úsek: O rovniciach všeobecne, lineárne rovnice s jednou a s viacerými neznámymi, o pomeroch, trojčlenka, zložená trojčlenka, pomerné delenie.
- 3. úsek: Vyššie prirodzené mocniny dvojčlenov, binomické koeficienty, aritmetická postupnosť.
- 4. úsek: Druhá odmocnina, kvadratická rovnica, operácie s odmocninami, druhá odmocnina z algebrických výrazov, kvadratická rovnica s viacerými neznámymi, tretia odmocnina, tretia odmocnina z algebrických výrazov.
- 5. úsek: Zovšeobecnenie mocniny a odmocniny, pravidlá pre umocňovanie a odmocňovanie, iracionálne čísla, komplexné čísla.
- 6. úsek: Logaritmy, exponenciálne rovnice.
- 7. úsek: Geometrická postupnosť, nekonečný geometrický rad a jeho aplikácie vo finančníctve.
- 8. úsek: Teória kvadratickej rovnice, zovšeobecnenia, rovnice vyššieho stupňa, riešenie rovníc vyššieho stupňa pomocou úpravy na kvadratickú rovnicu, reciproké rovnice, lineárne a kvadratické funkcie.
- 9. úsek: Kubické rovnice, diofantické rovnice.
- 10. úsek: Kombinatorika



4. A kapcsolástan alkalmazása a kéttaguak hatványozására.

85. §. A kéttagu algebrai kifejezés második, harmadik, negyedik, . . . hatványait már ismertettük és találtuk, hogy

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$
stb.

Most más uton képezzük ugyane hatványokat, t. i. fejtsük ki szorzatát oly kéttagu kifejezéseknek, melyekben egy tag, x, közös és csak második tagjokban különböznek egymástól; az ily szorzatnak a szabályszerü alakja már magától szembeötlő, és ha ezen kéttaguakban a különböző második tagokat is egyenlőknek teszszük, akkor e szorzatnak szabályszerüségéből azt a szabályt vonhatjuk le, mely szerint a kéttagunak bizonyos hatványa szerkesztendő.

Vegyük vizsgálóra e szorzatot.

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots$$

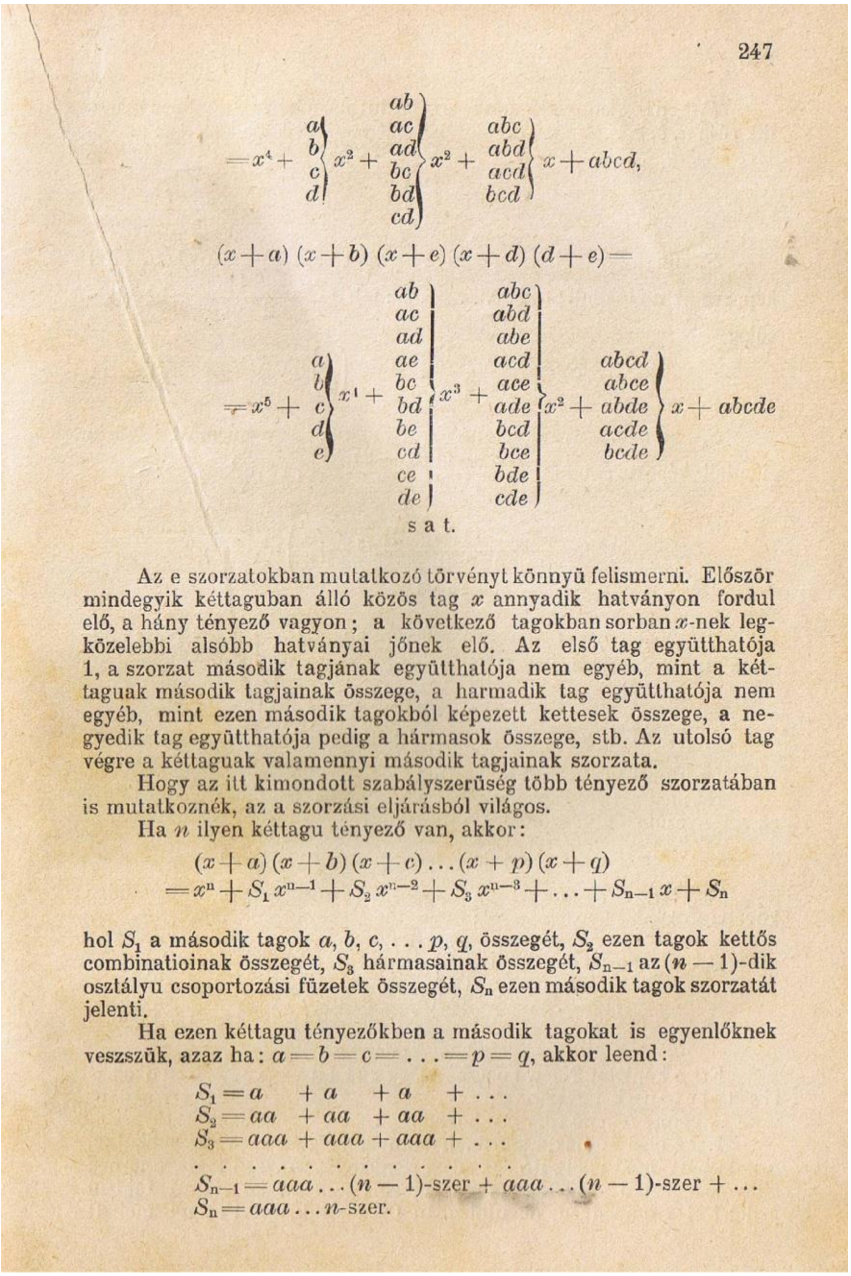
Ha az első tényezőt a másodikkal, e szorzatot a harmadikkal, ezt a szorzatot ismét a negyedik tényezővel stb. sokszorozzuk, találjuk, hogy:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\} x + ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}ab\\ac\\bc\end{matrix}\right\} x + abc,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) =$$

Obr. 3: Ukážka z učebnice



247

$$=x^4+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\bc\\bd\\cd\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\acd\\bcd\end{matrix}\right\}x+abcd,$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+e)\,(x+d)\,(d+e)=$$

$$=x^5+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}\right\}x^1+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\ae\\bc\\bd\\be\\cd\\ce\\de\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\abe\\acd\\ace\\ade\\bcd\\bce\\bde\\cde\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abcd\\abce\\abde\\acde\\bcde\end{matrix}\right\}x+abcde$$

s a t.

Az e szorzatokban mutatkozó törvényt könnyü felismerni. Először mindegyik kéttaguban álló közös tag x annyadik hatványon fordul elő, a hány tényező vagyon; a következő tagokban sorban x-nek legközelebbi alsóbb hatványai jőnek elő. Az első tag együtthatója 1, a szorzat második tagjának együtthatója nem egyéb, mint a kéttaguak második tagjainak összege, a harmadik tag együtthatója nem egyéb, mint ezen második tagokból képezett kettesek összege, a negyedik tag együtthatója pedig a hármasok összege, stb. Az utolsó tag végre a kéttaguak valamennyi második tagjainak szorzata.

Hogy az itt kimondott szabályszerüség több tényező szorzatában is mutatkoznék, az a szorzási eljárásból világos.

Ha n ilyen kéttagu tényező van, akkor:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots(x+p)\,(x+q)$$
$$=x^n+S_1\,x^{n-1}+S_2\,x^{n-2}+S_3\,x^{n-3}+\ldots+S_{n-1}\,x+S_n$$

hol S_1 a második tagok $a, b, c, \ldots p, q$, összegét, S_2 ezen tagok kettős combinatioinak összegét, S_3 hármasainak összegét, S_{n-1} az $(n-1)$-dik osztályu csoportozási füzetek összegét, S_n ezen második tagok szorzatát jelenti.

Ha ezen kéttagu tényezőkben a második tagokat is egyenlőknek veszszük, azaz ha: $a=b=c=\ldots=p=q$, akkor leend:

$$\begin{aligned}S_1&=a+a+a+\ldots\\S_2&=aa+aa+aa+\ldots\\S_3&=aaa+aaa+aaa+\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\\S_{n-1}&=aa\ldots(n-1)\text{-szer}+aaa\ldots(n-1)\text{-szer}+\ldots\\S_n&=aaa\ldots n\text{-szer.}\end{aligned}$$

Obr. 4: Pokračovanie ukážky z učebnice

Ako ukážku zaujímavej časti učebnice sme vybrali zovšeobecnenie umocnenia, resp. násobenia dvojčlenov. Autor tu na základe skúseností s prirodzenou mocninou dvojčlenov (binomická veta) hľadá zovšeobecnenie vzťahu pre súčin dvojčlenov

$$(x + a).(x + b).(x + c)\ldots$$

Na ukážke krásne vidieť súvislosti a ich grafické znázornenie pre prípad dvoch, troch, štyroch a piatich činiteľov a v závere aj zovšeobecnenie tohto objavu.

Záver

Nie je možné na niekoľkých stranách tohto príspevku detailne analyzovať všetky prvky (pozitívne aj negatívne, moderné aj zastaralé) ani jednej učebnice, ale na základe podrobného štúdia tejto, či iných Močnikových učebníc čitateľ ľahko zistí, že autor mal skutočne bohaté skúsenosti s vyučovaním matematiky, mal obrovský talent a cit pre efektívne a názorné podávanie učiva a v neposlednom rade našiel vždy cestu ku konkrétnym aplikáciám daného učiva.

Na záver musíme konštatovať, že bohužiaľ neexistuje žiadna komplexná analýza učebníc matematiky používaných na území dnešného Slovenska v 18., 19. a 20. storočí, aj keď sa už písali niektoré diplomové práce na čiastkové problémy z tejto oblasti. Myslíme si, že by bolo vhodné a užitočné zmapovať a spracovať spomenuté učebnice, aby aj ďalšie generácie učiteľov a študentov pripravujúcich sa na učiteľské povolanie mali aspoň prehľad o tom, z čoho, čo a v akých súvislostiach sa učili matematiku študenti na „základných a stredných školách“ v spomínaných storočiach.

LITERATÚRA

[1] LENGYELFALUSY, T.: *Vyučovanie matematiky na území Slovenska v období 1777 – 1848.* monografia, EDIS ŽU, Žilina, 2004, ISBN 80-8007-180-6

[2] MOČNIK, F.: *Algebra a középiskolák felsobb osztályai számára.* stredoškolská učebnica, Budapest, Lampel Róbert, 1895.

[3] František Močnik – matematik, pedagóg. [cit. 16.08.2011]Dostupné na http://www.mat.savba.sk/MATEMATICI/matematici.php?cislo=146

[4] NEMRICHTOVÁ, J.: *Teorie pravděpodobnosti v učebnicích středních škol.* Diplomová práca, MU Brno 2009. [cit. 16.08.2011] Dostupné na http://is.muni.cz/th/98809/fi_m/diplomova_prace_nimrichtrova.txt

Doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta humanitných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 010 26 Žilina
e-mail: tomas.lengyelfalusy@fpv.uniza.sk

PaedDr. Dana Lengyelfalusyová
Katedra anglického jazyka a literatúry
Fakulta humanitných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 010 26 Žilina
e-mail: dana.lengyelfalusyova@fpv.uniza.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

REMARKS CONCERNING SOLVING NON-STANDARD TASKS BY PUPILS

MAJOR JOANNA

ABSTRACT. In this paper I search for answers about the impact of excess or deficiency of data on students solving text tasks.

One of possible looks on mathematics is a glimpse through the perspective of mathematical tasks. Solving math problems is a major goal of mathematics at every stage of mathematical education. The aim of the work is solving customized mathematical text tasks by pupils. I refer to the task of excess and insufficiency of data. The tasks of this type are rarely found in textbooks, and consequently most pupils do not have too many opportunities to solve such tasks.

Let us start by giving a few remarks about the text mathematical tasks. According to S. Turnau (1990) *The text task will be broadly understood as word text containing the value of certain object, the relationship between values and the question or command. Not necessarily, however, the data must be - as in classical tasks - the necessary and sufficient information about the unique and correct answer.* With this view corresponds to the sentence by Cydzik Z. (1990), which states that this is a *life task including such numerical data associated by dependencies, which leads to detecting an answer to the main question. Therefore it consists of the life situation and conditions occurring in the mathematical background of this situation, which are expressed in numerical data (often verbal) and the main questions*. A. Gray says, however, that: *Text math problem is a specific, usually crafted and adapted to the needs of students at the appropriate level of teaching and characterized by a specific construct having a particular structure which according to M. Cackowskiej consists of two layers: the verbal and mathematical* (Kalinowska, 2010).

The literature contains a range of classification and division of tasks of text depending on an adopted criterion. I would like to draw attention to selected types of tasks related to the subject of this work. Custom tasks can be characterized by:

a) excess data
- data unrelated to the solution;
- duplicate data;

b) insufficient information (deficit data)
- tasks that cannot be solved;
- tasks that are ambiguous solution.

The leitmotiv of the study was to search for answers about the impact of excess or deficiency of data on students solving text tasks. The study aimed to find even partial answers to these questions:

- Are pupils able to see the deficit data in the content of the task and state that the task has an ambiguous solution, or cannot be solved at all?

- Is the solution of the problem with data overload students will use all the data, or The study also attempted to answer additional questions:

- What are the difficulties and errors encountered by pupils when solving customized tasks?

The study attempted to determine the attitudes of the of respondents presented in the work on tasks. It also attempted to determine the subjective feelings about such easiness of tasks or attitudes of respondents to the solving of the text tasks. Some reflections on the recent of these issues will be raised in this paper.

Research methodology was based on an analysis of the solutions presented by students. Additional research material was student responses to the questions attached to the survey tasks. The research group consisted of 2 groups of third from 38 pupils of Krakow's high school. In the view of mathematics teachers in each class pupils have high mathematical skills. Here are the tasks of the questionnaire study.

1. Calculate the volume of the cube, where the diagonal side wall has a length $3\sqrt{2}$ cm, a surface area is equal 9 cm^2. Present calculations with appropriate commentary and give an answer.
2. Adaś, Staś and Antek went mushroom picking. Adaś picked about 16 mushrooms more than Staś, while Antek as many as Adam and Staś together. How many mushrooms were picked by the boys together? Present calculations and justify the answer.
3. Determine the perimeter of the rectangle, knowing that the area is equal to 18 cm^2, length of the sides are natural numbers. Save the calculation with the comment and give answers.
4. The area of a triangle is equal to 6 cm^2. The sides of the triangle have the following lengths: 3 cm, 4 cm, 5 cm and radius of the Circumscribed circle of this triangle is 2,5 cm. Is it obtuse-angled triangle? Present calculations and justify the answer.
5. Matthew is now 21 years old. His mom is older than his dad about a year. Matthew's dad is 25 years his senior. How old is Matthew's dad now, and how much will he be next year? Present calculation with the comment and give answers.

Tasks are custom tasks, namely task 1, 4 and 5 are known tasks with an excess of data, and in tasks 2 and 3 we observe the phenomenon of deficit data. Task 1 is an example of the task of duplication in the data. Task 2 is an example of the tasks of data underflow, where the solution is not clear. Task 3 is an example of a task with the deficit as a consequence of the data leading to ambiguous solutions. Task 4 is a combination of two types of tasks with an excess of data, because it contains duplicate data, as well as information not associated with the solution task. In task 5, we have an excess of data in the content of the task. Unnecessary information is not related to the termination of the task. The data do not contradictory with each other.

On the last page of the questionnaire there was a questionnaire study. The first question concerned the determination of the level of difficulty of the tasks included in the questionnaire and explaining what these problems were about. The second question about what particular math problem the task concerned. Responses to question four of whether students like (and why) the tasks of content, were to reveal emotions associated with the contents of solving text tasks.

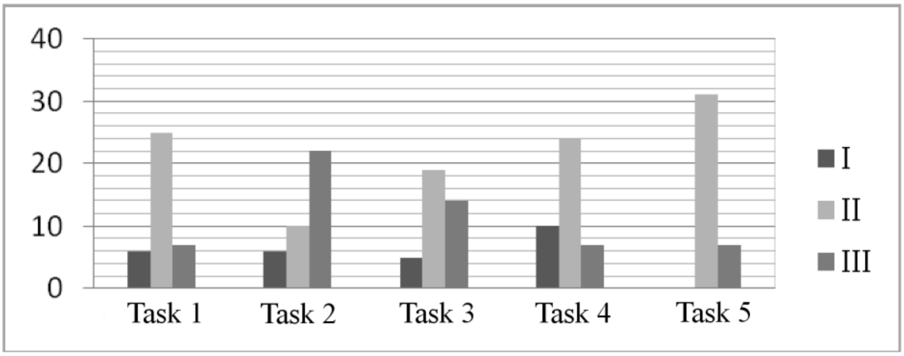
Analyzing the solution of tasks given by the pupils, we can distinguish three types of behaviour of respondents.

I. Pupil **does not attempt** to solve the task, or **abandons** it after a failed attempt to find the right way of solving the problem.

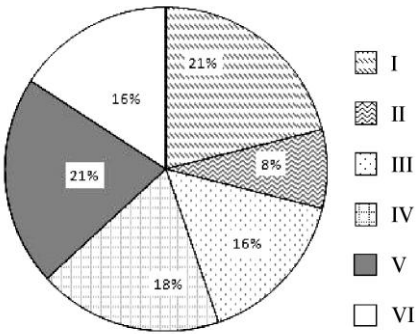
II. Pupil solves the task correctly **without providing any comment** both on the structure of tasks and reasoning.

III. Pupil solves the task correctly enriching it with commentary, such as observation regarding the amount of data, or explanation of the presence of more than one solution to the task.

Attitudes of respondents in relation to particular tasks were varied (see Figure 1).



As it is clear from the data in the chart, the most common attitude is the attitude of pupils labeled as II, the solving of tasks without giving any comments. Another situation we observe only in the task 2, where pupils presented their solutions most with comments. The last frequest we have an attitude indicated as I, the absence or abandonment of attempts to solve the task. Only in task 4 the number of pupils presenting this attitude is greater than the number of subjects who solved the task with comment. The attitude marked III can be found in different tendencies towards particular tasks.



The diagram presents the pupils' answers to the questions: Have you noticed what characterized the task?

Pupils pointed out:

I. **The excess or deficit of data** – pupils indicate as a characteristics of all the tasks is the impairment amount of information given in the text of the task, e.g.
   - ***Contained too much or too little data.***

II. **Text tasks** – pupils observation is that they are different text tasks, such as

- *It was the text task.*

III. **The varying levels of difficulty, tricky** – pupils mention as a common feature the fact that the tasks were at different levels of difficulty and / or task were often tricky, for example,
- *Each of them has more or less difficulty*;
- *These tasks were tricky ones.*

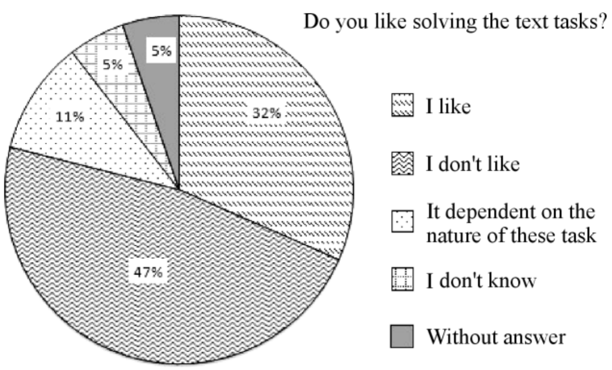
IV. **Other observations** – this group chose to answer single, individual statements on questions such as
- *Each task required to analyze and store solutions in accordance with the reasoning;*
- *Maybe the point is that the solution lequires various mathematical skills, not just book formulas;*
- *There is a lot of geometry.*

V. **Nothing** – respondents wrote in their answers that they did not notice any common features characterizing all tasks, such as
- *I noticed nothing;*

VI. **No answer**.

task	average grades level of difficulty task
task 1	**2,9**
task 2	**4,8**
task 3	**2,5**
task 4	**4,4**
task 5	**1,0**

The table contains the average grade level of difficulty of individual tasks that pupils presented in the questionnaire. Respondents used a scale from 0 to 10, where 0 meant a very easy task and 10 a very difficult task. From the data contained in the table we can conclude that students considered task 2 the most difficult, the average difficulty of wich is 4.8. Next, there is the task number four with an average 4.4 rating. Based on the above information we can conclude that the pupils considered task 5 the easiest, the average difficulty of 1.0.



From this diagram we can read that the largest percentage of respondents expressed a negative attitude to solving the text tasks, up 47% of people said they did not like this type of tasks. While fully supportive of the text tasks were 32% of all respondents which means 12 people like to solve such tasks. In addition, four people wrote that their attitude to the text task depends on the nature of these tasks and issues which theyrelate to, because not everyone likes them . Only two people expressed their indifference as to solving the text task, and another 2 people provided no answer.

Analysis of the results showed that pupils' attitudes towards solving presented customized tasks are very different. With great conviction, on the basis of pupils' work, it can be concluded that the presence of the deficit or excess of data in the body text tasks is an extra difficulty for the pupils and one of the main sources of trouble while solving.

Respondents during working on tasks demonstrated big difficulties with the process of partition of task, which among others S. Turnau mentions (...).These difficulties appear in the phase, which G. Polya describes as the phase of understanding the task. Pupils had difficulty with separation of unknowns involved in the question content of the task. Then there were difficulties with the selection of data needed to solve, to find the relationship between what is searched, and what is given in the text of the task.

In relation to the tasks with extra data in the content of task pupils tried many solutions, as it were by force, taking advantage of all the information, which as a result often lead to incorrect solution to the problem. The tasks with duplicate data (task 1) and in the task where no data appear related to the termination of task (task 5), only 18% of respondents in the solution of each of these tasks reported the disturbance in the structure of the task. However, in a task where we dealing with the firs and the second type of excess data in the body of task 4, only 8% of those respondents noticed the disturbance.

In solutions of tasks with a deficit, attitudes of pupils were divergent depending on the task. In relation to the task where deficit of data resulted in the lack of possibility of unambiguous solution (task 2), the problem was noticed an named by 58% of respondents. However, in task 3 with data deficit and ambiguous solution (task 3) 24% of respondents noticed all solutions. At the same time, 38% of respondents stopped at finding only one solutions. These respondents didn't check if that was the only answer meeting the conditions of the task. Only 5% of respondents pointed out that the reason for ambiguity of the answer. is the information included in the task. One can assume that most respondents have no need to reflect on the task and does not conduct the look back on your work phase in their reasoning.

The study revealed a lot of interesting, and not described in this paper information. Information both on knowledge and skills possessed by pupils, as well as the process of solving text tasks by respondents. At the same time a test result indicates a strong need for pupils to propose solving customized tasks.

BIBLIOGRAPHY

[1.] Z. Cydzik, *Metodyka nauczania początkowego matematyki*, WSiP, Warszawa 1990.

[2.] J. Górowski, A Łomnicki, *Czwarty stopień wtajemniczenia*, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała 1996.

[3.] A. Kalinowska, *Matematyczne zadania problemowe w klasach początkowych – między wiedzą osobistą a jej formalizacją,* Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2010.

[4.] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki, część 3*, WSiP, Warszawa 1977.

[5.] J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wydawnictwo Nowik, Opole 2009.

[6.] G. Polya, *Jak to rozwiązać? Nowy aspekt metody matematycznej*, PWN, Warszawa 1964.

[7.] S. Turnau, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa 1990.

[8.] S. Turnau, *Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych*, [in:] *Nauczanie początkowe matematyki, T.3*, pod redakcją Z. Semadeniego, WSiP, Warszawa 1985.

Dr Joanna Major
Institute of Mathematics
Pedagogical University of Cracow
Podchorążych 2
PL – 30-084 Cracow
e-mail: jmajor@up.krakow.pl

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

OBSAHOVÁ NÁPLŇ A ANALÝZA ŠTUDIJNÝCH VÝSLEDKOV Z MATEMATIKY V EKONOMICKÝCH ŠTUDIJNÝCH PROGRAMOCH

DANA ORSZÁGHOVÁ

ABSTRACT. The study results of mathematics at an university are determined by knowledge of secondary curriculum. The content and the scope of teaching of mathematics are reducing at secondary schools and the graduation exam in mathematics is not compulsory. In the paper we present the analysis of selected tasks of mathematical analysis and study results from the compulsory mathematical subjects in the first study year of bachelor study at the Faculty of Economics and Management at the Slovak University of Agriculture in Nitra.

Úvod

Univerzitné vzdelávanie je otvorený systém, ktorý neustále prechádza zmenami a reaguje na rôzne podnety aj zmenami v štruktúre študijných programov. Menia sa vzťahy medzi vysokoškolskými učiteľmi a ich študentmi s cieľom dosiahnuť čo najlepšie podmienky na rozvoj osobnostného a tvorivého potenciálu študentov. Významné zmeny v charaktere vzdelávania nastávajú aj pod vplyvom virtualizácie vzdelávacieho procesu prostredníctvom informačných a komunikačných technológií. Vysokoškolský učiteľ matematiky sa už nezaobíde bez znalostí rôznych nástrojov informačných technológií [6].

Fakulta ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (SPU) v Nitre má akreditované nasledovné študijné programy na bakalárskom stupni štúdia:

- Ekonomika a manažment agrosektoru,
- Ekonomika podniku,
- Kvantitatívne metódy v ekonómii,
- Manažment podniku,
- Medzinárodné podnikanie s agrárnymi komoditami,
- International Business with Agrarian Commodities (vyučovaný v anglickom jazyku),
- Obchodné podnikanie,
- Účtovníctvo.

Každý z týchto študijných programov obsahuje aj povinné predmety z matematiky, ktoré sa vyučujú v 1. ročníku štúdia. Predmety s obdobným obsahom nájdeme aj v študijných programoch ďalších fakúlt a univerzít ekonomického zamerania. Vedomosti a ovládanie metód riešenia úloh získané štúdiom týchto predmetov študenti používajú v ďalších odborných predmetoch. V riešení motivačných a praktických úloh sa využívajú poznatky a metódy z matematiky, ktoré sa aplikujú v rôznych odborných oblastiach.

Hlavným cieľom štúdia matematických predmetov na SPU v Nitre je poskytnúť študentom určitú škálu poznatkov z vyššej matematiky, ktoré si osvoja a získané vedomosti použijú na riešenie aplikovaných úloh a následne aj v budúcej praxi. Zo skúseností z výučby vyplýva, že študenti majú záujem o štúdium matematických predmetov s praktickými aplikáciami v oblasti ekonómie, ktorá je prioritnou oblasťou ich budúceho profesijného uplatnenia [2], [3].

Na výslednú známku na skúške vplýva mnoho faktorov. Okrem samotného štúdia matematiky na vysokej škole má dôležitý význam:

– adaptácia na vysokoškolský systém štúdia,
– rozsah vedomostí zo stredoškolskej matematiky,
– ovládanie a uplatnenie metód samostatného štúdia na dennej aj externej forme štúdia,
– schopnosť abstrakcie pri vysvetľovaní a pochopení teoretického základu matematických metód,
– logické myslenie a samostatnosť pri postupoch riešenia úloh [5],
– rozvíjanie schopností študentov aplikovať matematiku,
– vytváranie matematických modelov a prostredníctvom nich hľadanie riešení úloh,
– pochopenie matematických princípov a ich aplikovanie [1].

Porovnanie požiadaviek z matematiky na maturitu a na skúšku v 1. ročníku VŠ

Na webovej stránke Štátneho pedagogického ústavu nájdeme platné požiadavky pre jednotlivé predmety, z ktorých maturujú študenti stredných škôl. Na porovnanie stručne uvádzame požiadavky pre gymnáziá platné od školského roku 2011- 2012 a hlavné okruhy sylabu povinného predmetu Matematika A, ktorý študenti majú v 1. ročníku zimného semestra a končí sa skúškou.

<u>Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky</u> [7]

1 Základy matematiky:
1.1 Logika a množiny, 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 1.3 Teória čísel, 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

2 Funkcie:
2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti, 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia,
2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť,
2.5 Goniometrické funkcie

3 Planimetria:
3.1 Základné rovinné útvary, 3.2 Analytická geometria v rovine, 3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie, 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia,
3.5 Konštrukčné úlohy

4 Stereometria:
4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny, 4.2 Súradnicová sústava v priestore, 4.3 Lineárne útvary v priestore, polohové úlohy, 4.4 Lineárne útvary v priestore, metrické úlohy, 4.5 Telesá

5 Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

<u>Sylabus predmetu Matematika A</u>

1 Funkcia jednej reálnej premennej:
pojem funkcie, oblasť definície funkcie, oblasť hodnôt funkcie, vlastnosti funkcií, prehľad elementárnych funkcií, inverzná funkcia, cyklometrické funkcie

2 Limita funkcie jednej reálnej premennej:
definícia limity funkcie, základné typy limít, vety o limitách, asymptoty grafu funkcie

3 Derivácia funkcie jednej reálnej premennej:
pojem derivácie, základné vzorce pre derivácie elementárnych funkcií, vety o derivovaní funkcií, derivácie vyšších rádov

4 Použitie derivácie funkcie:

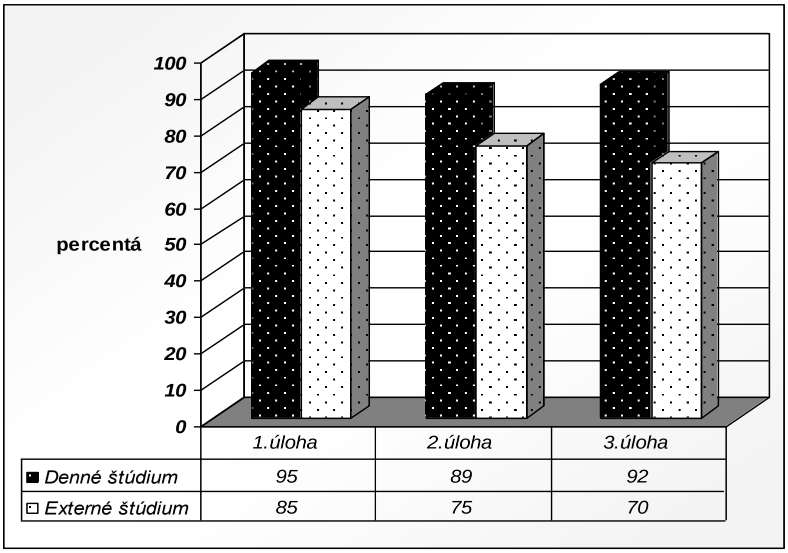
rovnica dotyčnice ku grafu funkcie, priebeh funkcie, monotónnosť funkcie, lokálne a globálne extrémy funkcií, konvexnosť a konkávnosť funkcie, inflexné body funkcie, zisťovanie priebehu funkcie, ekonomické aplikácie derivácie, L´Hospitalovo pravidlo

5 Funkcia dvoch reálnych premenných:
definícia funkcie dvoch reálnych premenných, oblasť definície funkcie, oblasť hodnôt funkcie, limita funkcie dvoch premenných, graf funkcie dvoch premenných (ukážky)

6 Parciálne derivácie funkcie dvoch reálnych premenných:
definícia parciálnej derivácie prvého rádu, parciálne derivácie zloženej funkcie, parciálne derivácie vyšších rádov, použitie parciálnych derivácií: rovnica dotykovej roviny, lokálne extrémy a viazané extrémy funkcie dvoch reálnych premenných.

Z uvedených okruhov a požiadaviek vidíme, že ani na gymnáziách nepatria niektoré témy (napr. limita a derivácia funkcie) do povinného obsahu učiva. Na odborných školách (napr. obchodných akadémiách) majú študenti ešte menej hodín matematiky, a teda aj menší rozsah učiva. Adaptácia na vysokoškolský systém štúdia, ktoré v porovnaní zo stredoškolským vyžaduje viac samostatných aktivít a nerovnorodosť študijných skupín z aspektu absolvovanej strednej školy, to sú hlavné faktory, ktoré spôsobujú študentom prvotné problémy v štúdiu matematiky a ovplyvňujú ich študijné výsledky na skúške.

Vyhodnotenie študijných výsledkov z predmetu Matematika A



Graf 1: Priemerný počet získaných bodov za jednotlivé úlohy (v percentách)

Hlavným zdrojom materiálu, ktorý v príspevku spracovávame, sú údaje a študijné výsledky z výučby povinného predmetu v 1. ročníku zimného semestra *Matematika A*, ktorý je zaradený v študijnom programe *Účtovníctvo* a vyučuje sa v dennej aj externej forme štúdia. Študenti písali počas semestra 2 priebežné kontrolné testy, výsledky z nich sa počítajú do celkového hodnotenia a tretí test písali na skúške. Analyzovali sme riešenia typových úloh (uvedené ďalej) v akademických rokoch 2009/2010 a 2010/2011:

– 64 študentov študijného programu Účtovníctvo v dennej forme štúdia,
– 43 študentov študijného programu Účtovníctvo v externej forme štúdia.

V grafe č. 1 uvádzame priemerný počet bodov za jednotlivé typové úlohy, ktorý študenti získali (vyjadrený v percentách).

Ukážky úloh z matematickej analýzy v predmete Matematika A

V nasledujúcom texte uvádzame znenie hlavných typov úloh, ktoré sa študenti v zimnom semestri majú naučiť riešiť [4]. Pre tých študentov, ktorí nepreberali na strednej škole limitu a deriváciu funkcie jednej premennej, je to náročná časť štúdia hneď v prvom semestri. Funkciu dvoch premenných nemali na strednej škole ani študenti z gymnázií.

Úloha č. 1:

Zistite rovnice asymptot (so smernicou, bez smernice) grafu funkcie $f : y = \dfrac{2x^2 + 4}{x - 2}$ a nájdené asymptoty zobrazte.

Úloha č. 2:

Pomocou derivácie zistite intervaly monotónnosti, stacionárne body a lokálne extrémy funkcie $f\ :\ y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.

Úloha č. 3:

Zistite stacionárne body a lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

$f(x, y) = x^3 - y^3 - 9xy + 5$.

Študijné výsledky z predmetu Matematika A

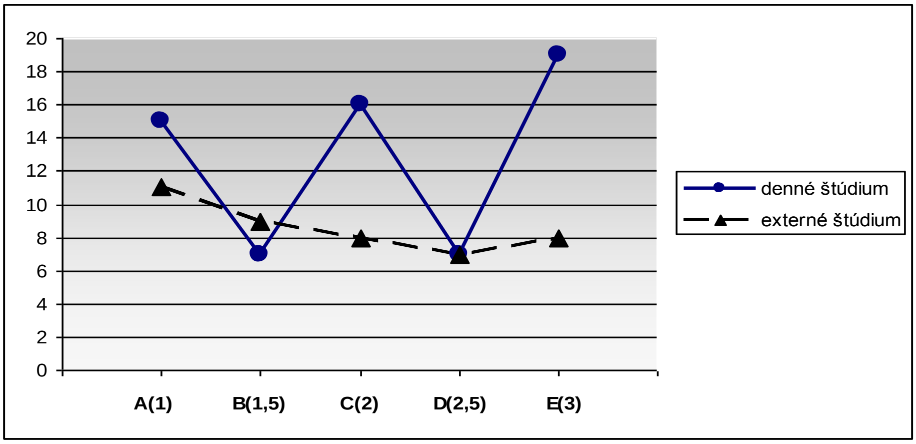
Známka / Študijný program	A(1)	B(1,5)	C(2)	D(2,5)	E(3)	Priemerná známka
Šk. rok 2009/2010						
Účtovníctvo denná forma	4	4	7	3	15	**Ø 2,32**
Účtovníctvo externá forma	3	4	6	2	4	**Ø 2,00**
Spolu	7	8	13	5	19	**Ø 2,20**
Šk. rok 2010/2011						
Účtovníctvo denná forma	11	3	9	4	4	**Ø 1,79**
Účtovníctvo externá forma	8	5	2	5	4	**Ø 1,83**
Spolu	19	8	11	9	8	**Ø 1,81**
Spolu 2009/2010+2010/2011	26	16	24	14	27	**Ø 2,00**
Počet študentov s hodnotením **FX(4)**	Účtovníctvo (DŠ): 2			Účtovníctvo (EŠ): 2		

Tabuľka 1: Prehľad výsledných známok z predmetu Matematika A

V tabuľke č. 1 sú uvedené výsledné známky a priemerná známka na skúške za zimný semester postupne v akademických rokoch 2009/2010 a 2010/2011 podľa formy štúdia v študijnom programe Účtovníctvo. V tomto študijnom programe prevládajú absolventi obchodných akadémií, ktorí majú na strednej škole malý rozsah hodín z matematiky a nepreberajú na strednej škole limity ani derivácie. Počet študentov – absolventov gymnázií má klesajúcu tendenciu.

Z uvedených údajov vidíme, že v akademickom roku 2009/2010 mali študenti aj v dennej aj v externej forme horšiu priemernú známku v porovnaní s akademickým rokom 2010/2011. Z výpočtu priemernej známky sme vynechali tých študentov, ktorí získali hodnotenie FX(4) – buď skúšku vôbec neabsolvovali, alebo skúšku neurobili. V rámci Fakulty ekonomiky a manažmentu dosahujú študenti tohto študijného programu už niekoľko rokov pri hodnotení najlepšie výsledky pri porovnaní jednotlivých študijných programov.

V grafe č. 2 sú zobrazené známky pre jednotlivé formy štúdia spolu za analyzované akademické roky. Výsledky a známky potvrdzujú, že študenti v externej forme štúdia dosahujú priemerné výsledky, ktoré sa vyrovnajú výsledkom študentov v dennej forme štúdia. Majú pritom menší rozsah hodín kontaktnej výučby a musia viac študovať samostatne pomocou literatúry alebo elektronických študijných zdrojov. Lepšie výsledky dosahujú z dôvodu ich vnútornej motivácie a zodpovednosti získať v štúdiu čo najlepšie výsledky. Ide prevažne o zamestnaných študentov, ktorí potrebujú získať vyššie vzdelanie kvôli kvalifikácii v práci.



Graf 2: Grafické znázornenie skúšok podľa formy štúdia

Záver

Na Fakultu ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre prichádza študovať čoraz viac absolventov obchodných akadémií, ktorí nájdu po ukončení štúdia uplatnenie v rôznych odvetviach ekonomiky. Uplatňovanie tvorivo-humanistického prístupu k študentom na vysokých školách je spojené s rozširovaním ich možností samostatne rozhodovať o štúdiu a súčasne aj so zvyšovaním ich zodpovednosti za priebeh a výsledky štúdia. Preto je dôležité, aby vysokoškolská príprava študentov bola flexibilná a zameraná na širší okruh oblastí uplatnenia v praxi.

Uvedené trendy ovplyvňujú aj výučbu matematických predmetov. Študenti sa stávajú zodpovední za získavanie vedomostí a následne za možnosti uplatnenia na trhu práce po ukončení vysokoškolského vzdelávania. Výsledky štúdia matematických predmetov na vysokej škole sú podmienené vedomosťami zo stredoškolského učiva. Na stredných školách prichádza k redukcii obsahu a rozsahu vyučovania matematiky, pričom maturitná skúška z matematiky nie je povinná. V tomto kontexte v príspevku prezentujeme analýzu úloh z matematickej analýzy a študijných výsledkov z povinných matematických predmetov v 1. ročníku bakalárskeho štúdia na Fakulte ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre. V analyzovanom súbore bolo 64 študentov dennej formy a 43 študentov externej formy štúdia študijného programu Účtovníctvo, ktorý patrí k populárnym a jeho absolventi majú praktické uplatnenie v praxi.

LITERATÚRA

[1] FÁNDLYOVÁ, S.: *Matematické metódy v chémii*, In Zborník vedeckých prác Teoretická a edukačná transformácia matematického vzdelávania, Nitra, SPU, 2011, s. 51-56, ISBN 978-80-552-0604-2

[2] GREGÁŇOVÁ, R.: *Aplikované úlohy z matematiky na FEM SPU v Nitre*, In Zborník príspevkov z vedeckého seminára s medzinárodnou účasťou Matematika a jej aplikácie v inžinierskom vzdelávaní 2006, Nitra: SPU, s. 61-64, 2006, ISBN 80-8069-708-6

[3] GREGÁŇOVÁ, R. – ORSZÁGHOVÁ, D.: *Applied Problems of Financial Mathematics on the WEB Sites*, In Proceedings of 11th International Conference Global Economy: Chalenges and Perspectives (International Scientific Days 2010), Nitra, 2010, p. 2501-2524, ISBN 978-80-552-0385-0

[4] ORSZÁGHOVÁ, D. a kol: *Matematika a jej aplikácie*, Nitra, SPU, 2010, s. 376, 1. upravené a doplnené vydanie, ISBN 978-80-552-0479-6

[5] ORSZÁGHOVÁ, D. : *Mathematical Analysis Tasks in the Bachelor's Study at the Faculty of Economics and Management of the SUA in Nitra*, In Proceedings of the 6th Conference on Mathematics and Physics at Technical universities with International Participation, Brno, the University of Defence, 2009, p. 189-196, ISBN 978-80-7231-667-0

[6] ORSZÁGHOVÁ, D.: *Poznámky k tvorbe a použitiu e – vzdelávacích materiálov z matematiky*, In Acta Mathematica 12 – zborník zo VII. nitrianskej matematickej konferencie, Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2009, edícia Prírodovedec, s.189-194, ISBN 978-80-8094-614-2, EAN 9788080946142

[7] URL: http://www.statpedu.sk/sk/Cielove-poziadavky-na-maturitne-skusky/Platne-od-sk-r-2011-2012.alej

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta ekonomiky a manažmentu
Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre
Trieda A. Hlinku 2
SK – 949 76 Nitra
e-mail: dana.orszaghova@fem.uniag.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ARITMETICKÉ OPERÁCIE S PRIRODZENÝMI ČÍSLAMI VYJADRENÝMI POMOCOU RÍMSKYCH ČÍSLIC

OLEG PALUMBÍNY

ABSTRACT. The paper deals with algorithms of arithmetic operations with natural numbers expressed by roman numerals.
Key words: Aritmetické operácie, duplácia, mediácia, prirodzené čísla, rímske číslice.

1. Úvod

Kvôli jednoduchosti budeme v ďalšom texte prirodzené čísla vyjadrené pomocou rímskych číslic nazývať *rímske čísla*, pričom *rímske číslice* budú, ako je obvyklé, znaky I, V, X, L, C, D a M. Pri zavádzaní desiatkovej pozičnej sústavy sa často argumentuje tým, že aritmetické operácie s rímskymi číslami sú ťažko vykonateľné. Ukážeme, že to tak celkom neplatí, t.j. zostrojíme algoritmus pre sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie so zvyškom rímskych čísel. Využijeme na to päť pomocných operácií. Prvé dve z nich, tzv. duplácia (zdvojovanie) a mediácia (polenie) boli známe už starým Egypťanom (pozri [1], str. 49, [2], str. 198). Ďalšie tri, pre účely tejto práce, nazveme denumerácia, numerácia a premena väčších jednotiek na menšie.

2. Pomocné operácie

Pod unárnou operáciou *duplácia* (resp. *mediácia*) budeme rozumieť vynásobenie (resp. vydelenie so zvyškom) daného čísla dvoma. Aby sme tieto operácie mohli vykonávať aj s rímskymi číslami, zavedieme unárnu operáciu *denumerácia* (resp. *numerácia*), ktorá spočíva v tom, že v zápise rímskych čísel zrušíme (resp. zavedieme) *konvenciu o odčítaní znakov* – jej podstata tkvie v tom, že štyri rovnaké menšie jednotky nahradíme najbližšou väčšou jednotkou pred ktorú napíšeme túto menšiu jednotku. Unárna operácia *premena väčších jednotiek na menšie* je založená na nahradení väčších jednotiek príslušným počtom menších jednotiek. Pre aritmetické operácie s rímskymi číslami budeme používať zaužívané symboly z dekadickej pozičnej sústavy, t.j. znaky $+, -, \times$ a $:$. Pretože duplácia je násobenie dvoma, budeme ju tiež signovať symbolom $\times$. Podobne pri mediácii použijeme značku pre delenie :.

Príklad 1. Vykonajme denumeráciu rímskeho čísla XXIV. Dostaneme XXIIII. Naopak, numerácia zápisu XXIIII dá rímske číslo XXIV. Podobne aj v ostatných prípadoch. Dupláciu rímskeho čísla XXIV uskutočníme tak, že najprv urobíme denumeráciu – vyjde XXIIII, potom samotnú dupláciu – vychádza XXXXIIIIIIII (jednoducho sme zdvojnásobili počet všetkých rímskych číslic) a nakoniec po numerácii dostaneme XLVIII. Teda skrátene XXIV$\times$II = XLVIII. Mediácia vyzerá takto: XXIV : II = XXIIII : II = XII, teda XXIV : II = XII. Ak by delenec bol nepárny, počítali by sme nasledovne: XI : II = VVI : II = V so zvyškom I. Skrátene: XI : II = V, zv. I. Premeňme väčšie jednotky na menšie v čísle MDCCCXXVIII. Dostaneme, napríklad, DDDCCCVVVVVVIII alebo MDCCCXXIIIIIIII a podobne.

This research is supported by the grant KEGA no. 021STU–4/2011.

3. Sčítanie rímskych čísel

Algoritmus *sčítania rímskych čísel* je založený na tom, že dané dva sčítance najprv denumerujeme, následne sčítame tým, že vytvoríme zápis skladajúci sa zo všetkých rímskych číslic oboch sčítancov a nakoniec numerujeme.

Príklad 2. Vypočítajme súčet rímskych čísel CCXLVIII + CCCIV.

Denumerácia dáva vyjadrenie tohto súčtu v tvare CCXXXXVIII + CCCIIII, čo po vykonaní samotného súčtu dáva CCCCCXXXXVIIIIIII. Jeho numerácia dáva rímske číslo DLII. Preto CCXLVIII + CCCIV = DLII.

Je zrejmé, že takýmto spôsobom by sa dal stanoviť súčet aj väčšieho počtu sčítancov. Toto v ďalšom využijeme pri násobení a delení rímskych čísel.

4. Odčítanie rímskych čísel

Podobne vykonáme aj *odčítanie rímskych čísel*. Toto spočíva v tom, že odoberáme rímske číslice vyskytujúce sa v menšenci ako aj v menšiteli. Navyše však môže pribudnúť premena väčších jednotiek na menšie, aby sme mohli odoberaním príslušných znakov žiadaný rozdiel vytvoriť.

Príklad 3. Vypočítajme rozdiel rímskych čísel MDLXXXIV – DCCXCV.

Denumerácia dáva vyjadrenie MDLXXXIIII – DCCXCV. Premena vyšších jednotiek poskytuje DDCCCCLLXXXXXXXVIIIIIIIII – DCCLXXXXV. Teraz odobratím rovnakých znakov vykonáme samotné odčítanie. Vychádza tak číslo DCCLXXXIIIIIIIII. Jeho numeráciou dostaneme DCCLXXXIX. Preto je MDLXXXIV – DCCXCV = DCCLXXXIX.

5. Násobenie rímskych čísel

Zložitejšie je *násobenie rímskych čísel*. Je založené na tomto: Dupláciou a numeráciou počítame mocniny čísla dva až kým nedostaneme číslo väčšie ako násobiteľ. Takto dostaneme najväčšie také prirodzené číslo k, že 2^k je menšie alebo rovné ako násobiteľ. Potom vypočítame k zdvojnásobení násobenca. Výsledky týchto duplácií zapíšeme do $(k+1)$-riadkovej tabuľky, pričom riadky tabuľky začíname číslovať nie od jednotky, ale od nuly. Následne pomocou mediácií vyjadríme násobiteľa v binárnej sústave. Potom hľadaný súčin je súčtom tých riadkov danej tabuľky, ktoré odpovedajú jednotkám v binárnom zápise násobiteľa. Ukážeme si to na príklade:

Príklad 4. Stanovme súčin rímskych čísel LVI × XXIII.

Zdvojujme a numerujme:

$$\text{II} \times \text{II} = \text{IV},\ \text{IV} \times \text{II} = \text{VIII},\ \text{VIII} \times \text{II} = \text{XVI}.$$

Ak vykonáme dupláciu a numeráciu ešte raz, dostaneme XVI × II = XXXII, čo už je číslo väčšie ako násobiteľ XXIII. Preto k je rovné štyrom. Teraz postupne štyri razy zdvojíme násobenca LVI:

$$\text{LVI} \times \text{II} = \text{LLVVII} = \text{CXII},$$
$$\text{CXII} \times \text{II} = \text{CCXXIIII},$$
$$\text{CCXXIIII} \times \text{II} = \text{CCCCXXXXIIIIIIII},$$
$$\text{CCCCXXXXIIIIIIII} \times \text{II} = \text{CCCCCCCCXXXXXXXXIIIIIIIIIIIIIIII}.$$

Získané výsledky zapíšeme do tejto päťriadkovej tabuľky:

Číslo riadku *n*	Násobenec $\times\ 2^n$
0	LVI
1	CXII
2	CCXXIIII
3	CCCCXXXXIIIIIIII
4	CCCCCCCCXXXXXXXXIIIIIIIIIIIIIIII

Premenou väčších jednotiek na menšie a mediáciou násobiteľa zistíme, že platia vzťahy:

XXIII : II = XI, zv. I,

XI : II = VVI : II = V, zv. I,

V : II = IIIII : II = II, zv. I,

II : II = I, zv. 0,

I : II = 0, zv. I.

Z tejto mediácie vidíme, že násobiteľ 23 = $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4$. To znamená, že náš súčin LVI × XXIII získame, použitím distributívneho zákona, súčtom denumerovaných čísel z riadkov 0, 1, 2 a 4 vyššie uvedenej tabuľky. Teda

LVI × XXIII =

= LVI + CXII +CCXXIIII + CCCCCCCCXXXXXXXXIIIIIIIIIIIIIIII

= CCCCCCCCCCCLXXXXXXXXXXXVIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII.

Keď na posledné číslo použijeme numeráciu, dostaneme nakoniec hľadaný súčin LVI × XXIII = MCCLXXXVIII.

6. Delenie so zvyškom rímskych čísel

Postup pre *delenie so zvyškom rímskych čísel* spočíva v tom, že od delenca postupne odčitujeme najvyššie možné 2^n-násobky deliteľa až kým nedostaneme rozdiel, ktorý je menší ako deliteľ. Tento rozdiel je potom zvyškom delenia. Podiel je určený pomocou duplácie s využitím distributívneho zákona a vyjadrenia čísla v binárnom tvare. Podrobnosti ukážeme na nasledujúcom príklade:

Príklad 5. Vypočítajme podiel rímskych čísel DCCLVIII : LV.

Zdvojujme deliteľa:

LV × II = LLVV = CX,

CX × II = CCXX,

CCXX × II = CCCCXXXX,

CCCCXXXX × II = CCCCCCCCXXXXXXXX = DCCCLXXX.

Predposledné číslo je menšie ako delenec DCCLVIII, posledné číslo je väčšie. Zostavme podobnú tabuľku ako pri násobení.

Bude mať štyri riadky:

Číslo riadku n	Deliteľ $\times 2^n$
0	LV
1	CX
2	CCXX
3	CCCCXXXX

Od delenca odčítame číslo z riadku 3 tabuľky:

DCCLVIII – CCCCXXXX =

= CCCCCCCXXXXXVIII – CCCCXXXX = CCCXVIII.

Od tohto odčítame CCXX. Dostaneme

CCCXVIII – CCXX = CCLXXXXXXVIII – CCXX = LXXXXVIII = XCVIII.

Číslo CX z riadku 1 tabuľky sa od čísla XCVIII odčítať nedá, lebo je väčšie. Preto od čísla XCVIII odčítame číslo z riadku 0, t.j. číslo LV:

XCVIII – LV = LXXXXVIII – LV =XXXXIII = XLIII.

Posledné číslo XLIII je menšie ako deliteľ LV. Preto hľadaný zvyšok delenia je číslo XLIII. Z distributívneho zákona a z toho, že sme pri odčitovaní použili z tabuľky riadky číslo 0, 2 a 3, vyplýva, že hľadaný podiel bude $2^0 + 2^2 + 2^3$, t.j. rímske číslo I + IV + VIII = I + IIII +VIII = XIII. Odtiaľ dostávame výsledok daného delenia so zvyškom v tvare DCCLVIII : LV = XIII, zv. XLIII.

7. Záverečné poznámky

Odvodili sme algoritmy pre vykonanie aritmetických operácií s rímskymi číslami. Je zaujímavé, že ich možno použiť popri nepozičných (ilustruje ju práve rímska číselná sústava) aj pre pozičné číselné sústavy. V dekadickej pozičnej sústave sa odvodené postupy dajú použiť temer bez zmeny. Podobne aj v binárnej, čo sa v praxi využíva napríklad vo výpočtovej technike (pozri [2], kapitola 5), lebo duplácia a mediácia znižujú počet sčítaní v algoritmoch násobenia a delenia. To má za následok nižšie požiadavky na operačnú pamäť počítačov a tiež to zvyšuje rýchlosť vykonávania týchto operácií, čo pri ich väčšom počte výrazne zefektívňuje ich činnosť šetrením ako času tak aj nákladov.

Tu zároveň vidieť prekvapujúcu skutočnosť, že v staroveku objavené postupy môžu byť veľmi účinné aj v súčasnosti. Je pozoruhodné, že antickí egyptskí matematici objavili algoritmus násobenia, o ktorom sa ukázalo až v XX. storočí, že je istým spôsobom optimálny.

Na záver poznamenávame, že v tejto práci uvedené algoritmy pre vykonanie aritmetických operácií s rímskymi číslami možno preberať v rôznych matematických krúžkoch, či už na strednej ako aj na vysokej škole.

LITERATÚRA

[1] BALADA, F.: *Z dějin elementární matematiky*, SPN, Praha 1959.

[2] ZNÁM, Š. a kolektív: *Pohľad do dejín matematiky*, ALFA–SNTL, Bratislava–Praha 1986.

doc. RNDr. Oleg Palumbíny, PhD.
Katedra matematiky,
Ústav aplikovanej informatiky a matematiky,
Materiálovotechnologická fakulta,
Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Hajdóczyho 1,
Sk - 917 24 Trnava
e-mail: oleg.palumbiny@stuba.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ALTERNATÍVNE ZAVEDENIE NIEKTORÝCH POJMOV MATEMATICKEJ ANALÝZY VO FYZIKE

OLEG PALUMBÍNY

ABSTRACT. The paper deals with alternative establishing of some notions of mathematical analysis in physics.
Key words: Infinitezimálová limita, nekonečne malá veličina, diferenciál, derivácia.

1. ÚVOD

Táto práca je venovaná odlišnému chápaniu niektorých pojmov matematickej analýzy vo fyzike. Tri príklady z učebníc vec objasnia.

Príklad 1. Pri odvádzaní vzorca pre veľkosť dostredivého zrýchlenia pri rovnomernom pohybe po kružnici sa píše (s malými úpravami) v [1], str. 35 toto: „Ak budeme časový interval skracovať k nule, bude sa k nule blížiť aj uhol α. Vektor zmeny rýchlosti $\Delta\mathbf{v}$ bude v limite kolmý na vektor rýchlosti $\mathbf{v}$, bude teda smerovať do stredu O kružnice. Pritom veľkosť vektora zmeny rýchlosti Δv v limite splynie s dĺžkou oblúčika Δo medzi bodmi M, N kružnice:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta v=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta o=\lim_{\Delta t\to 0}v\Delta\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}v\omega\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0}\omega^2 r\Delta t \tag{1}$$

(r je polomer kružnice, t je čas, v je konštantná veľkosť rýchlosti pohybu bodu po kružnici, ω je konštantná uhlová rýchlosť, α je uhol medzi polomermi za čas Δt – pozn. autora). Pre veľkosť zrýchlenia a dostávame tak hodnotu

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega^2 r\Delta t}{\Delta t}=\omega^2 r.\text{“} \tag{2}$$

Rozbor. Z klasickej definície limity vyplýva, že všetky limity v (1) sú rovné nule. Z toho však nijako nevyplýva druhá rovnosť vo formule (2).

Príklad 2 Pri zavádzaní vektora rýchlosti hmotného bodu v priestore sa v [3], str. 12 píše toto: „V medznom prípade, ak je úsek dráhy dostatočne malý, splynie veľkosť prírastku polohového vektora, takže

$$\lim_{\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_2}|\Delta\mathbf{r}|=|\mathrm{d}\mathbf{r}|=\mathrm{d}s \tag{3}$$

(kde $\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$ sú polohové vektory hmotného bodu, $\Delta\mathbf{r}$ je zmena polohového vektora, $\mathrm{d}\mathbf{r}$ je diferenciál a ds je element dráhy – pozn. autora).“

Rozbor. Z klasických definícií limity a diferenciálu vyplýva, že za bežne uvažovaných podmienok platí $\lim_{\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_2}|\Delta\mathbf{r}|=0\neq|\mathrm{d}\mathbf{r}|=\mathrm{d}s.$ To je však v rozpore s (3).

Príklad 3. V [2], str. 17 sa píše: (4) „Dĺžka ds elementárneho oblúka priestorovej krivky je rovná, s presnosťou do nekonečne malých veličín rádu 2, dĺžke jej tetivy

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}\text{ “} \tag{5}$$

2000 Mathematics Subject Classification: 00A35; secondary 01A20
This research is supported by the grant KEGA no. 021STU–4/2011.

Rozbor. V klasickej matematickej analýze sa vo výroku (4) jedná o obyčajnú rovnosť. O žiadnych nekonečne malých veličinách sa v (4) vôbec neuvažuje.

Poznámka 1. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že ***vo fyzike majú pojmy limita, diferenciál, derivácia a rovnosť iný význam ako v klasickej analýze.*** Študenti tak môžu nadobudnúť dojem, že existujú dve analýzy – jedna matematická a druhá „fyzikálna". Preto cieľom tejto práce je alternatívne zaviesť vyššie uvedené pojmy tak, aby korešpondovali s prezentovanými príkladmi.

2. ALTERNATÍVNE DEFINÍCIE A VETY

Definícia 1. Takú funkciu $f: E_1 \to E_1,\ y = f(x)$, že $\lim f(x) = 0$ pre $x \to b$ nazveme *nekonečne malou veličinou v bode b* alebo *infinitezimálom v bode b.*

Definícia 2. Nech x je reálna premenná. Pod *diferenciou* Δx *premennej x* budeme rozumieť ľubovoľné pevne zvolené reálne číslo.

Definícia 3. Pod *infinitezimálom prislúchajúcim premennej x* budeme rozumieť funkciu f : $(-\varepsilon_1;\varepsilon_2) - \{0\} \to E_1;\ f(x) = x,$ kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sú kladné reálne čísla. Budeme ho značiť symbolom dx.

Poznámka 2. Všimnime si, že $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{d}x) = 0.$ Teda dx je nekonečne malá veličina v zmysle definície 1. Pre potreby tohto článku bude účelné zaviesť len špeciálny typ limity – a to pre argument idúci k nule. Vymedzíme ju takto:

Definícia 4. Nech f je reálna funkcia reálnej premennej definovaná v okolí nuly. Nech Δx je diferencia veličiny x. Potom pod *infinitezimálovou limitou* $\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x)$ rozumieme funkciu $f(\mathrm{d}x),$ pričom dx je definovaná v tomto okolí.

Poznámka 3. Teda infitezimálovú limitu možno považovať za operátor, ktorý vo výraze $f(\Delta x)$ nahradí diferenciu Δx infinitezimálom dx.

Definícia 5. Výraz $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$ nazývame *diferencia funkcie g* v bode x. Pre vektorovú funkciu $\mathbf{v}(x) = (f(x), g(x), h(x))$ analogicky kladieme $\Delta\mathbf{v}(x) = (\Delta f(x),\ \Delta g(x),\ \Delta h(x)).$

Definícia 6. Pod *infinitezimálovým diferenciálom* D$g(x)$ funkcie g v bode x rozumieme limitu $\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\Delta g(x).$ Pre vektorovú funkciu $\mathbf{v}(x) = (f(x), g(x), h(x))$ kladieme $\mathrm{D}\mathbf{v}(x) = \underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\Delta\mathbf{v}(x) = (\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\Delta f(x),\ \underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\Delta g(x),\ \underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\Delta h(x)).$

Definícia 7. Infinitezimálovú limitu $\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{LIM}}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nazveme *infinitezimálovou deriváciou* funkcie f v bode x. Označíme ju $\mathrm{DER}\, f(x)$.

Poznámka 4. Klasická rovnosť na množine = je taká relácia ekvivalencie, ktorej triedy sú jednoprvkové množiny. Ak upustíme od posledne uvedenej požiadavky, dostaneme všeobecnejší typ rovnosti.

Definícia 8. O veličine $a(x)$ hovoríme, že *je nekonečne malá rádu n* vzhľadom na nekonečne malú veličinu x, ak $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(x)}{x^n} = c \neq 0,\ c \in E_1.$

Definícia 9. Dve konečné veličiny a, b sú *infinitezimálovo rovné*, ak ich rozdiel $a-b$ je nekonečne malá veličina. Dve nekonečne malé veličiny rádu n sú *infinitezimálovo rovné*, ak ich rozdiel je nekonečne malá veličina vyššieho rádu ako n. Ak veličiny a, b sú infinitezimálovo rovné, zapisujeme to $a \equiv b$. Ak a, b sú reálne čísla, pokladáme ich za nekonečne malé veličiny rádu nula.

Definícia 10. *Dĺžku* $\mathrm{D}s(t)$ *elementárnej tetivy krivky* určenej polohovým vektorom $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ medzi bodmi t a $t + \mathrm{d}t$ kladieme rovnú $|\mathrm{D}\mathbf{r}(t)|$.

Veta 1. Infinitezimálová rovnosť z definície 9 je reláciou ekvivalencie.

Dôkaz jednoducho vyplýva z definície 9, **q.e.d.**

Poznámka 5. Vzhľadom na vetu 1 a poznámku 4 môžeme infinitezimálovú rovnosť z definície 9 považovať za všeobecnejší typ rovnosti.

Veta 2. Nech *f, g* sú reálne funkcie reálnej premennej definované na nejakom okolí nuly, Nech c je reálna konštanta a nech $\mathbf{v}$ je vektorová funkcia. Potom

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\big(f(\Delta x) \pm g(\Delta x)\big) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) \pm \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x),$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\big(f(\Delta x) \cdot g(\Delta x)\big) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x),$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} \frac{f(\Delta x)}{g(\Delta x)} = \frac{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\ f(\Delta x)}{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\ g(\Delta x)}, \text{ ak } \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\ g(\Delta x) \neq 0,$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} c = c,\ \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\big(c \cdot g(\Delta x)\big) = c \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x),$$

$$\mathrm{D}g(x) = g(x + \mathrm{d}x) - g(x); \text{špeciálne } \mathrm{D}x = \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{DER}\ f(x) = \frac{\mathrm{D}f(x)}{\mathrm{D}x},\ \mathrm{D}\mathbf{v}(x) = (\mathrm{D}f(x),\ \mathrm{D}g(x),\ \mathrm{D}h(x)).$$

Dôkaz jednoducho vyplýva z predchádzajúcich definícií, **q.e.d.**

Veta 3. Nech existujú nižšie uvedené limity, derivácie a diferenciály. Potom

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x),\ \mathrm{DER}\ f(x) \equiv f'(x),\ \mathrm{D}f(x) \equiv \mathrm{d}f(x),\ \mathrm{D}\mathbf{v}(x) \equiv \mathrm{d}\mathbf{v}(x).$$

Dôkaz prvého tvrdenia. V klasickej analýze sa dokazuje táto ekvivalencia

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = L \Leftrightarrow [\,f(\Delta x) = L + g(\Delta x),\ \lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) = 0\,].$$

Odtiaľ a z vety 2 vyplýva, že platí

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}}\big(L + g(\Delta x)\big) = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} L + \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x) = L + g(\mathrm{d}x)\,.$$

Zložené zobrazenie $g(\mathrm{d}x)$ je však nekonečne malá veličina, lebo $\lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) = 0$ a funkcia $\mathrm{d}x$ je zúženie identickej korešpondencie na vhodné rýdze okolie nuly. Preto platí, že $\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x)$. Ostatné tri tvrdenia sú jednoduché dôsledky tejto zovšeobecnenej rovnosti a vyššie uvedených definícií, **q.e.d.**

Veta 4. Nech $\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x) \equiv \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x)$. Potom $\dfrac{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} f(\Delta x)}{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} \Delta x} \equiv \dfrac{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} g(\Delta x)}{\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{LIM}} \Delta x}$.

Dôkaz je založený na tom, že $\dfrac{f(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(\mathrm{d}x)+h(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}+\dfrac{g(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{h(\mathrm{d}x)}{g(\mathrm{d}x)}$ a na tom, že $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{h(\Delta x)}{g(\Delta x)}=0,$ **q.e.d.**

3. PRÍKLADY

Príklad 4. Nech $f(x)=3+x^2.$ Porovnajme limity, derivácie a diferenciály tejto funkcie stanovené podľa oboch definícií:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(3+(\Delta x)^2)=3,$$

$$\operatorname*{LIM}_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=\operatorname*{LIM}_{\Delta x\to 0}(3+(\Delta x)^2)=3+(\mathrm{d}x)^2,$$

$$f'(x)=2x,$$

$$\mathrm{DER}\, f(x)=\operatorname*{LIM}_{\Delta x\to 0}\frac{3+(x+\Delta x)^2-(3+x^2)}{\Delta x}=\frac{(3+(x+\mathrm{d}x)^2-(3+x^2)}{\mathrm{d}x}=2x+\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}f(x)=2x\,\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{D}f(x)=\operatorname*{LIM}_{\Delta x\to 0}(3+(x+\Delta x)^2-(3+x^2))=3+(x+\mathrm{d}x)^2-(3+x^2)=2x\mathrm{d}x+(\mathrm{d}x)^2,$$

čo korešponduje s tvrdením vety 3.

Formuly (1) až (5) môžeme teraz korektne vyjadriť takto:

Pokračovanie príkladu 1. Pretože Δo je dĺžka oblúka o polomere v a Δv je dĺžka jeho tetivy, platí $\Delta o=v\Delta\alpha=\omega r\Delta\alpha,\ \Delta v=2v\sin(\Delta\alpha/2),$ kde $\Delta\alpha=\omega\Delta t.$ Odtiaľ ľahko odvodíme, že $\lim\limits_{\Delta t\to 0}((\Delta v-\Delta o)/(\Delta t)^3)=c\neq 0,\ c\in E_1.$ To je rovnocenné s výrokom $\Delta v=\Delta o+(\Delta t)^3\cdot g(\Delta t),\ \lim\limits_{\Delta t\to 0} g(\Delta t)=0.$ Z toho rezultuje

$$\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}\Delta v=\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}(\Delta o+(\Delta t)^3 g(\Delta t))=\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}(\omega^2 r\Delta t+(\Delta t)^3 g(\Delta t))\equiv\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}\omega^2 r\Delta t. \quad (1')$$

Následne z $(1')$ a z viet 2, 3 a 4 vyplýva

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\equiv\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\operatorname*{LIM}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta v}{\operatorname*{LIM}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t}\equiv\frac{\operatorname*{LIM}\limits_{\Delta t\to 0}\omega^2 r\Delta t}{\operatorname*{LIM}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t}=\frac{\omega^2 r\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=\omega^2 r. \quad (2')$$

Teda $a\equiv\omega^2 r.$ Pretože $a,\ \omega^2 r\in E_1,$ musí platiť, že $a=\omega^2 r.$

Pokračovanie príkladu 2. Podľa definícií 6 a 10 vyjadríme (3) rovnosťou

$$\operatorname*{LIM}_{\Delta t\to 0}|\Delta\mathbf{r}|=|\mathrm{D}\mathbf{r}|=\mathrm{D}s. \quad (3')$$

Pokračovanie príkladu 3. Z klasickej analýzy vieme, že

$$\Delta s(t) = s(t+\Delta t) - s(t) = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u) + \dot{z}^2(u)}\, \mathrm{d}u =$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{d}u = \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)} \cdot \Delta t =$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \cdot \Delta t +$$

$$+ \sqrt{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0) + \dot{z}^2(t_0)} \cdot \Delta t - \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \cdot \Delta t =$$

$$= \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \cdot \Delta t + \left[\left(\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \right)' \right]_{t=t_1} \cdot (\Delta t)^2.$$

Odtiaľ infinitezimálovým limitovaním vzhľadom na definíciu 6 dostaneme

$$\mathrm{D}s = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \cdot \mathrm{d}t + \left[\left(\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \right)' \right]_{t=t_1} \cdot (\mathrm{d}t)^2 =$$

$$= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} + \alpha(t) \cdot (\mathrm{d}t)^2.$$

Z klasickej analýzy vieme, že $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$. Za predpokladu ohraničenosti funkcie $\alpha(t)$, ktorý obyčajne býva splnený, potom môžeme písať

$$\mathrm{d}s = \mathrm{D}s - \alpha(t) \cdot (\mathrm{d}t)^2. \tag{4$'$}$$

Rovnosť (4′) je vyjadrením tvrdenia (4). Vzhľadom na definíciu 9 môžeme (4′) ako aj (5) zapísať korektne v tvare

$$\mathrm{D}s \equiv \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}. \tag{5$'$}$$

LITERATÚRA

[1] NÁTER, I.: *Prehľad stredoškolskej fyziky*, SVTL, Bratislava 1957.

[2] NEVZGĽADOV, V. G.: *Teoretičeskaja mechanika*, FIZMATGIZ, Moskva 1959 (v ruštine).

[3] ŠANDEROVÁ, V. – KRACÍK, J.: *Fyzika*, SNTL, Praha 1989.

Doc. RNDr. Oleg Palumbíny, PhD.
Katedra matematiky,
Ústav aplikovanej informatiky a matematiky,
Materiálovotechnologická fakulta,
Slovenská technická univerzita v Bratislave,
Hajdóczyho 1,
Sk - 917 24 Trnava
e-mail: `oleg.palumbiny@stuba.sk`

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ANALÝZA RIEŠENIA VYBRANÝCH ÚLOH V TESTOVANÍ ŽIAKOV 6. ROČNÍKA ZŠ

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ

ABSTRACT. This article is continuation of our study which is realized as a part of solution of project KEGA in which we try to influence student´s mathematical knowledge by solution special problems according to ISCED 2. We analyze two of problems in the output test with emphasis on the pupil´s ability to solve them in the 6th class at the elementary school.

Úvod

Článok je pokračovaním štúdie v rámci projektu KEGA: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií - alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov Štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA. V školskom roku 2010/2011 prebehlo pokračujúce testovanie žiakov kontrolnej a experimentálnej skupiny, ktorého sa zúčastnilo 737 žiakov 6. ročníka ZŠ. Žiaci experimentálnej skupiny pokračovali už druhý rok v riešení matematických úloh pripravovaných riešiteľským kolektívom, ktoré boli zamerané na rozvoj matematických kompetencií žiakov v kontexte s testovaním PISA. V článku prezentujeme úspešnosť riešení ako aj analýzu riešení dvoch problémov výstupného testu z oblasti *Čísla, premenné, počtové výkony s číslami* a *Geometria a meranie* podľa zaradenia v Štátnom vzdelávacom programe ISCED 2. Výsledné hodnotenie je spracované v zmysle matematických kompetencií a úrovní ako ich uvádza štúdia OECD PISA.

Žiak, ktorý je schopný úspešne používať matematiku v rôznych situáciách, má isté *matematické schopnosti*, ktorých súhrn možno považovať za jeho celkovú matematickú kompetenciu. Na určenie a zhodnotenie týchto schopností používa štúdia OECD PISA tieto matematické kompetencie:

- rozmýšľanie a usudzovanie,
- argumentácia,
- komunikácia,
- modelovanie,
- položenie otázky a riešenie problému,
- reprezentácia,
- použitie symbolického, formálneho a technického vyjadrovania operácií,
- požitie nástrojov a prístrojov.

OECD PISA opisuje aktivity obsahujúce tieto kompetencie pomocou troch úrovní:

Príspevok je písaný s podporou projektu KEGA -> 3/7001/09

1. Úlohy merajúce *kompetencie na reprodukčnej úrovni* si vyžadujú reprodukciu naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr a riešenie rutinných problémov.

2. *Kompetencie na úrovni prepojenia* umožňujú riešenie úloh, ktoré nie sú úplne rutinné, ale obsahujú známe alebo pomerne známe prvky. Úlohy spojené s touto úrovňou kompetencií vyžadujú schopnosť prepojenia rôznych oblastí matematiky alebo prácu s viacerými navzájom rôznymi reprezentáciami daného problému. Sú pre ne charakteristické integrácia, prepojenie a nenáročné rozšírenie pre žiaka známeho materiálu, modelovanie a spojenie viacerých pre žiaka známych metód.

3. *Kompetencie na úrovni reflexie* obsahujú prvok uvažovania o procesoch potrebných k vyriešeniu úlohy. Vzťahujú sa k žiakovým schopnostiam plánovať stratégie riešenia a uplatniť ich v úlohách, ktoré obsahujú viacej súčastí a môžu byť originálnejšie (menej zvyčajné) v porovnaní s úlohami zodpovedajúcimi kompetenciám na úrovni prepojenia. Charakterizuje ich potreba rozvinutého uvažovania, argumentácie, abstrakcie, zovšeobecnenia a modelovania použitého v nových (neznámych) kontextoch, originálneho matematického prístupu, spojenia viacerých zložitejších metód a vniknutia do problému. [2]

Analýza riešenia úloh v teste

V ďalšej časti uvádzame dva problémy, z celkového počtu šesť, ktoré riešili žiaci v prezentovanom teste v 6. ročníku ZŠ.

1 Detský čaj s rumančekom

Detský čaj s rumančekom obsahuje podľa údajov výrobcov viac druhov bylín. Niektoré z nich, spolu s ďalšími údajmi, uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Zložka	Obsah zložky v 75 g čajoviny	Obsah zložky v jednom čajovom vrecku (1,5 g)
rumančekový kvet	18,0g	0,360 g
vňať mäty piepornej	9,0g	0,118 g
skorocelový list	5,25g	0,105 g
vňať materinej dúšky	3,75g	0,075 g

V obchodoch sme našli ceny týchto druhov balení:

- 75 g balenie (sypaný) .... 1,23 €

- 100 g balenie(sypaný) .... 1,48 €
- čajové vrecká 20 x 1,5g (hmotnosť 30,0g).......... 1,14 €

Úloha 1. Kúpa ktorého balenia je cenovo najvýhodnejšia?

Riešenie:

75 g balenie: 1 gram ... 1,23 :75 = 0,0164 €
100 g balenie: 1 gram ... 1,48 : 100 = 0,0148 €
Čajové vrecká (30,0g): 1 gram ... 1,14 : 30,0 = 0,038 €

Správna odpoveď: Cenovo najvýhodnejšia je kúpa balenia 100 g balenie (sypaný).

Úloha 2. Koľko gramov ostatných zložiek bylín sa nachádza v 75g čajoviny?

Riešenie: Obsah zložky v 75 g čajoviny: 18 + 9 + 5,25 + 3,75 = 36 g; ostatné zložky: 75 – 36 = 39 g.

Správna odpoveď: V 75g čajoviny sa nachádza 39 g ostatných zložiek.

Úloha 3. Zistite, koľko gramov vňate materinej dúšky použije výrobca na prípravu 100 balení druhu „čajové vrecká 20 x 1,5g (hmotnosť 30,0g)".

Riešenie: V 1 čajovom vrecku ... 0,075 g; v 1 balení .... 0,075 . 20 = 1,5 g; v 100 baleniach ... 1,5 . 100 = 150 g.

Správna odpoveď: Výrobca použije 150 g vňate materinej dúšky.

VYHODNOTENIE

Bodové hodnotenie:

Úloha 1: Správna odpoveď - 2 body (žiak môže riešiť úlohu aj úsudkom),
Čiastočné riešenie - 1 bod (čiastočným riešením môže byť výpočet ceny 1 gramu, alebo 100 gramov čajoviny, alebo iný čiastkový výpočet, ktorý by mohol viesť k správnej odpovedi)
Úloha 2: Správna odpoveď - 2 body,
Čiastočné riešenie - 1bod (výpočet celkového množstva uvedených zložiek čajoviny – 36 g)
Úloha 3: Správna odpoveď - 2 body,
Čiastočné riešenie - 1 bod (žiak môže postupovať aj inak vo výpočte; učiteľ ohodnotí jedným bodom napr. zistenie celkovej hmotnosti 100 balení uvedeného druhu).

Detský čaj	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov			
	N	0 bodov	1 bod	2 body
Úloha 1	737	56,04	11,13	32,84
Úloha 2	737	62,55	9,90	27,54
Úloha 3	737	70,55	7,19	22,26

Tabuľka 1: vyhodnotenie problému Detský čaj s rumančekom

Analýza riešenia:

Úspešnosť riešenia všetkých troch úloh nebola na očakávanej úrovni. Podľa údajov z tabuľky v riešení každej z nich však približne 73% - 75% žiakov, ktorí pochopili text úlohy a úlohu začali riešiť, tak ju aj správne doriešili.

1. úloha bola zameraná na zistenie matematických kompetencií na úrovni reflexie. Riešenie bolo možné zrealizovať viacerými spôsobmi. Žiaci mohli vylúčiť 30 - gramové balenie aj bez výpočtu (úsudkom) a potom stačilo porovnávať už iba prvé dva druhy. Mohli urobiť prepočet ceny za 1 gram čajoviny, alebo zvoliť inú hmotnosť a tak vykonať porovnanie zvyšných dvoch súm.

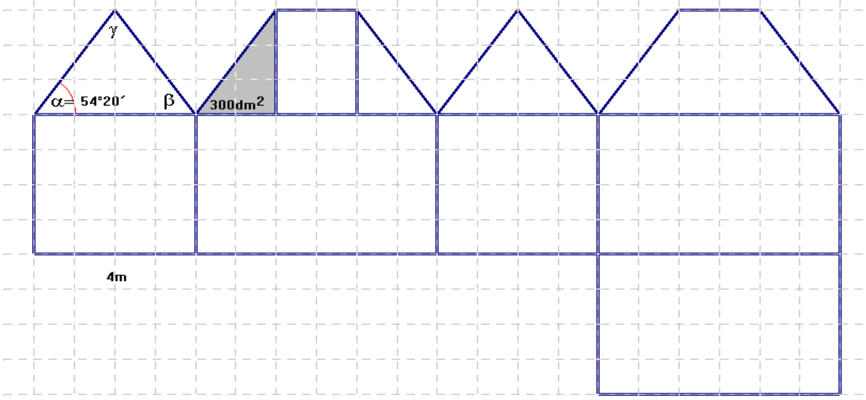
2. úloha bola zameraná na zistenie kompetencií na úrovni prepojenia. Zo zadania úlohy mali žiaci správne určiť hmotnosť ostatných zložiek, čo bolo náročnejšie na pozornosť a na čítanie s porozumením.

3. úloha bola zameraná na zistenie matematických kompetencií na úrovni prepojenia. Žiaci si mali v tabuľke vyhľadať potrebný údaj a úlohu vyriešiť. Vysoké percento žiakov s dosiahnutými 0 bodmi poukazuje na to, že mnohí žiaci riešenie ani nezačali.

Dosiahnutá úspešnosť riešenia jednotlivých úloh poukazuje na problémy žiakov, ktorí boli testovaní, s čítaním textu väčšieho rozsahu a s čítaním s porozumením.

2 Záhradný domček

Pán Slivka si chce vyrobiť prenosný záhradný domček podľa tohto nákresu.

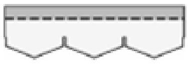


Úloha 1. Koľko m^2 materiálu potrebuje na výrobu stien a podlahy domčeka?

Riešenie: Steny a podlahu domčeka tvoria dva štvorce s obsahom $S_1 = 2.16m^2 = 32m^2$ a tri obdĺžniky s obsahom $S_2 = 3.\ 24m^2 = 72m^2$, celkový obsah je teda $S=32\ m^2+72\ m^2=104m^2$.

Správna odpoveď: Na výrobu stien a podlahy domčeka potrebuje $104m^2$ materiálu.

Úloha 2. Koľko eur zaplatí, podľa cenníka uvedeného v tabuľke, za pokrytie strechy šindľami typu DIAMANT?

Asfaltové šindle IKO	Názov výrobku	balenie	Cena (EUR
	SUPERGLASS pravouhlý trojtabuľový	$3{,}00m^2/bal$	7,44
	VICTORIAN - BIBER Bobrovka	$2{,}75m^2/bal$	10,66
	DIAMANT	$3{,}00m^2/bal$	11,07

Výpočet: Strechu tvoria dva trojuholníky a dva lichobežníky, ktoré si môžeme rozložiť na obdĺžnik a dva (pravouhlé) trojuholníky
$S_1=2.300\ dm^2=600dm^2$, $S_2=(2.300+600)\ dm^2=1200dm^2$, $S=2.1200\ dm^2+2.600\ dm^2=3600dm^2=36m^2$

Cenu za šindle vypočítame:
1 balenie........................$3m^2$ ....11,07€

$36m^2$ ....36:3 =12 balení ....12.11,70€ = 132,84€

Správna odpoveď: Za pokrytie strechy zaplatí 132,84 €.

VYHODNOTENIE

Bodové hodnotenie:

Úloha 1: Správna odpoveď - 2 body,
Čiastočné riešenie - 1 bod (výpočet obsahu štvorca, štvorcov, alebo výpočet obsahu obdĺžnika, obdĺžnikov)
Úloha 2: Správna odpoveď - 4 body,
Čiastočné riešenie: výpočet časti pokrývanej plochy – 1 bod,
výpočet celej pokrývanej plochy – 1 bod,
výber správnej ceny za šindle „Diamant“ z tabuľky a správny čiastkový výpočet k požadovanej cene – 1 bod,
správny výpočet konečnej ceny – 1 bod.

Záhradný domček	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov					
	N	0 bodov	1 bod	2 body	3 body	4 body
Úloha 1	737	35,55	15,87	48,58		
Úloha 2	737	70,55	7,19	22,12	1,19	8,03

Tabuľka 2: vyhodnotenie problému Záhradný domček

Analýza riešenia:

1. úloha bola zameraná na zistenie matematických kompetencií na úrovni prepojenia. Riešenie nebolo numericky náročné, vyžadovalo však poznatky z geometrie. Žiaci si museli určiť obsahy štvorcov a obdĺžnikov, z ktorých pozostávajú steny a podlaha

domčeka a tieto sčítať. Úspešnosť riešenia bola na dobrej úrovni, temer polovica žiakov úlohu správne vyriešila.

2. úloha bola zameraná na zistenie kompetencií na úrovni reflexie. Zadanie úlohy bolo náročnejšie na pozornosť a na čítanie s porozumením. Vysoké percento žiakov s dosiahnutými 0 bodmi poukazuje na to, že mnohí žiaci riešenie ani nezačali. Podľa údajov z tabuľky môžeme zistiť, že iba 8,03% túto úlohu správne vyriešilo.

Dosiahnutá úspešnosť poukazuje na problémy žiakov s úlohami, ktorých riešenie je možné iba postupnými krokmi a vyžaduje spracovanie viacerých údajov. V druhej úlohe mali žiaci určiť obsah pokrývanej plochy, k čomu potrebovali získať istý nadhľad a jednotlivé časti strechy si „poskladať“ z pravouhlých trojuholníkov a obdĺžnikov. Následná orientácia v tabuľke pri výpočte ceny nebola náročná, žiaci si však museli uvedomiť, že ide o cenu za balenie.

Porovnanie výsledkov kontrolnej a experimentálnej skupiny

Početnosť a percentuálna úspešnosť riešenia čiastkových úloh vzhľadom na príslušnosť k skupine (K – kontrolná, E - experimentálna).

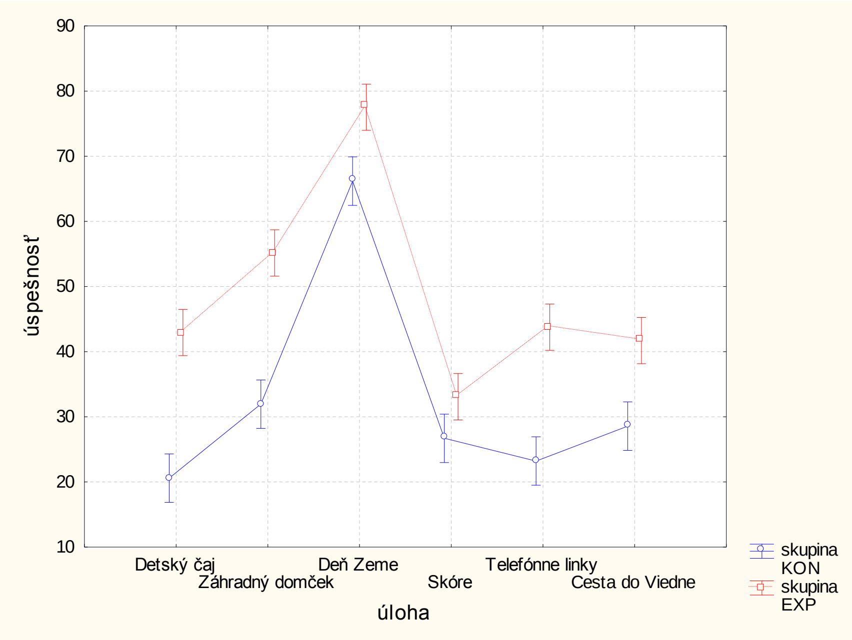
Úloha	Percento žiakov, ktorí dosiahli určitý počet bodov						
	skupina	N	0 bodov	1 bod	2 body	3 body	4 body
Detský čaj Úloha 1	K	352	61,93	10,51	27,56		
	E	385	50,65	11,69	37,66		
Detský čaj Úloha 2	K	352	78,41	9,09	12,5		
	E	385	48,05	10,65	41,3		
Detský čaj Úloha 3	K	352	86,08	3,98	9,94		
	E	385	56,36	10,13	33,51		
Záhradný domček Úloha 1	K	352	48,01	14,77	37,22		
	E	385	24,16	16,88	58,96		
Záhradný domček Úloha 2	K	352	62,11	5,98	14,25	2,28	15,38
	E	385	40,78	6,75	5,97	8,57	37,92

Tabuľka 3: Vyhodnotenie výsledkov kontrolnej a experimentálnej skupiny

Vyhodnotenie testu

Test obsahoval problémy zo všetkých piatich okruhov podľa Štátneho vzdelávacieho programu ISCED 2. Nasledujúci graf uvádza úspešnosť riešenia jednotlivých problémov v experimentálnej a kontrolnej skupine. Pre úplnosť dodávame, že jednotlivé problémy v teste sú z týchto okruhov:

- Čísla, premenná, počtové výkony s číslami – problém Detský čaj s rumančekom
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy – problém Telefónne linky
- Geometria a meranie – problém Záhradný domček
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika – problémy Deň zeme a Skóre
- Logika, dôvodenie, dôkazy – problém Cesta do Viedne.



Obrázok 1: Vyhodnotenie všetkých úloh v teste vzhľadom na kontrolnú KON *a experimentálnu skupinu* EXP

Porovnaním výsledkov experimentálnej a kontrolnej skupiny sme zistili, že experimentálna skupina dosiahla štatisticky významne lepšie výsledky ako kontrolná skupina. Môžeme teda konštatovať, že riešenie nami vytváraných úloh zameraných na zvyšovanie matematických kompetencií, pozitívne ovplyvnilo výsledky žiakov experimentálnej skupiny.

Záver

V súčasnosti prebiehajú na Slovensku medzinárodné merania úrovne vedomostí žiakov PISA a TIMSS a meranie výsledkov vzdelávania na národnej úrovni Testovanie 9. Prezentovaný projekt KEGA je zameraný na podporu vzdelávania v matematike a testovanie vedomostí v rámci medzinárodnej štúdie PISA (Programme International Student Assesment). PISA skúma od roku 2000 v trojročných cykloch úroveň pripravenosti 15-ročných žiakov a študentov členských a partnerských krajín OECD na ich občiansky a profesionálny život, na schopnosť vysporiadať sa s požiadavkami súčasnej informačnej spoločnosti. Monitoruje výsledky vzdelávania a hodnotí efektívnosť školských systémov zúčastnených krajín. V poslednom období sa v hodnotení začína klásť oveľa väčší dôraz na zisťovanie a hodnotenie úrovne matematickej gramotnosti. Preto je potrebné na hodinách matematiky riešiť aj problémy a úlohy tohto zamerania, o čom svedčia aj rozdiely vo výsledkoch v experimentálnej a kontrolnej skupine uvádzané v našom príspevku.

LITERATÚRA

[1] KURAJ, J., KURAJOVÁ STOPKOVÁ, J. 2006. Národná správa TIMSS. 2003. Dostupné:http://www.statpedu.sk/buxus/docs//publikacie/Kuraj-Stopkova_Narodna_sprava_TIMSS2003.pdf

[2] Národná správa PISA 2006 Dostupné: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie/pisa2006nsprava.pdf

[3] Štátny vzdelávací program Matematika ISCED 2. 2010. Dostupné: http://www.statpedu.sk/documents//16/vzdelavacie_programy/statny_vzdelavaci_program/prilohy/Matematika_ISCED_2-3.pdf

[4] PAVLOVIČOVÁ, G., ZÁHORSKÁ, J., RYBANSKÝ, L.: *Analýza riešenia vybraných úloh v testovaní žiakov 5. ročníka ZŠ*, In: Acta Mathematica 13: zväzok 1: zborník príspevkov z VIII. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre v dňoch 16. - 17. septembra 2010 - Nitra : UKF, 2010., ISBN 978-80-8094-781-1, s. 169-175.

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
RNDr. Ľubomír Rybanský
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk
jzahorska@ukf.sk
lubomir.rybansky@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

ROZVÍJANIE MATEMATICKÝCH KOMPETENCIÍ BUDÚCICH UČITEĽOV PRIMÁRNEJ ŠKOLY V OBLASTI PRÁCE S NADANÝMI ŽIAKMI

ALENA PRÍDAVKOVÁ

ABSTRACT. Ability to select the appropriate tasks for the work with gifted pupils is one key competence of primary schools mathematical teachers. Subject specific training in the given area starts during undergraduate teacher training. The content of subject *Mathematics and gifted pupil* and views of students on work in this area are presented in the article.

Úvod

V odbornej, ako aj laickej verejnosti sa za žiaka so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami považuje ten, ktorý je istým spôsobom znevýhodnený. Do uvedenej časti populácie patria aj žiaci nadaní v akejkoľvek oblasti ([4]). O rozvíjanie matematických schopností nadaných žiakov by sa mali zaujímať predovšetkým odborníci – máme na mysli učiteľov matematiky na všetkých stupňoch vzdelávania. Práca s nadanými žiakmi v oblasti matematiky si vyžaduje učiteľov vybavených takými kompetenciami, ktoré umožňujú žiakom rozvoj ich matematického talentu v rámci vzdelávania (Blažková-Budínová [1]). Učiteľ pôsobí v procese vzdelávania v pozícii facilitátora a na túto činnosť by mal byť profesionálne pripravený. Rozvíjanie odborovo-didaktických kompetencií učiteľov v oblasti práce s nadanými žiakmi je súčasťou ich pregraduálnej prípravy. Poznanie a aplikácia spôsobov a nástrojov identifikácie matematicky nadaných žiakov, metódy a formy práce podnecujúce aktivitu žiakov, to sú kompetencie, ktoré by mali byť rozvíjané u budúcich učiteľov. Uvedené kompetencie nenahradia odborné vedomosti z matematiky, ale vedú k ich efektívnejšiemu využívaniu (Sekerák [3]).

Charakteristika predmetu Matematika a nadaný žiak

V študijných programoch pripravujúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie je na Pedagogickej fakulte PU v Prešove zaradený povinne voliteľný predmet *Matematika a nadaný žiak.* Študenti sú oboznámení so základnými pedagogickými dokumentmi, ktoré vymedzujú podmienky vzdelávania žiakov so všeobecným intelektovým nadaním. Prezentované sú nástroje na identifikáciu žiakov nadaných na matematiku, ktoré môžu používať učitelia v pedagogickej praxi. Cieľom študijného predmetu je získať elementárne poznatky o spôsoboch práce so žiakmi nadanými na matematiku, naučiť sa vyberať úlohy, ktoré je možné využiť na rozvíjanie nadania. V kontexte s výberom úloh je nevyhnutné poznať rôzne spôsoby riešenia úloh, predovšetkým tie, pri ktorých sa využíva učivo a matematický aparát konkrétneho ročníka základnej školy.

Obsah predmetu je spracovaný aj v elektronickej forme – ako podporný elektronický kurz vytvorený v LMS Moodle. Ten obsahuje učebné materiály pre študentov: pedagogické dokumenty týkajúce sa vzdelávania žiakov so všeobecným intelektovým nadaním, odkazy na webové stránky venované problematike identifikácie a práce s nadanými žiakmi, ako aj konkrétne námety na prácu s danou populáciou žiakov v matematike.

Príspevok vznikol ako súčasť grantového projektu *Implementácia Learning Management Systém do matematickej a odborovodidaktickej prípravy budúcich učiteľov preelementaristov a elementaristov* (MŠ SR KEGA 163-009PU-4/2010).

Do obsahu predmetu sú zaraďované rôzne námety, ktoré korešpondujú s témami matematiky vymedzenými v kurikulu primárneho resp. nižšieho sekundárneho stupňa vzdelávania. Na základe riešenia úloh, problémov, realizácie činností, hier sú pri jednotlivých aktivitách identifikované elementy učiva matematiky. Výsledkom celej činnosti je priradenie úloh ku konkrétnym tematickým okruhom učiva v odporúčanom vzdelávacom štandarde z matematiky.

Úvodné stretnutie je venované prezentovaniu teoretických poznatkov problematiky identifikácie a vzdelávania žiakov nadaných na matematiku, ako aj stručnej charakteristike existujúcich pedagogických dokumentov týkajúcich sa edukácie intelektovo nadaných žiakov. Obsahovú náplň seminárov tvoria témy: optické ilúzie, číselné pyramídy, netradičné násobenie, násobenie pomocou prstov, grafické násobenie, práca s Napierovými počítacími paličkami (doštičkami), skladačky z papiera, úlohy z geometrie – určovanie počtu rovinných geometrických útvarov na danom obrázku, šifry rôzneho druhu. Priestor je venovaný aj matematickým súťažiam, ktoré sú na Slovensku organizované na celoštátnej úrovni. Študenti sú oboznámení so základnými charakteristikami súťaží a riešia vybrané úlohy, resp. súbory úloh.

Na seminároch študenti realizujú prevažne praktické činnosti. Riešia zadávané úlohy, problémy, vytvárajú postupy riešenia vhodné pre žiakov 1. stupňa základnej školy. Pri niektorých témach sa od nich vyžaduje aj písomné vyjadrenie procesu riešenia úlohy, spôsob vysvetlenia postupu z pozície učiteľa, formulácie otázok, ktoré by zadávali žiakom v procese riešenia daného problému. Uvedené činnosti sú využívané napríklad pri riešení úloh súvisiacich s učivom zaradeným do tematického okruhu *Čísla, premenná a počtové výkony s číslami*, ktorého cieľom je vytváranie predstáv o prirodzených číslach. Využívame pritom napríklad tieto úlohy:

Keď napíšeme prirodzené čísla od 1 do 135 za sebou (bez medzier), dostaneme tak číslo v tvare 1234567891011121314........133134135.

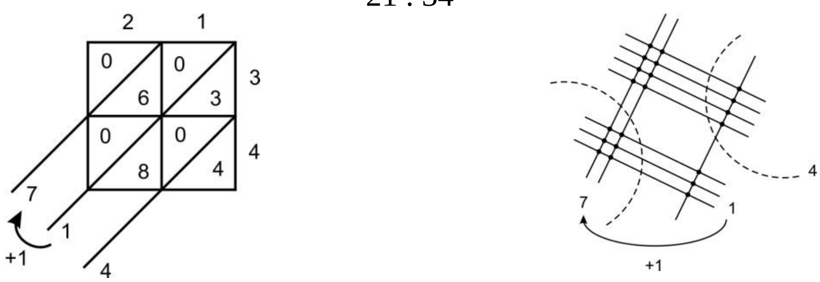
a) *Koľkociferné je vzniknuté číslo?*
b) *Zisti, koľkokrát je v danom čísle zapísaná číslica 1.*
c) *Zisti, koľkokrát sú v danom čísle zapísané číslice 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 0.*

Na očíslovanie strán knihy sme použili spolu 279 číslic.

a) *Zisti, koľko strán má kniha.*
b) *Urč, koľkokrát sa pri číslovaní strán použila číslica 4.*

Uvedieme úlohy, ktoré boli zaradené do obsahu seminára s témou netradičné násobenie. Zadávané spôsoby násobenia súvisia s učivom o písomnom násobení viacciferných prirodzených čísel. V úvode je priestor venovaný algoritmom písomného násobenia (obrázok 1), ktoré boli využívané v minulosti. Prezentované je tzv. Indické násobenie (v štvorcovej sieti), grafické - čínske násobenie (aj pomocou paličiek), násobenie využitím Napierových počítacích paličiek (resp. doštičiek). Študenti majú k dispozícii sadu Napierových počítacích paličiek a na základe manipulácie s nimi uvažujú nad možnosťami ich aplikácie pri vyučovaní danej témy. Hľadajú súvislosti medzi jednotlivými prezentovanými postupmi násobenia a algoritmami využívanými v školskej matematike, vytvárajú úlohy a formulujú problémy vhodné pre žiakov 1. stupňa ZŠ. Získajú tak nový pohľad na časť učiva matematiky primárnej školy, ktorá na prvý pohľad neposkytuje priestor na rozvoj tvorivosti a matematických schopností žiakov.

21 . 34



Obrázok 1: Ukážka dvoch spôsobov násobenia prirodzených čísel

Reflexie študentov

V akademickom roku 2010/2011 absolvovalo spomínaný predmet 29 študentov v dennej forme štúdia. Na prvom stretnutí mali študenti v písomnej forme vyjadriť svoje očakávania od výučby predmetu. Väčšina z nich uviedla:

- naučím sa riešiť úlohy vhodné pre nadaných žiakov,
- naučím sa pracovať s nadanými deťmi,
- získam námety na prácu s nadanými v matematike,
- nadobudnem vedomosti užitočné pre prax,
- budeme riešiť zaujímavé úlohy.

Z písomných výpovedí študentov bolo zrejmé, že očakávali predovšetkým nadobudnutie praktických zručností a konkrétnych úloh, ktoré je možné využiť v pedagogickej praxi. Uvádzame ďalšie vyjadrenia študentov:

- *Tento predmet som si vybrala preto, lebo žiaci sa radi učia a tí, ktorým to ide ľahšie sa na hodine nudia. Pre začínajúceho učiteľa je dobré poznať úlohy pre tento typ žiakov.*
- *Chcela by som sa naučiť ako pracovať v praxi s nadaným žiakom, kde hľadať úlohy, ako k nemu pristupovať tak, aby mal z vyučovania dobrý pocit a naučil sa niečo nové, zaujímavé.*
- *V škole sa určite stretneme aj s matematicky nadanými žiakmi a chcem dokázať aj tieto deti zaujať. Chcem si rozšíriť vedomosti z matematiky.*
- *Dúfam, že sa naučíme to, ako motivovať nadaných žiakov, ako ich zaujať, aké úlohy pre nich voliť tak, aby boli primerane náročné.*
- *Keď sa stretnem v praxi s nadaným žiakom, aby som vedela, ako k nemu pristupovať, ako reagovať na jeho otázky, aké typy úloh by mal riešiť.*
- *Naučím sa riešiť aj náročnejšie úlohy jednoduchým spôsobom.*

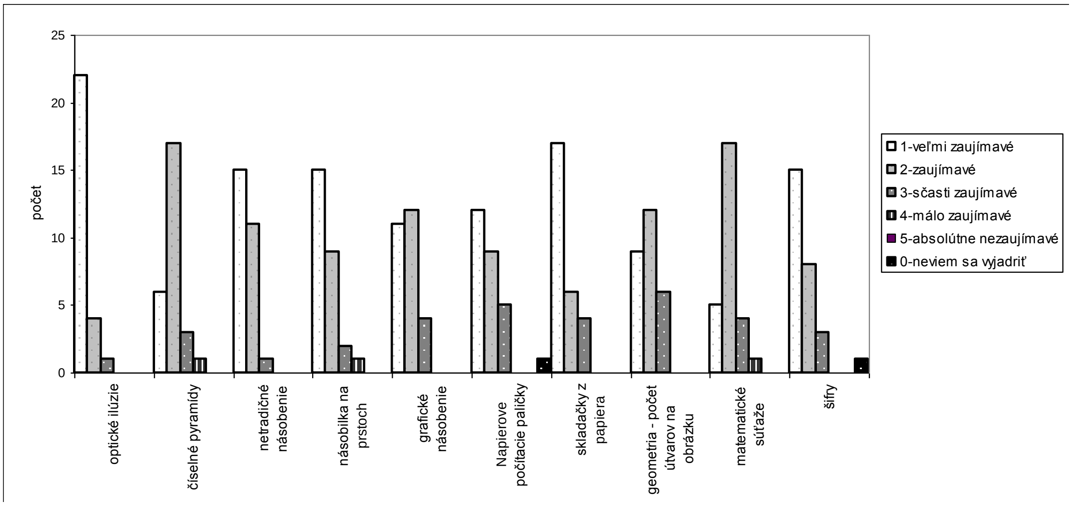
V závere výučby bol študentom zadaný dotazník spätnej väzby, v ktorom mali možnosť vyjadriť svoj názor na realizované aktivity a prínos práce počas semestra. Jedna z položiek sa týkala potreby odbornej pripravenosti učiteľa 1. stupňa základnej školy na prácu s nadanými žiakmi. Všetci sa jednoznačne vyjadrili v pozitívnom zmysle. V ďalšej položke sa študenti vyjadrovali k možnostiam využitia nadobudnutých poznatkov v praxi. Aj v tomto prípade boli vyjadrenia kladné – všetci si myslia, že využijú niektoré z aktivít a činností realizovaných v rámci seminárov.

Uvádzame niektoré názory:

- *Je dobré, ak učiteľ má k dispozícii zbierku vlastných úloh pre nadaného žiaka a je na prácu s ním pripravený.*
- *Myslím, že je jednoduchšie využiť úlohy, ktoré sme riešili, ako si to „vygoogliť".*
- *Využijem niektoré námety, ako zábavnú alebo doplnkovú formu vyučovania.*
- *Učiteľ by mal byť na prácu s nadanými žiakmi pripravený, pretože ak sa mu učiteľ nevenuje, jeho nadanie sa nerozvíja.*
- *Dôležité je tiež identifikovať nadanie u žiaka.*

Na otázku *Využili ste niektoré námety zaradené do obsahu predmetu počas svojej pedagogickej praxe?* odpovedalo 40% študentov v pozitívnom zmysle. V rámci pedagogickej praxe študenti využívali úlohy z tém: násobenie pomocou prstov, netradičné násobenie, číselné pyramídy, algebrogramy, šifry, tangram, matematické krížovky, optické ilúzie.

V dotazníku študenti vyjadrili mieru záujmu o konkrétne tematické oblasti zaradené do obsahu jednotlivých seminárov. Výsledky sú uvedené na obrázku 2 v grafe.



Obrázok 2

Na základe uvedených výsledkov možno konštatovať, že všetky témy študentov zaujali. Reakcie študentov, ktorí absolvovali vyučovanie spomínaného predmetu potvrdili, že má zmysel aj v budúcnosti pripravovať učiteľov primárnej školy na pedagogickú prácu s populáciou nadaných žiakov.

Obsah predmetu z pohľadu prípravy budúcich učiteľov na prácu so žiakmi nadanými na matematiku bol hodnotený ako veľmi užitočný u 80% opýtaných a 20% ho hodnotilo ako užitočný.

Medzi konkrétnymi návrhmi aktivít vhodných na zaradenie do obsahu vyučovania predmetu boli uvedené témy: bludiská, domino, sudoku, magické štvorce, logické úlohy, maľované krížovky, didaktické hry, origami, hádanky. Niektorí študenti navrhovali zaradiť prácu s internetovými zdrojmi, v ktorých sú prezentované úlohy vhodné pre prácu s nadanými napríklad vo forme pracovných listov.

Záver

Výsledkom práce v rámci spomínaného predmetu je predovšetkým príprava študentov pre prax. Jedným z výstupov výučby predmetu *Matematika a nadaný žiak* je portfólio konkrétnych námetov na prácu so žiakmi nadanými na matematiku obsahujúce súbory úloh, pracovných listov, návrhov na rôzne riešenia úloh, zoznam odkazov na webové stránky a pod. V kontexte s výsledkami dotazníkového prieskumu, ktoré ukázali, že učitelia v praxi si musia sami vytvárať pracovné listy a uvítali by zbierku matematických úloh pre prácu s nadanými žiakmi (Vašutová [6]), považujeme za prínosné, že študenti majú po absolvovaní kurzu k dispozícii učebné materiály využiteľné v pedagogickej praxi.

Elektronický podporný kurz bude v budúcnosti doplnený o ďalšie internetové odkazy, ako aj o konkrétne ukážky návrhov na prácu s nadanými žiakmi priamo na vyučovaní, alebo mimo vyučovania, napríklad v matematickom krúžku.

Pri realizácii činností na seminároch je vytvorený priestor na rozvíjanie odborných aj didaktických kompetencií budúcich učiteľov na primárnom stupni škôl v oblasti práce so žiakmi nadanými na matematiku. Ďalším prínosom prezentovaných aktivít je aj rozvoj pozitívneho vzťahu k matematike, o čom svedčia samotné výpovede študentov.

Učiteľ pri výbere a tvorbe úloh pre nadaných žiakov má využívať rôzne zdroje, ktoré korešpondujú s cieľmi a obsahom vyučovania matematiky. Budúci učitelia by si mali uvedomiť, že žiak s nadaním na matematiku je žiak so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami a je potrebné vytvárať špecifické podmienky pre úspešné rozvíjanie jeho nadania.

LITERATÚRA

[1] Blažková, R., Budínová, I.: Příprava učitelů k práci s matematickými talenty. In *Výchova a nadání 3*, Brno, MU Brno, Pedagogická fakulta, 2009, s. 75-82, ISBN 978-80-210-5117-1

[2] Prídavková, A.: Nadaný žiak - žiak so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami(?). In *Príprava učiteľov v procese školských reforiem. Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou,* [elektronický zdroj] Prešov, PF PU v Prešove, 2009, s. 565-571, ISBN 978-80-555-0024-9.

[3] Sekerák, J.: *Kľúčové kompetencie v matematickom vzdelávaní.* MIF č. 29, XV. ročník, Prešov, Metodicko-pedagogické centrum Prešov, 2006, s. 132-137, ISSN1335-7794.

[4] Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy v Slovenskej republike. ISCED 1–Primárne vzdelávanie, 2008 (dostupné na http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program-pre-1-stupen-zakladnych-skol-ISCED-1.alej)

[5] Vaňurová, M.: Problematika matematicky nadaných dětí v přípravě učitelů na prvním stupni ZŠ. In *Matematika 3. Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy. Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí,* Olomouc, UP Olomouc, 2008, s. 280-284. ISBN 978-80-244-1963-3.

[6] Vašutová, A.: Nadaný žiak a jeho „miesto" v bežnej triede. In *Zborník príspevkov z konferencie s medzinárodnou účasťou Matematika z pohľadu primárneho*

vzdelávania, Banská Bystrica, UMB Banská Bystrica, 2009, s. 222-226. ISBN 978-80-8083-742-6.

[7] Vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy pre žiakov so všeobecným intelektovým nadaním. ISCED 1 – primárne vzdelávanie, 2009 (dostupné na: http://www.vudpap.sk/sub/vudpap.sk/images/ISCED/isced_1.pdf)

doc. RNDr. Alena Prídavková, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
Ul. 17. novembra 15
SK – 080 01 Prešov
e-mail: alena.pridavkova@pf.unipo.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

EXTREMÁLNE ÚLOHY O MINIMÁLNEJ LOMENEJ ČIARE

LUCIA RUMANOVÁ, VALÉRIA ŠVECOVÁ

ABSTRACT. In this paper we address one type of extremes problems, namely the shortest connecting line between two or more points in the plane. Problems of this type are often difficult for the students, terms of interesting tasks, which can be sometimes to explore or experiment with the solutions to problems.

Úvod

V príspevku sa budeme venovať jednému typu extremálnych úloh, a to najkratšej lomenej čiary medzi bodmi v rovine. Samotné riešenie úloh tykajúcich sa najkratších úsečiek s rôznymi podmienkami riešenia by malo obsahovať nielen vzťahy a výsledky, ale aj dôkaz ich optimalizácie.

Úlohy takéhoto typu sú často pre študentov náročnejšie, pritom ide o zaujímavé úlohy, pri ktorých sa dá mnohokrát aj experimentovať alebo skúmať s riešeniami úloh. Pri ich riešení treba využívať vedomosti z elementárnej, ale aj analytickej geometrie, geometrických zobrazení, algebry, prípadne základy diferenciálneho počtu.

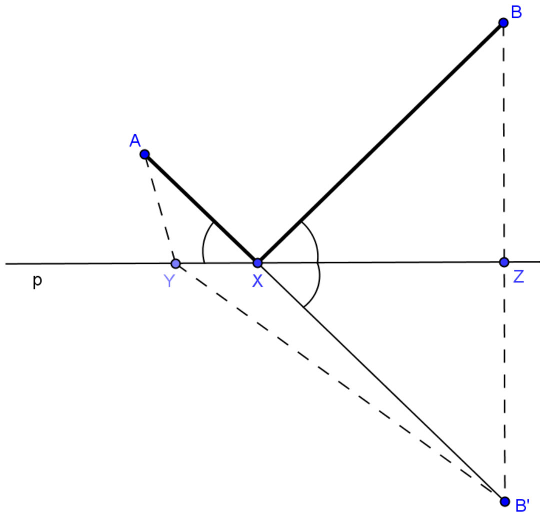
Najkratšie lomené čiary

S príkladmi 1 a 2 sa študenti určite stretnú v rámci vyučovania geometrie na strednej škole. Ide o zostrojenie najkratšej úsečky medzi dvoma bodmi v rovine (príklad 1) a príklad 2 je známy ako úloha o pohybe gule po biliardovom stole. Pri ich riešeniach sa dá využiť osová súmernosť a veta o rovnosti uhla dopadu a odrazu.

Príklad 1: *Body A, B ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou p. Nájdite na priamke p taký bod X, aby súčet dĺžok úsečiek AX, BX bol minimálny.*

Riešenie: Zostrojíme bod B', ktorý je osovo súmerný podľa priamky p. Potom bod X vznikne ako prienik priamok $p, \overleftrightarrow{AB'}$. Pre každý iný bod priamky p riešenie nevyhovuje, pretože pre každý bod $Y \in p, Y \neq X$ platí nasledujúci vzťah $|AY| + |BY| = |AY| + |B'Y| > |AB'| = |AX| + |XB'| = |AX| + |XB|$, aj uhly $\angle YXA, \angle ZXB, \angle ZXB'$ sú zhodné (obrázok 1).

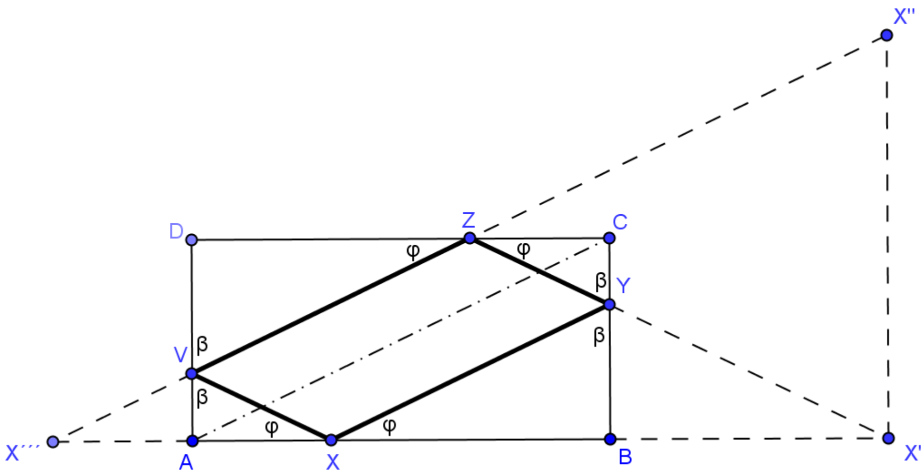
Príspevok vznikol v rámci projektu *Úlohy unifikačného charakteru vo vyučovaní stereometrie* číslo VI/26/2011 Univerzitnej grantovej agentúry UKF v Nitre



Obrázok 1

Príklad 2: *Daný je obdĺžnik ABCD a bod X, ktorý je vnútorným bodom strany AB daného obdĺžnika. Nájdite na také vnútorné body Z, Y, V na ostatných stranách obdĺžnika, aby dĺžka lomenej čiary XYZVX bola minimálna a vypočítajte aj jej dĺžku. Závisí táto dĺžka od polohy bodu X?* [1]

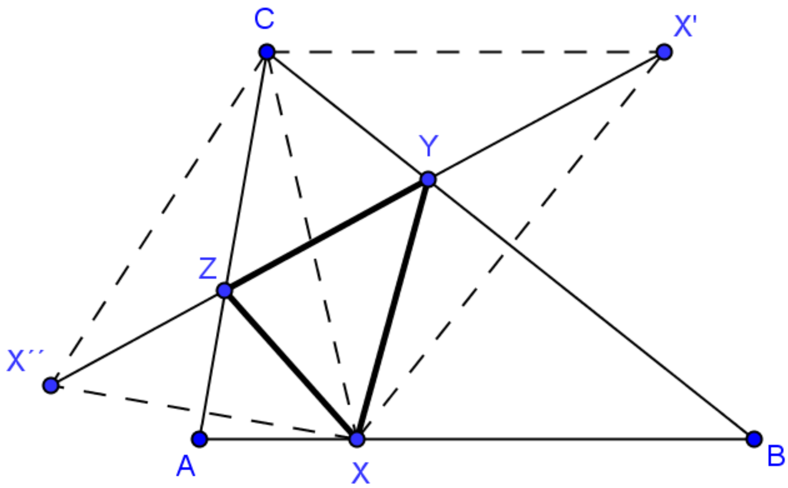
Riešenie: Využijeme postupne osovú súmernosť s osami $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}$: $O_{\overleftrightarrow{BC}} : X \to X', O_{\overleftrightarrow{CD}} : X' \to X'', O_{\overleftrightarrow{AD}} : X \to X'''$. Ak najkratšou „spojnicou" bodov X'' a X''' je úsečka $X''X'''$, potom platí $V \in X''X''' \cap AD, Z \in X''X''' \cap CD, Y \in X'Z \cap BC$. Podobne ako v príklade 1sa dá ukázať, že dĺžka lomenej čiary *XYZVX* je minimálna a jej dĺžka je vlastne dĺžka úsečky $X''X'''$, $|X''X'''| = \sqrt{|X'X''|^2 + |X'X'''|^2} = 2|AC|$. Dĺžka lomenej čiary *XYZVX* je dvojnásobkom uhlopriečky daného obdĺžnika *ABCD*, a preto nie je závislá od polohy bodu *X* na strane *AB*. (obrázok 2)



Obrázok 2

Príklad 3: *Daný je trojuholník ABC a vnútorný bod X strany AB. Nájdite body Y, Z patriace stranám BC, AC daného trojuholníka tak, aby dĺžka lomenej čiary XYZX bola minimálna. Popíšte polohu bodu X na strane AB, aby lomená čiara bolo čo najkratšia.*

Riešenie: V riešení budeme uvažovať len o ostrouhlom trojuholníku *ABC* a využijeme opäť osové súmernosti: $O_{\overleftrightarrow{BC}} : X \to X', O_{\overleftrightarrow{AC}} : X \to X''$. Priesečníky priamky $\overleftrightarrow{X'X''}$ so stranami *BC*, *AC* trojuholníka *ABC* budú už hľadané body *Y* a *Z*. (obrázok 3)

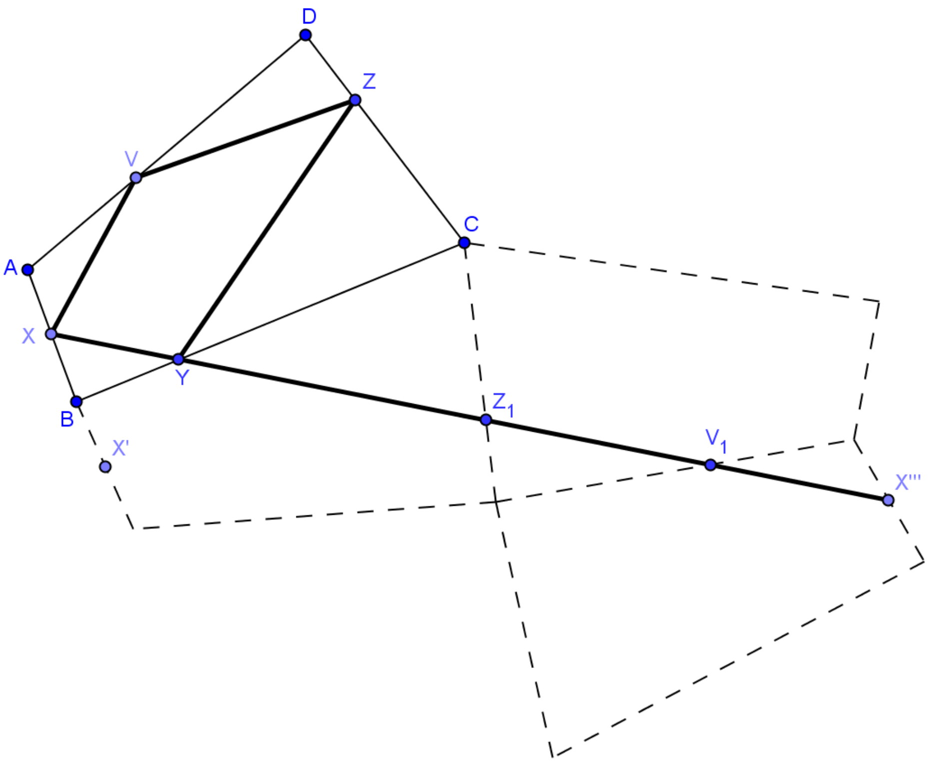


Obrázok 3

Z obrázku 3 vidieť, že trojuholník *X´X´´C* je rovnoramenný. Pre základňu trojuholníka platí $|X'X''| = |X'Y| + |YZ| + |ZX''| = |XY| + |YZ| + |ZX|$. Dĺžka základne sa mení podľa závislosti od dĺžky úsečky *CX* a najkratšou bude, ak bod *X* bude pätou výšky na stranu *AB* v trojuholníku *ABC*. Podobne to bude aj s bodmi *Y* a *Z*, a preto pre daný trojuholník *ABC* existuje jediný vpísaný trojuholník s minimálnym obvodom (vrcholy tohto trojuholníka budú pätami výšok trojuholníka *ABC*).

Príklad 4: *Daný je konvexný štvoruholník ABCD a vnútorný bod X strany AB. Nájdite body Y, Z, V patriace stranám BC, CD, AD daného štvoruholníka tak, aby dĺžka lomenej čiary XYZVX bola minimálna.*

Riešenie: Znova použijeme osové súmernosti s osami $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}$ tak, ako v predchádzajúcich príkladoch. Môžeme ale zameniť osovú súmernosť bodu s danou osou za osovú súmernosť štvoruholníka *ABCD* tak, ako je na obrázku 4.



Obrázok 4

Podobne ako sme zovšeobecnili príklad 3 pre konvexný štvoruholník (príklad 4), môžeme postupne zadanie zovšeobecniť až pre konvexný mnohouholník. Potom pre vpísaný konvexný mnohouholník U' do mnohouholníka U vieme formulovať tieto základné vlastnosti:

- vždy existuje mnohouholník U', pričom všetky jeho vrcholy sú vnútornými bodmi strán pôvodného mnohouholníka U a U' má minimálny obvod (niektoré jeho vrcholy môžu splynúť)
- ak mnohouholník U má nepárny počet vrcholov V, tak existuje mnohouholník U' práve jeden
- ak mnohouholník U má párny počet vrcholov V, tak mnohouholníkov U' existuje nekonečne veľa s vrcholmi V', pričom nutnou a postačujúcou podmienkou existencie týchto mnohouholníkov je, aby súčet veľkostí jeho vnútorných uhlov pri jeho vrcholoch $V'_{2i-1}, i = 1,2,\dots,n$ bol celočíselným násobkom čísla π . [2]

Záver

V príspevku sme stručne popísali niekoľko extremálnych úloh, pričom sme sa zamerali na ich postupnú gradáciu, pretože úlohy takéhoto typu nie sú u študentov veľmi obľúbené, často ich považujú za náročné a ani sa ich nepokúšajú potom riešiť. Takéto úlohy je určite vhodné zaradiť do vyučovacieho procesu.

LITERATÚRA

[1] Pavol Černek – Tomáš Hecht – Miloš Božek: *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ, 4.časť – Zbierka úloh*, OrbisPictusIstropolitana, Bratislava, 2003, ISBN 80-7158-469-X

[2] Josef Molnár – Jiří Kobza: *Extremálne a kombinatorické úlohy z geometrie*, SPN, Bratislava, 1991, ISBN 80-08-01056-8

[3] Jozef Smida – Jaroslav Šedivý – Júlia Lukátšová – Jindřich Vocelka: *Matematika pre 1. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava, 1984, 64-180-84

PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: `lrumanova@ukf.sk`

PhDr. PaedDr. Valéria Švecová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: `vsvecova@ukf.sk`

MATEMATIKA V PRIJÍMACOM KONANÍ NA MAGISTERSKÝ STUPEŇ ŠTÚDIA NA PEDAGOGICKEJ FAKULTE PU V PREŠOVE – POHĽAD PRVÝ

IVETA SCHOLTZOVÁ, MAREK MOKRIŠ

ABSTRACT. At the Faculty of Education of University of Prešov in the study Pre-school and Elementary Education is the second stage study carried out a study program Primary School education. To the admission procedure for master's degree study belongs the test of the mathematical skills. The test includes the mathematical knowledge of the graduates at bachelor's degree of the study program Pre-school and Elementary Education.

Úvod

Príprava budúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie na Pedagogickej fakulte Prešovskej univerzity v Prešove sa realizuje v dvoch stupňoch štúdia – bakalárskom a nadväzujúcom magisterskom. Prijímacie konanie na magisterský stupeň štúdia obsahuje tri kategórie hodnotených oblastí. Prvá oblasť vychádza z úspešnosti uchádzača na bakalárskom stupni štúdia. Ďalšími dvoma sú výsledky dosiahnuté v prijímacích testoch z matematiky a zo slovenského jazyka a literatúry.

Matematika v bakalárskom stupni štúdia

Matematické disciplíny sú neoddeliteľnou súčasťou pregraduálneho vzdelávania budúcich pedagogických pracovníkov pre predškolskú a primárnu edukáciu. V študijnom programe Predškolská a elementárna pedagogika sú v študijnom pláne na bakalárskom stupni povinné predmety:

- Tvorba počiatočných matematických predstáv,
- Matematika a voľnočasové aktivity,
- Elementárna aritmetika a algebra s didaktikou.

Dopĺňajú ich povinne voliteľné (PV) a odporúčané výberové predmety (OV):

- Stratégie riešenia matematických úloh (PV),
- Matematické didaktické hry (PV),
- Matematický krúžok (PV),
- Praktikum – elementárna aritmetika a algebra (PV),
- Matematika a počítač (OV),
- Alternatívne prístupy v matematickej edukácii (OV)

Obsahové zameranie niektorých predmetov je charakterizované v článkoch Prídavková (2008), Šimčíková – Tomková (2010).

Prijímací test z matematiky na magisterský stupeň štúdia

Pri kreovaní podmienok prijímacieho konania na magisterský stupeň štúdia v oblasti matematiky bolo potrebné odpovedať na jednu zo základných otázok: Aké má byť obsahové zameranie prijímacieho testu z matematiky - stredoškolská matematika, PISA

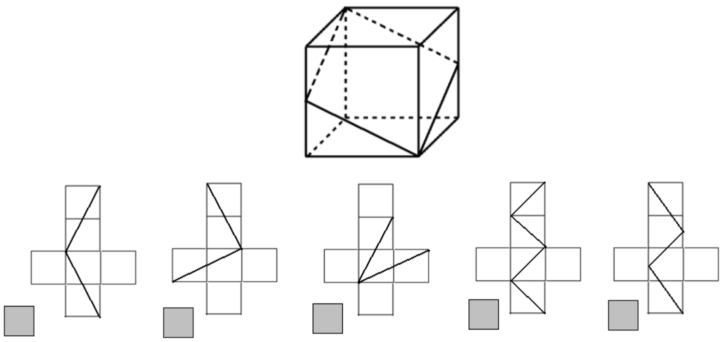
Príspevok bol spracovaný ako súčasť riešenia projektu KEGA 165-016PU-4/2010 *Matematika pre život – cesty rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.*

matematika, …? Z diskusií vyplynul záver, že bude korektné, vhodné a pre ďalšie vzdelávanie prínosné, ak uchádzači o magisterské štúdium preukážu svoje matematické schopnosti v takých oblastiach, ktoré boli obsiahnuté v matematických disciplínach bakalárskeho stupňa štúdia. Dlhoročné skúsenosti totiž ukazujú, že študenti v mnohých prípadoch úspešnejšie zvládnu matematické úlohy, ktoré vyžadujú hlbšie matematické vedomosti a používa sa pri nich náročnejší matematický aparát. Často majú problém správne vyriešiť také úlohy, ktoré na prvý pohľad vyzerajú veľmi jednoducho. V rámci svojho matematického vzdelávania sa s nimi nestretávajú často. Ako keby zabudli „rozmýšľať jednoducho“ a snažia sa aplikovať naučené algoritmy.

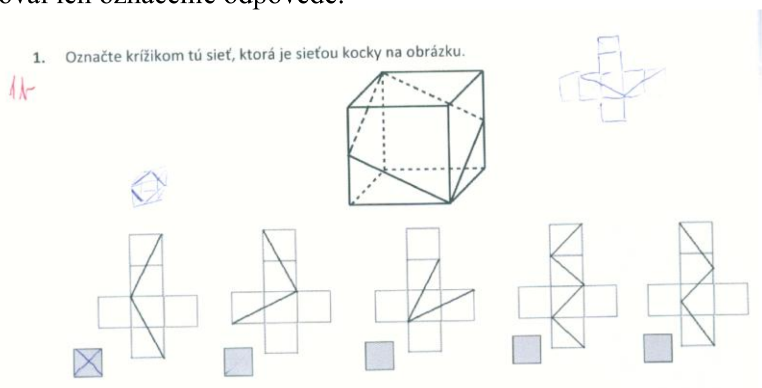
Geometria v prijímacom teste z matematiky na magisterský stupeň štúdia

Do prijímacieho testu boli z elementárnej geometrie zaradené tri úlohy. Ich zameranie korešpondovalo s geometrickou problematikou v predmete Tvorba počiatočných matematických predstáv.

Úloha č. 1
Označte krížikom tú sieť, ktorá je sieťou kocky na obrázku.



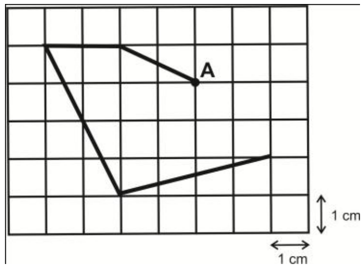
Charakteristika:
Úloha bola venovaná problematike priestorovej orientácie a identifikácii siete kocky. Z pohľadu medzinárodnej štúdie OECD PISA ide o oblasť priestor a tvar, kompetencie na úrovni prepojenia. Za správne riešenie bol pridelený 1 bod.
Identifikované boli dva prístupy k riešeniu úlohy. Prvý využíval znázornenie siete kocky riešiteľom a následnú identifikáciu správnej odpovede (pozri nasledujúci obrázok). Druhý prístup obsahoval len označenie odpovede.



Z pohľadu úspešnosti riešenia úlohy boli zistené rozdiely v riešení medzi uchádzačmi o dennú, resp. externú formu štúdia. Správne riešenie vyznačilo 39 (44,32 %) uchádzačov o denné štúdium a 27 (60,00 %) uchádzačov o externú formu štúdia.

Úloha č. 2:
Dokreslite útvar v štvorcovej sieti podľa nasledujúcich pokynov:

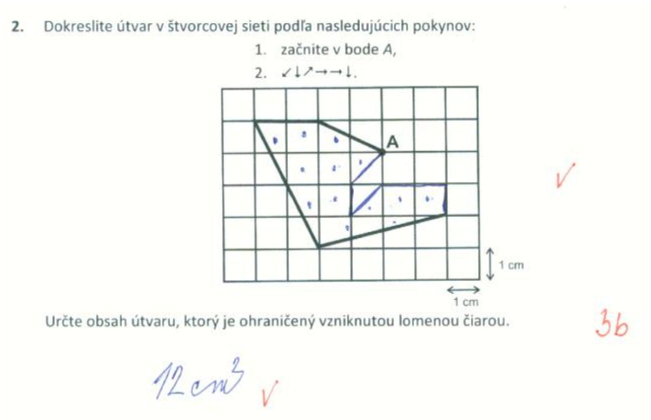
1. *začnite v bode A,*
2. ↙↓↗→→↓.



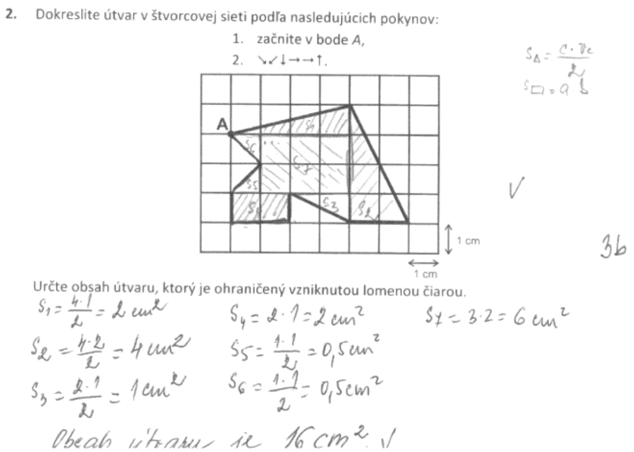
Určte obsah útvaru, ktorý je ohraničený vzniknutou lomenou čiarou.

Charakteristika:
Úloha bola zameraná na orientáciu v rovine prostredníctvom piktogramov (šípky) a určenie veľkosti obsahu rovinného útvaru zloženého z trojuholníkov a pravouholníkov. Z pohľadu PISA je úloha zaradená do oblasti planimetria, kompetencie na reprodukčnej úrovni a na úrovni prepojenia. Za správne doplnenie hranice útvaru bol pridelený 1 bod, za určenie veľkosti obsahu s uvedením meracej jednotky mohol uchádzač získať 2 body.
Pri riešení tejto úlohy boli identifikované tieto postupy:

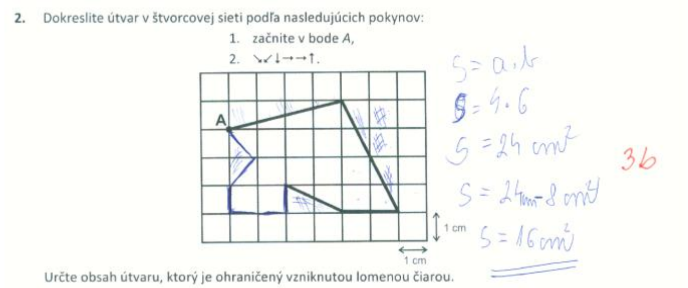
- určenie obsahu „pohľadom“,



- určenie obsahu „rozdelením rovinného útvaru na základné rovinné útvary“
  - rozčlenenie rovinného útvaru na základné rovinné útvary (trojuholník, štvorec, obdĺžnik),
  - určenie obsahu jednotlivých základných útvarov,
  - určenie obsahu rovinného útvaru ako súčet obsahov základných rovinných útvarov (trojuholník, štvorec, obdĺžnik).

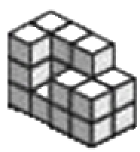


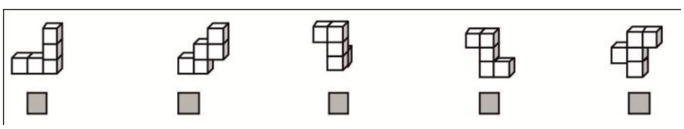
- určenie obsahu „doplnením do obdĺžnika“
    - určenie obsahu obdĺžnika,
    - určenie súčtu obsahov útvarov (trojuholníky), ktoré doplnili zadaný útvar na obdĺžnik,
    - určenie rozdielu obsahu obdĺžnika a súčtov obsahov doplnených trojuholníkov.



Správne doplnenie hranice útvaru nezvládli približne 2 % uchádzačov. 9,09% uchádzačov o dennú formu a 4,44% o externú formu správne určilo veľkosť obsahu, ale nesprávne uviedli meraciu jednotku (alebo ju neuviedli vôbec). Korektné riešenie vypracovalo 36 (40,91%) adeptov na denné štúdium a 19 (42,22%) na externé.

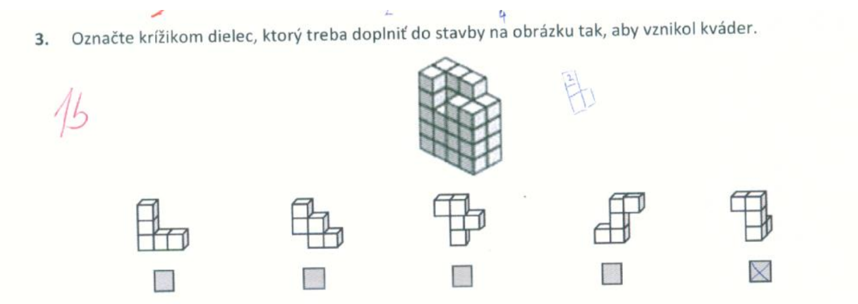
Úloha č. 3:
Označte krížikom dielec, ktorý treba doplniť do stavby na obrázku tak, aby vznikol kváder.





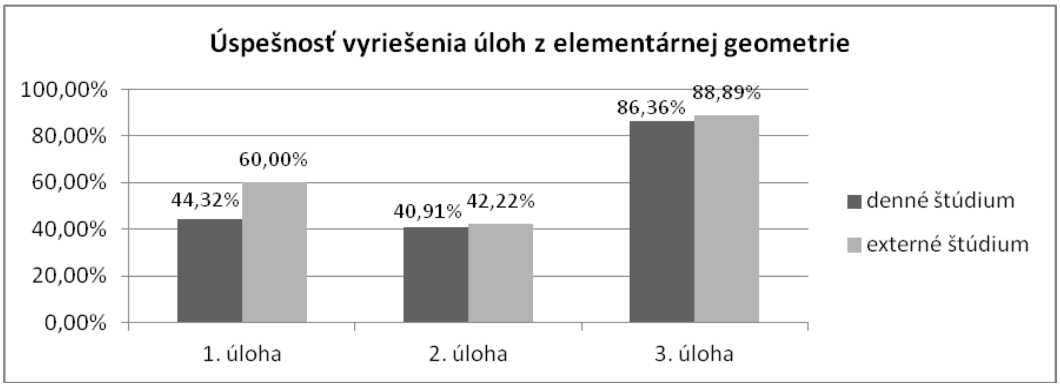
Charakteristika:

Úloha testovala priestorovú predstavivosť a orientáciu v priestore. Z pohľadu PISA je úloha kategorizovaná do oblasti priestor a tvar, kompetencie na úrovni prepojenia. Za správnu identifikáciu útvaru bol pridelený 1 bod.
Pozorované boli dva prístupy k riešeniu úlohy. Prvý využíval znázornenie chýbajúceho elementu riešiteľom a následné určenie správnej odpovede (pozri nasledujúci obrázok). Druhý prístup obsahoval len označenie odpovede.



Záver

Pri porovnaní miery úspešnosti úplného vyriešenia jednotlivých úloh z elementárnej geometrie uchádzačmi o magisterské štúdium v študijnom programe Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie je zrejmé, že uchádzači o externú formu štúdia dosiahli lepšie výsledky. Tento rozdiel však nemožno považovať za významný, okrem úlohy č. 1. V súčasnosti nevieme určiť možnú príčinu. Jej identifikovanie bude súčasťou výučby v predmete Geometria s didaktikou na magisterskom stupni štúdia.



Nepochybne aj analýza ďalších úloh z prijímacieho testu (aritmetika, algebra, kombinatorika) bude zdrojom dôležitých informácií, ktoré nájdu svoj odraz v príprave podkladov pre výučbu matematických disciplín na magisterskom stupni štúdia.
Cieľom matematickej prípravy budúcich učiteľov je rozvíjanie ich odborovo-didaktickej kompetencie. A v neposlednom rade aj ich matematickej gramotnosti tak, aby oni vo svojej budúcej pedagogickej praxi boli schopní rozvíjať matematickú gramotnosť u svojich žiakov.

LITERATÚRA

[1] Prídavková, Alena: *Didaktické spracovanie riešiteľských stratégií matematických úloh*. In ACTA MATHEMATICA 11. Nitra, FPV UKF v Nitre, 2008, s. 193-197, ISBN 978-80-8094-396-7

[2] Šimčíková, Edita – Tomková, Blanka: *Rozvoj psychomotorických kompetencí v matematicko – logickej podoblasti v kontexte kurikula súčasnej materskej školy*. In Perceptuálno-motorické učenie sa v predprimárnej edukácii v kontexte súčasnej kurikulárnej reformy. Prešov, PF PU v Prešove, 2010, s. 71-75, ISBN 978-80-555-0208-3

doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD., Mgr. Marek Mokriš, PhD.
Katedra matematickej edukácie
Pedagogická fakulta
Prešovská univerzita v Prešove
17. novembra 15
SK –081 16 Prešov
e-mail: iveta.scholtzova@pf.unipo.sk, marek.mokris@pf.unipo.sk

SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR IMPULSIVE SYSTEMS BOUNDED ON THE ENTIRE REAL AXIS

JAROSLAVA ŠKORÍKOVÁ

ABSTRACT. We consider the existence of the solutions bounded on *R* of nonhomogeneous linear and nonlinear impulsive systems. The necessary and sufficient conditions for the indicated problem are obtained under the assumption that the corresponding homogeneous system is e-dichotomous.

Introduction

The primary ideas of the investigation of differential systems with impulsive action were developed in numerous publications, for example [1], [2]. This contribution deals with the problem of existence and construction of solutions of linear and nonlinear nonhomogeneous differential impulsive systems bounded on the entire real axis. We obtained the necessary and sufficient conditions for existence of solutions of these systems.

1. The linear system

We consider the problem of existence and structure of solutions bounded on the entire real axis of linear differential systems with impulsive action at fixed points of time

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+) - x(\tau_i-) = \gamma_i, \quad t, \tau_i \in R^n, \quad \gamma_i \in R^n, \end{aligned} \tag{1}$$

where $A(t) \in BC\left(R \setminus \{\tau_i\}_I \right)$ is $n \times n$ matrix of functions, $f(t) \in BC\left(R \setminus \{\tau_i\}_I \right)$ is $n \times 1$ vector function, $BC(R \setminus \{\tau_i\}_I)$ is the Banach space of real functions continuous for $t = \tau_i$ with the norm $\|x(t)\|_{BC\left(R\setminus\{\tau_i\}_I\right)} = \sup_{t\in R}\|x(t)\|$, and $\gamma_i \in R^n$ are n - dimensional column constant vectors, $\ldots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$. The homogeneous system

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x\Big|_{t=\tau_i} = 0. \tag{2}$$

is e-dichotomous on semiaxes $J = R_- = (-\infty, 0]$ or $J = R_+ = [0, \infty)$ if there exists a projector *P*, $\left(P = P^2\right)$ and constants $K \geq 1,\ \alpha \geq 0$ such that:

$$\begin{aligned} &\left\|X(t)PX^{-1}(s)\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 (t-s)}, \quad t > s, \\ &\left\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 (s-t)}, \quad t \leq s, \quad t, s \in J, \end{aligned}$$

where *X(t)* is the normal fundamental matrix of the homogeneous system (2).

The existence and structure of solution $x(t) \in BC^1\left(R \setminus \{\tau_i\}_I\right)$ bounded on *R* of the problem (1) was studied in [3], where the following theorem was constructed and proved:

Theorem 1. *Assume that the linear nonhomogeneous impulsive system (1) has the corresponding homogeneous system (2) e – dichotomous on semiaxes* $R_+ = [0, \infty)$ *and* $R_- = (-\infty, 0]$ *with projectors P, Q, respectively. Then the homogeneous system (2) has exactly r* ($r = rankPP_D = rank(I-Q)P_{D,}\;\; D = P-(I-Q)$) *linearly independent solutions bounded on R. If the nonhomogeneities* $f \in BC(\; R \setminus \{\tau_i\}_I)$ *and* $\gamma_i \in R^n$ *satisfy d* $\left(d = rankP_{D^*}\; Q = rankP_{D^*}(I-P)\right)$ *linearly independent conditions*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d\, f(t)dt + \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i)\gamma_i = 0, \tag{3}$$

where $H_d(\cdot) = [P_{D^*}Q]_d\; X^{-1}(\cdot)$ *is a* $d \times n$ *matrix, then the system (1) possesses an r-parameter family of linearly independent solutions bounded on R in the form*

$$x(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f \\ \gamma_i \end{bmatrix}\right)(t), \quad \forall c_r \in R^r, \tag{4}$$

where $X_r(t) = X(t)[PP_D]_r = X(t)[(I-Q)P_D]_r$ *is* $n \times r$ *matrix formed by a complete system of r linearly independent solutions of homogeneous system (2) bounded on R, and* $\left(G\begin{bmatrix} f \\ \gamma_i \end{bmatrix}\right)(t)$ *is the generalized Green operator for the problem of finding solutions of impulsive problem (1) bounded on R acting upon* $f \in BC(\; R \setminus \{\tau_i\}_I)$ *and* $\gamma_i \in R^n$ *is defined by the formula*

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ \gamma_i \end{bmatrix}\right)(t) = X(t)\begin{cases} \displaystyle\int_0^t PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{i=1}^{j} PX^{-1}(\tau_i)\gamma_i \\ \displaystyle -\sum_{i=j+1}^{\infty}(I-P)X^{-1}(\tau_i)\gamma_i + PD^+\left\{\int_{-\infty}^{0} QX^{-1}(s)f(s)ds + \int_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right. \\ \displaystyle \left. + \sum_{i=-\infty}^{-1} QX^{-1}(\tau_i)\gamma_i + \sum_{i=1}^{\infty}(I-P)X^{-1}(\tau_i)\gamma_i\right\} \quad t \geq 0; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} QX^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{0}(I-q)X^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{i=-\infty}^{-(j+1)} QX^{-1}(\tau_i)\gamma_i \\ \displaystyle -\sum_{i=j+1}^{\infty}(I-Q)X^{-1}(\tau_i)\gamma_i + (I-Q)D^+\left\{\int_{-\infty}^{0} QX^{-1}(s)f(s)ds + \int_0^{\infty}(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right. \\ \displaystyle \left. + \sum_{i=-\infty}^{-1} QX^{-1}(\tau_i)\gamma_i + \sum_{i=1}^{\infty}(I-P)X^{-1}(\tau_i)\gamma_i\right\} \quad t \leq 0; \end{cases}$$

with the following property

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ \gamma_i \end{bmatrix}\right)(0+0) - \left(G\begin{bmatrix} f \\ \gamma_i \end{bmatrix}\right)(0-0) = \int_{-\infty}^{\infty} H_d\, f(t)dt + \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i)\gamma_i;$$

where D^+ is its Moore-Penrose pseudoinverse matrix to D, P_D, P_{D*} are $n \times n$ matrices (orthoprojectors), i. e., $P_D = P_D^2 = P_D^*$, $P_{D*} = P_{D*}^2 = P_{D*}^*$ projecting R^n onto the kernel N(D)= kerD and the cokernel $N(D^*)$=coker D=kerD^* of the matrix D, respectively.

2. The Nonlinear system

We consider a weakly nonlinear system for differential equations with impulsive action

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = \gamma_i + \varepsilon J_i(x(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon), \quad t,\tau_i \in R^n, \quad \gamma_i \in R^n, \tag{5}$$

The nonlinear vector function $Z(x,t,\varepsilon)$ are such that

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le q], \qquad Z(x,\cdot,\varepsilon) \in BC(R \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \textit{and} \quad Z(x,t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

where q is sufficiently small constant and $J_i(x(\tau_i,\varepsilon),\varepsilon)$ are nonlinear vector functionals continuously differentiable with respect to x and continuous in $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$.

Our aim is to establish conditions required for the existence of its solutions $x = x(t,\varepsilon)$ bounded on R and such that

$$x(\cdot,\varepsilon) \in R \to R^n, \qquad x(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(R \setminus \{\tau_i\}_I), \quad \textit{and} \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \tag{6}$$

where $\varepsilon \in R^n$ is a sufficiently small parameter, which turns into one of the generating solutions $x_0(t,c_r)$ of the system (1) given by relation (4) for $\varepsilon = 0$.

Theorem 2 *(Necessary condition). Assume that the system (2) is e – dichotomous on semiaxes $R_+ = [0,\infty)$ and $R_- = (-\infty, 0]$ with projectors P, Q, respectively. System (5) has a solution $x(t,\varepsilon)$ (6) bounded on R which turns into one of the generating solutions $x_0(t,c_r)$ (6) of system (1) with a vector constant $c_r = c_r^0 \in R^r$ for $\varepsilon = 0$. Then the vector c_r^0 satisfies the equation*

$$F(c_r^0) = \int_{-\infty}^{\infty} H_d(s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0)ds + \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i-) Z(x_0(\tau_i-,c_r^0),0) = 0. \tag{7}$$

Proof: The condition (3) for the existence of the generating solutions $x_0(t,c_r)$ (4) bounded on R is assumed to be satisfied. We consider the nonlinearity in system (5) as a nonhomogeneity and apply Theorem 1, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d(s) Z(x_0(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds + \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i-) Z(x_0(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon) = 0.$$

In this integral, we pass the limit as $\varepsilon \to 0$ and arrive at the required condition (7).

If the equation (7) is solvable, then the vector constant $c_r^0 \in R^r$ specifies the generating solutions $x_0(t,c_r^0)$ corresponding to the solution $x = x(t,\varepsilon)$ of the original problem (5) bounded on R and such that $x(t,0) = x_0(t,c_r^0)$. If the equation (7) is unsolvable, then the problem (5) does not have solutions bounded on R in the analyzed space. All expressions are obtained in the real form.

By the change of variables in system (5)

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon), \qquad \forall c_r^0 \in R^r,$$

we arrive at the problem of finding sufficient conditions for the existence of solutions $y = y(t,\varepsilon)$ bounded on R and such that

$$y(\cdot,\varepsilon): R \to R^n,\ y(t,\varepsilon) \in BC^1(R \setminus \{\tau_i\}_I), \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad y(t,0) = 0 \tag{8}$$

of the problem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y + \varepsilon Z\left(x_0\left(t,c_r^0\right) + y(t,\varepsilon),t,\varepsilon\right), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta y\big|_{t=\tau_i} &= \varepsilon J_i\left(x_0\left(\tau_i-,c_r^0\right) + y(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon\right), \quad t,\tau_i \in R^n. \end{aligned} \tag{9}$$

In view of the restrictions imposed on the nonlinearities, we get the following expansions valid in the neighborhood of the point $y = 0,\ \varepsilon = 0$:

$$Z(x_0 + y,t,\varepsilon) = Z\left(x_0\left(t,c_r^0\right),t,0\right) + A_1(t)y + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$J_i(x_0 + y(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon) = J_i\left(x_0\left(\tau_i-,c_r^0\right),0\right) + A_{1i}y(\tau_i-,\varepsilon) + R_i(y(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon),$$

where

$$A_1(t) = A_1\left(t,c_r^0\right) = \frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0\left(t,c_r^0\right)},$$

$$R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0,$$

$$A_{1i}(t) = \frac{\partial J_i(x,0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0\left(\tau_i,c_r^0\right)}, \quad A_{1i}(\cdot) \in BC\left(R \setminus \{\tau_{\mathrm{i}}\}_I\right),$$

$$R(0,0) = 0, \quad \frac{\partial R_i(0,0)}{\partial y} = 0.$$

If we consider the vector functions $Z(x_0 + y,t,\varepsilon)$, $J_i(x_0 + y,\varepsilon)$ in (9) as nonhomogeneities and apply the Theorem 1, we get the following expression for the solution of system (9) bounded on R:

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + y^1(t,\varepsilon), \tag{10}$$

where $c = c(\varepsilon) \in R^r$ is an unknown vector of constants and is determined from a condition for the existence of a solution bounded on the entire real axis of system (9):

$$B_0 c = -\int_{-\infty}^{\infty} H_d(s)\left[A_1(s)y^{(1)} + R(y,s,\varepsilon)\right]ds - \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i-)\left[A_{i1}(\tau_i-)y^{(1)} + R_i(y,\varepsilon)\right]$$

where

$$B_0 = -\int_{-\infty}^{\infty} H_d(s)A_1(s)X_r(s)ds - \sum_{i=-\infty}^{\infty} H_d(\tau_i-)A_{i1}(\tau_i-)X_r(\tau_i-)$$

is $d \times r$ matrix. The unknown vector function $y^{(1)}(t,\varepsilon)$ is determined by using the generalized Green operator as follows:

$$y^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)+y,\cdot,\varepsilon\right) \\ J_i\left(x_0\left(\tau_i-,c_r^0\right)+y,\varepsilon\right)\end{bmatrix}\right)(t). \tag{11}$$

Let $P_{N(B_0)}$ be $r\times r$ matrix orthoprojector $R^r\to N(B_0)$ and $P_{N\left(B_0^*\right)}$ be $d\times d$ matrix orthoprojector $R^d\to N(B_0^*)$. The algebraic system is solvable with respect to $c\in R^r$ if $P_{N\left(B_0^*\right)}=0$ and one of its solutions is (to within an arbitrary constant vector $P_{N(B_0)}\tilde{c}$) :

$$c=-B^+{}_0\left\{\int_{-\infty}^{\infty}H_d(s)\left[A_1(s)y^{(1)}+R(y,s,\varepsilon)\right]ds+\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_d(\tau_i-)\left[A_{i1}(\tau_i-)y^{(1)}+R_i(y,\varepsilon)\right]\right\}. \tag{12}$$

We find a solution bounded on *R*, $y=y(t,\varepsilon)$, of (9), if we solve the operator system (10), (11), (12) which belongs to the class of system [4] solvable by the method of simple iterations convergent for sufficiently small $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\subseteq[0,\varepsilon_0]$ and can be rewritten as

$$z=L^{(1)}z+Fz, \tag{13}$$

where

$$L^{(1)}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ L_1&0&0\\ I_n&X_r&0\end{bmatrix},\quad L_1=-B_0\left\{\int_{-\infty}^{\infty}H_d(s)A_1(s)ds+\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_d(\tau_i-)A_{1i}(\tau_i-)\right\},$$

$$Fz=\begin{bmatrix}\varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)+y,\cdot,\varepsilon\right) \\ J_i\left(x_0\left(\tau_i-,c_r^0\right)+y,\varepsilon\right)\end{bmatrix}\right)(t)\\ \int_{-\infty}^{\infty}H_d(s)R(y(s,\varepsilon)s,\varepsilon)ds+\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_d(\tau_i-)R_i(y(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon)\\ 0\end{bmatrix},$$

$z=col\left(y^{(1)}(t,\varepsilon),c(\varepsilon),y(t,\varepsilon)\right)$ is a $(2n+r)$ - dimensional vector, $L^{(1)}$ and F are, respectively, linear and nonlinear operators bounded on *R*. The operator $L^{(1)}$ has zero blocks on the principal diagonal and above, so the operator $\left(I_S-L^{(1)}\right)^{-1}$ exists. System (12) admits the following transformation:

$$z=Sz,\qquad \left(S:=\left(I_S-L^{(1)}\right)^{-1}F,\quad s=2n+r\right),$$

where *S* is a contraction operator in a sufficiently small neighborhood of the point $x_0\left(t,c_0^r\right)$, $\varepsilon=0,$ and, hence, one of the existing versions of the fixed – points principle [5] is applicable to this system for sufficiently small $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]$. The method of simple iterations enables us to find the solutions of the system (9) bounded on *R*.

Theorem 3. *(Sufficient condition). Assume that the weakly nonlinear system (5) satisfies the conditions imposed above (the corresponding homogeneous system (2) is e-dichotomous on the semiaxes* $R_+=[0,\infty)$ *and* $R_-=(-\infty,0]$*), and the corresponding generating linear system (1) possesses the r- parameter set (4) of generating solutions*

$x_0(t,c_r)$ *bounded on R. Let* $P_{B^*_0}=0$. *Then, for any vector* $c_r=c_r^0\in R^r$ *satisfying the equation (7), there exists at least one solution of system (5) bounded on R. The indicated solution* $x(t,\varepsilon)$ *(6) turns into the generating solution* $x(t,0)=x_0(t,c_0^r)$ *given by relation (4) for* $\varepsilon=0$, *and can be found by the method of simple iterations convergent for sufficiently small* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\subseteq[0,\varepsilon_0]$*:*

$$y_{(k+1)}^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(G\begin{bmatrix} Z\left(x_0\left(\cdot,c_r^0\right)+y_k,\ \cdot,\varepsilon\right) \\ J_i\left(x_0\left(\tau_i-,c_r^0\right)+y_k,\varepsilon\right)\end{bmatrix}\right)(t),$$

$$c_k=-B^+{}_0\left\{\int_{-\infty}^{\infty}H_d(s)\left[A_1(s)y_k^{(1)}(s,\varepsilon)+R\left(y_k(s,\varepsilon),s,\varepsilon\right)\right]ds+\right.$$

$$\left.\sum_{i=-\infty}^{\infty}H_d(\tau_i-)\left[A_{i1}(\tau_i-)y_k^{(1)}(\tau_i-,\varepsilon)+R_i\left(y_k(\tau_i-,\varepsilon),\varepsilon\right)\right]\right\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_k+y_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon)=x_0\left(t,c_r^0\right)+y_k(t,\varepsilon),\quad k=0,1,2,\ldots,\quad y_0(t,\varepsilon)=0,$$

$$x(t,\varepsilon)=\lim_{k\to\infty}x_k(t,\varepsilon).$$

REFERENCES

[1] Halanay, A., Wexler, D. *Qualitative Theory of Impulsive Systems*, vol. 309, Mir, Moscow, 1971.

[2] Samoilenko, A. M., Perestyuk, N. A. *Impulsive Differential Equations*. Vyshcha Shkola, Kiev, 1974 [in Russian].

[3] Boichuk, A., Langerová, M., Škoríková, J. *Solutions of linear impulsive differential systems bounded on the entire real axis.* Advances in Difference Equations, Volume 2010, Article ID 494379, 10 pages.

[4] Boichuk, A., Zhuravlev, V. F., M., Samoilenko, A. M. *Generalized Inverse Operators and Noether Boundary-value Problems*. Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Science, Kiev, 1995 [in Russian].

[5] Krasnosel'skii, M A., Vainikko, G. M., Zabreiko, P. P., Rutitskii, Ya. B., Stetsenko,V. Ya., *Approximate Solution of Operator Equations*, Nauka, Moscow (1968) (in Russian). English translation: Noordhoff, Groningen (1972).

Mgr. Jaroslava Škoríková.
Katedra matematiky
Fakulta humanitných vied
Žilinská Univerzita v Žiline
Univerzitná 1
01026 Žilina
e-mail: `jaroslava.skorikova@fpv.uniza.sk`

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

MODULY ĎALŠIEHO VZDELÁVANIA UČITEĽOV V PROJEKTE PRIMAS

MIROSLAVA SOVIČOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ

ABSTRACT. The article focuses on the professional development of teachers, its basic characteristics. It also deals with the professional development materials of project PRIMAS. The last part of the article is the example of one of the modules from PRIMAS professional development materials.

Projekt PRIMAS

Projekt PRIMAS - *Predstavujeme Európe objavné vyučovanie matematiky a prírodovedných predmetov* (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe) je medzinárodný projekt v rámci 7. rámcového programu financovaný zo zdrojov Európskej únie. Spolupracujú v ňom odborníci na teóriu vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov zo štrnástich univerzít z dvanástich krajín. Doba trvania projektu sú štyri roky (2010-2013). [10]

Základným cieľom projektu je implementácia objavného vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov do každodennej školskej praxe. Výstupom projektu budú učebné texty a materiály podporujúce medzipredmetové vzťahy, najmä matematiky a ostatných prírodovedných predmetov pre žiakov a študentov vo veku 6-16 rokov, ktoré by mali doplniť učebnice a iné materiály používané v školách počas vyučovania. K učebným textom a materiálom budú pripravené kurzy ďalšieho vzdelávania a podporné materiály pre učiteľov z praxe a tiež pre študentov učiteľstva zamerané na osvojenie a rozvíjanie metód objavného vyučovania. Učebné materiály a aktivity i materiály pre ďalšie vzdelávanie v objavnom vyučovaní v matematike a prírodovedných predmetoch na základných a stredných školách sú prezentované na webovej stránke www.primas-project.eu projektu.

Partnerské krajiny projektu chcú týmto dosiahnuť redukovanie stereotypov vo vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov, najmä v súvislosti s častými násilnými a od bežného života vzdialenými aplikačnými úlohami, resp. metodicky a didakticky nesprávne, formálne chápanými medzipredmetovými vzťahmi. [1] Jednou z úloh projektu je tiež podporiť spoluprácu školy, rodiny i spoločnosti a tiež zapojiť do spolupráce aj zriaďovateľov škôl, metodické centrá a iné v školstve vplyvné inštitúcie, a tým zlepšiť učenie sa žiakov a študentov. Dôležitou súčasťou prípravy materiálov projektu je aj ustálenie terminológie používanej v didaktických vedách vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov. [10]

Ďalšie vzdelávanie učiteľov

Ako sa uvádza v správe OECD [4], nech by bolo vzdelávanie budúcich učiteľov akokoľvek dokonalé, nedá sa očakávať, že ich pripraví na všetky výzvy, s ktorými sa počas výkonu svojho povolania stretnú. Školské systémy v jednotlivých krajinách sa preto usilujú poskytnúť učiteľom možnosti pre ďalšie vzdelávanie zamerané na udržanie kvalifikovanosti učiteľov, ako aj kvality vyučovania.

Príspevok je publikovaný v rámci projektu PRIMAS; 7RP -> 244380

Ďalšie vzdelávanie je súčasťou celoživotného vzdelávania. Vymedzuje a upravuje ho Zákon č. 568/2009 Z. z. o celoživotnom vzdelávaní a o zmene a doplnení niektorých zákonov [11]. Ako je uvedené v zákone, „*ďalším vzdelávaním je vzdelávanie vo vzdelávacích inštitúciách ďalšieho vzdelávania (...), ktoré nadväzuje na školské vzdelávanie a umožňuje získať čiastočnú kvalifikáciu alebo úplnú kvalifikáciu alebo doplniť, obnoviť, rozšíriť alebo prehĺbiť si kvalifikáciu nadobudnutú v školskom vzdelávaní alebo uspokojiť záujmy a získať spôsobilosť zapájať sa do života občianskej spoločnosti*.“ Uskutočňuje sa prostredníctvom formálneho vzdelávania, neformálneho vzdelávania (napr. čítanie odbornej literatúry, neformálne rozhovory s kolegami, atď.) a informálneho učenia sa. [9]

Podľa Tureka [8], učitelia nastupujúci do pedagogickej praxe musia akceptovať fakt, že učiteľské vzdelanie je nepretržitý, cyklický proces, v ktorom príprava na učiteľské povolanie je iba začiatočnou fázou. „*Dôsledná školská politika štátu má zabezpečiť, aby učiteľské vzdelanie bolo reorganizované ako nepretržitý, koordinovaný proces začínajúci prípravou učiteľov a trvajúci počas celej učiteľovej profesionálnej kariéry. V takomto systéme príprava a ďalšie vzdelávanie učiteľov majú byť integrované a vytvárať systém celoživotného vzdelávania.*“ (ibid., str. 127) Ako ďalej uvádza, princípmi ďalšieho vzdelávania by mali byť:

- kontinuita, zabezpečujúca, aby učitelia poznali najnovšie výsledky pedagogického výskumu, vývoj vzdelávacieho systému a aby sa zlepšovali ich vedomosti a zručnosti vyučovať príslušné predmety,
- systém ďalšieho vzdelávania učiteľov má zahŕňať všetkých účastníkov procesu výchovy a vzdelávania
- vytvorenie organizačnej štruktúry systému ďalšieho vzdelávania učiteľov s náležitým finančným zabezpečením, personálnym obsadením, umožňujúcimi participáciu všetkých učiteľov v rôznych formách, ako aj spoluprácu všetkých inštitúcií, ktoré môžu prispieť k ďalšiemu vzdelávaniu učiteľov,
- na vytváraní systému ďalšieho vzdelávania učiteľov, jeho cieľov, obsahu, výskume sa majú podieľať všetci zainteresovaní – učitelia, riaditelia škôl, atď.

Pri navrhovaní a realizácii programu ďalšieho vzdelávania považuje Guskey [2] za dôležité dva faktory. Prvý faktor zahŕňa to, čo učiteľov motivuje, aby sa zapojili do ďalšieho vzdelávania. Druhým faktorom je proces, prostredníctvom ktorého u učiteľov zvyčajne nastáva zmena. Ďalej udáva, že vzhľadom na prvý faktor existujú dve hlavné príčiny, ktoré motivujú učiteľov k tomu, aby sa zapájali do programov ďalšieho vzdelávania, a to buď udelenie certifikátu alebo zlepšenie učebných výsledkov žiakov. Učitelia od programu ďalšieho vzdelávania očakávajú, že rozšíri ich vedomosti a zručnosti, prispeje k ich rastu a zlepší ich pôsobenie na žiakov.

Loucks-Horsley a kol. [3] zhrnuli niekoľko princípov charakteristických pre kvalitu kurzov ďalšieho vzdelávania, na základe skúseností. Efektívne kurzy ďalšieho vzdelávania:

- sú založené na jasne definovanom chápaní efektívneho vyučovania a učenia sa v triede,
- poskytujú príležitosti pre učiteľov na budovanie vlastných odborných a pedagogicko-odborných vedomostí a zručností a sú zamerané na kritické skúmanie praxe,
- sú podložené výskumom a zapájajú učiteľov, ako dospelých žiakov, do vyučovacích prístupov, ktoré budú so svojimi žiakmi používať,

- poskytujú učiteľom príležitosti spolupracovať so svojimi kolegami a inými odborníkmi na zlepšení vlastnej praxe,
- poskytujú spojenie s inými časťami vzdelávacieho systému,
- sú navrhnuté podľa požiadaviek určujúcich zameranie a priority, ktoré sa vzťahujú na učenie sa žiakov, a sú sústavne prehodnocované, aby zabezpečili pozitívny vplyv na efektivitu učiteľa, učenie sa žiakov, vedenie škôl a školskú komunitu.

Moduly pre ďalšie vzdelávanie učiteľov

Projekt PRIMAS zostavil súbor modulov, ktoré sa zaoberajú konkrétnymi stránkami vyučovania prostredníctvom objavného vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov, aby podporil učenie sa učiteľov v rámci kurzov ďalšieho vzdelávania. Tieto moduly predostierajú niektoré z pedagogických výziev, ktoré sa objavujú pri predstavovaní nerutinných aktivít zameraných na riešenie problémov z jednotlivých predmetov pri vyučovaní v triede. Moduly sú založené na popise metodických postupov a sú zostavené ako ukážky príkladov aktivít v triede. Zámerom je, aby si učitelia naplánovali vyučovacie hodiny s prvkami objavného vyučovania a odučili ich vo svojich triedach. Súčasťou vzdelávania je reflexia a zdieľanie získaných skúseností z vyučovania s kolegami.

Každý modul sa skladá zo sprievodcu sekciou ďalšieho vzdelávania, z pracovných listov pre učiteľov, zo vzorových materiálov pre žiakov a návrhu plánu vyučovacích hodín. Niektoré z vyučovacích hodín zahŕňajú aj použitie jednoduchého počítačového softvéru. Moduly obsahujú aj niekoľko videonahrávok, na ktorých sú ukážky toho, učitelia realizujú a overujú materiály vo svojich triedach. Materiály ako i aktivity a aktívne vyučovanie tvoria spolu veľmi podnetný základ pre diskusiu a reflexiu, ktorá je súčasťou ďalšieho vzdelávania.

Moduly, ako aj iné materiály a informácie, sa nachádzajú na webovej stránke projektu PRIMAS. V nasledujúcej tabuľke (Tabuľka 1) sa nachádza prehľad jednotlivých modulov s krátkym popisom:

Modul	Popis
Objavovanie vedené žiakmi	V module si učitelia, a potom aj ich žiaci, môžu vyskúšať, aký je to pocit - premýšľať ako vedec v matematike alebo inej vednej disciplíne. Učiteľom sa priblížia javy a situácie vedeckej práce. Na základe opisu javov a situácií môžu klásť otázky alebo sa týmto javom, resp. situáciám venovať a bádať v nich. Svoju skúsenosť potom transformujú do vyučovania v triede. Dôležité je uvedomiť si zmenu rolí a vzorcov správania učiteľa a žiaka, ktorá je na vyučovacej hodine potrebná na to, aby mohli aj žiaci okúsiť pocit z vedeckého bádania a dokázali sa s týmto pocitom, prípadne s výsledkami svojho bádania, podeliť so svojimi spolužiakmi.
Neštruktúrované problémy	V module sa porovnávajú štruktúrované a neštruktúrované verzie úloh a problémov. Učitelia sú vyzvaní uvažovať o tom, aké požiadavky na vedomosti a kompetencie a výzvy na zručnosti môže riešenie neštruktúrovaných problémov u žiakov vyvolať.
Učenie sa konceptov prostredníctvom objavovania	Modul sa zaoberá možnosťami integrácie objavného vyučovania do vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov z pohľadu rôznych konceptov.

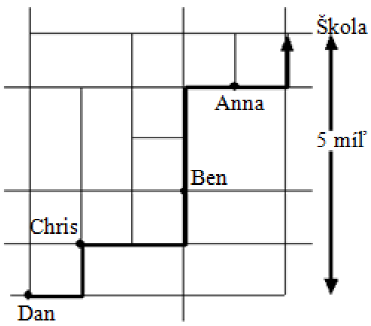
Kladenie otázok, ktoré podporujú objavné vyučovanie	Modul obsahuje súbor aktivít navrhnutých tak, aby pomohli učiteľom zamyslieť sa nad: • spôsobom kladenia otázok, ktoré podporujú žiakov k uvedomovaniu si súvislostí medzi jednotlivými faktami, ktoré vedú k netradičnému mysleniu a zdôvodňovaniu, • spôsobmi, ktorými učitelia môžu viesť a povzbudzovať žiakov k tomu, aby odpovedali sústredenejšie, obsažnejšie, premyslenejšie a aby sa neobávali, že budú potrestaní, ak vo svojej odpovedi urobia chybu, • dôležitosťou toho, aby ukázali žiakom, čo sa pri zdôvodňovaní myslí pod pojmom „premýšľať nahlas“.
Spolupráca žiakov	Modul je navrhnutý s cieľom poskytnúť materiály, ktoré učiteľom pomôžu, aby: • uvažovali nad tým, aké typy diskusie medzi žiakmi môžu byť pre učenie sa prínosom, • dokázali prekonať svoje obavy z toho, že žiaci počas skupinovej práce živo diskutujú, • osvojili si techniky zamerané na podporu efektívnej diskusie medzi žiakmi, • správne pochopili svoju rolu pri vedení diskusie medzi žiakmi, • plánovali vyučovacie hodiny založené na diskusii.

Tabuľka 1: Moduly ďalšieho vzdelávania projektu PRIMAS. Zdroj: PRIMAS, 2011a

Ukážka pracovného listu k modulu o kladení otázok

Úloha: Spravodlivé rozdelenie poplatkov za benzín

Mama vozí každý deň Dana do školy. Po ceste vyzdvihne troch Danových kamarátov, Chrisa, Bena a Annu. Každé popoludnie sa vráti tou istou cestou a vysadí každého z nich pri dome. Na konci polroka sa všetci štyria žiaci rozhodli zaplatiť sumu 100 eur za náklady na benzín. Ako by si mali náklady na benzín rozdeliť? Nájdite viacero riešení a rozhodnite, ktoré z nich je najlepšie a prečo.



Obrázok 1: Mapa trasy cesty do školy.

Táto mapa znázorňuje, kde každá z osôb býva, aj prejdenú trasu, ktorú prejdú na ceste do školy.

Uvádzame dve metódy riešenia problému. Ktorú z nich považujete za lepšiu?

Metóda 1:
Kamaráti si rozdelia náklady podľa pomeru vzdialeností, v akých bývajú od školy: 2 : 5 : 8 : 10. To znamená, že:
Anne zaplatí 8 €
Ben zaplatí 20 €
Chris zaplatí 32 €
Dan zaplatí 40 €

Metóda 2:
Predpokladajme, že ľudia budú platiť 10 € za míľu. Náklady sa potom rozdelia nasledovne:

	Anne	Ben	Chris	Dan
Posledné 2 míle 20 €	5 €	5 €	5 €	5 €
Ďalšie 3 míle 30 €		10 €	10 €	10 €
Ďalšie 3 míle 30 €			15 €	15 €
Prvé 2 míle 20 €				20 €

Tabuľka 2: Rozdelenie nákladov podľa metódy 2.

Anna zaplatí 5 €
Ben zaplatí 15 €
Chris zaplatí 30 €
Dan zaplatí 50 €.

Poznámka. Metodiku objavného vyučovania, podľa projektu PRIMAS, charakterizujú aktivity procesu objavného vyučovania: tvorba hypotéz, predpokladov, úsudkov, určovanie množstva, tvorba definícií, triedenie, meranie, systematické pozorovanie, zjednodušovanie a štruktúrovanie, komunikácia, objavovanie vzťahov a prepojení, vizualizácia, experimentovanie, kontrola premenných. V uvedenej úlohe a komunikácií o nej sa môžu uplatniť nasledujúce z nich: **vizualizácia** (zápis riešenia pomocou tabuľky) **objavovanie vzťahov a prepojení** (analýza ponúknutých riešení), **komunikácia** (o tom, ktorá metóda riešenia problému je lepšia resp. spravodlivejšia pre jeho aktérov).

Záver

Na webovskej stránke projektu PRIMAS môže čitateľ nájsť materiály, navrhnuté jednotlivými partnermi, ktoré je možné použiť priamo na vyučovaní. Originály materiálov sú pripravované v anglickom jazyku. Slovenské verzie sa pripravujú priebežne a oboznamujú sa s nimi študenti učiteľstva matematiky. V nasledujúcej etape realizácie projektu PRIMAS budú vytvorené verzie webovskej stránky v národných jazykoch partnerských krajín.

LITERATÚRA

[1] ČERETKOVÁ, S. 2010. Projekt 7RP PRIMAS. In *42. konferencia slovenských matematikov,* 2010, Žilina : Edis, s. 26. ISBN 978-80-554-0288-8

[2] GUSKEY, T.R. 2002. Professional Development and Teacher Change. In *Teachers and Teaching: theory and practice, 2002, 8(3-4), s. 381-391*

[3] LOUCKS-HORSLEY, S., LOVE, N., STILES, K.E., MUNDRY, S., HEWSON, P.W. 2003. *Designing Professional Development for Teachers of Science and Mathematics.* California : Corwin Press, Inc., 2003. 408 s. ISBN 978-07-619-4686-1

[4] OECD. 2009. *Creating Effective Teaching and Learning Environments. First Results from TALIS.* OECD 2009. ISBN 978-92-64-05605-3

[5] PRIMAS [projekt]. 2011a. *Guide for Professional Development Providers*. [online]. [citované 5. júl 2011]. Portable Document Format. Dostupné na: <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=5&supportId=1247>

[6] PRIMAS [projekt]. 2011b. *Survey report on inquiry-based learning and teaching in Europe*. [online]. [citované 3. august 2011]. Portable Document Format. Dostupné na: <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=8&supportId=1247>

[7] PRIMAS. 2010. *Asking Questions that Encourage Inquiry-based Learning.* [online]. [citované 14. august 2011]. Portable Document Format. Dostupné na: <http://primas.mathshell.org.uk/pd/modules/4_Asking_questions/pdf/4_Asking_questions.pdf>

[8] TUREK, I. 2008. *Didaktika*. Bratislava : Iura Edition, 2008. 596 s. ISBN 978-80-8078-198-9

[9] www.minedu.sk

[10] www.primas-project.eu

[11] Zákon č. 568/2009 Z. z. o celoživotnom vzdelávaní a o zmene a doplnení niektorých zákonov.

Mgr. Miroslava Sovičová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: miroslava.sovicova@ukf.sk

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

APLIKÁCIE FOURIEROVÝCH RADOV NA RIEŠENIE ÚLOH V DYNAMIKE STAVEBNÝCH KONŠTRUKCIÍ

DARINA STACHOVÁ

ABSTRACT. Different forces acting together on structures have often different character and cause their motion. In the contribution, we discuss solving problems of dynamics of oscillatory motions using the Fourier series.

1 Úvod

Zaťaženie stavebnej konštrukcie je súčasťou stavebnej mechaniky a statiky. Tvoria ho vonkajšie sily, ktoré môžu pôsobiť ako osamelé bremená (pôsobí na konštrukciu v bode alebo na veľmi malej ploche) alebo ako spojité zaťaženie (je rozložené na určitej ploche). Sila pôsobiaca na konštrukciu môže byť definovaná ako ***F*** **(zaťaženie)**, alebo **súbor síl** pôsobiacich na konštrukciu (**priame pôsobenie**), alebo **zavedením deformácie** (**nepriame pôsobenie**), napr. zmena teploty, alebo vplyv nerovnomerného sadnutia.
Sily pôsobiace na konštrukciu môžeme klasifikovať s ohľadom na:

ich zmenu v čase:

- **stále zaťaženie** ***G*** je zaťaženie, ktoré pravdepodobne pôsobí v celej životnosti danej konštrukcie a pre ktoré je zmena veľkosti s časom vo vzťahu k priemernej hodnote zanedbateľná, alebo pre ktoré má jeho zmena vždy ten istý smer (monotónne) kým nedosiahne určitej konečnej hodnoty, napr. vlastná hmotnosť konštrukcie, pevné zariadenia alebo sadnutia,
- **premenné zaťaženie** ***Q*** je zaťaženie ktoré pravdepodobne nepôsobí po celú životnosť konštrukcie alebo, pre ktoré nie je zmena veľkosti s časom vo vzťahu k priemernej hodnote zanedbateľná, teda nie je monotónne, napr. zavedené zaťaženie, vietor, sneh, alebo zaťaženie dopravou,
- **náhodilé zaťaženie** ***A*** je zaťaženie, obvykle krátkeho trvania, kedy je nepravdepodobné, že sa vyskytne so zásadnou intenzitou počas posudzovaného obdobia, počas návrhového obdobia použiteľnosti (pôsobiace sily s malou pravdepodobnosťou výskytu počas návrhového obdobia konštrukcie), napr. výbuchy, alebo náraz vozidla,
- **vplyv seizmicity** A_E predstavuje zaťaženie, ktorého príčinou je vznik zemetrasenia podmieneného podzemnými pohybmi,priestorové zmeny:stále zaťaženia, napr. vlastná tiaž,
- voľné zaťaženia, ktoré vedú k rôznym usporiadaniam pôsobiacich síl, napr. zaťaženia s pohyblivým pôsobiskom, zaťaženia snehom a vetrom.

2 Fourierov rad

Sila, ktorá pôsobí na stavebné konštrukcie, sa nazýva periodickou s periódou *T* a mení sa podľa vzťahov

Tento príspevok vznikol s podporou projektu VEGA SR číslo 1/0031/09.

$F(t) = F(t + T)$, resp. $F(t) = F(t + n \cdot T)$ a $\dot{F}(t) = \dot{F}(t+T)$, resp. $\dot{F}(t) = \dot{F}(t + n \cdot T)$, kde $n \in Z$.

Ak sú splnené Dirichletove podmienky (interval, na ktorom je $F(t)$ definovaná, je možné rozdeliť na konečný počet intervalov a v každom z nich je $F(t)$ spojitá a monotónna; v každom bode nespojitosti funkcie $F(t)$ existujú vlastné jednostranné limity), môžeme každú periodickú funkciu s periódou T rozvinúť do Fourierovho radu , ako ho poznáme z matematiky [1], v tvare:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t \right). \tag{1}$$

Pre riešenie úloh v dynamike stavebných konštrukcií je zaužívaný tvar

$$F(t) = \frac{F_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{cn} \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} F_{sn} \sin \omega_n t\,, \tag{2}$$

kde $a_0 = F_{c0}$, $a_n = F_{cn}$, $b_n = F_{sn}$ a $\frac{2\pi n}{T} = \omega_n$

alebo amplitúdový tvar

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{3}$$

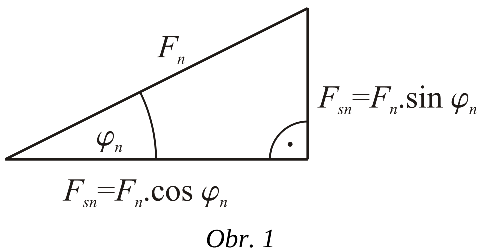
kde $\omega_n = n \cdot \omega$ a $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ pre $n = 1, 2, \cdots, \infty$.

Fourierove koeficienty v (2) sú dané vzťahmi:

$$F_{c0} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt, \quad F_{cn} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t) \cos \omega_n t\; dt, \quad F_{sn} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t) \sin \omega_n t\, dt\,. \tag{4}$$

Fourierove koeficienty (3) sú s koeficientmi (2) zviazané vzťahmi:

$$F_0 = \frac{F_{c0}}{2}, \quad F_n = \sqrt{F_{cn}^2 + F_{sn}^2}\,, \quad \sin \varphi_n = \frac{F_{cn}}{F_n} \quad \text{a} \quad \cos \varphi_n = \frac{F_{sn}}{F_n}\,. \tag{5}$$



Obr. 1

Na riešenie dynamických úloh vo frekvenčnej oblasti často využíva Fourierov rad vyjadrený pomocou exponenciálneho tvaru, v ktorom sú goniometrické funkcie odvodené z Eulerovho vzťahu (z exponenciálneho tvaru komplexného čísla).

Platí: $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Z toho vyplýva: $$\sin(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i} \quad \text{a} \quad \cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}\,. \tag{6}$$

Po dosadení za tieto funkcie do (2) dostaneme Fourierov rad funkcie F(t) v exponenciálnom tvare

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \ e^{-i\omega_n t}, \tag{7}$$

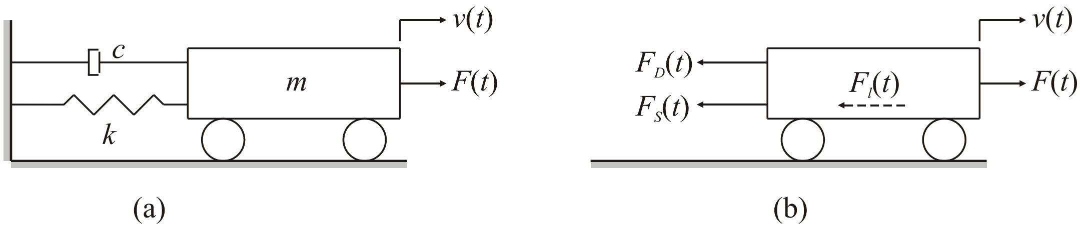
kde koeficienty C_n vypočítame zo vzťahu

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\ e^{-i\omega_n t}\, dt\,. \tag{8}$$

3.Aplikácia Fourierovho radu

Dynamické vlastnosti lineárneho systému plnou mierou charakterizuje jeho ohlas na budenie jednoduchými funkciami, pomocou ktorých sa dajú vyjadriť rôzne budiace sily, pôsobiace na mechanické systémy.

Základné fyzikálne vlastnosti všetkých lineárnych elastických konštrukcií alebo mechanických systémov podrobených externým zdrojom budenia alebo dynamickému zaťaženiu sú jeho hmotnosť, elastické vlastnosti (flexibilita alebo stuhnutosť) a schopnosť strácať energiu − mechanizmus tlmenia. V modeli s jedným stupňom voľnosti sa predpokladá, že každá z týchto vlastností sa sústredí v jednom fyzickom prvku. Náčrt takéhoto systému je uvedený na obr. 2.a. Celá hmotnosť m tohto systému je zahrnutá v pevnom bode, ktorý sa môže pohybovať len v jednom smere, posunutie súradníc $v\,(t)$ kompletne definuje polohu bodu. Elastický odpor k posunutiu poskytuje pružina tuhosti k a mechanizmus straty energie je reprezentovaný tlmičom c. Vonkajšie dynamické zaťaženie tohto systému je sila premenlivá v čase $F(t)$.



Obr. 2

Pohybová rovnica pre jednoduchý systém (obr. 2.a) je priamym vyjadrením rovnováhy všetkých síl pôsobiacich na hmotnosti pomocou d'Alembertovho princípu. Ako je znázornené na obr. 2.b, sily pôsobiace v smere posunutia stupňa voľnosti sú zložené zo zaťaženia $F(t)$ a troch odolávacích síl vyplývajúcich z pohybu, t. j. zotrvačná sila $F_I(t)$, tlmiaca sila $F_D(t)$ a sila pružiny $F_S(t)$. Pohybová rovnica je vyjadrením rovnováhy týchto síl a platí

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t). \tag{9}$$

Každá zo síl zastúpených na ľavej strane tejto rovnice je funkcia posunutia $v\,(t)$ alebo jeho derivácií podľa času. Zotrvačná sila je súčinom hmotnosti a zrýchlenia

$$F_I(t) = m\ \ddot{v}(t).$$

Viskózne tlmenie vyjadrujeme pomocou konštanty tlmenia c a rýchlosti

$$F_D(t) = \mathrm{c}\ \dot{v}(t).$$

Elastickú silu môžeme zapísať ako súčin tuhosti pružiny k a posunutia $u(t)$

$F_S(t)$ = k v (t).

Takže pohybová rovnica má tvar

$$m\ \ddot{v}(t) + \mathrm{c}\ \dot{v}(t) + \mathrm{k}\ v\ (t) = F(t). \tag{10}$$

Diferenciálna rovnica druhého rádu pre mechanický systém dáva do súvisu vstupné budenie $F(t)$ a výstupné premiestnenie v (t).

Pohybová rovnica netlmeného systému s jedným stupňom voľnosti, pri zaťažení periodickou silou $F(t)$, má potom tvar [2]:

$$m\ \ddot{v}(t) + \mathrm{k}\ v\ (t) = \frac{F_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{cn}\ \cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} F_{sn}\ \sin\omega_n t\ , \tag{11}$$

alebo

$$m\ \ddot{v}(t) + \mathrm{k}\ v\ (t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\ \sin\left(\omega_n t + \varphi_n\right). \tag{12}$$

Výsledné ustálené vynútené kmitanie je potom dané súčtom ohlasov od jednotlivých zložiek budiacej sily

$$v_p(t) = \frac{v_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{cn}\ \cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} v_{sn}\ \sin\omega_n t\ , \tag{13}$$

alebo
$$v_p(t) = v_{v0} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n\ \sin\left(\omega_n t + \varphi_n\right). \tag{14}$$

Pre symboly použité v predchádzajúcich vzťahov platí

$$v_{c0} = \frac{F_{c0}}{k} = \frac{F_{c0}}{m\omega_0^2}\ , \quad v_{cn} = \frac{F_{cn}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)}, \quad v_{sn} = \frac{F_{sn}}{m\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)}, \quad v_{v0} = \frac{v_{c0}}{2}\ , \quad v_n = \sqrt{v_{cn}^2 + v_{sn}^2}$$

a $\mathrm{tg}\varphi_n = \dfrac{v_{cn}}{v_{sn}}$.

Úplné riešenie rovnice (11), resp. (12) získame sčítaním zložky voľného kmitania a zložky ustáleného vynúteného kmitania

$$v(t) = A_0 \sin\omega_0 t + B_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{cn}\ \cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} v_{sn}\ \sin\omega_n t\ , \tag{15}$$

resp.
$$v(t) = v_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) + v_{v0} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n\ \sin\left(\omega_n t + \varphi_n\right) \tag{16}$$

Podobné závislosti platia aj pri riešení tlmeného kmitania.

$$m\ \ddot{v}(t) + \mathrm{b}\ \dot{v}(t) + \mathrm{k}\ v\ (t) = \frac{F_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_{cn}\ \cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} F_{sn}\ \sin\omega_n t\ , \tag{17}$$

alebo

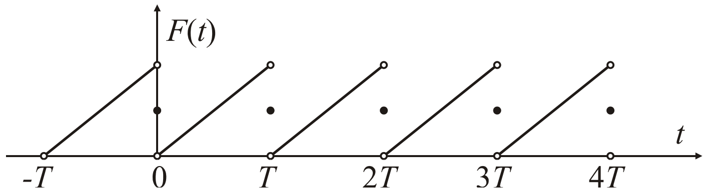
$$m\ \ddot{v}(t) + \mathrm{b}\ \dot{v}(t) + \mathrm{k}\ v\ (t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n\ \sin\left(\omega_n t + \varphi_n\right). \tag{18}$$

Partikulárne riešenie je opäť popísané rovnicami (13) a (14), hodnoty v_{c0}, v_{cn} a v_{sn} sa vypočítajú podľa vzťahov pre ustálené vynútené tlmené kmitanie.

$v_{v0} = \dfrac{v_{c0}}{2}$, $v_n = \sqrt{v_{cn}^2 + v_{sn}^2}$, $v_{c0} = \dfrac{F_{c0}}{k} = \dfrac{F_{c0}}{m\,\omega_0^2}$, $v_{cn} = \dfrac{F_{cn}}{m\,\omega_0^2} \cdot \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)^2 + 4\,\omega_n^2\,\omega_b^2}}$,

$v_{sn} = \dfrac{F_{sn}}{m\,\omega_0^2} \cdot \dfrac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_n^2\right)^2 + 4\,\omega_n^2\,\omega_b^2}}$ a $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{v_{cn}}{v_{sn}}$.

Príklad: Vypočítajte ohlas netlmeného systému s jedným stupňom voľnosti s parametrami m = 1098,268 kg, ω_0 = 30,154776 rad·s^{-1}, na periodicky pôsobiacu silu $F(t) = s \cdot t = 1300 \cdot t$ s periódou T = 0,16172 s (obr. 3).



Obr. 3

Riešenie: Zaťaženie $F(t)$ rozvinieme do Fourierovho radu.

$$F_{c0} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T s\,t\,dt = s\,T\,; \qquad F_0 = \frac{s\,T}{2}\,;$$

$$F_{cn} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T s\,t\,\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt = 0\,;$$

$$F_{sn} = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T s\,t\,\sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt = \frac{s\,T}{n\,\pi}\,.$$

Potom $F(t) = \dfrac{s\,T}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{s\,T}{n\,\pi}\,\sin\dfrac{2\pi n}{T}$.

Pohybovú rovnicu (11) budeme riešiť s počiatočnými podmienkami t = 0, $v(0)$ = 0, $\dot{v}(0)$ = 0.

Jej riešenie $v(t)$ môžeme potom písať v tvare:

$$v(t) = v_0(t) + v_p(t) =$$

$$= \left(-\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty} v_{sn}\,\omega_n\right)\sin\omega_0 t - v_{v0}\cos\omega_0 t + \frac{v_{c0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{cn}\,\cos\omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} v_{sn}\,\sin\omega_n t =$$

$$= \left(-\frac{1}{\omega_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s}{m\left(\omega_0^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2\right)}\right)\sin\omega_0 t + \frac{s\,T}{2m\omega_0^2}\left(1 - \cos\omega_0 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s\,T\sin\dfrac{2\pi n t}{T}}{n\,\pi m\left(\omega_0^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{T}\right)^2\right)}$$

Po dosadení hodnôt určených v zadaní dostaneme výsledný ohlas. Z praktických skúseností však vyplýva, že na výsledok majú najväčší vplyv prvé tri členy radu. Vplyv ostatných členov radu teda zanedbávame.

4 Záver

Študent technickej univerzity sa s Fourierovým radom stretáva postupne na lekciách matematiky, fyziky a na lekciách odborných predmetov. Na posledných dvoch potrebuje aplikovať poznatky získané z matematiky. Ak sú jeho matematické vedomosti správne pochopené a trvalo zapamätané, t. j. postrehol vzťahy, zákonitosti, príčinné súvislosti javov a uvedomil si ich význam, je schopný nadobudnuté poznatky aplikovať v praxi. Tomu hovoríme osvojenie si poznatkov.

Častým problémom však bývajú odlišnosti v odborných terminológiách spomenutých predmetov a odlišnosti v zaužívanej symbolike. To napokon spôsobuje slabú zrozumiteľnosť textu aplikovanej úlohy, ktorú je nutné odstraňovať podrobným výkladom učiteľa a precvičovaním pomocou vyriešení primeraného počtu podobných úloh.

LITERATÚRA

[1] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M.: *Matematika II*, Bratislava, Alfa, 1961,ISBN 63-001-70,

[2] Melcer, J., Lajčáková, G.: *Aplikácie programového systému MATLAB pri riešení úloh dynamiky stavebných* konštrukcií, Skriptá, Žilina, EDIS, 2011, ISBN 978-80-554-0308-3,

[3] Melcer, J., Kuchárová, D.: *Dynamika stavebných konštrukcií – príklady*, Skriptá, Žilina, EDIS, 2004, ISBN 80-8070-326-4

RNDr. Darina Stachová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta humanitných vied
Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1
SK – 010 26 Žilina
e-mail: `darina.stachova@fpv.uniza.sk`

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

SOME EXAMPLES OF INVARIANT UNIFORM IP-LOOPS

BEÁTA STEHLÍKOVÁ, DAGMAR MARKECHOVÁ

ABSTRACT. In this paper we give some examples of uniform IP-loops with left-invariant uniformity.

Introduction

The theory of quasigroups and loops was established by Bruck ([3, 4]), see also [2, 9, 13, 14, 15]. A loop with the invertibility property is called an IP-loop. The above structures play a fundamental role in many areas of mathematics. Topological IP-loops are studied, e.g., in [7, 8, 12, 13]. In [16] we give conditions ensuring the existence of a Haar measure (see [5, 6]) in topological IP-loops. We have proved there that in every locally compact topological IP-loop with topology induced by a left-invariant uniformity there exists at least one regular left Haar measure. The octonions (see, e.g., [1]) are a very important case of IP-loops. In this paper we define a left-invariant uniformity on the octonion algebra. We obtain very interesting examples of topological IP-loops with left-invariant uniformity.

Basic notions, notations and facts

First, we give the definitions of some algebraic notions and some facts which will be used in the following.

A non-empty set G is said to be a groupoid relative to a binary operation denoted by $\cdot$, if for every ordered pair a, b of elements in G a unique element $ab \in G$ is defined. Instead of $a \cdot b$ we write ab. A quasigroup is a groupoid $(G, \cdot)$, in which, for every two elements $a, b \in G$, every of the equations $ax = b$ and $ya = b$ has a unique solution in G. If a quasigroup G contains an element e such that $ex = xe = x$ for all x in G, then e is called an identity element of G and G is called a loop. It is easy to verify that every associative loop is a group.

A quasigroup $(G, \cdot)$ is called an IP-quasigroup (or a quasigroup with the invertibility property), if there exist mappings $f_P : G \to G$ and $f_L : G \to G$ such that, for any $x, y \in G$, it holds

(*i*) $(xy) f_P(y) = x$,

(*ii*) $f_L(x)(xy) = y$.

An IP-quasigroup with an identity element is called an IP-loop (or a loop with the invertibility property).

Let $(G, \cdot)$ be a loop with an identity element e and let $a \in G$. Then every of the equations $ax = e$ and $ya = e$ has a unique solution in G. The element x is called a right inverse element to the element a and we denote it by a^{-1}. Analogously, the element y is called a left inverse element to the element a and we denote it by ${}^{-1}a$.

Let $(G, \cdot)$ be an IP-loop. If we put $x = e$ in (*i*) and $y = e$ in (*ii*), we see that $f_P(y) = y^{-1}$ and $f_L(x) = {}^{-1}x$. For every elements $x, y \in G$ there holds ${}^{-1}x(xy) = y$. If we put $y = x^{-1}$, we get ${}^{-1}x = {}^{-1}x(xx^{-1}) = x^{-1}$. This means that every element in *G* has an inverse. It is easy to see that an IP-loop is a groupoid $(G, \cdot)$ with an identity element and with the following property: for each $x \in G$ there exists an element $x^{-1} \in G$ such that $(yx)x^{-1} = y$ and $x^{-1}(xy) = y$ for every $y \in G$.

We will use throughout this paper the following notations. If *E* and *F* are any two subsets of *G*, then *EF* is the set of all elements of the form xy, where $x \in E$ and $y \in F$. If $x \in G$, it is customary to write *xE* and *Ex* in place of $\{x\}E$ and $E\{x\}$ respectively. The set *xE* (*Ex*) is called a left translation (right translation) of *E*.

The notions of an IP-quasigroup and an IP-loop were introduced by Bruck ([2, 3]), see also [2, 9, 13, 14, 15]. Moufang loops ([10, 11]) are a very important case of IP-loops. The above described structures play a fundamental role in many areas of mathematics. The octonions (see, e.g., [1]) are another interesting example of IP-loops. Because the octonions will be important for us in the next, we will deal with them in more detail. The octonions were discovered in 1843 by John T. Graves, inspired by his friend William Hamilton's discovery of quaternions. They were discovered independently by Arthur Cayley (1845). They are sometimes referred to as Cayley numbers or the Cayley algebra. Octonions have applications in fields such as string theory, special relativity and quantum logic. The octonion algebra is usually represented by the capital letter *O*. Every octonion is a real linear combination of the unit octonions $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ where e_0 is the scalar element. That is, every octonion *x* can be written in the form

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7,$$

with real coefficients x_i. Addition of octonions is accomplished by adding corresponding coefficients, as with the complex numbers and quaternions. By linearity, multiplication of octonions is completely determined once given a multiplication table for the unit octonions (see, e.g., [1]).

A more systematic way of defining the octonions is via the Cayley-Dickson construction. Just as quaternions can be defined as pairs of complex numbers, the octonions can be defined as pairs of quaternions. The conjugate of an octonion

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7$$

is given by

$$x^* = x_0 - x_1e_1 - x_2e_2 - x_3e_3 - x_4e_4 - x_5e_5 - x_6e_6 - x_7e_7.$$

Conjugation is an involution of *O* and satisfies $(xy)^* = y^*x^*$. The norm of the octonion *x* is defined as

$$\|x\| = \sqrt{x^*x}.$$

The square root is well-defined here as $x^*x = xx^*$ is always a nonnegative real number:

$$x^*x = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2.$$

The norm on O satisfies

$$\|xy\| = \|x\| \, \|y\|.$$

This norm agrees with the standard Euclidean norm on R^8. The existence of a norm on O implies the existence of inverses for every nonzero element of O. The inverse of $x \neq 0$ is given by

$$x^{-1} = \frac{x^*}{\|x\|^2}.$$

It satisfies $x\, x^{-1} = x^{-1}\, x = 1$. Octonionic multiplication is neither commutative nor associative. The octonions do satisfy a weaker form of associativity, they are alternative. This means that the subalgebra generated by any two elements is associative. Not being associative, the nonzero elements of O do not form a group. They do, however, form an IP-loop, indeed a Moufang loop.

Example 1. Let us consider the couple (O^n, $\cdot$), where the operation $\cdot$ is defined by

$$(o_1^1, o_2^1, \ldots, o_n^1) \cdot (o_1^2, o_2^2, \ldots, o_n^2) = (o_1^1 o_1^2, o_2^1 o_2^2, \ldots, o_n^1 o_n^2).$$

It is easy to see that the couple (O^n, $\cdot$) is an IP-loop.

Topological quasigroups and topological IP-loops

Let $(G, \cdot)$ be a groupoid. It is natural to require that if an element x is „located near“ the element a (we write $x \approx a$) and while $y \approx b$, then $xy \approx ab$. This is the motivation for the definition of a topological groupoid.

A topological groupoid is a set G with a Hausdorff topology and a continuous operation $\cdot : G \times G \to G$ (i.e. if $a, b \in G$, then for every neighborhood O_{ab} there exist neighborhoods O_a, O_b such that $O_a\, O_b \subset O_{ab}$).

But we will deal with quasigroups. Our requirement is as follows: if $a \approx a'$ and $b \approx b'$, then the solutions of the equations $ax = b$, $a'x' = b'$ are „close together“, i.e. $x \approx x'$.

A topological quasigroup is a quasigroup $(G, \cdot)$, which is a topological groupoid and the following property holds: if $a_t \to a$ and $b_t \to b$ and while $a_t x_t = b_t$ and $ax = b$, then $x_t \to x$, where $\{a_t;\, t \in T\}$, $\{b_t;\, t \in T\}$, $\{x_t;\, t \in T\}$ are nets in G.

Definition 2. A topological IP-loop is an IP-loop $(G, \cdot)$ with a Hausdorff topology such that the following two conditions are satisfied: the binary operation $\cdot$ is continuous function with respect to the topology and the inverse function $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ is continuous function with respect to the topology.

Remark 3. Let $(G, \cdot)$ be a topological IP-loop. It is easy to see that the two conditions given in the definition above are equivalent to the condition that the transformation (from $G \times G$ onto G) $(x, y) \to x^{-1} y$ is continuous. A topological IP-loop is said to be connected, totally disconnected, compact, locally compact, etc., if the corresponding property holds for its underlying topological space. These topological structures are studied, e.g., in [7, 8, 12, 13].

Some examples of topological IP-loops with left-invariant uniformity

In the following we give some examples of topological IP-loops with left-invariant uniformity, which are not groups. First, we will recall the definition of a uniform topology and remind the facts which will be further used.

A uniformity of a set X is a non-empty system W of subsets of the Cartesian product $X \times X$, which satisfies the following conditions:

(*i*) Every element of W contains the diagonal $\Delta = \{(x,x);\ x \in X\}$.

(*ii*) If $U \in W$, then $\{(y,x);\ (x,y) \in U\} \in W$.

(*iii*) If $U \in W$, then there exists $V \in W$ such that, whenever (x, y) and (y, z) are in V, then (x, z) is in U.

(*iv*) If $U, V \in W$, then $U \cap V \in W$.

(*v*) If $U \in W$ and $U \subset V \subset X \times X$, then $V \in W$.

The elements of the uniformity are called entourages and the above described couple (X, W) is called a uniform space. Let $x \in X$. Put $U[x] = \{y \in X;\ (x,y) \in U\}$ for any $U \in W$. Every uniform space X becomes a topological space by defining a subset U of X to be open if and only if for every $x \in U$ there exists an entourage V such that $V[x]$ is a subset of U. The topology defined by a uniform structure is said to be induced by the uniformity or uniform topology.

A base of a uniformity W is any system B of entourages of W such that every entourage of W contains a set belonging to B. Thus, by property (*v*) above, a base of entourages B is enough to specify the uniformity W unambiguously: W is the set of subsets of $X \times X$ that contain a set of B. Every uniform space has a base of entourages consisting of symmetric entourages. A uniformity of a groupoid $(X, \cdot)$ is called left-invariant, if it has a left-invariant base B, i.e. $(a, a)\mathsf{B} = \mathsf{B}$ for every $a \in X$, where $(a, a)(x, y) = (ax, ay)$. A right-invariant uniformity is defined analogously. An invariant uniformity is a left-invariant uniformity which also satisfies a right-invariant condition.

A uniform topology is a generalization of a metric topology because if (X, ρ) is a metric space, then the system $\mathsf{B} = \left\{ U_\varepsilon;\ \varepsilon > 0 \right\}$, where $U_\varepsilon = \{(x,y);\ \rho(x,y) < \varepsilon\}$ is a uniformity of X. If a metric ρ of a quasigroup $(X, \cdot)$ is left-invariant (i.e. $\rho(ax, ay) = \rho(x,y)$ for every $a, x, y \in X$), then the uniformity induced by the metric ρ is left-invariant, too. Indeed, for every $a \in X$ and every $U_\varepsilon \in \mathsf{B}$, we have

$$U_\varepsilon = \{(x,y);\ \rho(x,y) < \varepsilon\} = \{(at,av);\ \rho(at,av) < \varepsilon\} = \{(at,av);\ \rho(t,v) < \varepsilon\} =$$

$$= (a,a)\{(t,v);\ \rho(t,v) < \varepsilon\} = (a,a)U_\varepsilon.$$

Analogously, if a metric ρ of a quasigroup $(X, \cdot)$ is right-invariant, then the uniformity induced by the metric ρ is also right-invariant.

Proposition 4. Let O be the set of all octonions with a unit norm. Then in the IP-loop $(O, \cdot)$ there exists a left-invariant metric.

Proof. Let x, y, a be octonions with a unit norm,

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + x_6e_6 + x_7e_7,$$

$$y = y_0 + y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + y_5e_5 + y_6e_6 + y_7e_7,$$

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7.$$

Put $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=0}^{7}(x_k - y_k)^2}$. It is known that ρ is a metric. Since

$$\rho(ax,ay) = \sqrt{\sum_{i=0}^{7}(a_i^2\sum_{k=0}^{7}(x_k - y_k)^2)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7}a_i^2 \cdot \sum_{k=0}^{7}(x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7}a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{7}(x_k - y_k)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{7}(x_k - y_k)^2} = \rho(x,y),$$

the metric ρ is left-invariant.

Proposition 5. Let O be the set of all octonions with a unit norm. Then in the IP-loop $(O^n, \cdot)$ there exists a left-invariant metric.

Proof. Let $x, y, a \in O^n$, where O is the set of all octonions with a unit norm, $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n)$, $a = (a_1,...,a_n)$.

Put $\overline{\rho}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{7}(x_{i_k} - y_{i_k})^2}$. ρ is the metric from the preceding proposition. It is easy to see that $\overline{\rho}$ is a metric. Since ρ is left-invariant, we obtain that

$$\overline{\rho}(ax,ay) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho(a_ix_i, a_iy_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i)} = \overline{\rho}(x,y).$$

The structures from the preceding propositions are examples of topological IP-loops with left-invariant uniformity, which are not groups. We have proved in [16] that in every locally compact topological IP-loop with topology induced by a left-invariant uniformity there exists at least one regular left Haar measure. From Proposition 4. it follows that in the topological IP-loop of all octonions with a unit norm there exists at least one regular Haar measure. Analogously, from Proposition 5. it follows that in the topological IP-loop $(O^n, \cdot)$, where O is the set of all octonions with a unit norm, there exists at least one regular Haar measure.

REFERENCES

[1] Baez, J.: *The Octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. *39* (2002), 145-205.

[2] Belousov, V. D.: *Foundations of the theory of quasigroups and loops* (in Russian), Nauka, Moscow, 1967.

[3] Bruck, R. H.: *Some results in the theory of quasigroups*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. *55* (1944), 19-52.

[4] Bruck, R. H.: *Contributions to the theory of loops*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. *60* (1946), 245-354.

[5] Haar, A.: *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Ann. Math., v. *34* (1933), 147-169.

[6] Halmos, P.: *Measure Theory*, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[7] Hudson, S. N.: *Transformation Groups in the Theory of Topological Loops*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. *15*, No. *6*, Published by: Completion of Topological Loops (Dec., 1964), 872-877.

[8] Hudson, S. N.: *Topological Loops with Invariant Uniformities*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. *109*, No. *1* (Oct., 1963), 181-190.

[9] Chein, O. - Pflugfelder, H. O. - Smith, J. D. H.: *Quasigroups and Loops*. *Theory and Application*, Heldermann Verlag, 1990.

[10] Kinyon, M. K. - Kunen, K. - Phillips, J. D.: *Every diassociative A-loop is Moufang*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. *130* (2002), 619-624.

[11] Moufang, R.: *Zur Struktur von alternativ Korpern*, Math. Ann., Vol. *110* (1935), 416-430.

[12] Nagy, P. T. - Strambach, K.: *Coverings of topological loops*, Journal of Mathematical Sciences - New York, Vol. *137*, No. *5* (2006), 5098-5116.

[13] Nagy, P. T. - Strambach, K.: *Loops in group theory and Lie theory*, Berlin; New York: de Gruyter expositions in mathematics, 2002.

[14] Pflugfelder, H. O.: *Quasigroups and loops*. *Introduction*, Heldermann Verlag, 1990.

[15] Smith, J. D. H.: *Quasigroup Representation Theory*, Taylor Francis, 2006.

[16] Stehlíková, B. – Markechová, D. – Tirpáková, A.: *On the Existence of a Haar Measure in Topological IP-loops* (accepted for publication in Kybernetika).

Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra

e-mail: bstehlikova@ukf.sk, dmarkechova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

TRI PRÍKLADY NA MODELOVANIE POMOCOU EXPONENCIÁLNEJ FUNKCIE

EDITA SZABOVÁ

ABSTRACT. This article discusses the motivation of students in the teaching of exponential functions. We offer three aplication examples in which modeling of the real situation leads to exponential function, especially to the exponential growth. We outline some problems with the real context of examples.

Úvod

Snáď každý učiteľ sa na hodine matematiky alebo hocijakého iného predmetu stretne zo študentských radov s otázkou: „Načo mi to v živote bude?“ „Prečo sa to mám učiť?“ „Kde sa s tým stretnem v skutočnom živote?“ Tieto otázky sú prirodzené vzhľadom na vek študentov, kedy odmietajú formalizmus, kriticky posudzujú autority a pestujú si vlastné záujmy, ktorým venujú väčšinu svojej pozornosti. Matematiku považujú za predmet „odtrhnutý od reality“. S podobným prístupom sme sa stretli aj počas súvislej pedagogickej praxe pri vyučovaní exponenciálnej a logaritmickej funkcie. Snahou bolo ponúknuť žiakom príklady, ktoré by mali motivačný a aplikačný charakter, také, ktoré by spĺňali kritériá:

- Majú prekvapivý výsledok v dôsledku prudkého exponenciálneho rastu alebo poklesu.
- Žiaci by mali zvládnuť sami zovšeobecniť úlohy a pochopiť na nich vlastnosti exponenciálnej funkcie.
- Majú reálny kontext, ktorý sa dá modelovať matematicky.
- Vychádzajú zo skúsenostného komplexu žiaka, z jeho záujmov.
- Demonštrujú aplikovateľnosť matematiky, jej prepojenie s každodenným životom.
- Vychádzajú z potrieb modernej spoločnosti.
- Poukazujú na medzipredmetové vzťahy.

Na základe týchto kritérií predkladáme 3 príklady. Uvádzame aj návody na riešenie týchto úloh.

Príklad 1 – Budú všade samé baktérie?

Baktérie sú síce organizmy, ktoré sa voľným okom nedajú vidieť, pod mikroskopom však môžeme pozorovať, ako sa rozmnožujú. Baktéria Escherichia coli sa v priaznivých podmienkach delí približne raz za hodinu. Môžeme uvažovať o tom, že máme jednu baktériu, ktorá sa bude množiť podľa našich predpokladov. Koľko baktérií sa namnoží za 1 deň? Ako dlho by trvalo, než by hmotnosť baktérií prekročila hmotnosť Zeme? V našom príklade nebudeme uvažovať o úhyne baktérií. Hmotnosť jednej baktérie je približne 6×10^{-15} kg, hmotnosť Zeme 6×10^{24} kg.

Na začiatku pokusu (teda „nultá hodina“) máme jednu baktériu. O hodinu nastane delenie – už budú dve baktérie. O ďalšiu hodinu z každej vzniknú zase 2 baktérie – to sú 4 a po tretej hodine ich bude 8. Po x hodinách dostávame 2^x baktérií. Po 24 hodinách by sme mali $2^{24} = 16776216$ baktérií Escherichie coli. Chceme teraz zistiť, po akom čase by vážili toľko ako Zem. Vydelíme hmotnosť Zeme hmotnosťou baktérie a dostaneme potrebný počet baktérií – t. j. 10^{39}. Teraz ideme hľadať číslo x, teda čas v hodinách, ktorý treba na rozmnoženie baktérií, aby ich bolo 10^{39}. Riešime teda exponenciálnu rovnicu $2^x = 10^{39}$, skade $x \doteq 130$.

Takže už po 130 hodinách, čo je len 5 a pol dňa, by baktérie vážili toľko čo Zem, keby sa množili v ideálnych podmienkach.

Obrázok 1: Escherichia coli. [Zdroj:http://images.suite101.com/180492_e_coli.jpg]

Príklad 2 – Koľko ľudí sa nakazí vírusom HIV?

Slovensko, našťastie, patrí ku krajinám s najnižším počtom HIV pozitívnych ľudí. Najhoršie sú na tom v Európe Rusko a Ukrajina, je tu až 80% z celkovo zistených prípadov v Európe. Počet HIV nakazených ľudí rastie exponenciálne. Na Slovensku do začiatku roka 2009 diagnostikovali 323 občanov. Do konca roka ich pribudlo ešte ďalších 53 [1]. Chceme zistiť, koľko percent HIV pozitívnych pribudlo v priebehu roka 2009. Jednoducho, napríklad trojčlenkou, zistíme, že v roku 2009 pribudlo 16,4% HIV pozitívnych.

Ak predpokladáme, že rast bude o taký istý počet percent v minulosti, aj v súčasnosti, aj v budúcnosti, môžeme vypočítať, koľko ľudí chorých na AIDS bolo na konci roka 2010 (437 ľudí), koncom tohto roka 2011 ich bude zrejme $437 \times 1{,}164 = 508$ a o x rokov, teda v roku $2011 + x$, to bude $437 \times 1{,}164^x$ ľudí.

Napríklad v roku 2051 by sme tak mali 189933 osôb HIV pozitívnych na Slovensku, čo je už naozaj alarmujúci počet. Podobne by sme mohli uvažovať počet nositeľov vírusu, ktorý rastie exponenciálne, aj v nasledujúcich rokoch.

Príklad 3 – Koľko ľudí bude mať šťastie v nedeľu?

Hra s podvedomím

1. *Najprv napíše pod seba čísla od 1 po 11.*
2. *Vedľa čísla 1 a 2 napíše svoje obľúbené čísla.*
3. *Vedľa 3 a 7 napíše mená dvoch osôb druhého pohlavia.*

4. *Nepozeraj na koniec, inak to bude chybné!*
5. *K číslam 4, 5, 6 napíš nejaké meno (priatelia, rodina).*
6. *Napíš 4 názvy piesní k 8, 9, 10, 11.*
7. *Niečo si želaj.*
8. *Pošli tento list piatim ľuďom dnes o polnoci a tvoje želanie sa splní na ďalší deň!*

Ešte pred niekoľkými rokmi sme takéto listy posielali poštou, dnes už kolujú hlavne po internete. Reťazový list musel niekto vymyslieť. Tento jeden človek ho poslal piatim ľuďom. A každý z piatich ľudí ďalším piatim. Po akom čase by list za ideálnych podmienok, že reťaz nikto nepreruší a že mail sa bude posielať vždy iným osobám, prešiel mailovou schránkou každého Európana? Počet obyvateľov Európy je 710 000 000.

My budeme predpokladať, že list bol prvýkrát napísaný cez polnoc z nedele na pondelok. V pondelok ho dostalo 5 ľudí. Každý z nich poslal list počas polnoci z pondelka na utorok (poslalo sa o polnoci 25 listov), takže v utorok sa želanie splnilo 5 ľuďom. Každá z osôb, ktorá dostala list v utorok a v noci ho preposlala, mala šťastie v stredu – to je 25 osôb. A zase vo štvrtok sa želanie splnilo tým, ktorí predtým o polnoci poslali reťazový list, a to je $5 \times 25 = 125$ ľudí. Platí, že v n-tý deň sa želanie splní 5^{n-1} ľuďom. Nedeľa je napríklad siedmy deň, takže ak nikto reťaz neporuší, bude v tento deň splnené želanie $5^6 = 15625$ ľuďom. A to sme ešte len pri siedmom dni.

Chceme teraz zistiť, po koľkých dňoch sa dostane ku každému Európanovi. Teda súčet n členov geometrickej postupnosti s prvým členom $a_1 = 1$ a kvocientom $q = 5$ má byť 710 000 000 a chceme nájsť n – koľký deň bude mať želanie splnené „posledný" Európan. Podľa známeho vzorca pre výpočet súčtu prvých n členov geometrickej postupnosti prichádzame k riešeniu exponenciálnej rovnice

$$2\,840\,000\,001 = 5^n \Rightarrow n \doteq 14.$$

Takže už na druhú nedeľu bude mať každý Európan splnené želanie.

V uvedených príkladoch sme získali výsledky, ktorých riešenie je korektné, popisujú prudký exponenciálny rast, avšak od reality sa značne líšia, dokonca sú nezmyselné. Totiž hmotnosť baktérií nikdy nedosiahne hmotnosť Zeme, na Slovensku nikdy nebudú žiť len HIV pozitívni ľudia a reťazový list sa zrejme nikdy ku každému obyvateľovi európskej populácie.

Záver

Predkladané úlohy boli zaradené do vyučovania matematiky pri preberaní tematického celku Exponenciálne a logaritmické funkcie počas mojej súvislej pedagogickej praxe na Gymnáziu sv. Cyrila a Metoda v Nitre v školskom roku 2010/2011. Cieľom bolo motivovať študentov prostredníctvom vybraných úloh, poukázať na aplikovateľnosť matematiky na širokú škálu javov zo života a precvičiť riešenie exponenciálnych a logaritmických funkcií a rovníc a ich vlastností. V uvedených príkladoch sme chceli demonštrovať prudký exponenciálny rast. Žiakov na vyučovaní príklady 1, 2, 3 zaujali predovšetkým práve prekvapivými výsledkami v dôsledku tohto rastu. Príklady 1,2 popisujú medzipredmetové vzťahy medzi matematikou a biológiou či medicínou. Príklad 2 ich zaujal aj svojou kontroverznosťou. Zrejme nepočítali s tým, že sa s podobnou témou stretnú práve na hodinách matematiky. Príklad 3 bol blízky žiakom predovšetkým z každodenného života, nakoľko žiaci sa bežne stretávajú s reťazovými správami napríklad na sociálnych sieťach. Pri postupnom vypisovaní počtov baktérií v príklade 1 či osôb v príkladoch 2, 3 boli aktívni a na tomto základe dokázali nájsť zákonitosť exponenciálneho rastu v čase.

Kontext príkladov vychádza z reality, otázkou však je, či aj cieľ úlohy je reálny. Graf exponenciálnej funkcie pri základe väčšom ako 1 rastie do nekonečna, ale v realite množstvo baktérií, počet ľudí nakazených vírusom HIV či počet ľudí, ktorí dostanú daný reťazový list, do nekonečna neporastie. Pre naivného žiaka by teda mohlo byť zavádzajúce, keby sme na uvedených príkladoch tvrdili, že exponenciálny rast je neobmedzený. Teda úloha zistiť, za akú dlhú dobu budú baktérie pri exponenciálnom raste vážiť toľko, čo váži Zem, sa vymyká reálnemu cieľu. Taktiež nepoučený žiak v úlohe o počte nakazených HIV urobil ten záver, že rast bude exponenciálny až do okamihu, kedy bude nositeľom vírusu celá ľudská populácia. Podstatné je to, že uvedené modelové situácie sa správajú exponenciálne len lokálne. Prudký exponenciálny rast však skutočne je hrozbou pre ľudstvo. Žiakom je vhodné vysvetliť, že sa objavuje väčšinou tam, kde sa niečo rozkladá, kazí, tam, kde sa narúša rovnováha a poriadok, kde sa mení štruktúra. Ak sa spojí s anomáliami, fluktuáciami a chaosom, ak sa stane pre ľudstvo nekontrolovateľný, potom jeho dynamika môže mať násilný, deštrukčný charakter a vyústiť do katastrofy. [2, str. 50] Existujú obmedzenia, ktoré regulujú exponenciálny rast, či už prírodné ako čas, priestor, živiny, ale aj výsledky vedy a techniky. Napríklad čo sa týka baktérií, ich neobmedzenému rastu bráni nedostatok kyslíka, surovín alebo miesta.

V úlohách sme vychádzali vždy z „ideálnych prípadov“ (žiadna okolnosť nenaruší proces rozmnožovania baktérií, šírenia vírusu ani posielanie reťazového listu). Fischer a Malle tvrdia, že pri tvorbe matematického modelu nejakého reálneho procesu sa musia vždy uskutočniť zjednodušenia a zanedbania a do modelu sa vtiahnu len niektoré hľadiská, kým ostatné zostanú nezohľadnené. Tým sa stáva, že v mnohých prípadoch hodnoty, ktoré boli exaktne matematicky vypočítané, sa od skutočnosti značne odlišujú. Aj tieto zjednodušené modely však poskytujú pomoc a pribraním ďalších hľadísk sa jednoduchý model môže zdokonaliť a byť viac v zhode so skutočnosťou [3, str. 96]. Taktiež pripomínajú, že matematizácia problému vyžaduje obyčajne presnejšie úvahy, čím vedie aj k lepšiemu porozumeniu problémovej situácie.

LITERATÚRA

[1] Slováci a HIV. [8.9.2011], dostupné na: `http://www.infodrogy.sk/ActiveWeb/c/4375/slovaci_a_hiv.html`

[2] VOLNER, Š.: *Globalizácia, exponenciálny rast a sociálny chaos – globálne hrozby 21. storočia.*, In *Medzinárodné vzťahy 2/2006*, Bratislava, Vydavateľstvo Ekonóm, 2006, ISSN 1336 – 1562

[3] FISCHER, R., MALLE, G.: *Človek a matematika*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1992, ISBN 80-08-01309-5

Mgr. Edita Szabová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
94974 Nitra
e-mail: edita.szabova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

UČME MATEMATIKU POMOCOU HRY

EVA UHRINOVÁ

ABSTRACT. In this contribution, we emphasize the importance of a game as an appropriate teaching method in mathematics. Knowledge that pupils achieve through games remains in memory longer and does not have a formal character. The contribution discusses the game 'NIM candy' which we used on the Scientific Fair, organized by the Faculty of Natural Sciences of Constantine the Philosopher University in Nitra in a shopping centre Mlyny.

Úvod

V súčasnosti sa do popredia dostávajú nové edukačné metódy, ktoré majú za cieľ odbúrať klasický typ vyučovacej hodiny. Jednou z týchto metód je aj metóda didaktických hier. Viacerí autori, ako napríklad Volfová [4], Petty [3] sú toho názoru, že využitím hry vo vyučovacom procese môžeme zvýšiť záujem žiakov o samotný vyučovací predmet.

V článku poukazujeme na význam didaktickej hry a uvádzame hru NIM, ktorú sme použili na vedeckom jarmoku organizovanom Fakultou prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre v OC Mlyny. Zameriavame sa na rozvoj logického myslenia žiakov a hľadanie výhernej stratégie hry. Postupným experimentovaním a hľadaním závislostí, formulovaním hypotéz a vyvrátením nesprávnych tvrdení, môžeme docieliť u žiakov rozvoj tých kompetencií, ktoré zdôrazňuje Štátny vzdelávací program [1].

Materiál a metódy

Hra je všeobecne v prácach teoretikov a praktikov chápaná ako jedna zo základných foriem ľudskej aktivity, ktorá sa s človekom spája od útleho detstva a pretrváva v jeho záujmových aktivitách počas celého ľudského života.

Podľa Čečetku [2] je hra inštinktívna, spontánna a pre detský vek najtypickejšia forma činnosti, v ktorej dieťa individuálnym a svojej vývinovej fáze zodpovedajúcim spôsobom dáva výraz svojim predstavám, myšlienkam, citom, svojmu chceniu.

Volfová [4] sa zmieňuje o hre jako o uvedomelej činnosti, ktorá vzbudzuje kladné emócie, vyvoláva pocity pohody, prináša uspokojenie. Hra je podobná práci v tom, že je zameraná k nejakému cieľu, vyžaduje isté úsilie, sústredenosť, námahu. Detskú potrebu - hrať sa- možno spojiť s didaktickým účelom a dostaneme tak didaktickú hru.

Vasková [5] poukazuje na význam didaktickej hry ako metódy, ktorá umožňuje udržať si osvojené učivo v pamäti dlhšie a sú dobrým prostriedkom v boji proti zabúdaniu a v boji proti formálnym vedomostiam.

Nim hra

Pod označením NIM sa dnes ukrýva veľká skupina hier, v ktorých hráči postupne odoberajú z kôpky (alebo viacerých kôpok) žetóny a ten, kto odoberie posledný žetón vyhral, alebo prehral, čo závisí od pravidiel jednotlivých typov hier. Prvé štúdie venované hre NIM boli publikované v roku 1902 [6].

U väčšiny hier NIM sa dá víťazná stratégia nájsť pomocou postupného experimentovania a odhaľovania závislostí. Veľmi užitočné je hľadať tzv. výhernú pozíciu, z ktorej môžem vyhrať danú hru. Z učiva matematiky žiaci pri hľadaní výherných stratégií využijú predovšetkým základné informácie o číselných sústavách, deliteľnosti, zvyškových triedach. Pomocou týchto hier môžeme rozvíjať u žiakov logické myslenie a schopnosť hľadať logické súvislosti hry a nakoniec vyhrávajúci algoritmus. Pri hľadaní správnej stratégie týchto hier sa žiaci naučia formulovať hypotézy a vyvrátiť nesprávne tvrdenie.

V hrách typu NIM je vhodné študovať hry od konca a hľadať také pozície (počty žetónov na kôpke), ktoré sú výherné. Ak nájdeme stratégiu pre jednu z hier, je možné ju modifikovať i pre ďalšie.

My sa budeme zaoberať hrou NIM 1-2-3, ktorú sme nazvali Cukríkový NIM, pretože sme do kôpky ako žetóny použili cukríky, keďže sme túto hru určili deťom vo veku 6-15 rokov.

Cukríkový NIM

Cieľ hry: Rozvoj logického myslenia žiakov. Rozvoj schopnosti formulovať hypotézy a vyvrátiť nesprávne tvrdenie. Rozvoj schopnosti nájsť výhernú stratégiu hry.

Veková kategória: 6 -15 rokov

Pomôcky: 16 cukríkov pre každú dvojicu hráčov

Pravidlá hry:

Hru hrajú dvaja hráči. Na kôpke leží 16 cukríkov, z ktorej hráči striedavo odoberajú cukríky. Každý hráč môže odobrať jeden, dva, alebo tri cukríky. Hráč, ktorý ako posledný odoberie cukríky, vyhral.

Obmena hry: Hráči môžu z kôpky zobrať jeden, dva, tri, alebo štyri cukríky.

Metodické pokyny:

Žiakom vysvetlíme pravidlá hry a necháme ich zahrať sa v dvojiciach dve hry. Následne žiakom prezradíme, že existuje výherná stratégia hry a motivujeme ich na hľadanie tejto stratégie. Po zahraní 2 – 5 hier, vyzveme žiakov, nech nás oboznámia so svojimi zisteniami a stratégiu hry spoločne rozriešime.

Priebeh hry so 16 cukríkmi je taký istý ako hry so 4, 8, 12 cukríkmi (každý $(n + 1)$-násobok, kde n je maximálny počet cukríkov, ktoré môže hráč potiahnuť v jednom ťahu). V tomto prípade začínajúci hráč prehrá. Ak začínajúci hráč potiahne ľubovoľný počet cukríkov, druhý hráč potiahne zvyšok do štyroch. Jedná sa teda o zvyškové triedy podľa modulu 4.

Výsledky a diskusia

Hru Cukríkový NIM sme použili na Vedeckom jarmoku, ktorý organizovala Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre v OC Mlyny 4. apríla 2011 (Obrázok 1).

Obrázok 1: Vedecký jarmok v OC Mlyny [7]

Netradičný Vedecký jarmok plný prírodovedných chutí bol určený pre žiakov základných a stredných škôl. Predstavilo sa na ňom osem katedier fakulty prírodných vied. Stánok katedry matematiky okrem iného ponúkal aj možnosť zahrať si Nim hry. Pristavilo sa tu niečo vyše sto ľudí, ktorí sa snažili prísť na výhernú stratégiu cukríkovej NIM hry.

Cieľovou skupinou boli pre nás žiaci vo veku 6-15 rokov, ktorých sme ako okoloidúcich oslovili, či si nechcú zahrať s nami NIM hru o cukríky. Hru sme hrali najprv s oslovenými žiakmi my a následne, keď žiak pochopil stratégiu hry, mohol vyzvať na hru iného žiaka a zahrať si túto hru s ním.

Celkový priebeh pochopenia stratégie s osloveným hráčom sa nám osvedčil ako realizácia viacerých nasledujúcich hier.

Prvá hra:
Hráčom sme vysvetlili pravidlá hry a dodali, že ak vyhrajú, môžu si odobraté cukríky ponechať. Hru začínal oslovený žiak. Keďže bolo na začiatku hry 16 cukríkov, nachádzali sme sa vo výhernej pozícii a hru sme vyhrali.

Druhá hra:
Žiakovi sme prezradili, že v tejto hre existuje výherná stratégia a keďže my ju poznáme, vyhrali sme. Poradili sme mu, aby si všímal naše ťahy. Šikovnejší žiaci už v druhej hre prišli na výhernú stratégiu a oznámili nám, že nechcú začínať ako prvý.

Tretia hra:
Cukríky sme usporiadali do štvoríc. Hru začínal oslovený žiak. Vždy sme potiahli z tej istej kopy cukríkov, ako potiahol žiak. Pri tejto hre už väčšina žiakov prišla na výhernú stratégiu. Našli sa však žiaci, ktorý ani pri tejto hre nepochopili stratégiu, a tak sme si túto hru zahrali ešte raz s komentovaním našich ťahov a pomocnými otázkami: „Ak si potiahol jeden cukrík, koľko cukríkov som potiahla ja?“ ap.

Štvrtá hra:
Tu sme chceli overiť, či žiaci naozaj pochopili stratégiu. Upravili sme pravidlá hry nasledovne: Každý hráč môže odobrať jeden, dva, tri, alebo štyri cukríky. Tí, čo pochopili stratégiu, chceli hru začínať ako prvý.

Postrehy:

- Väčšinu žiakov prekvapilo, že existuje výherná stratégia tejto hry.
- Ak žiak prišiel na výhernú stratégiu, chcel si hru zahrať s iným hráčom, ktorý túto stratégiu ešte nepozná.
- Žiak, ktorý už poznal stratégiu hry, nechcel prezradil svojmu spoluhráčovi, že existuje nejaká stratégia hry a takto bol ochotný si zahrať aj 5 hier.
- Hra sa nám osvedčila aj so skupinkou žiakov, ktorí sa spolu radili pri ťahoch.
- Skupina spolupracujúcich žiakov, ktorí nahlas vyjadrovali svoje hypotézy a navzájom ich zamietali, alebo potvrdzovali, skôr prišla na výhernú stratégiu hry ako jednotlivec.
- Táto hra viac zaujala chlapcov ako dievčatá.

Záver

Využitie didaktickej hry, nielen vo vyučovacom procese, nám prináša mnoho pozitív, ktoré by sme nemali prehliadať. Veľkou výhodou je sila motivácie vhodnej hry, ktorú použijeme vo vyučovacom procese, prostredníctvom ktorej môžeme zvýšiť záujem a pozornosť žiakov nielen o rozoberanú problematiku vo vyučovaní, ale i o samotný vyučovací predmet.

V článku hovoríme o využití NIM hry ako didaktickej hry, prostrednítvom ktorej môžeme docieliť u žiakov rozvoj viacerých matematických kompetencií.

Veľkým pozitívom, ktoré prináša NIM hra je experimentovanie, odhaľovanie závislostí, rozvoj logického myslenia, formulovanie hypotéz a vyvrátenie nesprávneho tvrdenia, schopnosť vyjadrovať svoje myšlienky. Prostredníctvom tejto hry môžeme u žiakov rozvíjať kompetencie, ktoré zdôrazňuje aj Štátny vzdelávací program. Okrem toho si žiaci precvičia informácie o číselných sústavách, deliteľnosti, zvyškových triedach.

LITERATÚRA

[1] ŠTÁTNY VZDELÁVACÍ PROGRAM MATEMATIKY. Príloha ISCED 2. 2009. Bratislava: ŠPÚ. [2010-09-20]. Dostupné na internete: <http://www.statpedu.sk/sk/filemanager/view/723 >

[2] ČEČETKA, J.: *Príručný pedagogický lexikón* 1, Turčiansky sv. Martin: Kompas, 1943. 448 s.

[3] PETTY, G.: *Moderní vyučovaní.* Praha: Portál, 1996. 380 s. ISBN 80-7178-070-7

[4] VOLFOVÁ, M.: *Některé kapitoly z didaktiky matematiky*. Hradec Králové: Pedagogická fakulta v Hradci Králové, 1986. 124 s. ISBN 60-210-86

[5] VASKOVÁ, V.: *Matematický futbal – didaktická hra*. In Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. stupeň ZŠ. Nitra: FPV UKF, 2008.

[6] JANCARIK, A.: *Vyučované predmety*: Matematické hry. [2011-04-21]. Dostupné na internete:<http://class.pedf.cuni.cz/Jancarik/DesktopDefault.aspx?tabindex=3&tabid =24& kategorieID =107&portalsekce=2&Nezobrazovat=ano&PrvekID=243>

[7] VEDECKÝ JARMOK PLNÝ PRÍRODOVEDNÝCH CHUTÍ, Dostupné na internete:< http://www.ukf.sk/udalosti/1881-Vedecky-jarmok-plny-prirodovednych-chuti>

PaedDr. Eva Uhrinová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: eva.uhrinova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

AS MUCH AS POSSIBLE – EXTREME VALUE TASKS IN GEOMETRY

ANDREAS ULOVEC

ABSTRACT. Most people are familiar with extreme value tasks: "What is the largest triangle you can conscribe in a circle?" or "What is the largest rectangle you can conscribe in a rectangular triangle?" and so on. Usually, these tasks are solved with the help of calculus, specifically with derivatives. This of course gets you a correct result, but it does not tell you much about the geometrical situation behind it. We will show another approach by making constructions with the Dynamic Geometry Software GeoGebra, then analyze these constructions to get an idea of the situation and even an approximation of the solution. Only then we will check it with calculus.

1 A typical extreme value task

An extreme value task is the problem to find one or more local or global maxima or minima of a function (or several functions) within given ranges. Let's have a look at a typical extreme value task:

Task: We have a rectangular triangle with side length a = 3cm, b = 4 cm, c = 5cm. What are the dimensions of the rectangle with the largest area that you can conscribe into the triangle, when one of the rectangle sides lays on side c of the triangle?

Would your first guess be "a square"? Well, let's have a look. First we simply use GeoGebra to construct the triangle and inscribe the rectangle:

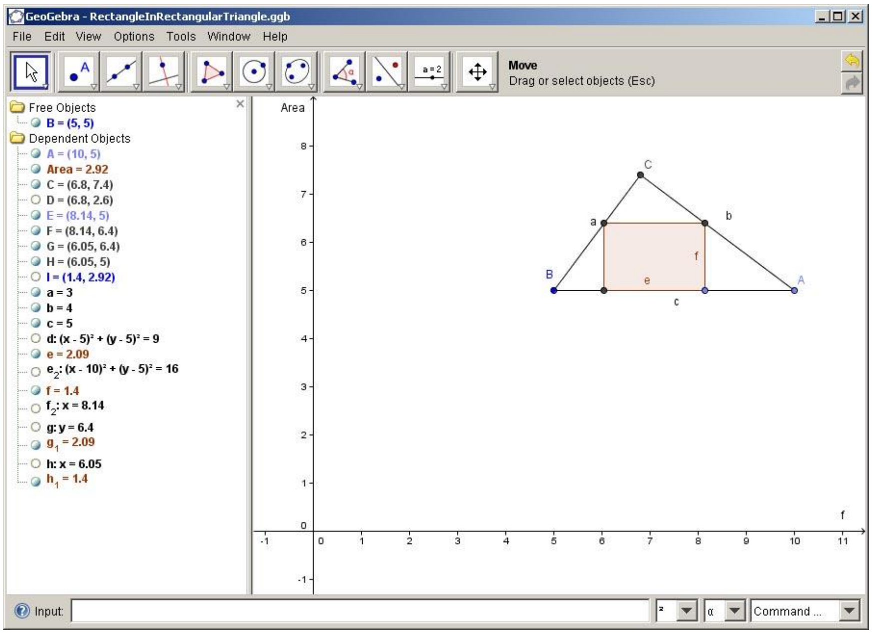


Figure 1: Constructing the rectangle within the triangle

This work has been funded with support of the European Commission under its LLP programme under the project DynaMAT (510028-LLP-1-2010-IT-COMENIUS-CMP). It reflects the views only of the author, and the Commission can not be held responsible for any use which may be made of the information contained herein.

2 DGS instead of calculus

Changing the size of the rectangle and looking at the value for the area (named *Area* in the algebra window) does only reveal that if the rectangle is very slim it has a much smaller area than if it is near the dimensions of a square. Let's be a bit more exact and have a look at the function describing the area of the rectangle. Now this would of course be $Area(e, f) = e \cdot f$. We now have a function with two variables, but they are not independent from each other! If we change *e*, the value of *f* changes accordingly. We can reduce this to a function $Area(f)$. For a calculus analysis, we would now determine the exact term for the function *Area*, and then calculate the derivative etc. For now, we do not need to do that, because we can simply read the value of the function *Area* in the algebra window! To find the maximum of this function (or at least to get a good approximation of the maximum), we can draw the graph of it. How can we do that without knowing the function term? Well, as just said, we can read the function value in the algebra window, i.e. for each given value of *f* we can construct the point $P = (f, Area(f))$ and hence get one point of the graph:

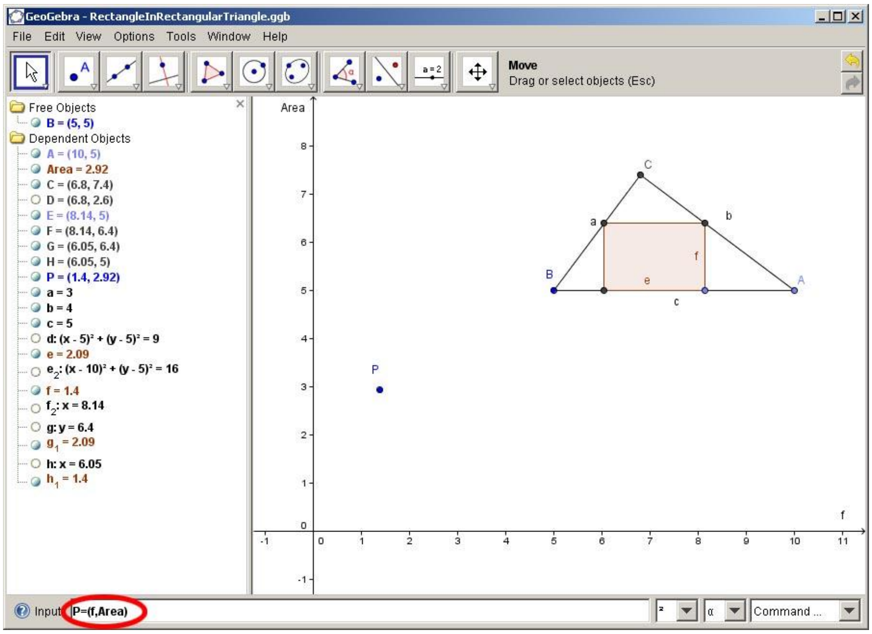


Figure 2: Having one point of the graph ...

How do we construct the whole graph, again without knowing its term? We just use the trace on function of GeoGebra and change the size of the rectangle by pulling on the point, as we did above. This results in the following:

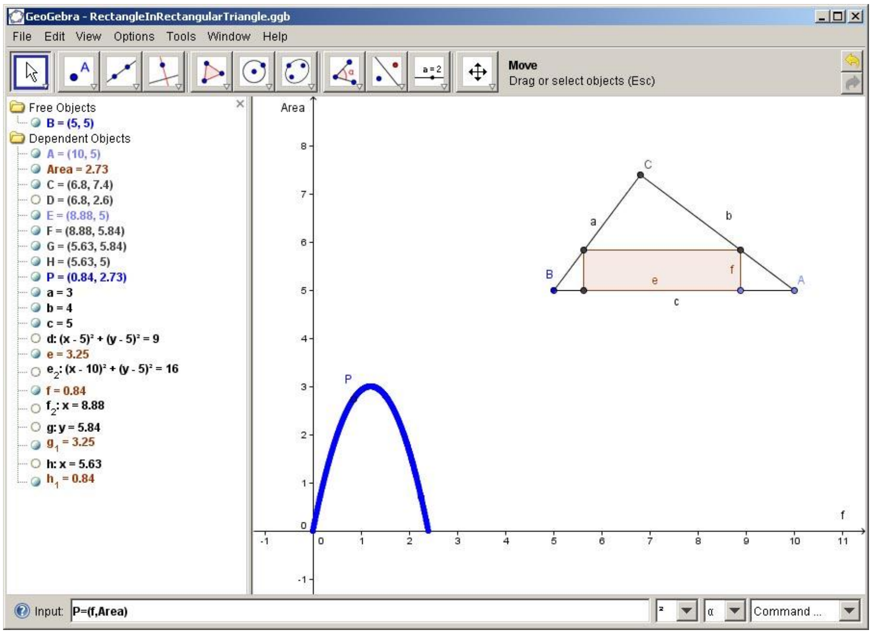


Figure 3: Trace the point P, and we get the graph

One look at the graph shows us that the maximum is at about $f \approx 1$. To check this and to find out the exact value, we now revert to our calculus knowledge. First, we need to find the term of the function $Area(f)$. We already know that $Area(f) = e \cdot f$. Now we take a look at the geometric construction and use the intercept theorem to get a relation between *e* and *f*. For that, we first name some of the line segments:

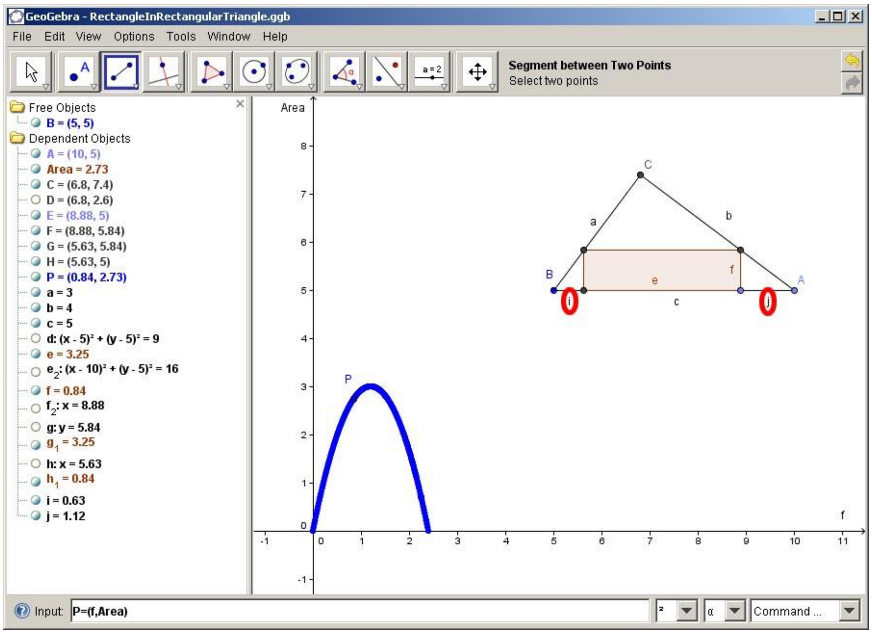


Figure 4: Naming the line segments

3 Time for calculus

Now we can easily use the intercept theorem, which gets us the following relations:

$$i : f = a : b,\ f : j = a : b$$

We also know the dimensions of the triangle, i.e. we know that

$$a = 3, b = 4, c = 5$$

From the construction, we can also easily see that

$$i + e + j = c$$

This leads us to the following:

$$\tfrac{3}{4} f + e + \tfrac{4}{3} f = 5$$

From which we can easily derive a relation between *e* and *f*, namely

$$e = 5 - \left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{3}\right) f = 5 - \tfrac{25}{12} f$$

Now we can finally write the equation for the function *Area*:

$$Area(f) = e \cdot f = \left(5 - \tfrac{25}{12} f\right) \cdot f = 5f - \tfrac{25}{12} f^2$$

To get the maximum of this function, we first calculate the derivative:

$$Area'(f) = 5 - 2 \cdot \tfrac{25}{12} f = 5 - \tfrac{25}{6} f$$

Now we set $Area'(f) = 0$ and calculate the value for *f*:

$$Area'(f) = 0 = 5 - \tfrac{25}{6} f \Rightarrow 5 = \tfrac{25}{6} f \Rightarrow f = \tfrac{6}{5} = 1.2$$

A look at the graph confirms that the function has indeed a maximum at $f = 1.2$. To confirm this analytically, we can calculate the second derivative at $f = 1.2$:

$$Area''(f) = -\tfrac{25}{6} < 0$$

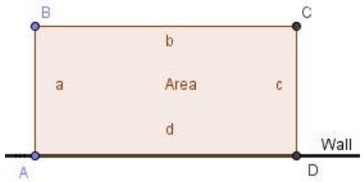
The second derivative at $f = 1.2$ is smaller than 0, i.e. the function really does have a maximum at $f = 1.2$. Now we only need to calculate the corresponding value of *e*, using the equation that we obtained above:

$$e = 5 - \tfrac{25}{12} f = 5 - \tfrac{25}{12} \cdot \tfrac{6}{5} = 5 - \tfrac{5}{2} = 2.5$$

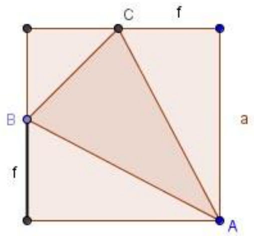
So the final answer to our question would be: The rectangle with the largest area that you can conscribe into a rectangular triangle with side length *a* = 3cm, *b* = 4 cm, *c* = 5cm has the dimensions $e = 2.5$ cm and $f = 1.2$ cm. Particularly, it is not a square!

Using the same methods, one can also solve the following tasks:

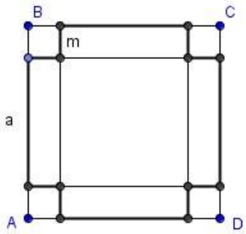
1. You want to fence off a rectangular area along a wall. There is enough material to build a fence with a length of 20 m. How do you have to choose the dimensions of the rectangle so that you can fence off the largest possible area? How large is that area? How large would the area be if you would build not a rectangle, but a semicircle?



2. Inscribe an isosceles triangle in a square, as shown below. How do you have to choose the distance *f* so as to achieve the maximum area of the triangle?



3. Construct the net of an (open) cube as shown below (a = 3 cm). How do you have to choose the distance m so as to achieve the maximum volume of the cube (note that we are not looking for the maximum area of the net)?



4 Final remarks

Many real-life applications (see e.g. [1]) need some sort of optimization. Some problems are fairly easy to solve, particularly those with only one parameter. Others are trickier, and fairly often there is no unique solution to a problem. In a lot of situations, modelling and/or simulating helps to obtain at least a good approximation for optimal values (that’s basically just what we did above in GeoGebra). More modelling can be found in [2].

BIBLIOGRAPHY

[1] John Andersen et al. *Math2Earth – Bringing Mathematics to Earth*, Prvokruh Publishing House, Prague, 2010, ISBN 978-80-901470-2-7

[2] Vladimir Georgiev et al. *MEETING in Mathematics*, Demetra Publishing House, Sofia, 2008, ISBN 978-954-9526-49-3

Dr. Andreas Ulovec
Faculty of Mathematics
University of Vienna
Nordbergstrasse 15
AT – 1090 Vienna
e-mail: Andreas.Ulovec@univie.ac.at

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

OBJAVUJEME SIEŤ ŠTVORSTENA

DUŠAN VALLO – JÚLIA ZÁHORSKÁ – VILIAM ĎURIŠ

ABSTRACT. In this article we present some ideas how to integrate the manipulation activity with tetrahedron's net models in teaching.

Úvod

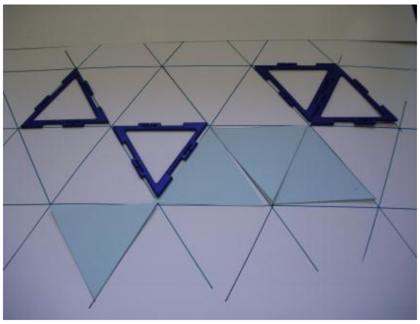
Cieľom nášho článku je poukázať na didaktický aspekt predmetnej manipulácie a konkrétnej tvorby modelov štvorstena. V príspevku sa zameriame na určité vlastnosti štvorstena, pričom kladieme dôraz na vytváranie a detailné pozorovanie konkrétnych, najmä papierových a stavebnicových modelov tohto telesa. Treba poznamenať, že štvorsten je jedným zo základných telies, s ktorým sa oboznamujú študenti stredných škôl. Vlastnosti tohto trojbokého ihlanu sa však detailne neštudujú, riešia sa väčšinou úlohy polohovej a metrickej stereometrie. Na druhej strane je štvorsten vďačným námetom pre mnohé úlohy v matematických súťažiach, či už matematickej olympiády alebo iných korešpondenčných seminárov.

Upozorňujeme, že v článku používame mnohé vyjadrenia, ktoré nie sú exaktne matematické, avšak pomerne presne popisujú podstatu zdôraznenej manipulačnej činnosti.

1 Sieť pravidelného štvorstena

Štyri steny štvorstena sú trojuholníky. Ak analyzujeme sieť štvorstena, zistíme, že je potrebné „usporiadať" tieto trojuholníky vhodným spôsobom v rovine. Tým sa študentom ponúka niekoľko zaujímavých kombinačných úloh.

Začneme zhodnými rovnostrannými trojuholníkmi. Za tým účelom je vhodné k predmetnej manipulácii použiť dieliky stavebnice Polydron, prípadne vystrihnúť trojuholníky z papiera.



Obr. 1: Modely trojuholníkov – papier a stavebnica Polydron v trojuholníkovej mriežke

Úloha. **Vytvorte všetky siete pravidelného štvorstena.**

Riešenie. Pracujeme so zhodnými rovnostrannými trojuholníkmi, preto použijeme trojuholníkovú mriežku. Trojuholníková mriežka plní úlohu pomôcky. Vzdialenosť bodov na papieri nakreslenej mriežky zvolíme tak, aby korešpondovala s dĺžkou strany rovnostranného trojuholníka – dielca zo stavebnice.

Trojuholníky pracovne označíme ako T_1, T_2, T_3 a T_4, v prípade stavebnice ich môžeme rozlíšiť farbou.

Príspevok bol vypracovaný vrámci riešenia projketu KEGA 038UKF-4/2011: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh

Do mriežky umiestnime trojuholník T_1. Vzhľadom k tomu, že trojuholníky sú zhodné, ich strany majú rovnaké dĺžky, priložíme trojuholník T_2 k trojuholníku T_1 tak, aby mali totožnú stranu. Vznikne kosoštvorec $T_1 \cup T_2$ (použili sme neštandardné označenie ako zjednotenie trojuholníkov) s vnútornými uhlami 60° a 120°. Je zrejmé, že nezáleží na tom, ktoré strany sme stotožnili.

Priložíme trojuholník T_3 obdobne ako trojuholník T_2. Stotožníme jednu stranu trojuholníka T_3 so stranou kosoštvorca $T_1 \cup T_2$. Opäť nezáleží na tom, ktoré strany sme vybrali. Vznikne rovnoramenný lichobežník $T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

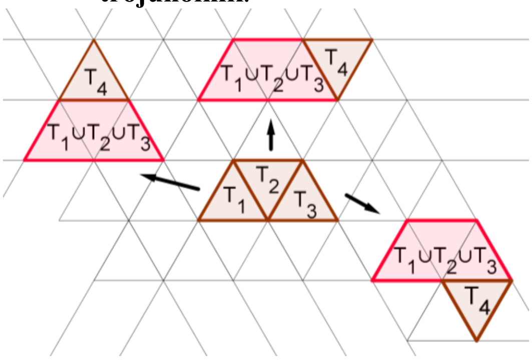
Ako pridáme trojuholník T_4?

Máme niekoľko možností:

a) Stotožňujeme stranu trojuholníka T_4 so stranami trojuholníka T_3, kde máme na výber dve možnosti. Pri jednej vznikne **kosodĺžnik**, pri druhej **nekonvexný šesťuholník**.

b) Ak uvažujeme namiesto trojuholníka T_3 trojuholník T_1, vytvorené mnohouholníky sú súmerné a iné možnosti nemáme.

c) Zostáva stotožniť strany trojuholníkov T_2 a T_4, pričom vznikne **rovnostranný trojuholník**.



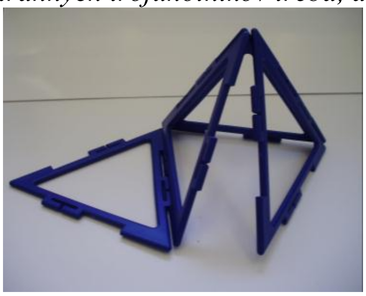
Obr. 2: Zjednotenie trojuholníkov T_1, T_2 a T_3. Možnosti $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$.

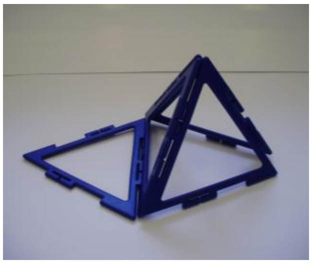
Viac možností nie je a zostáva rozhodnúť, ktoré útvary sú sieťami pravidelného štvorstena.

Ako vytvoríme z mnohouholníkov pravidelný trojboký ihlan?

Nekonvexný šesťuholník nie je sieťou štvorstena. Ak stotožníme dve susedné strany trojuholníkov T_1, T_4, potom štyri trojuholníky vytvárajú plochu, ktorá nie je rovinou a máme plášť štvorbokého ihlana.

Prečo tieto štyri rovnostranné trojuholníky nie sú v jednej rovine? Aký počet rovnostranných trojuholníkov treba, aby ležali v rovine?





Obr. 3: Vytváranie modelu štvorstena so stavebnice Polydron.

Ak uvažujeme o **kosodĺžniku**, stotožnením strán trojuholníkov T_1, T_3 vytvoríme plášť štvorstena s podstavou trojuholníka T_4.

Ak máme **rovnostranný trojuholník**, stotožníme susedné hrany trojuholníkov T_1, T_3, T_4 a dostaneme trojboký ihlan s podstavou trojuholníka T_2.
Tak prichádzame k záveru, že siete pravidelného štvorstena sú len dve – v podobe **rovnostranného trojuholníka** a **kosodĺžnika**.

2 Sieť rovnostenného štvorstena

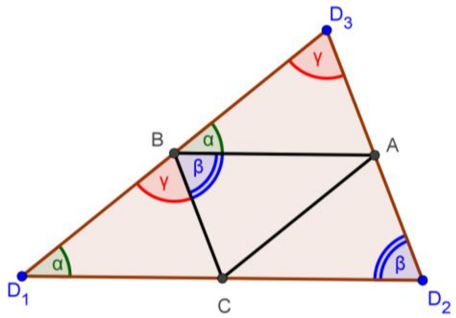
Preskúmame sieť štvorstena v tvare trojuholníka.
Ak je štvorsten pravidelným štvorstenom, potom jedna sieť je v tvare rovnostranného trojuholníka. Označme jeho vrcholy D_1, D_2 a D_3. Ak stredy strán označíme ako A, B a C, predstavujú stredné priečky AB, BC, CA trojuholníka $D_1D_2D_3$ hrany štvorstena $ABCD$. Štvorsten je **rovnostenný**, pretože jeho steny ABC, ABD, BCD a ACD sú navzájom zhodné trojuholníky (vrcholy D_1, D_2, D_3 trojuholníka sa stotožnili do vrcholu D štvorstena $ABCD$).

Aký štvorsten $ABCD$ vznikne, ak jeho sieť trojuholník $D_1D_2D_3$ nie je rovnostranný?
Prvá odpoveď, ktorú dostaneme od študentov je, že štvorsten nebude pravidelný.

Je to pravda?
Skutočne, ak uvažujeme o ostrouhlom trojuholníku $D_1D_2D_3$, stredné priečky AB, BC, CA rozdelia tento trojuholník na štyri navzájom zhodné trojuholníky, ktoré sú stenami rovnostenného štvorstena.
Necháme študentov zhotoviť papierový model takejto siete a poskladať štvorsten. Ak ich neskôr opäť necháme zhotoviť papierový model v tvare pravouhlého trojuholníka $D_1D_2D_3$ s pravým uhlom pri vrchole D_3, študenti zistia, že vôbec *nejde* o model siete. Vrcholy D_1, D_2 trojuholníka $D_1D_2D_3$ stotožníme s vrcholom D_3 tak, že trojuholníky BCD_1, ACD_2 úplne pokryjú štvoruholník $BCAD_3$.

Môže byť tupouhlý trojuholník $D_1D_2D_3$ sieťou rovnostenného štvorstena?
Na papierovom modeli tupouhlého trojuholníka $D_1D_2D_3$ s tupým uhlom pri vrchole D_3 sa študenti presvedčia, že opäť nejde o model siete štvorstena.

Empiricky získané poznatky je potrebné zdôvodniť a vysvetliť. Ak označíme vnútorné uhly trojuholníka $D_1D_2D_3$ pri vrcholoch D_1, D_2 a D_3 postupne α, β a γ, určíme vnútorné uhly trojuholníkov BCD_1, ACD_2, ABD_3 a ABC, potom je myšlienka riešenia už naznačená v „prekladaní“ papierových modelov trojuholníkov.



Obr. 4: Sieť rovnostenného štvorstena

Ak je trojuholník $D_1D_2D_3$ *ostrouhlý*, potom pri stotožnení vrcholu D_1 s vrcholom D_3 pre uhly platí $\alpha + \beta > \gamma$ a **jediná možnosť** ako „zlepiť hrany “ pri vrchole B štvorstena je „vyjsť“ do priestoru.
Ak je trojuholník $D_1D_2D_3$ *pravouhlý*, potom pri stotožnení vrcholu D_1 s vrcholom D_3 pre uhly platí $\alpha + \beta = \gamma$ a trojuholníky „*zostávajú v rovine*“.

Ak je trojuholník $D_1D_2D_3$ *tupouhlý*, potom pri stotožnení vrcholu D_1 s vrcholom D_3 pre uhly platí $\alpha + \beta < \gamma$ a pri pokuse o „zlepenie hrán " *dochádza k deformácii*.

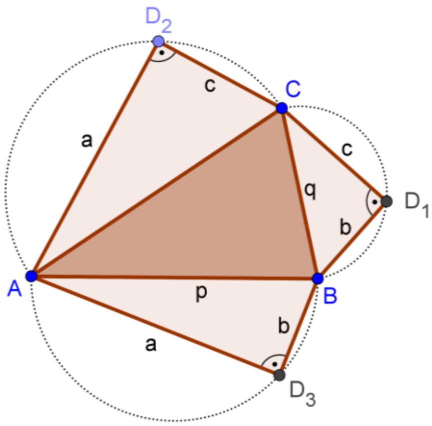
3 Sieť pravouhlého štvorstena

Uvažujeme o štvorstene $ABCD$, ktorého rovinné uhly stien pri vrchole D sú pravé. Sieť by mohla byť v tvare šesťuholníka $AD_3BD_1CD_2$ s pravými uhlami pri vrcholoch D_1, D_2, D_3 ako naznačuje obr. 5. Vrcholy D_1, D_2, D_3 ležia na odpovedajúcich Tálesových kružniciach.

Dokážeme upraviť šesťuholník $AD_3BD_1CD_2$ *na mnohouholník s menším počtom vrcholov* ?

Ľahko nahliadneme, že v prípade $|\angle D_2CD_1| = 180^\circ$ šesťuholník $AD_3BD_1CD_2$ sa redukuje na päťuholník $AD_3BD_1D_2$.

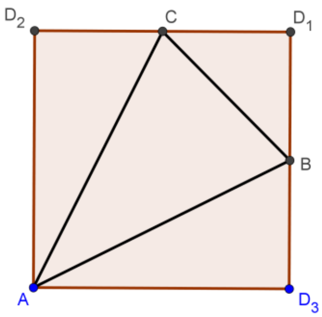
Ak súčasne uvažujeme o tom, že $|\angle D_1BD_3| = 180^\circ$, zredukuje sa päťuholník $AD_3BD_1D_2$ na štvoruholník $AD_3D_1D_2$.



Obr.5: Sieť pravouhlého štvorstena

Štvoruholník je obdĺžnik alebo štvorec?

Ak štvoruholník $AD_3D_1D_2$ je sieťou štvorstena, potom body B, C sú stredmi strán D_3D_1, D_1D_2 a súčasne $|AD_3| = |AD_2|$. Štvoruholník $AD_3D_1D_2$ musí byť štvorec.



Obr. 6: Sieť pravouhlého štvorstena v tvare štvorca

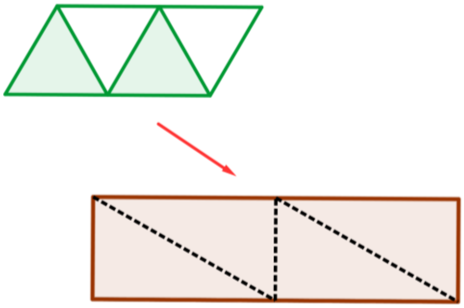
Môžeme upraviť štvorec $AD_3D_1D_2$ *na trojuholník* $D_1D_2D_3$?

Odpoveď je záporná. Trojuholník $D_1D_2D_3$ nemôže mať tri vnútorné uhly veľkosti 90°. Sieť pravouhlého štvorstena nemá tvar trojuholníka.

4 Atypické siete štvorstena

Analyzujme sieť pravidelného štvorstena v tvare kosodĺžnika.
Existuje sieť štvorstena v tvare pravouholníka?
Ak uvažujeme o kosodĺžniku, ktorý je sieťou pravidelného štvorstena na obr. 7.

„Zachováme“ rozdelenie obdĺžnika priečkami obdobne ako pri kosodĺžniku, vystrihneme z papiera model tohto obdĺžnika. Pri pokuse o vytvorenie modelu štvorstena však zistíme, že nejde o model siete.



Obr. 7: Analógia medzi sieťami štvorstena

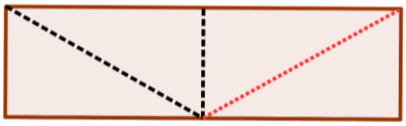
Prečo?

Vzhľadom k tomu, že papierový model obdĺžnika je osovo súmerný podľa strednej priečky, vrcholy sa stotožnia a nedostaneme priestorový útvar (štvorsten).

Ako zmeníme usporiadanie priečok na obdĺžniku?

Zdá sa, že vhodné bude spomínané osovo symetrické usporiadanie uhlopriečok menších obdĺžnikov ako naznačuje obr. 8.

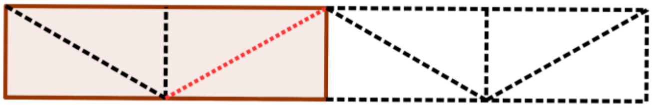
Pri pokuse o zloženie siete dostaneme útvar na obr. 9.



Obr. 8: Preusporiadanie uhlopriečok menších obdĺžnikov

Obr. 9: Model z papiera podľa obr. 8

Vidíme, že ide akoby o polovicu štvorstena, preto pôvodný obdĺžnik, resp. jeho papierový model, doplníme o symetrický obraz, kde na osi súmernosti leží kratšia strana tohto obdĺžnika.

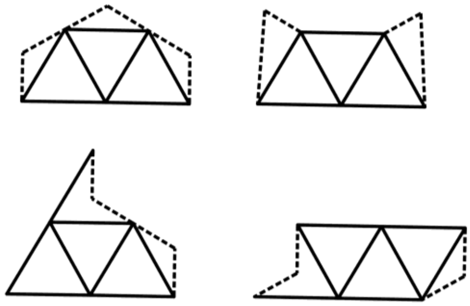


Obr. 10: Model atypickej siete, resp. obálky, štvorstena

Zložením dostaneme priestorový útvar, ktorý možno považovať za model štvorstena. Je otázne, či tento papierový model obdĺžnika možno považovať za model siete štvorstena.

Tým, že plášť a podstavy trojbokého ihlana „nerežeme “ po hranách, nejde o „štandardnú “ tzv. vrcholovo – hranovú sieť, resp. jej model. Mohli by sme hovoriť o **obálke**, resp. **obale** štvorstena. Takýchto obálok je samozrejme nekonečne mnoho. Na obr. 11 uvádzame zopár ukážok pre pravidelný štvorsten.

Záver



Obr. 11: Obálky pravidelného štvorstena

Myslíme si, že integrácia manipulačnej činnosti do výučby stereometrie prináša mnohé podnetné a motivačné prvky, ktorých vhodné didaktické využitie uľahčí študentom získavanie vedomostí. V tomto skromnom príspevku sme naznačili „objavovanie“ siete štvorstena, zamerali sme sa na niektoré zaujímavé štvorsteny a naznačili sme postup konkrétnej predmetnej manipulácie s modelom, či už siete štvorstena alebo samotného modelu telesa. Taktiež sa domnievame, že manipulácia s konkrétnymi modelmi vnáša experimentálnu činnosť do objaviteľského procesu, je motivujúca a umožňuje študentovi nadobudnúť poznatky prirodzenejšou cestou.

LITERATÚRA

[1] Šedivý, O. – Pavlovičová, G. – Rumanová, L. – Vallo, D.: *Stereometria. Umenie vidieť a predstavovať si priestor.* FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 271, Nitra 2007, ISBN: 978-80-8094-180-2

[2] Žilková, K.: *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2008. ISBN 978-80-223-2555-4

[3] Židek, O. O využití špeciálnych rezov na pravidelnom štvorstene. In. Acta Mathematica 10. FPV UK v Nitre, Prírodovedec č. 270, Nitra 2007, ISBN: 978-80-8094-181-9, str. 255-258

[4] Vankúš, P.: *Zbierka didaktických hier určených pre vyučovanie matematiky na druhom stupni základnej školy*, KEC FMFI UK, Bratislava 2010, ISBN 978-80-89186-61-7.

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
dvallo@ukf.sk

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
jzahorska@ukf.sk

RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
vduris@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

RÔZNE METÓDY RIEŠENIA JEDNEJ ÚLOHY ZO ŽIVOTA

KITTI VIDERMANOVÁ

ABSTRACT. One of the main goals of education in the school is to prepare students for the solving of problem in every-day life. In this article we describe one problem from life – we compare two offers of telephonic company - which of those is cheaper and better for the customers. We present different ways of the mathematical solutions of this problem.

Úvod

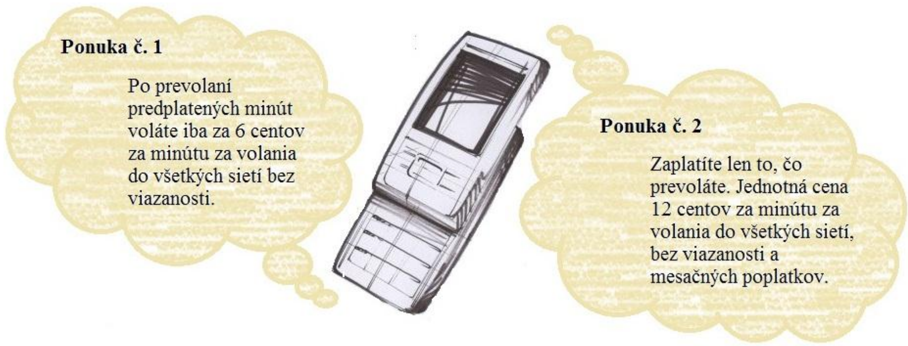
Pracovná skupina Európskej únie pre kľúčové kompetencie navrhla osem základných oblastí kľúčových kompetencií, ktoré sa majú rozvíjať aj v rámci vyučovacieho procesu v školách. Jednu z týchto oblastí tvorí ***Numerická gramotnosť a kompetencie v matematike, prírodných vedách, technike a technológiách***. Pod pojmom numerická gramotnosť sa rozumie „vedieť samostatne a efektívne spočítavať, odčítavať, násobiť a deliť čísla, určovať percentá a podiely prostredníctvom mentálnych (v hlave) alebo písomných výpočtov na riešenie problémov každodenného života (napr. plánovanie rodinného rozpočtu, nakupovanie, porovnávanie cien, vzdialeností, času, a pod.), prekonávať strach z čísel. (Turek, 2008, s. 204)

Aj na Slovensku Štátny vzdelávací program pre všetky stupne vzdelávania zdôrazňuje získanie schopnosti používať matematiku vo svojom budúcom živote – riešením matematických úloh prepojených na reálne situácie zo života žiakov a študentov.

Vybrať tematickú oblasť, ktorá je žiakom blízka a stretávajú sa s ňou často, nie je vôbec ľahké ani pre kreatívneho učiteľa. A nesmieme zabudnúť ani na motivovanie žiakov – aby sa učili niečo, s čím sa naozaj stretnú všetci, nielen tí, ktorí budú pokračovať vo svojom štúdium na technických odboroch a pod.

V našom príspevku ponúkame učiteľom námet v jednej oblasti, s ktorou - keďže veľa žiakov dostáva mobilné telefóny už počas návštevy základnej školy – sa stretávajú žiaci každý deň. Predstavujeme problém - reálnu situáciu zameranú na poplatky spojené s využívaním služieb mobilných operátorov a rôzne metódy riešenia tohto problému.

Ponuky spoločnosti (zadanie úlohy)



Obrázok 1: Ponuka dvoch rôznych služieb mobilného operátora

Príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 3/7340/09

Keď sme si podrobnejšie naštudovali podmienky, zistili sme nasledovné údaje:

	Ponuka č.1	**Ponuka č.2**
Mesačný poplatok	9,90 €	0 €
Počet predplatených minút	40 min.	0 min.
Cena po prevolaní predplatených minút	0,06 €	0,12 €

Hľadáme odpovede na nasledovné otázky:
a) Koľko minút musíme prevolať, aby boli pre nás obe ponuky finančne rovnocenné?
b) Pri koľkých prevolaných minútach bude výhodnejšia ponuka č.1?
c) Pri koľkých prevolaných minútach bude výhodnejšia ponuka č.2?

Metóda riešenia *pokus - omyl*

Postupne budeme počítať pridávaním prevolaných minút celkovú cenu za služby. Začneme pri 40 minútach, pretože je to počet predplatených minút v rámci ponuky č.1.

Počet prevolaných minút	Ponuka č.1	Ponuka č.2
40 minút	$9,90\ €$	$40\,.\,0,12\ € = 4,80\ €$
60 minút	$9,90\ € + 20\,.\,0,06\ € = 11,10\ €$	$60\,.\,0,12\ € = 7,20\ €$
80 minút	$9,90\ € + 40\,.\,0,06\ € = 12,30\ €$	$80\,.\,0,12\ € = 9,60\ €$
100 minút	$9,90\ € + 60\,.\,0,06\ € = 13,50\ €$	$100\,.\,0,12\ € = 12,00\ €$
110 minút	$9,90\ € + 70\,.\,0,06\ € = 14,10\ €$	$110\,.\,0,12\ € = 13,20\ €$
120 minút	$9,90\ € + 80\,.\,0,06\ € = 14,70\ €$	$120\,.\,0,12\ € = 14,40\ €$
130 minút	$9,90\ € + 90\,.\,0,06\ € = 15,30\ €$	$130\,.\,0,12\ € = 15,60\ €$

Vidíme, že od 1. minúty až po 120. minútu je výhodnejšia ponuka č.2. Pri 130 prevolaných minútach sa situácia zmenila – výhodnejšia sa stala ponuka č.1. Rovnaké poplatky teda získame medzi týmito dvoma údajmi – vyskúšajme stred, t.j. 125 minút.

125 minút	$9,90\ € + 85\,.\,0,06\ € = 15,00\ €$	$125\,.\,0,12\ € = 15,00\ €$

Poplatky pri 125 prevolaných minútach sa nám vyrovnali.

Už vieme odpovedať na dané otázky:
a) Obe ponuky budú pre nás finančne rovnocenné pri prevolaní 125 minút.
b) Ponuka č.1 je pre nás výhodnejšia, ak mesačne prevoláme viac ako 125 minút.
c) Výhodnejšia je ponuka č.2 , ak počet prevolaných minút neprekročí 125.

Riešenie pomocou rovníc

Označme počet prevolaných minút neznámou x a poplatok za ponuku č.1 y_1 a poplatok za ponuku č.2 y_2.

Ponuka č.1

Za 40 predplatených minút zaplatíme 9,90 €. Za 6 centov za minútu potom prevoláme $(x-40)$ minút (tento počet dáva zmysel iba pre $x \geq 40$). Vyjadríme poplatok $y_1 = 9,90 + 0,06.(x-40)$.

Ponuka č.2

V tejto ponuke každá z x minút stojí 12 centov. Poplatok $y_2 = 0,12.x$.

Hľadáme, pre aký počet minút bude poplatok pre obe ponuky rovnaký:

$$y_1 = y_2$$
$$9,90 + 0,06.(x-40) = 0,12.x$$
$$9,90 + 0,06x - 2,40 = 0,12x \qquad / -0,06x$$
$$7,50 = 0,06x$$
$$125 = x$$

Poplatok bude rovnaký pre 125 prevolaných minút. Pre istotu si to skontrolujeme skúškou:

Ponuka č.1

$125 = 40 + 85$.

Za 85 minút nad rámec predplatených minút zaplatíme $85.0,06\ € = 5,10\ €$. Spolu s mesačným poplatkom je to $9,90\ € + 5,10\ € = 15\ €$.

Ponuka č.2

Za 125 prevolaných minút zaplatíme $125.0,12\ € = 15\ €$.

Riešenie pomocou grafického znázornenia

Keď vyjadríme závislosť ceny od počtu minút, dostaneme vzťahy

$$y_1 = 9,90 + 0,06.(x-40) \qquad\qquad y_2 = 0,12.x$$

Zobrazíme si graf poplatku pre jednotlivé ponuky (obr. 1).

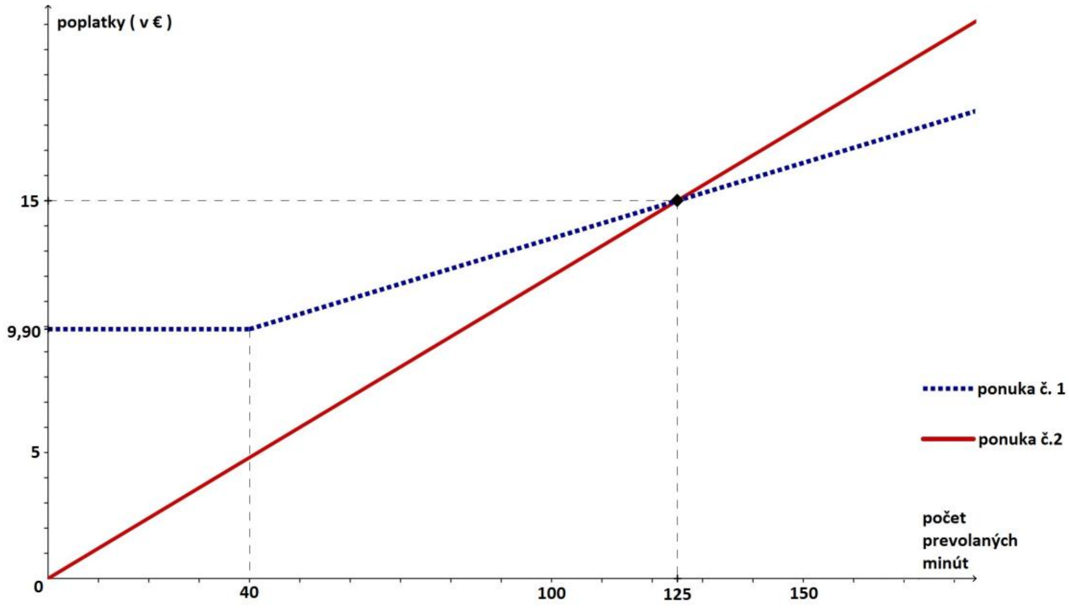
Ponuka č.1

Graf tejto ponuky sa skladá z dvoch častí – úsečky a polpriamky. Úsečka predstavuje konštantný mesačný poplatok za službu pri prevolaní od 0 do 40 minút. Pri prevolaní viac ako 40 minút sa k mesačnému poplatku pripočíta poplatok 6 centov za každú ďalšiu minútu, čo zobrazuje polpriamka (na obr. 1 začína v bode [40; 9,90], vyznačená bodkovane).

Ponuka č.2

Graf tejto ponuky predstavuje plná polpriamka začínajúca v bode [0; 0].

Výhodnejšia je tá ponuka, ktorej graf leží „nižšie". Grafy jednotlivých ponúk sa pretínajú v bode [125; 15]. To znamená, že pri prevolaní 125 minút zaplatíme v oboch prípadoch rovnakú sumu peňazí, a to 15 €.



Obrázok 2: Grafické znázornenie poplatkov v závislosti od počtu prevolaných minút

Pri prevolaní od 0 do 125 minút je výhodnejšia ponuka č. 2. Ak prevoláme mesačne viac ako 125 minút, je pre nás výhodnejšia ponuka č.1.

Záver

S danou témou sa stretávajú ľudia každý deň. Každý mobilný operátor má veľké reklamné tabule, lákajúce reklamné šoty v televízii, atď. Každú chvíľu ponúkajú výhodnejšiu ponuku pre zákazníkov, ale máloktorý z nich si dá námahu a naozaj prepočíta, či je pre neho tá najnovšia a najlákavejšia ponuka aj z finančného hľadiska tá najvýhodnejšia. Danú problematiku môžeme žiakom a študentom ponúknuť aj formou projektového vyučovania – nech si sami vyhľadajú ponuky všetkých mobilných operátorov a porovnajú, ktoré z nich sú výhodnejšie pre jednotlivcov, ktoré ponúkajú výhody pre rodiny. Medzi ďalšie dôvody, kvôli ktorým sa zákazník zaviaže k využívaniu služieb na dobu 18 až 24 mesiacov, patrí nový mobilný telefón. Zaujímavé by bolo aj porovnanie, či sa z finančného hľadiska neoplatí telefón kúpiť za hotovosť. V takej situácii sa nemusíme viazať na dlhé obdobie za poskytovanie niekedy aj takých služieb, ktoré nevyužívame.

LITERATÚRA

[1] Turek, I.: *Didaktika,* monografia, Bratislava, Iura Edition, 2008, 596 s., ISBN 978-80-8078-198-9.

[2] kol. autorov: *Štátny vzdelávací program, Matematika – príloha ISCED 2*, Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2010. Citované 20. 8. 2011. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf

[3] kol. autorov: *Štátny vzdelávací program, Matematika – príloha ISCED 3A*, Bratislava, Štátny pedagogický ústav, 2009. Citované 20. 8. 2011. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
SK – 94974 Nitra
e-mail: kvidermanova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

THE FUZZY NUMBER-VALUED UPPER INTEGRAL

PETER VRÁBEL – MARTA VRÁBELOVÁ

ABSTRACT. The upper integral defined on the lattice ordered group with values in the set of the fuzzy numbers and the integrable elements are defined in this paper.

Introduction

The notion of the upper integral and integrability with respect to this integral was introduced for real valued functions by Bourbaki [1] and Topsoe [10]. However both utilize special methods of constructing the integral and their definitions of an upper integral are not axiomatic. An axiomatic definition of the real-valued upper integral defined on the *l*-group and the notion of integrability were introduced in [9], [12]. Methods of integrability definition with respect to the upper integral resemble the measurability of sets with respect to an outer measure. Methods of unification measure theory and integral was developed by Riečan in [6], [7]. Extensions of Daniell integral in ordered spaces were studied in [4],[5],[11],[15]. We generalize axiomatic theory of upper integral for the fuzzy number-valued upper integral. The integrals of fuzzy set-valued mapping are studied in the last few years. These types of integrals have applications in mathematical economics and optimal control theory. The Henstock integral of fuzzy number-valued functions was investigated by Congxin Wu and Zengtai Gong in [16].

Notations and notions

We recall that the *l*-group is an Abelian lattice ordered group in which the following implication holds:

$$a \le b \quad \Rightarrow \quad a + c \le b + c\,.$$

In this paper we deal with the structure of fuzzy numbers.

Definition 1. The fuzzy number is any function $u : R \to [0,1]$, where R is the set of real numbers, satisfying the following conditions:

(1) there exists $x_0 \in R$ such that $u(x_0) = 1$,

(2) the $\alpha-$cut set $(u)^\alpha = \{x \in R; u(x) \ge \alpha\}$ is convex for every $\alpha \in (0,1]$,

(3) u is upper semi-continuous, i.e. any α - cut $(u)^\alpha$ is a closed subset of R,

(4) the support $\overline{\{x \in R; u(x) > 0\}}$ of the function u is a compact set.

The set of fuzzy numbers we denote E. The set of real numbers can be embedded into E; the real number z is identified with the fuzzy number $\bar{z} = \chi_{\{z\}}$, i.e. with the function

A.M.S. Subject Classification 2000: 28 C05, 03 E72

$$\chi_{\{z\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = z \\ 0, & x \neq z \,. \end{cases}$$

For the proof of the following lemma see [8].

Lemma 2. If $u \in E$ then

(a) $(u)^{\alpha}$ is a closed interval for every $\alpha \in (0,1]$,

(b) $(u)^{\alpha_2} \subset (u)^{\alpha_1}$ whenever $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$,

(c) if $\alpha_n \uparrow \alpha$, then $\bigcap_{n=1}^{\infty} (u)^{\alpha_n} = (u)^{\alpha}$.

Conversely, if system of intervals $\{(M)^{\alpha}; \alpha \in [0,1]\}$ fulfills (a) – (c), then there exists a unique $u \in E$ such that $(u)^{\alpha} = (M)^{\alpha}$ for every $\alpha \in (0,1]$.

The sum of fuzzy numbers *u*, *v* is a fuzzy number *z* such that

$$z = u + v \iff (z)^{\alpha} = (u)^{\alpha} + (v)^{\alpha}$$

for every $\alpha \in (0,1]$, where the sum of intervals is defined by equality

$$[a,\ b] + [c,\ d] = [a + c,\ b + d]\,.$$

The partial ordering on the set *E* is defined in the following way:

$$u \le v \iff (u^{\alpha}) \le (v)^{\alpha}$$

for every $\alpha \in (0,1]$, where

$$[a,\ b] \le [c,\ d] \iff (a \le c \ \wedge\ b \le d).$$

The Hausdorff distance *d* of closed possibly degenerate intervals is defined by equation:

$$d(\,[a,b],[c,d]\,) = \max\{|c-a|, |d-b|\}.$$

We can define the metric $D : E \times E \to [0, \infty)$,

$$D(u,v) = \sup\{d((u)^{\alpha}, (v)^{\alpha}); \alpha \in (0,1]\}.$$

Then (E, D) is a complete metric space. The following properties of the metric *D* can be found in [16]:

(i) $D(u+w, v+w) = D(u,v)$ for all $u, v, w \in E$,

(ii) $D(u+v,\ \mathrm{w}+z) \le D(u,\ w) + D(v,\ \mathrm{z})$ for all $u, v, w, z \in E$.

The inequality (ii) implies inequality:

(iii) $D(u+v, \overline{0}) \le D(u, \overline{0}) + D(v, \overline{0})$ for all $u, v \in E$,

(iv) $D(u+v, \mathrm{w}) \le D(u, w) + D(v, \overline{0})$ for all $u, v, w \in E$.

For the proof of the following lemma see analogical assertion in [14].

Lemma 3. The following properties hold:

(A) if $u_n \le u_{n+1} \le u,\ n = 1,2,\ldots,\ u_n, u \in E$ and $\lim_{n\to\infty} D(u_n, u) = 0$ then $\bigvee_{n=1}^{\infty} u_n = u$;

(B) if $u_n \uparrow u,\ \ u_n\ (n = 1,2,\ldots),\ u, w, z \in E$ and $z \ge u_n + w$ for every n then $z \ge u + w$.

The upper integral

Definition 4. Let X be an l-group. The upper integral is a mapping $I : X^+ \to E$ which fulfills the following conditions:

1) $I(0) = \overline{0}$,
2) if $x \le y$ then $I(x) \le I(y)$ for all $x, y \in X^+$,
3) $I(x + y) \le I(x) + I(y)$ for all $x, y \in X^+$,
4) if $x_n \uparrow x,\ x, x_n \in X^+ (n = 1,2,\ldots)$ then $\lim_{n\to\infty} D(I(x_n), I(x)) = 0$.

Example 5. Let (X, S, μ) be a measurable space, where S is a σ-ring of subsets of X and μ is a measure on S. For every simple function $f : X \to R$ of the form $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, where $\alpha_i \in R\ (i = 1,2,\ldots,n),\ E_i \in S,\ E_i \cap E_j = \varnothing\ (i \ne j),\ \mu(E_i) < \infty,$ we define integral $\int f d\mu$ by equality

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

Denote the set of all simple functions as $\mathcal{F}$. Let $\mathcal{F}_\sigma$ be the set of all measurable nonnegative functions $f : X \to R,\ f_n \uparrow f,\ f_n \in \mathcal{F}(n = 1,2,\ldots),\ \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$. Define

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \text{ Let } \mathcal{F}^* = \{f;\ \exists g \in \mathcal{F}_\sigma,\ f \le g\}.$$

Let I: $\mathcal{F}^* \to [0,\infty)$,

$$I(f) = \inf\{\int g d\mu;\ f \le g,\ g \in \mathcal{F}_\sigma\}.$$

Then I is upper integral (for proof see [3]).

Definition 6. Let X be an l-group and I be a upper integral on X. An element $x \in X^+$ is called I-integrable iff

$$I(a) = I(a \wedge x) + I(a - (a \wedge x))$$

for any $a \in X^+$.

Denote $X_I^+ = \{x \in X^+;\ x \text{ is } I\text{-integrable}\}$.

Theorem 7. (i) If $a \in X^+$ and $x \in X_I^+$ then $I(a + x) = I(a) + I(x)$.

(ii) If $x, y \in X_I^+$ then $x + y, x \wedge y \in X_I^+$. Furthermore, if $x, y \in X_I^+, y \le x$ then $x - y \in X_I^+$.
(iii) If $x, y \in X_I^+$ then $x \vee y \in X_I^+$.

Proof. (i) Let $a \in X^+$ and $x \in X_I^+$. Then from properties of *l*-group we get

$$I(a + x) = I((a + x) \wedge x) + I(a + x - (a + x) \wedge x) = I(x) + I(a).$$

(ii) If $a, x, y \in X, y \ge 0$ then

$$a \wedge x + ((a - a \wedge x) \wedge y) = a \wedge ((a \wedge x) + y) = a \wedge (a + y) \wedge (x + y) = a \wedge (x + y).$$

Let $x, y \in X_I^+, a \in X^+$. From the property 3) of the upper integral we have

$$\begin{aligned} I(a) &= I(a \wedge x) + I(a - a \wedge x) \\ &= I(a \wedge x) + I((a - a \wedge x) \wedge y) + I(a - a \wedge x - (a - a \wedge x) \wedge y) \\ &\ge I(a \wedge (x + y)) + I(a - a \wedge (x + y)) \ge I(a). \end{aligned}$$

Hence, $x + y \in X_I^+$. Similarly

$$\begin{aligned} I(a) &= I(a \wedge x) + I(a - a \wedge x) \\ &= I(a \wedge x \wedge y) + I(a \wedge x - a \wedge x \wedge y) + I(a - a \wedge x) \\ &\ge I(a \wedge (x \wedge y)) + I(a - a \wedge (x \wedge y)) \ge I(a). \end{aligned}$$

It follows $x \wedge y \in X_I^+$.
It holds $(a + y) \wedge x = a \wedge (x - y) + y$ in every *l*-group. Let $x, y \in X_I^+, y \le x, a \in X^+$.
By the equality $a + y - (a + y) \wedge x = 0 \vee (a + y - x) = a - a \wedge (x - y)$ and the assertion (i) we have

$$\begin{aligned} I(a) + I(y) = I(a + y) &= I((a + y) \wedge x) + I(a + y - (a + y) \wedge x) \\ &= I(a \wedge (x - y) + y) + I(a - a \wedge (x - y)) \\ &= I(y) + I(a \wedge (x - y)) + I(a - a \wedge (x - y)). \end{aligned}$$

Using the property (i) of the metric D we can write

$$\begin{aligned} &D(I(a), I(a \wedge (x - y)) + I(a - a \wedge (x - y))) \\ &= D(I(a) + I(y), I(a \wedge (x - y)) + I(a - a \wedge (x - y)) + I(y)) = 0 \end{aligned}$$

Because $D(x, y) = 0$ iff $x = y$ we get

$$I(a) = I(a \wedge (x - y)) + I(a - a \wedge (x - y)).$$

Hence, $x - y \in X_I^+$.
(iii) The assertion follows from the part (ii) and the equation $x \vee y = (x + y) - x \wedge y$. □

Theorem 8. Let $x_n \uparrow x$ $(x_n \downarrow x)$, $x_n \in X_I^+, n = 1, 2, \ldots, x \in X^+$. Then $x \in X_I^+$.

Proof. Let $x_n \uparrow x$, $x_n \in X_I^+, n = 1,2,\dots, x \in X^+$. It holds

$$a \wedge x_n \uparrow a \wedge x,\ I(a \wedge x_n) \le I(a \wedge x),\ n = 1,2,\dots,\ \lim_{n\to\infty} D\big(I(a \wedge x_n),\ I(a \wedge x)\big) = 0.$$

From Lemma 3 (A) we get $\bigvee_n I(a \wedge x_n) = I(a \wedge x)$.

For every $a \in X^+$ and any n we have

$$I(a) = I(a \wedge x_n) + I(a - a \wedge x_n) \ge I(a \wedge x_n) + I(a - a \wedge x),$$

so $I(a) \ge \bigvee_n I(a \wedge x_n) + I(a - a \wedge x)$ and

$$I(a) \ge I(a \wedge x) + I(a - a \wedge x) \ge I(a).$$

Hence, $x \in X_I^+$.

Let $x_n \downarrow x$, $x_n \in X_I^+, n = 1,2,\dots, x \in X^+$.

By property 4 of upper integral $\lim_{n\to\infty} D\big(I(a - a \wedge x_n),\ I(a - a \wedge x)\big) = 0$, because $a - a \wedge x_n \uparrow a - a \wedge x$. From Lemma 3 (A) we get $\bigvee_n I(a - a \wedge x_n) = I(a - a \wedge x)$.

For every $a \in X^+$ and any $n \in N$ we have

$$I(a) = I(a \wedge x_n) + I(a - a \wedge x_n) \ge I(a \wedge x) + I(a - a \wedge x_n),$$

so $I(a) \ge I(a \wedge x) + \bigvee_n I(a - a \wedge x_n)$ and

$$I(a) \ge I(a \wedge x) + I(a - a \wedge x) \ge I(a).$$

Hence, $x \in X_I^+$.

REFERENCES

[1] Bourbaki, N.: *Eléments de Mathematique, Livre VI, Integration,* Hermann, 1952, Chap. 1-5.

[2] Klir, G. J. – Yuan, B.: *Fuzzy set and fuzzy logics: theory and applications*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, 1995.

[3] Neubrunn, T.- Riečan, B.: *Miera a integrál*, Veda, Bratislava (1981).

[4] Riečan, B.: *On the continuous extension of monotone functional of some type (In Russian)*, Mat-fyz. Čas. 15(1965),116-125.

[5] Riečan, B.: *On the extension of operators with values in linear semiordered spaces (In Russian)*, Čas. Pěst. Mat. 93(1968), 459-471.

[6] Riečan, B.: *Regularity and approximation theorems for measures and integrals,* Mat. Čas. 24(1974), 209-224.

[7] Riečan, B.: *On the unified measure and integration theory,* Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comen. Math. 35(1979), 217-237.

[8] Riečan, B.-Neubrunn, T.: *Integral, measure and ordering,* Kluwer Academic Publisher, Dordrech(1997), ISBN 0-7923-4566-5.

[9] Šipoš, J.: *Integrals on lattice-ordered groups,* Math. Slovaca 27, 1977, 431-439.

[10] Topsoe, F.: *Topology and measure,* Lecture Notes in Math. Vol. 133, Springer-Verlag, Berlín, 1970.

[11] Volauf, P.: *Extension of maps with values in ordered spaces,* Math. Slovaca 30(1980), 351-361.

[12] Vrábel, P.: *Lower integral on lattice-ordered groups,* Zborník PF, Matematika 2, Nitra, 1982, 65-79.

[13] Vrábel, P.: *Integration on MV-algebras,* Tatra Mt. Math. Publ. 12, 1997, 21-25.

[14] Vrábel, P.-Vrábelová, M.: *The fuzzy number-valued lower integral,* Acta Mathematica 10, FPV UKF Nitra(2008).

[15] Vrábelová-Vonkomerová, M.: *On the extension of positive operators*. Math. Slovaca 1, 1981, No.3, 251- 262.

[16] Wu Congxin-Gong Zengtai: *On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions (I)*, Fuzzy Sets and Systems 120, 2001, 523-532.

Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra

e-mail: pvrabel@ukf.sk, mvrabelova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

NOVÉ UČEBNICE MATEMATIKY NA DRUHOM STUPNI ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

GABRIELA ŽÁČIKOVÁ

ABSTRACT. The new school reform has brought us, among other changes, the new textbooks in mathematics. In our article we evaluate new textbooks and also provides examples of teaching aids, which can be helpful in teaching mathematics.

Úvod

Nová školská reforma nám priniesla okrem iných zmien aj nové učebnice z matematiky. Každý si na ne môže spraviť vlastný názor. Pre niekoho sú vyhovujúce, iným učiteľom vyhovovať nemusia. V našom článku by sme chceli uviesť zopár zmien, ktoré nám priniesla reforma, zhodnotiť doterajšie učebnice a nové učebnice a uvádzame aj príklady učebných pomôcok, ktoré nám môžu byť pri vyučovaní matematiky nápomocné.

Školská reforma z roku 2008.

Od 1. augusta 2008 vstúpila do platnosti školská reforma, ktorá mala vplyv aj na výučbu matematiky. Do tohto obdobia sa výučba matematiky riadila podľa učebných osnov z roku 1997. V roku 2007 však naša vláda schválila nové učebné osnovy. Na základe nich sa skrátilo vyučovanie matematiky v piatom ročníku z 5 hodín týždenne na 3,5 hodín týždenne. V šiestom ročníku z 5 hodín týždenne na 4 hodiny týždenne. V siedmom ročníku z 5 hodín týždenne na 3,5 hodín týždenne. V ôsmom ročníku zostal stav hodín nezmenený a to na 4 hodiny za týždeň a nakoniec v deviatom ročníku z 5 hodín týždenne na 4 hodiny za týždeň. Môžeme si teda všimnúť, že nová školská reforma zredukovala týždenný počet vyučovacích hodín matematiky v priemere viac ako o jednu vyučovaciu hodinu týždenne, čo má aj negatívny vplyv na výučbu. Nehovoriac o tomto pre niekoho nezmyselnom znížení počtu hodín sa výrazne zmenilo aj to, čo sa má v jednotlivých ročníkoch vyučovať. Podľa školskej reformy z roku 2008 je vzdelávací obsah predmetu matematika rozdelený na päť tematických okruhov:

1. Čísla, premenná a počtové výkony s číslami
2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
3. Geometria a meranie
4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
5. Logika, dôvodenie, dôkazy

Okrem toho boli v reforme aj niektoré ďalšie zmeny a to konkrétne: piaty ročník sa v matematike stal iba opakovaním a rozširovaním poznatkov z prvého stupňa. Desatinné čísla a aj uhly boli presunuté až do šiesteho ročníka. Žiaci sa v siedmom ročníku majú učiť objem kocky a kvádra, kedy sa s ním v matematike stretávajú po prvý krát a pritom vo fyzike preberajú už v šiestom ročníku objem a takisto aj jednotky objemu potrebujú pri výpočte a zavádzaní hustoty látok.

Ďalej sú to percentá. Albert Einstein raz povedal: *„Najúžasnejší vynález na svete sú percentá!“* Deti sa s percentami stýkajú po celý život. Vôkol seba počujú:

„Na 100% je to pravda“

„Prácu si zvládol len na 50%“
„Skončil si s 0% výsledkom“
Percentá by mohli byť zavedené skôr ako až v siedmom ročníku. Niektorí učitelia dokonca využívajú aj známkovanie na základe percent a žiaci si vedia vypočítať pomocou percent na koľko percent boli, či neboli úspešní. Omnoho skôr by mohli byť zavedené aj záporné čísla. Žiak základnej školy sa s nimi stretáva po prvý krát až v ôsmom ročníku.

Staré učebnice.

S novou školskou reformou úzko súvisia učebnice. Prvý rok, samozrejme, učebnice ihneď neboli. Učitelia preto robili všetko možné aj nemožné a zháňali materiály z vlastných zdrojov, aby mohli pre žiakov vytvoriť kvalitnú hodinu. Ešte pred reformou boli na matematiku učebnice od kolektívu autorov O. Šedivý, S. Čeretková. Tieto učebnice boli na veľmi dobrej úrovni, pretože žiak, aj keď chýbal si vedel aj sám dobrať učivo a pochopiť ho, pretože každý tematický celok, či každá nová téma obsahuje vzorový príklad, ktorý je aj vyriešený. Okrem toho sú v nich aj neriešené príklady a autori postupujú od jednoduchého k zložitejšie. Dôležité poznatky, vzorce a tvrdenia sú farebne a výrazne vyznačené. Čiže aj keď v nej žiak hľadá nejaký vzorec, ľahko ho nájde.

Nové učebnice matematiky.

S novou reformou k nám prišli nové učebnice. A zatiaľ iba dve časti pre piaty a šiesty ročník a iba jedna časť pre siedmy ročník. Prvá časť pre ôsmy ročník je už „na ceste“. Na seminári s autormi sme sa dozvedeli, že rukopis je odovzdaný a v septembri by sme mali mať čerstvú ôsmackú učebnicu na našich stoloch v kabinete.
V apríli tohto roku sme mali možnosť zúčastniť sa semináru, ktorý bol zameraný na nové učebnice matematiky. Na seminári bol prítomní aj jeden z autorov nových učebníc – J. Žabka.

Aké sú? Podľa nás sú, samozrejme, iné ako staré učebnice. Ako povedali sami autori učebníc P. Černek a J. Žabka mali v úmysle netvoriť zdĺhavé tematické celky a preto učivo striedajú. Napr. v šiestackej učebnici v druhej časti sa striedajú *Uhly okolo nás* s *Násobením desatinnými číslami.* Nasledujú *Uhly v matematike,* potom *Delenie desatinnými číslami* a nakoniec *Meranie uhlov*. Niekedy je zbytočné skákať z témy do témy, no na druhej strane má učiteľ možnosť nejsť chronologicky podľa učebnice, ale prebrať najskôr jednu tému a potom ďalšiu ako bol zvyknutý doteraz.

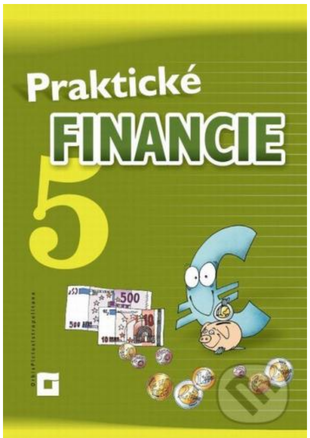
V nových učebniciach sú uvedené viaceré typy riešenia. Marienka by počítala takto, Jožko zasa inak a Janko ďalším spôsobom. Na jednej strane je to výborný nápad, aby sa žiak naučil príklad vypočítať rôznymi spôsobmi, ale na druhej strane to deti môže zaťažovať a to tak, že sa im ľahko môže stať, že zmiešajú prvý postup s tretím a dostanú zlý výsledok. Úspechom je už to, ak to dieťa vypočíta tým jediným spôsobom, ktorý si môže z daných riešení vybrať. Autori sa vyjadrili: „*Členenie a spôsob zoradenia kapitol je na samotnom učiteľovi. Sme presvedčení, že nie každému učiteľovi vyhovuje rovnaké poradie kapitol, resp. ich rozdeľovanie, či nerozdeľovanie. To je jeden z prínosov reformy (popri všetkých známych negatívach), že si učivo môžete upraviť, presunúť, doplniť a pod. tak, ako potrebujete, resp. ako vám to vyhovuje. My sme sa v učebnici priklonili k tomu modelu, ktorý považujeme za dobrý*.“ Samozrejme je na zvážení každého učiteľa, či pokladá knihu za dobrú, či za zlú. Je na každom z nás, či ju budeme používať alebo nie. Najlepším riešením by bolo, keby bol vyhlásený konkurz na ďalší typ učebníc a učitelia by si mohli vyberať. Ale aj v takom prípade si myslím, že by nosili viacero z nich, pretože v každej by sa dalo nájsť niečo dobré. Učebnice na hodinách pravidelne nevyužívame. Využívame väčšinou staré učebnice, ale občas použijeme aj príklady z nových učebníc.

Pomocník z matematiky. Praktické financie.

Pomocník z matematiky (Obrázok 1) je praktická pomôcka od autorov P. Bero a Z. Berová. Je to päť dvojíc pracovných listov, čiže pre každý ročník jedna dvojica. Ku každej dvojici existuje pracovný zošit pre učiteľa., čo je veľmi dobrá pomôcka, pretože tu sa dajú nájsť praktické rady a výsledky z pracovných zošitov.

Obrázok 1

Ďalšou pomôckou z rúk autorov P. Bero a Z. Berová, ktorí sa taktiež zúčastnili seminára sú Praktické financie (Obrázok 2). Táto veľmi pekne ilustrovaná pomôcka obsahuje veľké množstvo príkladov zameraných na životné situácie. Sú to úlohy o nakupovaní, vreckovom, o zľavách, energiách, sporení, poistení, pôžičkách, hypotékach, daniach, dôchodkoch, hazardných hrách... Žiaci už v školskom veku získajú informácie, o ktorých nemajú ani tušenie a naučia sa tak prakticky rozmýšľať. Na našej základnej škole v Bratislave máme bohaté skúsenosti s touto pomôckou a nevieme si ju vynachváliť. Žiaci z nej veľmi radi počítajú, dokonca s veľkou radosťou plnia domáce úlohy.



Obrázok 2

Záver

Téma učebníc všeobecne je veľmi diskutabilná. Či už to boli staré učebnice alebo nové učebnice. So zmenami, ktoré priniesla nová školská reforma, prišli aj nové učebnice matematiky, ktoré boli vytvorené podľa určitých predpisov. Niekomu sa páčia, iní zostali verní starým učebniciam, ktoré používajú častejšie ako tie nové. Myslíme si, že každý učiteľ aj žiak si v nich dokáže nájsť niečo, čo ho zaujme a pomôže v jeho práci, či štúdiu.

LITERATÚRA

[1] Šedivý, O. a kol: *Učebnice pre 5 – 9 ročník ZŠ*, Bratislava, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 2001

[2] Černek, P. – Žabka, J.: *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 1.časť,* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN 978-80-7158-977-8

[3] Černek, P. – Žabka, J.: *Matematika pre 5. ročník ZŠ, 2.časť,* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN 978-80-7158-980-4

[4] Černek, P. – Žabka, J.: *Matematika pre 6. ročník ZŠ, 1.časť,* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN 978-80-7158-988-6

[5] Černek, P. – Žabka, J.: *Matematika pre 6. ročník ZŠ, 2.časť,* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN 978-80-7158-990-7

[6] Černek, P. – Žabka, J.: *Matematika pre 7. ročník ZŠ, 1.časť,* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2010, ISBN 978-80-8120-051-9

[7] http://www.statpedu.sk/buxus/docs/pedagogicke_dokumenty_zakladne_skoly/osnovy/UO_matematika_5-9_ZS_pdf

Mgr. Gabriela Žáčiková
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: gabriela.zacikova@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

POZNÁMKA O JEDNOROZMERNOM NEOKLASICKOM MODELI PRE LINEÁRNO-KVADRATICKÚ APROXIMÁCIU V RBC-MODELOCH

MICHAL ZÁKOPČAN

ABSTRACT. The main goal of this article is a verification of assumptions from [1]. These assumptions are needed for validity of linear-quadratic approximation of a problem of optimal control in RBC-models. We work with one-dimensional neoclassical macroeconomic model. Only common conditions used in macroeconomic theory for utility function and production function are included in the article.

Úvod

Tento článok vychádza z práce [1]. Predstavuje jej aplikáciu na základný neoklasický jednorozmerný makroekonomický model bežne sa vyskytujúci v ekonomickej literatúre. V článku sa overuje splnenie predpokladov z práce [1] na tomto modeli pre všeobecne zadanú účelovú a produkčnú funkciu len s bežne uvádzanými makroekonomickými podmienkami na ne. Hoci sa v súčasnosti RBC (Real Business Cycle) modely kritizujú v súvislosti s ich neschopnosťou predpovedať vzniknutú celosvetovú krízu, neboli doteraz nahradené žiadnymi inými vhodnejšími modelmi.
Matematicky predstavuje RBC model úlohu dynamického programovania na ne-konečnom časovom horizonte. Nech $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $x_0 \subseteq X$, $f^0 \in C^3(X \times U, \mathbb{R})$, F je lineárna funkcia, zapísaná v tvare $F = Ax + Bu + c$, a $\beta \in (0,1)$. Pod pojmom prípustné riadenie a jeho odozva budeme rozumieť pár postupností $(\{u_t\}_{t=0}^{\infty}, \{x_t\}_{t=0}^{\infty})$ spĺňajúcich:

$$x_{t+1} = F(x_t, u_t) \text{ pre } t = 0,1, \ldots,$$
$$x_t \in X,$$
$$u_t \in U,$$

také, že rad:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

konverguje. Označíme $\Phi(\beta, x_0)$ množinu všetkých prípustných riadení a ich odoziev.
Prípustný pár $(\{\hat{u}_t\}_{t=0}^{\infty}, \{\hat{x}_t\}_{t=0}^{\infty}) \in \Phi(\beta, x_0)$ sa nazýva optimálny, ak:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(\hat{x}_t, \hat{u}_t) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f^0(x_t, u_t)$$

platí pre všetky $(\{u_t\}_{t=0}^{\infty}, \{x_t\}_{t=0}^{\infty}) \in \Phi(\beta, x_0)$.
Pre uvedenú úlohu platia nutné podmienky optimality:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= F(x_t, u_t) \\ 0^T &= Df_u^0(x_t, u_t) + \beta\psi_{t+1}^T DF_u(x_t, u_t), \\ \psi_t^T &= Df_x^0(x_t, u_t) + \beta\psi_{t+1}^T DF_x(x_t, u_t), \end{aligned} \qquad (1)$$

za predpokladu regulárnosti matice $DF_x(x_t, u_t)$ pre každé $t = 0,1, \dots$ (viď. [3]). V našom prípade $DF_x(x_t, u_t) = A$ pre každé $t = 0,1, \dots$, preto postačí požadovať, aby bola regulárna matica A. Premenná ψ je adjungovaná premenná a ekonomicky sa dá interpretovať ako tieňová cena. Riadenie a jeho odozva, ktoré spĺňajú nutné podmienky optimality budeme nazývať extremálne riadenie a jeho odozva alebo v skratke extremálny pár. Ak optimálne riadenie existuje, musí spĺňať nutné podmienky optimality a preto je zároveň aj extremálne. Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí.
Rovnovážnou trojicou budeme rozumieť usporiadanú trojicu $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$, ktorá vyhovuje sústave rovníc odvodenej z nutných podmienok optimality (sústava (1)):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A\bar{x} + B\bar{u} + c, \\ 0 &= Df_u^0(\bar{x}, \bar{u})^T + \beta B^T \bar{\psi}, \\ \bar{\psi} &= Df_x^0(\bar{x}, \bar{u})^T + \beta A^T \bar{\psi}. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnovážny bod bude potom dvojica $(\bar{x}, \bar{u})$. Tu je potrebné si uvedomiť, že rovnovážny bod je funkciou premennej β, čo budeme v ďalšom značiť dolným indexom β pri jednotlivých premenných, či funkčných hodnotách.
V ekonomickej praxi sa riešia úlohy tohto typu zväčša numericky tak, že sa účelová funkcia f^0 aproximuje Taylorovým polynómom druhého rádu v okolí pevného bodu, čím sa prejde od zložitejšej pôvodnej úlohy k jednoduchšej úlohe lineárno-kvadratického programovania (viď. [5]).
V práci [1] sa vychádza z predpokladov stanovených pre limitný prípad $\beta = 1$. Na základe týchto predpokladov sa potom dokazujú tvrdenia aj pre β blízke 1. V makroekonomickom modeli β reprezentuje diskontný faktor a v ekonomickej praxi sa obyčajne volí $\beta = 0{,}99$ alebo $\beta = 0{,}9$. Za platnosti týchto predpokladov sa v spomínanej práci ukazuje oprávnenosť aproximácie účelovej funkcie kvadratickou funkciou pri zachovaní lineárnych podmienok na stav. Ďalej tiež, že pre úlohu s pôvodnou účelovou funkciou zúženú na okolie rovnovážneho bodu existuje jediné optimálne riadenie a jeho odozva, rovné extremálnemu riadeniu a jeho odozve, a vzťah preň sa líši od optimálneho riadenia pre lineárno-kvadratickú úlohu len v členoch vyššieho ako prvého rádu. Navyše sa hodnotové funkcie líšia len v členoch vyššieho ako druhého rádu, pričom obe optimálne riadenia a ich odozvy konvergujú k rovnovážnemu bodu. Ten je pre obe úlohy rovnaký.

Formulácia neoklasického jednorozmerného modelu

V úvode spomínaný deterministický model sa zaoberá prerozdeľovaním zdrojov v ekonomike pozostávajúcej z mnoho identických, nekonečne dlho žijúcich domácností. Je to príklad ekonomiky, v ktorej je prerozdelenie zdrojov v dokonale konkurenčnom prostredí identické s tým, ktoré určí sociálny plánovač pri maximalizovaní celoživotného úžitku domácností. Predpokladáme v ňom, že domácnosti majú k dispozícii jednu jednotku produktívneho času a k_0 produktívneho kapitálu, ktorý amortizuje konštantnou mierou $0 < \delta < 1$. Pretože sú všetky domácnosti identické, môžeme vybrať jednu reprezentatívnu domácnosť.
V každej perióde t uvažujeme len jediný tovar (ide o jednosektorový model rastu) produkovaný s využitím voľne dostupnej technológie a kapitálu:

$$y_t = f(k_t), \tag{3}$$

kde $f(k)$ je produkčná funkcia, o ktorej sa zvyčajne predpokladá, že je dvakrát spojite diferencovateľná, ostro rastúca a rýdzokonkávna.
V každej perióde sa výstup rozdeľuje medzi bežnú spotrebu c_t a hrubé investície i_t :

$$y_t = c_t + i_t. \tag{4}$$

Kapitál sa riadi tzv. zákonom zachovania kapitálu:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t. \tag{5}$$

Úlohou sociálneho plánovača je maximalizovať celoživotný úžitok domácností:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t),$$

kde $\beta \in (0,1)$ je diskontný faktor a funkcia $U: (0,\infty) \to (0,\infty)$ je dvakrát spojite diferencovateľná, ostro rastúca a rýdzokonkávna, pričom platí:

$$\lim_{c\to 0} U'(c) = \infty.$$

Po vyjadrení c_t zo vzťahu (4) pri využití (3) dostávame úlohu dynamického programovania na nekonečnom časovom horizonte:

$$\max_{\{i_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - i_t),$$
$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t,$$
$$k_0 \text{ - dané.}$$

V tejto úlohe vystupuje i ako riadiaca premenná, kapitál k je stavovou premennou. Účelovou funkciou bude $f^0(k,i) = U(f(k) - i)$.

Overenie predpokladov

Táto časť pozostáva z overenia predpokladov z práce [1] na modeli prezentovanom v predošlej časti.
Ako bolo spomínané vyššie, nutné podmienky optimality platia len za predpokladu regulárnosti matice A. Pretože z (5) máme $A = 1-\delta$, uvedený predpoklad je v tomto modeli overený.
Ďalším predpokladom (v práci [1] označovanom **Predpoklad Q1**) je existencia rovnovážnej trojice úlohy pre $\beta = 1$. Poďme ju nájsť. Rovnovážna trojica musí vyhovovať sústave (2):

$$\begin{aligned} \bar{k} &= (1-\delta)\bar{k} + \bar{\imath}, \\ 0 &= -U'(\bar{c}) + \beta\bar{\psi}, \\ \bar{\psi} &= U'(\bar{c})f'(\bar{k}) + \beta(1-\delta)\bar{\psi}, \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\bar{c} = f(\bar{k}) - \bar{\imath}$. Môžeme si všimnúť, že bod $(0,0,0)$ nevyhovuje tejto sústave. Z druhej a tretej rovnice (6) dostávame:

$$f'(\bar{k}) = (1 - \beta + \beta\delta)/\beta. \tag{7}$$

Odtiaľ:

$$\bar{k} = (f')^{-1}[(1 - \beta + \beta\delta)/\beta]. \tag{8}$$

Z (8) potom dostávame vzťah pre riadiacu premennú:

$$\bar{\imath} = \delta\bar{k}. \tag{9}$$

Pre adjungovanú premennú platí:

$$\bar{\psi} = U'(\bar{c})/\beta. \tag{10}$$

Našli sme teda rovnovážnu trojicu pre ľubovoľné β, z čoho vyplýva, že pre $\beta = 1$ rovnovážna trojica (ďalej značená so spodným indexom 1) existuje, stačí položiť $\beta = 1$ vo vzťahoch (8), (9), (10).
Ďalej treba ukázať, že Hessova matica účelovej funkcie f^0 je v pevnom bode $(\bar{k}_1, \bar{\imath}_1)$ záporne definitná (**Predpoklad Q3**). V nasledujúcom ukážeme, že je záporne definitná v bode $(\bar{k}_\beta, \bar{\imath}_\beta)$ pre akékoľvek β vrátane $\beta = 1$. Vypočítajme $f_{kk}^0, f_{ki}^0, f_{ii}^0$ v tomto bode:

$$P_\beta = f_{kk}^0(\bar{k}_\beta, \bar{\imath}_\beta) = U''(\bar{c}_\beta)[f'(\bar{k}_\beta)]^2 + U'(\bar{c}_\beta)f''(\bar{k}_\beta),$$
$$Q_\beta = f_{ki}^0(\bar{k}_\beta, \bar{\imath}_\beta) = -U''(\bar{c}_\beta)f'(\bar{k}_\beta),$$
$$R_\beta = f_{ii}^0(\bar{k}_\beta, \bar{\imath}_\beta) = U''(\bar{c}_\beta).$$

Z predpokladov stanovených na U a f v predošlej časti vyplýva, že $P_\beta < 0$, $R_\beta < 0$ a $P_\beta R_\beta - Q_\beta^2 > 0$, čo dokazuje, že Hessova matica účelovej funkcie f^0 je v bode $(\bar{k}_\beta, \bar{\imath}_\beta)$ záporne definitná pre ľubovoľné β.
Predpoklad Q2 z práce [1] nebudeme bližšie špecifikovať, pretože sa dá zabezpečiť splnením predpokladu regulárnosti matice $I - A$ a **Predpokladu Q3** (viď. [4]). V našom prípade je číslo $I - A = \delta$ rôzne od nuly pre ľubovoľné δ, z čoho vyplýva, že **Predpoklad Q2** je overený. Navyše aj $I - \beta A = 1 - \beta + \beta\delta \neq 0$ pre všetky $\beta \in (0,1)$. Je to predpoklad, ktorý sa vyžaduje v teórii z práce [1].
Označme $\boldsymbol{P}_\beta = P_\beta - Q_\beta^2/R_\beta$, $\boldsymbol{B}_\beta = -B^2/R_\beta$ a $\boldsymbol{A}_\beta = A - BQ_\beta/R_\beta$. Ďalším predpokladom, ktorý treba overiť je regulárnosť matice $\boldsymbol{A}_1$. Overme to. $\boldsymbol{A}_\beta = 1 - \delta + f'(\bar{k}_\beta)$, čo je podľa (7) rovné $1/\beta$ a teda nenulové pre akékoľvek β vrátane $\beta = 1$.
Predposledný predpoklad je stabilizovateľnosť dvojice matíc (A, B), v našom prípade dvojice čísel $(1 - \delta, 1)$, ktorý je splnený triviálne (viď. [1], resp. [2]).
Pred overením posledného predpokladu je nutné spomenúť ďalšiu teóriu z práce [1]. Dá sa ukázať, že sústavu diferenčných rovníc (1) možno vďaka predpokladu regularity matice $\boldsymbol{A}_\beta$ zredukovať na sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\delta x_{t+1} = \frac{A_\beta^2 - B_\beta P_\beta}{A_\beta}\delta x_t + \frac{B_\beta}{A_\beta}\delta\psi_t + \text{č. v. r.},$$
$$\delta\psi_{t+1} = -\frac{P_\beta}{\beta A_\beta}\delta x_t + \frac{1}{\beta A_\beta}\delta\psi_t + \text{č. v. r.}, \tag{11}$$

kde $\delta x_t = x_t - \bar{x}_\beta, \delta\psi_t = \psi_t - \bar{\psi}_\beta$ a skratka č. v. r. znamená členy vyššieho rádu, teda zvyšok Taylorovho rozvoja. V tejto teórii hrá rozhodujúcu úlohu linearizácia systému (11) v pevnom bode, tj. matica:

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \frac{A_\beta^2 - B_\beta P_\beta}{A_\beta} & \frac{B_\beta}{A_\beta} \\ -\frac{P_\beta}{\beta A_\beta} & \frac{1}{\beta A_\beta} \end{pmatrix},$$

ktorej jedna vlastná hodnota leží vnútri a druhá zvonka jednotkovej kružnice pre β dostatočne blízke 1.

Teraz môžeme prejsť k poslednému predpokladu. Ten sa dá zredukovať na podmienku výberu β len z takého (dostatočne malého) okolia bodu 1, aby najmenšia z absolútnych hodnôt vlastných čísel matice M_β ležiacich zvonka jednotkovej kružnice bola väčšia ako $1/\beta$. V nasledujúcom pre príklad neoklasického modelu ukážeme, že obe vlastné hodnoty matice M_β sú kladné reálne čísla, obe ležia mimo jednotkovej kružnice, pričom jedna z nich je menšia ako 1 a druhá väčšia ako $1/\beta$. Už predtým sme ukázali, že $\boldsymbol{A}_\beta = 1/\beta$. Teda $\boldsymbol{M}_\beta$ môžeme vyjadriť ako:

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} - \beta \boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta & \beta \boldsymbol{B}_\beta \\ -\boldsymbol{P}_\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajme vlastné čísla tejto matice, dostaneme:

$$\lambda_\beta^{1,2} = \frac{\frac{1+\beta}{\beta} - \beta \boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta \pm \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2 - 2(1+\beta)\boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta + \beta^2 \boldsymbol{B}_\beta^2 \boldsymbol{P}_\beta^2}}{2}.$$

Ľahko zistíme, že $\boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta < 0$ pre všetky $\beta \in (0,1)$. Preto je výraz pod odmocninou kladný a vlastné hodnoty sú reálne čísla, obe väčšie ako nula. Ďalej platí, že $\beta\lambda_\beta^2 = 1/\lambda_\beta^1$, kde λ_β^1 budeme označovať menšiu z vlastných hodnôt. Pretože $4\beta \boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta < 0$, dostávame:

$$\left(\frac{1-\beta}{\beta} - \beta \boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta\right)^2 < \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2 - 2(1+\beta)\boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta + \beta^2 \boldsymbol{B}_\beta^2 \boldsymbol{P}_\beta^2,$$
$$\frac{1+\beta}{\beta} - \beta \boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta - 2 < \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2 - 2(1+\beta)\boldsymbol{B}_\beta \boldsymbol{P}_\beta + \beta^2 \boldsymbol{B}_\beta^2 \boldsymbol{P}_\beta^2},$$

z čoho hneď $\lambda_\beta^1 < 1$. Keďže $\beta\lambda_\beta^2 = 1/\lambda_\beta^1$, tak $\lambda_\beta^2 > 1/\beta > 1$ pre všetky $\beta \in (0,1)$.

Aj posledný predpoklad z práce [1] je teda overený.

Je ešte potrebné povedať, že v práci [1] sa predpokladá, že účelová funkcia je trikrát spojite diferencovateľná, no táto silnejšia podmienka je obyčajne taktiež splnená.

Záver

Podarilo sa nám overiť splnenie všetkých predpokladov obsiahnutých v práci [1] na jednorozmernom neoklasickom makroekonomickom modeli s bežne zadanými podmienkami na úžitkovú a produkčnú funkciu. Tieto predpoklady predstavujú podmienky, ktoré je nutné splniť, aby bolo možné plne zdôvodniť oprávnenosť aproximácie účelovej funkcie ťažiskovej úlohy v práci [1], na ktorú vedú RBC-modely, Taylorovým polynómom druhého rádu na okolí pevného bodu a tým umožniť jej riešenie v jednoduchšej lineárno-kvadratickej forme. Ukázalo sa, že nastavenia neoklasického modelu sú urobené tak, že všetky predpoklady sú splnené nielen pre diskontný faktor β blízky jednotke, ale dokonca pre všetky β z intervalu $(0,1)$. Z toho titulu sa vlastne nemusíme obmedzovať na bezprostredné okolie 1 a v prípade neoklasického modelu platia uzávery z práce [1] pre akékoľvek $\beta \in (0,1)$. Hoci toto zistenie nie je silným matematickým výsledkom, predstavuje v pomerne širokom aplikačnom spektre jednorozmerných makroekonomických úloh pozitívne nahliadnutie na teoretické závery urobené v [1].

LITERATÚRA

[1] Zákopčan, M.: *Matematické spracovanie lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch*, Dizertačná práca, FMFI UK, Bratislava, 2009

[2] Kučera, V.: *The Discrete Riccati Equation of Optimal Control*, Kybernetika 8/5, 1972

[3] Halická, M., Brunovský, P., Jurča, P.: *Optimálne riadenie (Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách)*, Bratislava, EPOS, 2009, ISBN 80-8057-793-3

[4] Balla, V.: *Viacrozmerné úlohy RBC-typu*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2010

[5] Cooley, T. F.: *Frontiers of Business Cycle Research*, New Jersey, Princeton University Press, 1995

Mgr. Michal Zákopčan, PhD.
Oddelenie matematiky Ústavu informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita
Ilkovičova 3
SK – 812 19 Bratislava
e-mail: michal.zakopcan@stuba.sk

Posterová sekcia

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 14

SPÔSOBY MOTIVÁCIE VO VYUČOVANÍ

BENICKÁ PATRÍCIA, HALAMA FILIP, KUREKOVÁ ZUZANA

Motivácia

Ján Amos Komenský vo svojom diele Didactica Magna (1627-1638) napísal o motivácii nasledovné:

"*Aby sa deti mohli učiť vážnym veciam, ktoré im niekedy majú vážne prospievať a to učiť sa ľahko a príjemne, musíme spájať príjemné s užitočným, aby sa tak detská myseľ dala viesť ako nejakým lákadlom a doviesť tam, kam chceme.*"

Rovnako tak viacerí didaktici uvádzajú symbolickú rovnicu: výkon = schopnosti x motivácia

Ak žiak nemá žiaden výkon, jeho motivácia na vyučovaní je nulová.

Motivácia zo psychologického hľadiska je proces, ktorý aktivuje ľudské správanie a dáva mu účel a smer.

Je to vnútorná sila, ktorá vedie jedinca k dosiahnutiu osobných a organizačných cieľov.

V didaktike je motivácia chápaná ako činnosť, pomocou ktorej sa u jednotlivca (žiaka) vzbudzuje záujem o učenie, koncentruje sa jeho pozornosť.

Aby učiteľ vo svojej snahe zaujať žiaka neskĺzol do tzv. rutiny, pre inšpiráciu ponúkame nasledujúce spôsoby motivácie, ktoré je možné počas vyučovacieho procesu použiť: motivačné video, hra, historické poznámky, historický pohľad na danú problematiku, zábavné a zaujímavé úlohy, úlohy zo života a bežnej praxe, projektové vyučovanie.

PaedDr. Patricia Benická
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: patricia.benicka@ukf.sk

Ing. Zuzana Kureková
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: zuzana.kurekova@ukf.sk

Mgr. Filip Halama
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: filip.halama@ukf.sk

Príloha

22. – 23. september 2011
Nitra

PROGRAM

22. septembra 2011 – štvrtok

8^{00} hod. – 8^{50} hod.
Prezentácia účastníkov konferencie: Katedra matematiky
FPV UKF v Nitre,
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Blok C, II. poschodie

Plenárne prednášky (22. septembra 2011)

Miestnosť C 212

Otvorenie konferencie:

9^{00} hod.
prof. RNDr. Ľubomír Zelenický, CSc. – dekan FPV UKF v Nitre
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. – vedúci Katedry matematiky FPV UKF v Nitre

Vystúpia:

9^{15} hod. – 10^{15} hod.
Doc. RNDr. Štefan Solčan, PhD. - FMFI UK Bratislava
O KOLINEÁRNOSTI BODOV A ZBIEHAVOSTI (KONKURENTNOSTI) PRIAMOK

10^{15} hod. – 11^{15} hod.
Dr. Maciej Major - Institute of Mathematics, Pedagogical University of Cracow
CONTROL AND EVALUATION OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

ROKOVANIA V SEKCIÁCH

Sekcia 1 *Miestnosť C 212*
Rokovanie vedie : *PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.*

12^{30} hod. – 12^{45} hod.
ALENA PRÍDAVKOVÁ
ROZVÍJANIE MATEMATICKÝCH KOMPETENCIÍ BUDÚCICH UČITEĽOV PRIMÁRNEJ ŠKOLY V OBLASTI PRÁCE S NADANÝMI ŽIAKMI

12^{45} hod. – 13^{00} hod.
STANISLAVA BELÁKOVÁ
SYMBOLIC MATH GUIDE – MATEMATICKÝ SOFTVÉR GRAFICKEJ KALKULAČKY TI-89 VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY NA SŠ

13^{00} hod. – 13^{15} hod.
JOANNA MAJOR
REMARKS CONCERNING SOLVING NON-STANDARD TASKS BY PUPILS

13^{15} hod. – 13^{30} hod.
ADAM CZAPLIŃSKI, JOANNA MAJOR, MACIEJ MAJOR
THE RESEARCH ON SOLVING BY PUPILS MATHEMATICAL TASKS

13^{30} hod. – 13^{45} hod.
IVETA SCHOLTZOVÁ, MAREK MOKRIŠ
MATEMATIKA V PRIJÍMACOM KONANÍ NA MAGISTERSKÝ STUPEŇ ŠTÚDIA NA PEDAGOGICKEJ FAKULTE PU V PREŠOVE – POHĽAD PRVÝ

13^{45} hod. – 14^{00} hod.
ZOLTÁN FEHÉR
NOVÉ MOŽNOSTI MOTIVÁCIE – SKÚSENOSTI S POUŽÍVANÍM SYSTÉMU WEBWORK

14^{00} hod. – 14^{15} hod.
TOMÁŠ LENGYELFALUSY, DANA LENGYELFALUSYOVÁ
UČEBNICA, Z KTOREJ JE RADOSŤ ŠTUDOVAŤ MATEMATIKU

14^{15} hod. – 14^{30} hod.
LÝDIA KONTROVÁ
PARTICIPÁCIA MIND MAPPINGU PRI ROZVÍJANÍ HOLISTICKÉHO CHÁPANIA MATEMATICKÝCH POJMOV

14^{30}hod. – 14^{45} hod. COFFEE BREAK

14^{45}hod. – 15^{00} hod.
MÁRIA GABAJOVÁ
UČEBNÉ ŠTÝLY A VYUČOVANIE GEOMETRIE U MLADŠÍCH ŽIAKOV

15^{00}hod. – 15^{15} hod.
VIERA ČERŇANOVÁ
VYUŽITIE SKALÁRNEHO SÚČINU VEKTOROV NA FORMOVANIE A UPEVŇOVANIE ARGUMENTAČNÝCH ZRUČNOSTÍ ŽIAKOV

15^{15}hod. – 15^{30} hod.
VLADIMÍRA LAŠŠÁKOVÁ, PETER VANKÚŠ
VÝCHOVNÝ ASPEKT KONTEXTOVÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH

15^{30}hod. – 15^{45} hod.
OLEG PALUMBÍNY
ALTERNATÍVNE ZAVEDENIE NIEKTORÝCH POJMOV MATEMATICKEJ ANALÝZY VO FYZIKE

15^{45}hod. – 16^{00} hod.
OLEG PALUMBÍNY
ARITMETICKÉ OPERÁCIE S PRIRODZENÝMI ČÍSLAMI VYJADRENÝMI POMOCOU RÍMSKYCH ČÍSLIC

Sekcia 2 *Miestnosť C 217*
Rokovanie vedie : *doc. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.*

12^{30} hod. – 12^{45} hod.
DARINA STACHOVÁ
APLIKÁCIE FOURIEROVÝCH RADOV NA RIEŠENIE ÚLOH V DYNAMIKE STAVEBNÝCH KONŠTRUKCIÍ

12^{45} hod. – 13^{00} hod.
JAROSLAVA ŠKORÍKOVÁ
SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR IMPULSIVE SYSTEMS BOUNDED ON THE ENTIRE REAL AXIS

13^{00} hod. – 13^{15} hod.
PETER VRÁBEL – MARTA VRÁBELOVÁ
THE FUZZY NUMBER-VALUED UPPER INTEGRAL

13^{15} hod. – 13^{30} hod.
MICHAL ZÁKOPČAN
POZNÁMKA O JEDNOROZMERNOM NEOKLASICKOM MODELI PRE LINEÁRNO-KVADRATICKÚ APROXIMÁCIU V RBC-MODELOCH

13^{30} hod. – 13^{45} hod.
ANTONIO BOCCUTO, XENOFON DIMITRIOU
IDEAL EXHAUSTIVENESS AND LIMIT THEOREMS FOR (ℓ)-GROUP-VALUED MEASURES

13^{45} hod. – 14^{00} hod.
MILAN JASEM
ON CONVERGENCE WITH A FIXED REGULATOR IN RIESZ GROUP

13^{45}hod. – 14^{15} hod. COFFEE BREAK

Sekcia 3	*Miestnosť C 217*
Rokovanie vedie :	*RNDr. Dušan Vallo, PhD.*

14^{15} hod. – 14^{30} hod.
DANA ORSZÁGHOVÁ
OBSAHOVÁ NÁPLŇ A ANALÝZA ŠTUDIJNÝCH VÝSLEDKOV Z MATEMATIKY V EKONOMICKÝCH ŠTUDIJNÝCH PROGRAMOCH

14^{30} hod. – 14^{45} hod.
ANDREAS ULOVEC
AS MUCH AS POSSIBLE – EXTREME VALUE TASKS IN GEOMETRY

14^{45}hod. – 15^{00} hod.
EVA BARCÍKOVÁ, JÁN ŠUNDERLÍK
OBJAVOVANIE ELIPSY MANIPULÁCIOU S KRUŽNICAMI

15^{00}hod. – 15^{15} hod.
GABRIELA ŽÁČIKOVÁ
NOVÉ UČEBNICE MATEMATIKY NA DRUHOM STUPNI ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

15^{15}hod. – 15^{30} hod.
RENÁTA KUNOVÁ
UČÍME TVORIVOSTI A VZÁJOMNEJ KOOPERÁCII

15^{30}hod. – 15^{45} hod.
MICHAELA KLEPANCOVÁ, MAREK VARGA
PARADOXY ČI CHYBY?

15^{45}hod. – 16^{00} hod.
MIROSLAVA SOVIČOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ
MODULY ĎALŠIEHO VZDELÁVANIA UČITEĽOV V PROJEKTE PRIMAS

23. septembra 2011 - piatok

Rokovania v sekciách

Sekcia 1	*Miestnosť C 212*
Rokovanie vedie :	*RNDr. Dušan Vallo, PhD.*

8^{00} hod. – 8^{15} hod.

ONDREJ ŠEDIVÝ – DUŠAN VALLO
KONŠTRUKČNÉ ÚLOHY A ICH RIEŠENIE V ZÁVISLOSTI OD DEFINOVANIA ELIPSY

8^{15} hod. – 8^{30} hod.
LUCIA RUMANOVÁ, VALÉRIA ŠVECOVÁ
EXTREMÁLNE ÚLOHY O MINIMÁLNEJ LOMENEJ ČIARE

8^{30} hod. – 8^{45} hod.
MÁRIA KÓŠOVÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ
ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKOV VÝSTUPNÉHO TESTU PRE 6. ROČNÍK ZŠ PROJEKTU KEGA 3/7001/09

8^{45} hod. – 9^{00} hod.
GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ
ANALÝZA RIEŠENIA VYBRANÝCH ÚLOH V TESTOVANÍ ŽIAKOV 6. ROČNÍKA ZŠ

9^{00} hod. – 9^{15} hod.
JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA
ŘEŠITELNOST JISTÝCH GRUP PROSTORŮ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU

9^{15} hod. – 9^{30} hod.
RŮŽENA BLAŽKOVÁ, IRENA BUDÍNOVÁ
NĚKOLIK ZAJÍMAVÝCH VĚT Z TEORIE ČÍSEL A JEJICH UŽITÍ V ŠKOLSKÉ MATEMATICE

9^{30} hod. – 9^{45} hod.
EVA UHRINOVÁ
UČME MATEMATIKU POMOCOU HRY

9^{45} hod. – 10^{00} hod.
KITTI VIDERMANOVÁ
RÔZNE METÓDY RIEŠENIA JEDNEJ ÚLOHY ZO ŽIVOTA

10^{00}hod. – 10^{15} hod. COFFEE BREAK

10^{15} hod. – 10^{30} hod.
EDITA SZABOVÁ
TRI PRÍKLADY NA MODELOVANIE POMOCOU EXPONENCIÁLNEJ FUNKCIE

10^{30} hod. – 10^{45} hod.
DUŠAN VALLO – JÚLIA ZÁHORSKÁ – VILIAM ĎURIŠ
OBJAVUJEME SIEŤ ŠTVORSTENA

10^{45} hod. – 11^{00} hod.
LILLA KOREŇOVÁ
PROJEKTOVÉ VYUČOVANIE NA HODINÁCH MATEMATIKY V DIGITÁLNOM VÝUČBOVOM PROSTREDÍ

Posterová sekcia
2. poschodie - blok C

BENICKÁ PATRÍCIA, HALAMA FILIP, KUREKOVÁ ZUZANA
SPÔSOBY MOTIVÁCIE VO VYUČOVANÍ

Vedeckí garanti konferencie

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc

Organizačný výbor konferencie

Predseda: RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Členovia: prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
PhDr. PaedDr. Valéria Švecová, PhD.
PaedDr. Marek Varga, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
PaedDr. Eva Barcíková
Mgr. Tomáš Bene
Mgr. Kristína Cafiková
Mgr. Monika Galbavá
Mgr. Gabriela Galliková
Mgr. Štefan Havrlent
Mgr. Michaela Klepancová
Mgr. Mária Kóšová
RNDr. Renáta Kunová
Ing. Zuzana Kureková
Mgr. Lukáš Lednický
PaedDr. RNDr. Peter Lenčéš
RNDr. Ľubomír Rybanský
Mgr. Miroslava Sovičová
Mgr. Edita Szabová
Mgr. Eva Uhrinová
Júlia Civáňová

OBSAH

POSTEROVÁ SEKCIA

Názov:	Acta mathematica 14
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Zostavovatelia:	prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
	RNDr. Dušan Vallo, PhD.
	RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Technická spolupráca:	PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Rok vydania:	2011
Poradie vydania:	prvé
Počet strán:	276 strán
Počet výtlačkov:	100 ks

Kategória publikačnej činnosti: AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách

ISBN : 978-80-8094-958-7

9 788080 949587