FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

# ACTA MATHEMATICA 15

zborník príspevkov z X. nitrianskej matematickej konferencie
organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre
dňa 13. septembra 2012

NITRA 2012

Názov: Acta mathematica 15
Edícia: Prírodovedec č. 515

Zostavovatelia:
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Recenzenti:
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
doc. RNDr. Dagmar Markechová, CSc.
doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PhDr. PaedDr. Valéria Švecová, PhD.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
PaedDr. Marek Varga, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Vydané v roku 2012 ako účelová publikácia Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s finančnou podporou grantu KEGA 073UKF 4/2011: *Didaktické postupy vyučovania matematiky na II. stupni ZŠ a v príprave učiteľov s akcentom na prioritné úlohy matematiky vo vzdelávaní v intenciách Štátneho vzdelávacieho programu* a Akademickým klubom FPV UKF v Nitre.

Schválené vedením FPV dňa 27. 7. 2012

Rukopisy príspevkov prešli odbornou oponentúrou, ale neboli jazykovo upravované.



ISBN 978-80-558-0135-3

# ZAMYSLENIE SA PRI KONANÍ X. NITRIANSKEJ MATEMATICKEJ KONFERENCIE

ONDREJ ŠEDIVÝ, DUŠAN VALLO

Tvorivá práca je základom úspešného účinkovania vysokoškolského pracovníka. Prostriedkom na prezentáciu takejto práce sú vedecké konferencie, sympóziá a vedecké semináre.

Vedenie Katedry matematiky Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre sa rozhodlo zorganizovať I. nitriansku matematickú konferenciu, ktorá sa konala 16. a 17. októbra 2003 pri príležitosti 10. výročia založenia Fakulty prírodných vied UKF.

S úvodnými prednáškami vystúpili prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc. z VUT v Brne, prof. RNDr. Tibor Šalát, DrSc a prof. RNDr. Ján Čižmár, CSc. z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave. Konferencia sa konala v dvoch sekciách, sekcia matematiky a sekcia teórie vyučovania matematiky.

Od tohto roku sa Nitrianske matematické konferencie konajú každoročne v septembri, pred začiatkom akademického roka.

II. nitrianska matematická konferencia sa uskutočnila pri príležitosti 45. výročia založenia UKF v Nitre.

Nebudeme charakterizovať všetky uskutočnené konferencie, avšak zvlášť spomenieme VIII. nitriansku matematickú konferenciu, ktorá sa konala 16. a 17. septembra 2010.

Na tejto sa zúčastnilo najviac účastníkov zo zahraničia a ako prednášatelia vystúpili Bohumil Novák, Oleg Mushkarov, Evgenia Sendova, Neli Dimitrova, Kristín Bjarnadóttir, Henk van der Kooij.

Súčasne s konaním konferencie sa uskutočnila Letná medzinárodná škola doktorandov z teórie vyučovania matematiky, na ktorej prednášali Jarmila Novotná, Nicholas G. Mousoulides, Freya Hreinsdóttir, Maria Luiza Cestari, Barbro Grevholm, Andreas Ulovec, Vladimir Georgiev, John Andersen a Veneta Nedyalkova.

Len spomenieme, že na ostatných konferenciách úvodnými s prednáškami vystúpili: prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc., doc. RNDr. Jan Kopka, CSc., Dr. Antonio Boccuto, Dr. Andreas Ulovec, PhD., Dr. Neil Hutton, doc. PhDr. Emil Komárik, CSc., doc. PaedDr. Jaroslav Perný, CSc., Dr. Maciej Major, prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc., Dr. hab. Eva Swoboda, PhD., doc. RNDr. Štefan Solčan, CSc., doc. RNDr. Ivan Trenčanský, CSc., prof. RNDr. Pavel Kostyrko, DrSc. a doc. RNDr. Juraj Kostra, CSc.

Neoddeliteľnou súčasťou konania Nitrianskych matematických konferencií je zborník ACTA MATHEMATICA, ktorý v tomto roku bude už pätnásty a teda spolu s X. nitrianskou matematickou konferenciou má svoje 15. výročie aj tento zborník.

Zborník je recenzovaný a vydávaný z príspevkov, ktoré odzneli na konferenciách. Zostavovateľmi jednotlivých zborníkov boli prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., doc. RNDr. Daniel Palumbíny, CSc., prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD., prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc., RNDr. Dušan Vallo, PhD. a RNDr. Kitti Vidermanová, PhD. Technické práce vykonávali najmä RNDr. Kitti Vidermanová, PhD., PaedDr. Janka Melušová, PhD., RNDr. Viliam Ďuriš, PhD. a RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Na vydávaní zborníka sa finančne podieľajú projekty KEGA a Akademický klub Fakulty prírodných vied UKF v Nitre.

Pri tejto príležitosti ďakujeme všetkým pracovníkom a doktorandom Katedry matematiky FPV UKF v Nitre, ktorí sa zaslúžili o úspešný priebeh konferencií a vydávanie zborníkov.

Zvlášť ďakujeme dekanovi FPV UKF v Nitre prof. RNDr. Ľubomírovi Zelenickému, CSc., pod záštitou ktorého sa každoročne konajú nitrianske matematické konferencie.

V Nitre 10. júla 2012

# JOSEF KOROUS AND HIS PLACE IN HISTORY OF MATHEMATICS

MARIANA MARČOKOVÁ

**ABSTRAKT.** *Významný matematik a vysokoškolský učiteľ prof. RNDr. Josef Korous, DrSc. (7. 2. 1906 – 23. 8. 1981) je známy v matematickej komunite hlavne svojou vedeckou prácou v teórii ortogonálnych polynómov. Pre českú a slovenskú matematiku urobil veľa aj ako profesor vysokých škôl, ako školiteľ ašpirantov – matematikov, ale aj ako pomocný školiteľ ašpirantov – inžinierov, ako predseda vedeckých výborov a komisií a ako dlhoročný člen a funkcionár JČSMF a JSMF. V príspevku sa venujeme jeho prínosu pre rozvoj teórie ortogonálnych polynómov v minulom storočí a pripomenieme si jeho život a dielo.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *Josef Korous, teória ortogonálnych polynómov, matematik, školiteľ.*

**ABSTRACT.** *Famous mathematician and university teacher prof. RNDr. Josef Korous, DrSc. (7. 2. 1906 – 23. 8. 1981) is well-known in mathematical community mainly by his scientific work in the theory of orthogonal polynomials. He contributed to Czech and Slovak mathematics a lot of also as professor in higher education at universities and colleges, as supervisor of research work of his followers – mathematicians, as helpful supervisor in applied mathematics of young engineers, as chairman of scientific committees and many years he worked as the member and functionary of the Union of Czechoslovak (Czech and Slovak) mathematicians and physicists. This paper is devoted to his contribution for the development of the theory of orthogonal polynomials in the last century and we remind his life and scientific and educational work.*

**KEY WORDS:** *Josef Korous, theory of orthogonal polynomials, mathematician, supervisor.*

**CLASSIFICATION:** *A30, I90*

## Short biography of Josef Korous

Famous and talented mathematician prof. RNDr. Josef Korous, DrSc. (1906 – 1981) was the first head of the Department of mathematics and descriptive geometry established in September 1953 at University of railway engineering in Prague what was one of the previous names of the University of Žilina. Before he came to work to the university, he took part at preparatory works for its foundation. The $150^{th}$ anniversary of the existence of the Union of Czech (Czechoslovak) mathematicians and physicists is the opportunity to remember him.

Josef Korous was born in Prague on February 7, 1906. His father was a civil engineer and the family had 5 children: Josef, Ladislav, Antónie, Veronika and Karel. Josef was the eldest of them. After the primary education he started his secondary education in 1916 at the grammar school in Písek. After the final examination at Jirásek grammar school in Prague in 1924 he entered Charles university in Prague to study mathematics and physics. During this study he was mostly interested in the lectures and seminars of prof. Karel Petr who considered him to be one of his best students. Josef Korous graduated from the university in December 1928, but already in June 1928 he received his degree of Doctor of Natural

Science (RNDr.) on the basis of his work „On expansion of functions of real variable into a series of Hermite polynomials“ published in Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze (Discussions of the II. class of Czech academy of science in Prague), no. 11 (cf. [1]). In the years 1929 – 1930 he was granted a scholarship of the Ministry of Education to study at the University of Göttingen in Germany. The famous mathematicians Hilbert and Landau were his teachers there. Already during his study at Charles university in Prague he worked as a temporary assistent professor of mathematics. After his return from Göttingen he was assistent professor at the Czech technical university in Prague (1930 – 36). Then he worked as the teacher of mathematics and physics at several czech secondary schools till June1953. The last 6 years of this period of his life he was the director of the grammar school in Litvínov.

To the University of railway engineering in Prague he came in September 1, 1953 and he became associated professor (docent) and head of the Department of mathematics and descriptive geometry. In 1959 he was appointed full professor and one year later he moved with the university to Žilina. The university was re-named to the University of transport engineering. In 1962 he defended the thesis and obtained the degree of Doctor of Sciences (DrSc.).

The department that he headed, had to be built from the beginnings, because after the moving of the university from Prague to Žilina many of the teachers refused to follow the department to Žilina. Professor Korous was the first professor of the university who moved there. Some of new teachers of the Department of mathematics and descriptive geometry had no practice in teaching at the university – they came mainly from secondary or primary schools where they had taught before. So there was a very difficult task for professor Korous : to find such teachers who were able and willing to work under new conditions. During the years 1953 – 66 he significantly contributed to the successful development of the department and of the university as a whole. In the academic year 1954 – 55 he was vice-dean at the Faculty of electrical engineering and in the first academic year of the University of transport engineering in Žilina (1960 – 61) he was vice-dean of the Faculty of operation and economics of transport. He had to expend much effort to overcome problems that occured during the moving of the university from Prague to Žilina. In the year 1964 he was awarded the „Medal due to effort at building of University of transport engineering“ which he had got from Town council of Žilina.

Already in the first years of the life of the University in Žilina the Department of mathematics and descriptive geometry became so large that it had to be divided into two departments (in the academic year 1962 - 63). Professor Korous remained the head of the department which was at the Faculty of operation and economics. Other part of the department went to the Faculty of mechanical and electrical engineering.

In the years 1966 - 69 prof. Korous was the head of the Department of mathematical analysis at the Faculty of science, P.J. Šafárik university at Košice, where he moved with all his family besides his daughter Jarmila (he had two children – daughter Jarmila and son Josef). After the death of his wife Milada in 1968 he moved to Prague where he was the head of the Department of mathematics at the Faculty of mechanical engineering of the Czech technical university. Here he worked only three terms and in October 1970 he was back at his previous post in Žilina. Even after his retirement in 1977 he did not give up his work and continued his teaching activities as visiting professor at the Faculty of education in Nitra. This was his last teaching place. Death reached him unexpectedly in the middle of work and creative plans in August 1981 in Žilina.

Although born in Prague, Žilina became his new home for almost 17 years and he let there a deep trace not only with his teaching and organizing activities, but also with his lectures at Seminar on orthogonal polynomials established by him already at the University of railway engineering in Prague. Due to this seminar which continued in Žilina after moving the university from Prague, professor Korous provided his experience with mathematical research in the theory of orthogonal polynomials and related problems to more than twenty his colleagues, young teachers of mathematics and other his followers. His lectures at this seminar were full of new surprising mathematical theorems and their proofs we were excited by, so that some of us started to „love orthogonal polynomials“. He did not interrupt to hold this seminar in Žilina even during his employments in Košice and Nitra. That is why we continue it till nowadays.

**Josef Korous and orthogonal polynomials**

Investigation of special functions is very old part of research in mathematical analysis. Orthogonal polynomials are the important special functions. The results of J. Korous represent a significant contribution to this research. His papers concern of classical and generalized Hermite, Laguerre and Jacobi polynomials. He dealt with various properties of orthogonal polynomials, e.g. the location of their zeros, estimations for the least and the greatest zeros, asymptotic properties for $n \to \infty$ ($n$ is the degree of the polynomial), the differential equations that are satisfied by orthogonal polynomials, expansions of functions of one real variable into series of orthogonal polynomials and their summability.

One of his theorems is in the mathematical literature famous as Korous' theorem. It contains a deep result on the upper bounds of polynomials $\{p_n(x)\}$ orthogonal in the interval (–1,1) with the weight-function

$$w(x) = \tilde{w}(x)k(x),$$

where $\tilde{w}(x)$ is the weight-function of another system of polynomials $\{\tilde{p}_n(x)\}$ orthogonal in the same interval and $k(x) \geq k > 0$ is a certain function. This theorem was proved in the paper [6] published in the year 1938 and with the name Korous' theorem it appeared in the next year in the monograph „Orthogonal Polynomials" written by Gábor Szegö (cf. [30]). This monograph is considered to be a basic stone of the theory of orthogonal polynomials even in these days. With the name „Teorema Korausa“ can this theorem be found in the book „Klasičeskije ortogonaľnyje mnogočleny“ written by P.K. Sujetin in the year 1976 (cf. [29]).

Another, very young citation from the year 2001 appeared as Korous' method used in the proof of a theorem on uniform convergence of some functions connected with some class of orthogonal polynomials which was in the book „Orthogonal Polynomials for Exponential Weights“ written by Eli Levin and Doron S. Lubinsky and published by Canadian Mathematical Society (cf. [26]).

May be that professor Korous never knew about citations of his research in the works of Paul Nevai from Ohio state university that appeared in 70-ies and 80-ies of the last century. In his booklet „Géza Freud, Orthogonal Polynomials and Christoffel Functions. A Case Study“ (1985) Paul Nevai wrote (cf. [28]): „Now let us return to equiconvergence of orthogonal Fourier series. In his seminar paper, A.Haar proved that orthogonal Legendre series and Chebyshev series of integrable functions are equiconvergent; i.e., the difference of the corresponding appropriate partial sums converges to $0$. In fact, Haar's method is directly applicable to all classical orthogonal polynomial series, such as Jacobi, Hermite and Laguerre series. The real fun starts when one leaves the road covered by remnants of classical orthogonal polynomials and starts to examine general orthogonal polynomial series. Here the glory belongs to Szegö, whose results were later recast and generalized by J. Korous, Geronimus and Freud.” From that everyone has to see that the research work of Josef Korous is highly esteemed by mathematical community because his name is mentioned in the series of the greatest mathematicians developing the theory of orthogonal polynomials. We can say, that especially his first papers [1], [2], [4], [5], [6] published in the years 1928 – 1938 are cited very often. The little note [3] deals with some problem arising from actuary mathematics.

Next period of his life, till the establishment of the University of railway engineering (1953) he devoted to teaching mathematics and physics at secondary schools, so his research work was a bit interrupted. Only significant article on a generalization of Fourier series (cf. [7]) appeared at this period.

To be the teacher at the university, he had got several recommendations from persons who were significant in the Czech mathematical community. Academician Vojtěch Jarník, professor of Charles university was one of them. In November 1953 he wrote (cf. [25]): „Works of J.Korous concern problems of mathematical analysis, important as for internal development of mathematics and as for applications. They contain significantly new methods and they show also great combinability of author at overcoming no small technical problems in proofs. His works brought many new results. As a proof it is sufficient to refer the standard book „Orthogonal polynomials“ of Gábor Szegö (1939), where J. Korous is often cited. Writing this book, Szegö had only the works [1] and [2]. The works [4], [5] and [6] – as he wrote – he had got only after finishing the manuscript. In spite of it, he cited them additionally and he wrote, that Korous’ results are more general than the results in the book and also that they are proved by completely new method. Also Natanson in his excellent book „Konstruktivnaja teorija funkcij“ refers certain Korous’ theorem with its proof, although the book is only a bit connected with the area of Korous’ work. From the original Korous’ papers it is clear that he is mathematician talented by a creative ability and a great swiftness at doing of uneasy reasonings and computations. His interest in mathematical analysis is an advantage for his acting at the university of technical type, because it is the area that technical sciences are meeting with very often. Although the number of his research works is not high, his excellent qualities completely qualify him to be the professor of mathematics at the university of technical type.“

When Josef Korous became the teacher at the university, he was completely absorbed by organizing and teaching activities. His lecture notes from the years 1953 – 1958 are excellent, especially [23] devoted to orthogonal polynomials, which has a character of monograph. Having defended his dissertation [11] for the degree DrSc.(in 1962 in Prague), next period of his life was devoted to supervising of the research work of about twenty his followers. In the years 1957 – 1984 there appeared the articles [8 – 10, 12, 14 – 16] published in the proceedings of the universities where he was active teacher. They also have high scientific value. It is to be regretted that his death did not allow him to fulfil his idea to write a monograph on orthogonal polynomials. Nevertheless, textbook [23] is by people working in orthogonal polynomials considered to be a monograph.

Although this research was mainly theoretical, the results of Josef Korous can be of interest to researchers in approximation theory, mathematical physics, quantum mechanics, electrooptics, statistics and all those who apply orthogonal polynomials. This is the legacy of Josef Korous to applied mathematics – the basis of engineering education and research.

**List of significant Korous' articles**

[1] On expansion of functions of real variable into series of Hermite polynomials. Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze, No.11 (1928). (Czech).

[2] On series of Laguerre polynomials. Rozpravy II. třídy České akademie věd v Praze, No.40 (1928), 1 – 23. (Czech).

[3] Remarque à propos de l'article de M.Pólya concernant la déduction de la lois des erreurs de Gauss. Aktuárske vědy I (1930), 37 – 41.

[4] Über Reihenentwicklungen nach verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen mit drei Parametern.Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká, XIV(1937), 1 – 26.

[5] Über Entwicklungen der Funktion einer reellen Veränderlichen in reihen einer gewissen Klasse orthogonaler Polynome im unendlichen Intervale. Věstník Král. české společnosti nauk, třída matematicko-přírodovědecká, XV (1937), 1 – 19.

[6] On development of functions of one real variable into a series of certain orthogonal polynomials. Rozpravy II.třídy České akademie věd v Praze, No.1(1938), 1 – 11. (Czech).

[7] On a generalization of Fourier series. Časopis pro pěst. mat. a fys. 71 (1946), 1 – 15.

[8] On expansion of functions of one real variable into a series of certain orthogonal polynomials. Strojnický sborník technicko-vědecké práce pracovníků Vysoké školy železniční v Praze, 17 (1957), 45 – 52. (Czech).

[9] On asymptotic formulas for orthogonal polynomials in a finite interval. Sborník Vysoké školy železniční, stavební fakulta, Praha (1957), 61 – 109. (Czech).

[10] On a generalization of Hermite polynomials. Sborník Vysoké školy dopravní, fakulta provozu a ekonomiky dopravy, Praha (1960), 49 – 117. (Czech).

[11] On a certain class of orthogonal polynomials. Dissertation , Žilina1961.(Czech).

[12] Dispersion of characteristic values of operators. Sborník Vysoké školy dopravní, fakulta provozu a ekonomiky dopravy, Žilina (1965), 4 – 15. (Czech).

[13] The work of Karel Petr in mathematical analysis. Čas. Pěst. Mat. 96 (1971), s. 104 – 108.

[14] On convergence of series of orthogonal polynomials. Zborník IV.ved. konferencie VŠD v Žiline, sekcia matematika-fyzika-kybernetika, Žilina (1973), 25 – 35(Czech).

[15] On the solutions of a second order differential equation. Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 1, Matematika (1980), 51 – 78.

[16] On the polynomials orthogonal in the interval $(-\infty,\infty)$ with the weight $\exp(-x^6)$. Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 2, Matematika (1982), 81 – 100.

[17] On the differential equations of generalized Hermite polynomials. Zborník Pedagogickej fakulty v Nitre 3, Matematika (1984), 1-15. (Czech). (with O. Šedivý).

**Lecture notes of Josef Korous (in Czech)**

[18] Matematika, díl I. – VI. SNTL Praha 1954 – 1956.

[19] Úvod do vyšší matematiky. SNTL Praha 1957.

[20] Počet diferenciální. SNTL Praha 1957.

[21] Úvod do nauky o funkcích komplexní proměnné. SNTL Praha 1957.

[22] Lebesgueův integrál a Fourierovy řady. SNTL Praha 1958.

[23] Vybrané stati z matematiky. Ortogonální funkce a ortogonální polynomy.SNTL Praha 1958.

[24] Základy vyšší matematiky. SNTL Praha 1962.

**References**

[25] V. Jarník: Posudek o vědecké činnosti RNDr. Josefa Korouse, v Praze v listopadu 1953. Archív Katedry matematiky Fakulty prírodných vied Žilinskej univerzity.

[26] E. Levin, D. S. Lubinsky: Orthogonal polynomials for exponential weights. CMS Books in Mathematics, Springer – Verlag 2001.

[27] M. Marčoková: Professor Korous – his place in the history of mathematics and our university. Zborník 11. vedeckej konferencie Žilinskej univerzity v Žiline – „Veda, vzdelávanie a spoločnosť",sekcia č.7 – „Matematika v interdisciplinárnom kontexte", Žilina 2003, 25 – 28.

[28] P. Nevai: Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel Functions. A Case Study. Reprinted from Journal of Aproximation Theory, vol. 48, no. 1, September 1986, 3 – 167.

[29] P. K. Sujetin: Klasičeskije ortogonaľnyje mnogočleny. Nauka, Moskva 1979.

[30] G. Szegö: Ortogonaľnyje mnogočleny. Nauka, Moskva 1962.

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

**Adress of author:**

*doc. RNDr.Mariana Marčoková,CSc.*
*Department of mathematics*
*University of Žilina*
*Univerzitná 1*
*SK – 010 26 Žilina*
e-mail: mariana.marcokova@fpv.uniza.sk

**Acknowledgement**

Supported by the grant KEGA 057 ŽU – 4/2012 – Mathematics for bachelor technical study programmes must respond to Educational reform of secondary schools – creation of new modern lecture notes.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ROZMIESTŇOVANIE GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

# PLACEMENTS OF GEOMETRICAL SHAPES

MILOŠ BOŽEK

**ABSTRAKT.** *V príspevku popisujeme riešenie jedného špecifického problému, ktorého matematický základ je v teórii hustých dvojrozmerných geometrických útvarov na báze posunutí.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *mnohouholník, optimalizácia.*

**ABSTRACT.** *This paper deals with a solution of specific optimization problem which mathematical basis is in the theory of dense placement of two-dimensional geometric figures on displacement.*

**KEY WORDS:** *polygon, optimalization.*

**CLASSIFICATION:** *G55, M55*

## 1. Úvod

V mnohých oblastiach výroby, napr. v odevníctve, obuvníctve, strojárstve, nábytkárstve, ... sa stretávame s úlohou vytvoriť tzv. nástrihový plán, teda rozmiestniť vystrihované (vysekávané, vyrezávané, ...) časti výrobkov na dvojrozmerný materiál (látka, koža, plech, doska, ...) s dodržaním technologických požiadaviek a zásady maximalizácie využitia materiálu [7]. Pri práci s anizoropnými materiálmi, ako sú napr. tkaniny, kože a prírodné drevo, sa výstrižky nesmú otáčať, povolené sú iba posunutia. Základom odpovedajúceho matematického optimalizačného problému je teória hustých rozmiestnení dvojrozmerných geometrických útvarov na báze posunutí, ktorej stručný opis predkladáme.

Pôvodne bola teória založená najmä na analytickej geometrii [12], neskôr získala adekvátnejšiu topologickú podobu; pozri [1] a pre viac podrobností dizertácie [13], [8], [16]. Tam možno nájsť v tejto práci vynechané dôkazy a ilustrácie.

Prezentovanú teóriu možno bez problémov zovšeobecniť v dvoch smeroch – pripustiť euklidovský priestor ľubovoľnej dimenzie a/alebo všeobecnejšie pohyby, teda nielen posunutia. Je zaujímavé, že pri rozšírení škály povolených pohybov v rovine sa základné výsledky teórie zachovajú; pozri [4], [9].

## 2. Geometrické útvary a ich vzájomné polohy

Z hľadiska aplikácií by sme sa určite mohli venovať iba rozmiestňovaniu mnohouholníkov. Ukazuje sa však, že základné pojmy treba vyjadrovať v jazyku topológie, preto pripustíme omnoho širšiu triedu objektov.

Pod *geometrickým útvarom* (skrátene hovoríme iba *útvar*) rozumieme podmnožinu M euklidovskej roviny $E^2$, ktorá je časťou uzáveru svojho vnútra

$$M \subseteq \mathrm{cl}\,(\mathrm{int} M) \tag{2.1}$$

Základným príkladom geometrického útvaru je mnohouholník, teda súvislá a v metrickom zmysle ohraničená časť roviny, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá lomená čiara. Všeobecnejšie, geometrickým útvarom je každá rovinná oblasť ohraničená jednoduchou uzavretou krivkou, napríklad kruh. Krivka geometrickým útvarom nie je. Kvôli prehľadnosti budeme geometrické útvary spravidla označovať písmenami $M, N, P$, ľubovoľné podmnožiny roviny písmenami $A, B, C, \ldots$ .

Nasledujúce dve jednoduché tvrdenia vyjadrujú základné topologické vlastnosti geometrických útvarov.

**Tvrdenie 2.1** a) Každá otvorená množina roviny je geometrický útvar.
b) Uzáver a vnútro geometrického útvaru sú geometrické útvary.
c) Zjednotenie ľubovoľného (konečného alebo nekonečného) počtu geometrických útvarov je geometrický útvar. □

**Tvrdenie 2.2** Uzáver resp. hranica geometrického útvaru $M$ je uzáver resp. hranica jeho vnútra

$$\mathrm{cl}M = \mathrm{cl}(\mathrm{int}M), \quad \mathrm{bd}M = \mathrm{bd}(\mathrm{int}M) \tag{2.2}$$

Na množine všetkých geometrických útvarov zavedieme niekoľko binárnych relácií, ktoré chápeme ako vzájomné polohy dvoch útvarov:

Dva útvary $M, N \subseteq E^2$

- *sa pretínajú*, ak majú neprázdny prienik: $M \cap N \neq \emptyset$,
- *sa prekrývajú*, ak ich vnútra majú neprázdny prienik: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N \neq \emptyset$,
- *sa stýkajú*, alebo sú husto rozmiestnené, ak sa neprekrývajú, ale ich hranice sa pretínajú: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$ a $\mathrm{bd}M \cap \mathrm{bd}N \neq \emptyset$,
- *sú (korektne) rozmiestnené*, ak sa neprekrývajú: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$.

*Útvar M je rozmiestnený v útvare N*, ak jeho vnútro leží v $N$: $\mathrm{int}M \subseteq N$.

**Poznámky 2.1** a) Dva husto rozmiestnené útvary sú korektne rozmiestnené.
b) Ak je doplnok geometrického útvaru $N$ útvar, tak útvar $M$ je rozmiestnený v $N$ práve vtedy, keď je korektne rozmiestnený s doplnkom útvaru, teda keď $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}(E^2 \setminus N) = \emptyset$. Takto sa umiestnenie útvaru do útvaru redukuje na korektné rozmiestnenie útvaru s iným útvarom.

Nasledujúca veta vyjadruje jednu z dvoch podmienok hustého rozmiestnenia dvoch útvarov síce menej názornejším, ale technicky výhodnejším spôsobom ako definícia. Za ňou idúca veta hovorí, že pri skúmaní hustého rozmiestnenia útvarov sa možno obmedziť na otvorené útvary alebo na uzavreté útvary. Nie je to však nutné ani výhodné.

**Veta 2.1** Geometrické útvary $M, N \subseteq E^2$ sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sa pretínajú ich uzávery ale nie ich vnútra, t.j. keď $\mathrm{cl}M \cap \mathrm{cl}N \neq \emptyset$ a $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$. □

**Veta 2.2** a) Geometrické útvary sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sú husto rozmiestnené ich vnútra.
b) Geometrické útvary sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sú husto rozmiestnené ich uzávery. □

Husté rozmiestnenie dvoch útvarov rozšírime ďalej na rozmiestnenie s kladnou medzerou a na rozmiestnenie viacerých útvarov. Kvôli prvému rozšíreniu pre každú množinu $A \subseteq E^2$ definujme jej otvorené resp. uzavreté okolie s polomerom $r > 0$ predpisom

$$O(A, r) = \{x \in E^2;\ d(x, A) < r\}, \quad B(A,r) = \{x \in E^2;\ d(x, A) \le r\} \tag{2.3}$$

Zrejme

$$O(A, r) = \cup\{O(x, r);\ x \in A\}, \quad B(A, r) = \cup\{B(x, r);\ x \in \mathrm{cl}A\} \tag{2.4}$$

Množiny $A, B \subset E^2$ sú rozmiestnené s medzerou $\delta > 0$, ak sú husto rozmiestnené „zväčšené“ množiny $A$, $B$, t.j. ich okolia $O(A, \delta/2)$ a $O(B, \delta/2)$.

**Veta 2.3** Nech $\delta > 0$. Potom
a) Ak sú množiny $A$ a $B$ rozmiestnené s medzerou $\delta$, tak ich vzdialenosť je $\delta$.
b) Ak $d(A, B) = \delta$ a jedna z množín $A$, $B$ je ohraničená, tak množiny $A$, $B$ sú rozmiestnené s medzerou $\delta$. ☐

**Príklad 2.1** Nech $\delta = 2$, $M = \{p = (x, y);\ x > 0, y \ge 1/x\}$, $N_\delta = \{p = (x, y);\ y \le -\delta\}$. Pretože $B(M, \delta/2) \cap B(N_\delta, \delta/2) = \emptyset$, útvary $M$, $N_\delta$ nie sú husto rozmiestnené s medzerou $\delta$, hoci ich vzdialenosť je $\delta$. ☐

*Konečná alebo spočítateľná množina geometrických útvarov $M_i$ je husto rozmiestnená* (resp. *rozmiestnená s medzerou* $\delta > 0$), ak sa dané množiny dajú tak očíslovať prirodzenými číslami 1,2,3,..., že každý útvar $M_i$, $i \ge 2$, je husto rozmiestnený (resp. husto rozmiestnený s medzerou $\delta$) so zjednotením predchádzajúcich útvarov, teda s útvarom $\cup\{M_j;\ j<i\}$.

## 3. Husté rozmiestnenia útvarov a posunutia

Uvažujme dva útvary v rovine, prvý považujeme za pohyblivý, druhý za pevný. Základným objektom nášho záujmu je množina všetkých takých posunutí pohyblivého útvaru, že obraz pohyblivého útvaru je husto rozmiestnený s pevným. Najprv túto množinu posunutí stotožníme s istou množinou bodov roviny. Vychádzame zo štandardnej reprezentácie posunutí vektormi.

Pevne zvolený bod $o \in E^2$ nazveme pól roviny. Považujem ho tiež za *referenčný bod* každého geometrického útvaru. Ak je v rovine zadaná sústava súradníc, pólom je implicitne jej začiatok. Pól roviny umožňuje reprezentovať bod $x$ jeho polohovým vektorom $\mathbf{x} = x - o$ a naopak, každý vektor $\mathbf{x}$ roviny reprezentovať odpovedajúcim bodom $x = o + \mathbf{x}$. Symbolom $A(x)$ budeme označovať *umiestnenie množiny A do bodu x*, čo je obraz množiny $A$ v posunutí o vektor $x - o$:

$$A(x) = A(x) + (x - o) = \{a + (x - o);\ a \in A\} \tag{3.1}$$

Pretože posunutie je homeomorfizmus, platí

$$\mathrm{int}(A(x)) = (\mathrm{int}A)(x), \quad \mathrm{bd}(A(x)) = (\mathrm{bd}A)(x) \quad \text{a} \quad \mathrm{cl}(A(x)) = (\mathrm{cl}A)(x)$$

preto píšeme jednoducho $\mathrm{int}A(x)$, $\mathrm{bd}A(x)$ a $\mathrm{cl}A(x)$. Zrejme množina $A(x)$ je otvorená resp. uzavretá práve vtedy, keď je otvorená resp. uzavretá množina $A$.

*Množina hustých rozmiestnení pohyblivého útvaru M a pevného útvaru N (vzhľadom na referenčný bod o)* je množina bodov

$$D(M, N)_o = \{x \in E^2;\ M(x), N \text{ sú husto rozmiestnené}\} \tag{3.2}$$

Písmeno $D$ je odvodené od anglického „densely placed“. Index $o$ bežne vynechávame, pretože referenčný bod útvaru sa spravidla nemení, porovnaj s (3.5).

Z technického hľadiska je dôležitá *množina pretínaní pohyblivého útvaru M s pevným útvarom N (vzhľadom na referenčný bod o)*

$$I(M, N)_o = \{x \in E^2;\ M(x), N \text{ sa pretínajú}\} \tag{3.3}$$

Lebo veta 2.1 umožňuje jednoduchú redukciu hustých rozmiestnení na pretínania

$$D(M, N) = I(\mathrm{bd}M, \mathrm{bd}N) \setminus I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) \tag{3.4}$$

Nasledujúce tvrdenie je kľúčové pre dokazovanie vlastností hustých rozmiestnení.

**Tvrdenie 3.1** [1] Pre všetky útvary $M$, $N$ platí

$$I(M, N)_o = o + (N - M) = \{o + (n - m);\ m \in M,\ n \in N\}\ [1].$$

*Dôkaz* Zrejme platí:

$$x \in I(M, N)_o \Leftrightarrow \exists n \in M(x) \cap N \Leftrightarrow \exists m \in M\ \exists n \in N\colon m + (x - o) = n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in M\ \exists n \in N\colon\ x = o + (n - m). \qquad \square$$

Pre body $o$, $p$ a útvary $M$, $N$ teda z tvrdenia 3.1 vyplýva $I(M, N)_p = I((M, N)_o + (p - o)$. V dôsledku toho

$$D(M, N)_p = D(M, N)_o + (p - o) \tag{3.5}$$

To znamená, že tvar množiny hustých rozmiestnení nezávisí od voľby referenčného bodu pohyblivého útvaru. Iným jednoduchým dôsledkom tvrdenia 3.1 a redukcie (3.4) je vzťah vyjadrujúci vzájomnú zámenu pohyblivého a pevného útvaru:

$$D(N, M)_o = s_o(D(M, N)o) \tag{3.6}$$

kde $s_o\colon E^2 \to E^2$ je súmernosť podľa stredu $o$.

Ďalším takým dôsledkom tvrdenia 3.1 je vyjadrenie množiny pretínaní pohyblivého útvaru s pevným v tvare zjednotenia útvarov:

$$I(M, N)_o = \bigcup_{n \in N} [s_o(M)](n) \tag{3.7}$$

**Príklady 3.1** a) Nech $M$ je uzavretý kruh $B(o,1)$ so stredom $o$ a s polomerom 1, $N$ nech je uzavretý kruh $B(o,2)$. Vtedy $I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N)$ je uzavretý kruh $B(o,3)$, $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je otvorený kruh $O(o,3)$ a $D(M, N)$ je kružnica $S(o,3)$.

b) Pre otvorené a uzavreté zväčšenia ľubovoľnej množiny A z (2.4) platí

$$O(A, r) = I(O(o,r), A), \quad B(A, r) = I(B(o,r), \mathrm{cl}A)$$

c) Nech $M$, $N_0$ sú útvary z príkladu 2.1 pre $\delta = 0$. Vtedy $I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) = I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je otvorená polrovina daná nerovnosťou $y < 0$, preto $D(M, N)$ je prázdna množina.

d) Nech $M = \{p = (x, y);\ y \geq x^2/(1 - x^2),\ |x| < 1\}$, $N = \{p = (x, y);\ y \leq 0 \text{ alebo } |x| \geq 1\}$, $o = (0, 0)$. Vtedy

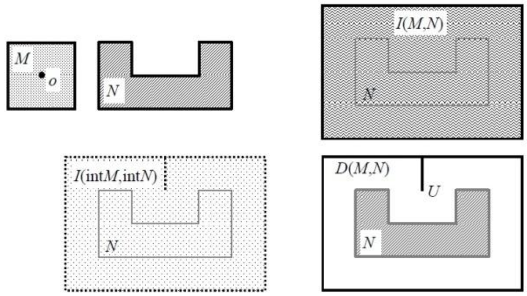
$$I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) = I(M, N) = \{p = (x, y);\ y \leq 0 \text{ alebo } x \neq 0\}$$
$$I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) = \{p = (x, y);\ y < 0 \text{ alebo } x \neq 0\}$$

preto $D(M, N)$ je jednoprvková množina $\{o\}$.

e) Nech $M$ je štvorec s vrcholmi $(\pm1,\pm1)$ a $N$ mnohouholník tvaru „U“ s vrcholmi $(-2,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-2,2)$. Ako obvykle, nech $o = (0,0)$. Vtedy

1 Množina vektorov $N - M$ resp. množina bodov $o + (N - M)$ sa v literatúre často nazýva Minkowského rozdiel útvarov $M$ a $N$ resp. Minkowského súčet útvarov $N \oplus (-M)$, kde $-M$ je obraz útvaru $M$ v súmernosti podľa pólu $o$.

$I(\text{cl}M, \text{cl}N) = I(M, N)$ je obdĺžnik s vrcholmi (–3,–1), (3,–1), (3,3), (–3,3) a $I(\text{int}M, \text{int}N)$ je vnútro obdĺžnika $I(M, N)$ s vynechanou úsečkou $U$ s krajnými bodmi (0,3), (0,2). Množina $D(M, N)$ je hranica obdĺžnika $I(M, N)$ spolu s úsečkou $U$. (Obr. 1)




Obr. 1. Pohyblivý štvorec $M$ s referenčným bodom o a pevný mnohouholník $N$. Množina $D(M, N)$ je hranica otvorenej množiny $I(\text{int}M, \text{int}N)$. $D(M, N)$ je zjednotením hranice obdĺžnika $I(M, N)$ s úsečkou $U$.

Nasledujúca veta je uhlovým kameňom teórie hustých rozmiestnení.

**Veta 3.1** [1] Ak je jeden z geometrických útvarov $M$, $N$ ohraničený, tak množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranicou otvorenej množiny $I(\text{int}M, \text{int}N)$, ktorá vyjadruje všetky prekrytia pohyblivého útvaru $M$ s pevným útvarom $N$:

$$D(M, N) = \text{bd}I(\text{int}M, \text{int}N)$$

*Dôkaz* iba naznačíme. Podstatné je ukázať, že pre ľubovoľné množiny $A$¸ $B$ platí

$$A \text{ je otvorená } \Rightarrow \ I(A, B) \text{ je otvorená} \tag{3.8}$$

$$A \text{ alebo } B \text{ je ohraničená } \Rightarrow \ I(\text{cl}A, \text{cl}B) = \text{cl}I(A, B) \tag{3.9}$$

Potom už máme

$$\begin{aligned} &\text{bd}I(\text{int}M, \text{int}N) = \text{cl}I(\text{int}M, \text{int}N) \setminus \text{int}I(\text{int}M, \text{int}N) = \\ &= (\text{cl}(\text{int}M), \text{cl}(\text{int}N)) \setminus I(\text{int}M, \text{int}N) = I(\text{cl}M, \text{cl}N) \setminus I(\text{int}M, intN) = \\ &= \text{cl}I(M, N) \setminus I(\text{int}M, \text{int}N) = D(M, N). \end{aligned}$$

Druhá rovnosť vyplýva z (3.9) a z (3.8), tretia z (2.2) a posledná z (3.4). ☐

**Poznámka 3.1** Príklady 3.1 c, d ukazujú, že vo vete 3.1 nemožno vynechať predpoklad o ohraničenosti útvarov. Bez neho platí iba inklúzia $D(M, N) \subseteq \text{bd}I(\text{int}M, \text{int}N)$.

**Poznámka 3.2** Príklad 3.1 e ukazuje, že vo vete 3.1 nemožno nahradiť množinu $I(\text{int}M, \text{int}N)$ ani množinou $I(M, N)$, ani $I(\text{cl}M, \text{cl}N)$. Vo všeobecnosti teda platí

$$D(M, N) \neq \text{bd}I(M, N) \quad \text{a} \quad D(M, N) \neq \text{bd}I(\text{cl}M, \text{cl}N)$$

Napriek tomu sa v literatúre možno bežne stretnúť s rovnosťou $D(M, N) = \text{bd}I(M, N)$; pozri napr. [10], [11]. Tvrdí sa tam, že tzv. non-fit polygon, čo je tamojší ekvivalent množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov, je hranica ich Minkowského rozdielu resp. súčtu $N \oplus (-M)$, čo je spôsob vyjadrenia množiny $I(M, N)$. Vidno teda, že pri opise množiny hustých rozmiestnení treba postupovať opatrne.

**Poznámka 3.3** Veta 3.1 v súčinnosti so vzorcom (3.7) umožňuje preformulovať výsledok príkladu 3.1b takto: Hranicou geometrického útvaru $N$ zväčšeného o hodnotu $r > 0$, teda hranicou okolia $O(N, r)$ útvaru $N$, je množina $D(M, N)$, kde $M$ je otvorený kruh $O(o,r)$.

**Poznámka 3.3** má široké uplatnenie v aplikáciách: Pri tvorbe nástrihového plánu sa výkrojky rozmiestňujú so stanovenou medzerou; pozri text za vetou 2.2. Vtedy sa husto rozmiestňujú výkrojky zväčšené o polovicu medzery. Teda aj hranice zväčšených výkrojkov môžeme získať pomocou teórie hustých rozmiestnení.

## 4. Husté rozmiestnenia mnohouholníkov

Začneme prípadom dvoch konvexných mnohouholníkov. Vieme o nich, že sú konvexnými obalmi svojich vrcholov. Na základe tvrdenia 3.1 možno bez ťažkostí dokázať, že pre konvexné obaly c$A$, c$B$ ľubovoľných množín $A$, $B$ platí

$$I(\mathrm{c}A, \mathrm{c}B) = \mathrm{c}I(A, B) \tag{4.1}$$

**Veta 4.1** [2] Nech $M$, $N$ sú konvexné mnohouholníky. Potom platí
a) Množina $I(M, N)$ je konvexný mnohouholník.
b) $\mathrm{int}I(M, N) = I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$.
c) Množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranica vnútra konvexného mnohouholníka $I(M, N)$.
d) Množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranica konvexného mnohouholníka $I(M, N)$, čiže $D(M, N) = \mathrm{bd}I(M, N)$.

*Dôkaz* opäť iba naznačíme.
a) Nech $A$, $B$ sú množiny vrcholov uvažovaných konvexných mnohouholníkov. Podľa (4.1) platí $I(M, N) = I(\mathrm{c}A, \mathrm{c}B) = \mathrm{c}I(A, B)$. Rovnosť (3.7) dáva, že $I(A, B)$ je konečná nekolineárna množina, preto jej konvexný obal, teda $I(M, N)$, je konvexný mnohouholník.
b) Z inklúzií $\mathrm{int}M \subseteq M$ a $\mathrm{int}N \subseteq N$ prostredníctvom tvrdenia 3.1dostaneme, že

$$I(M, N) \supseteq I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N).$$

Z výroku (3.8) preto vyplýva $\mathrm{int}I(M, N) \supseteq I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$. Táto inklúzia platí pre ľubovoľné množiny. Dôkaz obrátenej inklúzie vyžaduje využiť špecifické vlastnosti konvexných množín.
c) Tvrdenie vyplýva z vety 3.1 a z časti b).
d) Dá sa ukázať, že inklúzia $D(M, N) \supseteq \mathrm{bd}I(M, N)$ platí vo všeobecnosti, obrátenia inklúzia znova vyžaduje využiť špecifické vlastnosti konvexných množín. □

Je známe, že každý mnohouholník $M$ možno vyjadriť ako zjednotenie vzájomne sa neprekrývajúcich konvexných mnohouholníkov $M_1, \ldots, M_k$, pričom každý z nich sa pretína so zjednotením predchádzajúcich. (Ide vlastne o predčasne ukončený proces triangulácie mnohouholníka postupným vkladaním vnútorných uhlopriečok.) Stručne hovoríme, že mnohouholník $M$ je geometricky rozložený na nadväzujúce konvexné mnohouholníky.

**Tvrdenie 4.1** Nech $M$, $N$ sú ľubovoľné mnohouholníky a nech $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$ sú ich geometrické rozklady na nadväzujúce konvexné mnohouholníky. Potom množina $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je zjednotením vnútier konvexných mnohouholníkov $I(M_i, N_j)$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,l$, ktoré na seba nadväzujú v lexikografickom usporiadaní. □

Pripomeňme známy spôsob vyjadrenia hranice zjednotenia dvoch otvorených množín $A$, $B$

$$\mathrm{bd}(A \cup B) = (\mathrm{bd}A \setminus B) \cup (\mathrm{bd}B \setminus A)$$

Tvrdenie 4.1 spolu s vetou 4.1 teraz dávajú návod na konštrukciu množiny hustých rozmiestnení $D(M, N)$ pre mnohouholníky ľubovoľného tvaru:

**Algoritmus 4.1** [2]

1. Vytvoriť geometrické rozklady $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$ na nadväzujúce konvexné mnohouholníky.
2. Skonštruovať konvexné mnohouholníky $I(M_1, N_1), \ldots, I(M_k, N_l)$ a zoradiť ich podľa lexikografického poradia dvojíc indexov.
3. $D(M, N) := \emptyset$
4. $P := \emptyset$
5. for $(i,j) = (1,1),\ldots,(k,l)$ begin

    $D(M, N) := (D(M, N) \setminus \mathrm{int}I(M_i, N_j)) \cup (\mathrm{bd}I(M_i, N_j) \setminus P)$

    $P := P \cup \mathrm{int}I(M_i, N_j)$

   end for

Poznámka. $P$ je zjednotenie vnútier už spracovaných konvexných mnohouholníkov $I(M_i, N_j)$.

Najcitlivejším miestom algoritmu 4.1 je v cykle prebiehajúca obnova množiny $D(M, N)$. Spôsobuje, že množina $D(M, N)$ hustých rozmiestnení mnohouholníkov ľubovoľného tvaru má pomerne komplikovanú štruktúru. Môžu v nej vystupovať jednoduché uzavreté aj neuzavreté lomené čiary, prípadne aj konečný počet bodov. Navyše, opísaný výpočet niektorých častí množiny $D(M, N)$ môže byť kvôli neúplnej strojovej aritmetike značne nestabilný.

**Veta 4.2** o štruktúre množiny $D(M, N)$ pre mnohouholníky, [2]:
Pre ľubovoľné mnohouholníky $M$, $N$ existujú také celé čísla $k$, $l$, $m$, $0 \leq k \leq l \leq m$, že množina $D(M, N)$ skladá z navzájom rôznych jednoduchých uzavretých lomených čiar $L_0,\ldots, L_k$, z navzájom rôznych jednoduchých neuzavretých lomených čiar $L_{k+1},\ldots, L_l$ a z navzájom rôznych bodov $p_{l+1}, \ldots, p_m$:

$$D(M, N) = L_0 \cup (L_1 \cup \ldots \cup L_k) \cup (L_{k+1} \cup \ldots \cup L_l) \cup \{ p_{l+1}, \ldots, p_m\} \qquad (4.2)$$

Pritom platí

(i) Každé dve rôzne lomené čiary $L_i$ *a* $L_j$, $0 \leq i, j \leq$ l, majú spoločný najviac jeden bod.

(ii) Všetky lomené čiary $L_1, \ldots, L_l$ ležia v mnohouholníku $K_0$ určenom lomenou čiarou $L_0$ a ani jedna z lomených čiar $L_{k+1}, \ldots, L_l$ nepretína vnútro žiadneho z mnohouholníkov $K_1, \ldots, K_k$ určených lomenými čiarami $L_1, \ldots, L_k$.

(iii) Všetky body $p_{l+1},\ldots, p_m$ ležia vnútri mnohouholníka $K_0$ a žiadny z nich neleží v niektorom mnohouholníku $K_1, \ldots, K_k$ ani na niektorej lomenej čiare $L_{k+1}, \ldots, L_l$. ☐

**Príklad 4.1** V príklade 3.1e (obr. 1) je $k = 0$, $l = m = 1$, teda $D(M, N) = L_0 \cup L_1$. Uzavretá lomená čiara $L_0$ je hranica obdĺžnika $K_0 = I(M, N)$ a neuzavretá lomená čiara $L_1$ je úsečka $U$. Izolované body množina $D(M, N)$ neobsahuje.

**Poznámka 4.2** a) Lomené čiary $L_1, \ldots, L_k$ resp. $L_{k+1}, \ldots, L_l$ resp. body $p_{l+1},\ldots, p_m$ nemusia vždy existovať. Stane sa tak pre $k = 0$ resp. pre $l = k$ resp. pre $m = l$. Naproti tomu, jednoduchá uzavretá lomená čiara $L_0$ existuje vždy. Určuje mnohouholník, v ktorom je obsiahnutá celá množina $D(M, N)$.
b) Lomenú čiaru $L_0$ možno skonštruovať kinematickým spôsobom, pri ktorom sa pohyblivý mnohouholník $M$ „kĺže“ pozdĺž pevného mnohouholníka $N$ a lomená čiara $L_0$ vzniká ako dráha referenčného bodu $o$; pozri [2].

c) Je teda prirodzená otázka, pre ktoré mnohouholníky *M, N* platí $D(M, N) = L_0$. Vtedy algoritmus z časti a) vyprodukuje celú množinu *D(M, N)*. Jednoduchá odpoveď je: Keď sú oba mnohouholníky konvexné. Žiaľ, v reálnych aplikáciách je tento prípad pomerne zriedkavý. Našťastie, podmienke vyhovujú aj hviezdicovité a monotónne mnohouholníky.
d) Pre konštrukciu celej množiny *D(M, N)* odkazujeme na algoritmus 4.1 alebo na dizertačnú prácu [13].

Pripomeňme, že mnohouholník je *hviezdicovitý vzhľadom na bod s*, ak s každým svojim bodom obsahuje úsečku, ktorá ho spája s bodom *s*. Ak sú všetky vnútorné body každej takej úsečky vnútornými bodmi mnohouholníka, hovoríme o *ostrej hviezdicovitosti*. Mnohouholník je *hviezdicovitý* resp. *ostro hviezdicovitý*, ak je hviezdicovitý resp. ostro hviezdicovitý vzhľadom na niektorý svoj bod.

Je zrejmé, že každý mnohouholník je konvexný práve vtedy, keď je hviezdicovitý vzhľadom na každý svoj bod.

**Veta 4.3** [5] Nech *M, N* sú hviezdicovité mnohouholníky, pričom jeden nich je ostro hviezdicovitý. Potom *I(M, N)* je ostro hviezdicovitý mnohouholník a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

Lomená čiara je *monotónna vzhľadom na smer priamky H*, ak kolmé priemety jej vrcholov tvoria monotónnu postupnosť bodov na priamke. Smer priamky *H* považujeme za *horizontálny*, smer naň kolmý za *vertikálny*. Mnohouholník je *monotónny vzhľadom na smer priamky H*, ak sa jeho hraničná lomená čiara skladá z dvoch monotónnych lomených čiar.

**Veta 4.4** [3], [6] Nech *M, N* sú monotónne mnohouholníky vzhľadom na smer priamky *H*. Potom *I(M, N)* je mnohouholník monotónny vzhľadom na smer priamky *H* a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

Priamka resp. úsečka kolmá na priamku *H* je *vertikálna priamka resp. úsečka*. Dá sa dokázať, že mnohouholník je monotónny práve vtedy, keď každá vertikálna priamka pretína jeho hranicu v najviac dvoch bodoch.

Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu v ďalšom už nebudeme zdôrazňovať smer monotónnosti.

Žiaľ, nie každý konvexný mnohouholník je monotónny. Monotónny je iba vtedy, keď žiadna jeho strana nie je vertikálna. To nás vedie k slabšej podmienke monotónnosti [15], [6]:

Mnohouholník je *vertikálovo monotónny*, ak každá priamka obsahujúca jeho vnútorný bod pretína hranicu mnohouholníka v najviac dvoch (a teda v práve dvoch) bodoch.

Hranica vertikálovo monotónneho mnohouholníka pozostáva z dvoch monotónnych lomených čiar a z najviac dvoch vertikálnych úsečiek. Je zrejmé, že mnohouholník je konvexný práve vtedy, keď je vertikálovo monotónny vzhľadom na každý smer.

Vetu 4.4 možno vysloviť v trochu silnejšej podobe.

**Veta 4.5** Nech *M, N* sú vertikálovo monotónne mnohouholníky vzhľadom na smer priamky *H*. Potom aj *I(M, N)* je vertikálovo monotónny mnohouholník vzhľadom na smer priamky *H* a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

**Poznámka 4.3** Podstatnou časťou tvrdení viet tejto kapitoly je, že vo všetkých štyroch prípadoch je množina *I(M, N)* mnohouholník a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. To znamená, že *D(M, N)* je jednoduchá lomená čiara $L_0$, a teda kinematický algoritmus konštrukcie čiary $L_0$ z poznámky 4.2b vyprodukuje celú množinu *D(M, N)*.

Konvexnosť, hviezdicovitosť či monotónnosť množiny *I(M, N)* je z tohto hľadiska druhoradá.

**Literatúra**

[1] Božek, M. (1992). On dense placements of plane figures. In Proceedings of the 8th Spring School on Computer Graphics and its Applications. UK Bratislava 1992, 13-20.

[2] Božek, M. (1994). On dense placements of polygons. In Proceedings of the 10th Spring School on Computer Graphics and its Applications. UK Bratislava 1994, 233-239.

[3] Božek, M. (2005). Dense Placements of Monotone Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2005 (Vol. 14). ISBN 80-227-2278-2. Slovak University of Technology, Bratislava 2005, 9-14.

[4] Božek, M.(2008). On Dense Placements Based on Arbitrary Rigid Motions in the Plane. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2008 (Vol. 17). ISBN 978-80-227-2952-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2008, 12-17.

[5] Božek, M. (2009). On Dense Placements of Star-shaped Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2009 (Vol. 18). ISBN 978-80-227-3141-6. Slovak University of Technology, Bratislava 2009, 27-32.

[6] Božek, M. (2010). Testing Vertical Monotony of Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 17-22.

[7] Božek, M., Vranková, E. (2004). Geometria pomáha technológiám. In G Slovenský časopis pre geometriu a grafiku. Ročník 1 (2004) číslo 1. ISSN 1336-524X. str. 17-34.

[8] Hosťovecký, A. (2007). Niektoré vlastnosti periodických rozmiestnení. Dizertácia FMFI UK Bratislava 2007.

[9] Karahuta, J. (2010). Visualizations of Dense Placements Based on Arbitrary Rigid. Motions. In: Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 51-56.

[10] LI, Z., Milenkovic, V. J. (1995). Compaction and Separation Algorithms for Nonconvex Polygons and Their Applications. In European Journal of Operations Research, Vol 84, (1995), 539-561.

[11] MILENKOVIC, V., DANIELS, K., LI, Z. Placement and Compaction of Nonconvex Polygons for Clothing Manufacture. In Proc. of the Fourth Canadian Conference on Computational Geometry, St. John's, Newfoundland, August 1992.

[12] Stoyan, Yu., G., Gilj, N., I. Methods and Algorithms of Placements of Planar Geometrical Figures (in Russian). Naukova Dumka, Kiyev, 1976.

[13] Vranková, E. Konštrukcia množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov využitím stredovej súmernosti metódou zjednotenia. Dizertácia MFF UK Bratislava 2000.

[14] Zahradník, P. Pathwise Monotone Geometric Bodies in the Plane and their Placements. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2009 (Vol. 18). ISBN 978-80-227-3141-6. Slovak University of Technology, Bratislava 2009, 120-127.

[15] Zahradník, P. Three Types of Monotone Bodies in the Plane and their Placements and their Mutual Relations. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 99-104.

[16] Zahradník, P. Monotónne množiny v En a ich rozniestňovanie. Dizertácia MFF UK Bratislava 2010.

*Článok prijatý dňa 28. júna 2012.*

**Adresa autorov - Adresses**

*doc. RNDr. Miloš Božek, PhD.*
*Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského*
*Mlynská dolina*
*SK - 842 48 Bratislava*
e-mail: milos.bozek@fmph.uniba.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# JENSENOVA NEROVNOSŤ AKO DÔLEŽITÝ MATEMATICKÝ NÁSTROJ A ÚČINNÝ PROSTRIEDOK PRE DOKAZOVANIE NEROVNOSTÍ

# JENSEN'S INEQUALITY AS AN IMPORTANT MATHEMATICAL TOOL AND FOR EFFECTIVE PROOVING CLASSICAL INEQUALITIES

JOZEF FULIER

**ABSTRAKT.** *V príspevku sú z hľadiska prípravy budúcich učiteľov matematiky prezentované základné pojmy a súvislosti teórie konvexných funkcií: podmienky konvexnosti, nutné podmienky a postačujúce podmienky pre konvexnosť (resp. rýdzu konvexnosť funkcie). V článku sa zdôrazňuje, že potenciál vyučovania konvexných funkcií (najmä v súvislosti s Jensenovou nerovnosťou) nie je dostatočne využitý a tejto problematike by mala byť venovaná väčšia pozornosť. Sú uvedené dva varianty Jensenovej nerovnosti, vrátane jej fyzikálnej a geometrickej interpretácie. Využitím Jensenovej nerovnosti sú dokázané dôležité klasické nerovnosti (AG-nerovnosť, HG-nerovnosť, Cauchyho – Schwarzova nerovnosť, Hölderova a Minkowského nerovnosť).*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *konvexná (rýdzo konvexná)funkcia, konkávna (rýdzo konkávna) funkcia, konvexná množina, podmienky konvexnosti, Jensenova nerovnosť, klasické nerovnosti*

**ABSTRACT**. *The contribution in terms of training of future mathematics teachers presented the basic concepts and background theory of convex functions: convexity conditions, necessary conditions and sufficient conditions for convex (or strictly convex) functions. The article emphasizes that the potential for learning convex functions (particularly in relation to the Jensen's inequality) is not sufficiently exploited, and this issue should be given greater attention. There are two variants of the Jensen inequality, including its physical and geometrical interpretation. Using the Jensen inequality is proved important classical inequalities (AG-inequality, HG-inequality, Cauchy-Schwarz inequality, Holder and Minkowski inequality).*

**KEY WORDS:** *convex (strictly convex) function, concave (strictly concave) function, convex set convexity condition, Jensen's inequality, classical inequalities.*

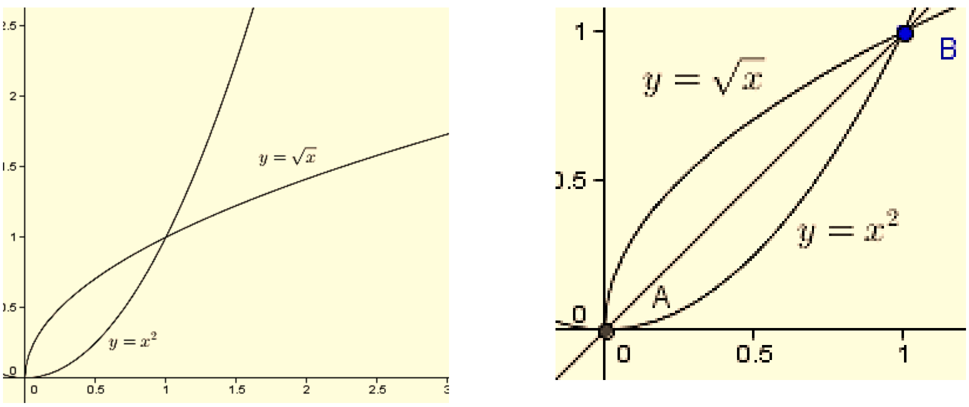
**CLASSIFICATION:** *D59, D89, I49*

## Úvod

V aplikáciách, pri riešení matematických problémov i v dôkazoch matematických viet sa veľmi často využívajú nerovnosti. V niektorých prípadoch je použitie nerovnosti unifikujúcim prvkom pri riešení celej triedy problémov (takýmto jednotiacim prvkom môže byť sústavné využívanie známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom, ktorú môžeme napríklad využiť pri riešení jednoduchých extremálnych úloh na elementárnej úrovni - bez využitia derivácií). Vedieť nájsť a následne dokazovať potrebné nerovnosti patrí k veľkému umeniu, pretože nerovnosti sú veľmi rôznorodé a ich dôkazy si spravidla vyžadujú rozličné techniky a prístupy, často prenikavú intuíciu a nemálo tvorivosti. Z uvedeného dôvodu je dobré mať prehľad o dôležitých nerovnostiach a o ich spôsoboch dokazovania. O tejto problematike bol vydaný už celý rad špecializovaných kníh, spomeňme napríklad monografiu (*Beckenbach* & *Bellman*, 1961), v ktorých je možné nájsť skutočne rôznorodé nerovnosti. Z odborného i pedagogického hľadiska je zaujímavé či aspoň tie najdôležitejšie nerovnosti nie je možné odvodiť či dokázať využitím čo „najmenšieho množstva“ elementárnych (alebo aspoň primerane jednoduchých) matematických nástrojov. Je vhodné si uvedomiť, že jedným z motorov rozvoja matematiky je proces zovšeobecnenia, ktorý spravidla spočíva v postupnom začleňovaní izolovaných poznatkov do všeobecnejšej formy, z ktorej tieto partikulárne prípady bezprostredne alebo sprostredkovane vyplývajú. Prirodzene asi ťažko môžeme očakávať, že sa nám podarí odvodiť akúsi *super-nerovnosť*, ktorá by zahrňovala všetky (či temer všetky) alebo aspoň významné skupiny dôležitých nerovností, pričom by bola naviac dostatočne jednoduchá, aby mohla byť vyučovaná (a azda i dokazovaná) už na strednej škole, prípadne v bakalárskom stupni vysokoškolského štúdia matematiky. V ďalšom pojednáme o jednej nerovnosti, ktorá si možno pomenovanie *super-nerovnosť* zaslúži. Ukážeme si prístup, ktorý v teórií nerovností, určite nepatrí k neznámym, ale rozhodne k málo využívaným. Ukážeme, že tento prístup si zasluhuje našu pozornosť, a to nielen z aspektu vyučovania základného kurzu matematickej analýzy na vysokej škole (napríklad v príprave učiteľov matematiky), ale svojou jednoduchosťou a kompaktnosťou aj z aspektu vyučovania matematiky na strednej škole. Ide o klasickú *Jensenovu nerovnosť* spolu s jej dôležitými aplikáciami.

## Konvexné a konkávne funkcie, podmienky konvexnosti, konvexné množiny

Uvažujme na intervale $J = [0, \infty)$ dve funkcie $f: f(x) = x^2$, $g: g(x) = \sqrt{x}$. Tieto funkcie majú na intervale $J$ veľa zhodných vlastností: obe sú spojité, rastúce, kladné a majú derivácie ľubovoľného rádu. Ich grafy sa však predsa len dosť odlišujú: funkcia $f$ *zrýchľuje svoj rast*, čo sa prejavuje na jej grafe tým, že sa (s rastom argumentu) *zakrivuje nahor*, naopak funkcia $g$ *spomaľuje svoj rast*, čo sa prejavuje na jej grafe tým, že sa *zakrivuje nadol*. Základnú odlišnosť týchto dvoch grafov môžeme ľahko identifikovať na grafoch reštrikcií týchto funkcií vzhľadom na interval $[0,1]$. Totiž grafy týchto dvoch funkcií majú dva priesečníky, body $A = (0,0), B = (1,1)$. V intervale $[0,1]$ graf funkcie $f$ (resp. graf funkcie $g$) leží (s výnimkou bodov $A, B$) celý pod ( resp. celý nad) priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ spájajúcej priesečníky $A, B$ uvedených grafov. Tento fakt môžeme interpretovať i tak, že body $A, B$ grafu *danej rastúcej funkcie* môžu byť spojené tromi základnými spôsobmi: buď úsečkou $AB$, alebo krivkou ležiacou celou (až na koncové body $A, B$) *pod úsečkou* $AB$, alebo krivkou ležiacou *nad touto úsečkou*[1].




Obr. 1 *Grafy konvexnej funkcie* $f(x) = x^2$ *a grafy konkávnej funkcie* $g(x) = \sqrt{x}$

[1] Analogické situácie nastanú i v prípade, ak dva body grafu spájame krivkami, ktoré sú grafmi *klesajúcich funkcií*.

O takýchto funkciách hovoríme, že majú rozličnú vypuklosť. Presnejšie, funkcia $f$ sa nazýva *konvexnou* (obšírnejšie: *rýdzo konvexnou*) *funkciou* a funkcia $g$ sa nazýva *konkávnou* (*rýdzo konkávnou*) *funkciou* v intervale $J$.

Poznamenajme, že samotný pojem konvexná funkcia a aj príslušná pamäťová stopa v mysliach študentov sú viazané najmä na operatívnu činnosť pri zostrojovaní náčrtkov častí grafu funkcie na intervale, v ktorom je funkcia rýdzo konvexná: dva body grafu funkcie, ktorá je rýdzo konvexná na istom intervale, spojíme súvislou rýdzo konvexnou krivkou, ktorá sa veľmi silne podobá na časť paraboly otvorenej smerom nahor (alebo na časť paraboly otvorenej smerom nadol, pri rýdzo konkávnej funkcii). Zaujímavé je, že študenti uznávajú fakt, že z hľadiska konštrukcie dostatočne verného náčrtku grafu funkcie je určite dôležité či je funkcia v danom intervale rýdzo konvexná, alebo rýdzo konkávna. Avšak, ak použijú neutrálnu polohu (teda príslušné body jednoducho spoja úsečkou) sami to nepovažujú (a často ani ich učitelia) za tak vážnu chybu, čo by nejak znehodnocovalo celý náčrtok grafu funkcie. Je teda tento pojem úplne nedôležitý? Pokúsime sa dať odpoveď na túto otázku. Ukážeme, že konvexnosť funkcie je v mnohých aspektoch veľmi dôležitý pojem, ktorý si určite zaslúži našu pozornosť.

Poznamenajme, že pojmy *konvexnosť a konkávnosť funkcie* zaviedol dánsky matematik *Johan Ludwig Jensen* (1859-1925), ktorý sa o význame týchto pojmov vyjadril takto: *Zdá sa mi, že pojem konvexnej funkcie je rovnako dôležitý, ako pojem funkcie nezápornej alebo funkcie rastúcej. Ak sa v tomto nemýlim, tento pojem by mal nájsť svoje miesto v elementárnych textoch venovaných teórii reálnych funkcií*."

V základnom kurze matematickej analýzy vo vysokoškolskej príprave budúcich učiteľov (v minulosti dokonca aj v matematike stredoškolskej) sa definuje pojem konvexnosti a konkávnosti pre funkciu jednej premennej napríklad takto:

**Definícia 1.** Hovoríme, že funkcia $f$ je *konvexná na intervale* $J \subset D(f)$, ak platí

$$\forall \boldsymbol{x_1, x, x_2} \in \boldsymbol{J}: \qquad \boldsymbol{x_1 < x < x_2} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)}. \qquad (1)$$

Výrok daný vzťahom (1) budeme nazývať ***podmienkou konvexnosti*** funkcie $f$ v intervale $J$.

*Geometrický význam podmienky konvexnosti* (1): na každom intervale $[x_1, x_2] \subset J$ všetky body grafu reštrikcie funkcie $f$ vzhľadom na interval $[x_1, x_2]$ *ležia pod alebo na* spojnici krajných bodov tohto grafu, t.j. bod $A = \big(x, f(x)\big)$ *neleží nad úsečkou* spájajúcou body $A_1 = \big(x_1, f(x_1)\big)$, $A_2 = \big(x_2, f(x_2)\big)$.

Definíciu *funkcie konkávnej*, resp. *rýdzo konvexnej*, resp. *rýdzo konkávnej na intervale* $J$ dostaneme, ak vo vzťahu (1) znak nerovnosti $\leq$ postupne nahradíme znakmi nerovností $\geq$, $<$, $>$. Príslušné výroky (so zmenou vyššie spomínaného znaku nerovnosti) nazývame *podmienkou konkávnosti*, resp. *podmienkou rýdzej konvexnosti*, resp. *podmienkou rýdzej konkávnosti.* Je zrejmé, že funkcia $f$ je konkávna, resp. rýdzo konkávna na intervale $J$, práve vtedy, ak funkcia $(-f)$ je konvexná (resp. rýdzo konvexná) na intervale $J$. Preto stačí pozornosť venovať iba *konvexným,* resp. *rýdzo konvexným funkciám*.

Sformulujme niekoľko ďalších tvarov *podmienok konvexnosti*, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou konvexnosti (1).

a) Ľahko nahliadneme, že rovnicu priamky určenej bodmi $A_1$, $A_2$, t.j. lineárnu funkciu $y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$ môžeme jednoduchou úpravou pretransformovať na tzv. *Lagrangeov interpolačný polynóm* známy z numerickej matematiky, ktorý má tvar

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Preto podmienku konvexnosti (1) môžeme zapísať aj v tvare

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2} \in \mathbf{J}: \qquad \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \boldsymbol{f(x)} \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \boldsymbol{f(x_1)} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \boldsymbol{f(x_2)}.. \qquad (2)$$

b) Ak v predchádzajúcej nerovnosti nahradíme $f(x) = f(x).1 = f(x)\frac{(x_2 - x)+(x-x_1)}{x_2 - x_1}$ dostaneme ďalšiu ekvivalentnú podmienku konvexnosti

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{J}: \qquad \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{f(x)-f(x_1)}}{\boldsymbol{x - x_1}} \leq \frac{\boldsymbol{f(x_2)-f(x)}}{\boldsymbol{x_2 - x}}. \qquad (3)$$

*Geometrický význam podmienky konvexnosti* (3): smernica priamky $\overleftrightarrow{A_1A}$ nie je väčšia ako smernica priamky $\overleftrightarrow{AA_2}$ .

c) Bezprostredne je tiež možné overiť, že výrok daný vzťahom (1) môžeme využitím vlastností determinantu prepísať do nasledovného *symetrického tvaru*

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{J}: \qquad \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{f(x_1)} & \boldsymbol{f(x)} & \boldsymbol{f(x_2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{f(x_1)} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{f(x)} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{f(x_2)} \end{vmatrix} \geq \mathbf{0}. \qquad (4)$$

*Geometrický význam podmienky konvexnosti* (4):
absolútna hodnota determinantu vo vzťahu (4) určuje obsah trojuholníka s vrcholmi $A_1 = (x_1, f(x_1))$, $A = (x, f(x))$, $A_2 = (x_2, f(x_2))$, pričom spomínaný determinant je kladný práve vtedy, ak vrcholy neležia na jednej priamke a cesta vrcholmi trojuholníka $A_1, A, A_2$ v postupnosti $A_1 \to A \to A_1 \to A_1$ je orientovaná proti chodu hodinových ručičiek.

d) Veľmi užitočný tvar *podmienky konvexnosti funkcie f* dostaneme nasledovne.

Zvoľme ľubovoľne, ale pevne body $x_1, x, x_2 \in J$ také, že $x_1 < x < x_2$ . Potom každý vnútorný bod $x \in [x_1, x_2]$ je možné jednoznačne zapísať v tvare $x = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1)$, kde $\lambda_2 = \frac{x-x_1}{x_2 - x_1} \in (0, 1)$. Ak označíme $\lambda_1 := 1 - \lambda_2$, teda $\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0, 1)$ potom bod $x \in (x_1, x_2)$ môžeme jednoznačne vyjadriť v tvare $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
To však znamená, že podmienku konvexnosti (2) môžeme prepísať do nasledovného tvaru
$(\forall x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x_2)(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1),\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Ak predpokladáme, že pre $x_1, x_2 \in J$ platí obrátená nerovnosť t.j. ak $x_2 < x_1$, potom vnútorný bod $x$ intervalu $[x_2, x_1]$ možno tiež jednoznačne zapísať v tvare $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Zopakovaním predchádzajúceho postupu dospejeme k tej istej nerovnosti

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Tento fakt nám umožňuje zapísať podmienku konvexnosti pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in J$, pričom stačí iba predpokladať, aby $x_1 \neq x_2$. Dokonca môžeme vynechať aj podmienku $x_1 \neq x_2$, pretože pre konvexné funkcie posledná nerovnosť zostane v platnosti aj v prípade $x_1 = x_2$.

Tým dostaneme ďalšiu *podmienku konvexnosti* v tvare

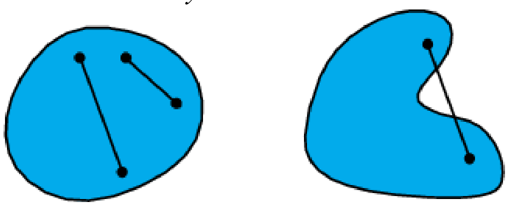
$$(\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{J})(\forall \boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}),\ \boldsymbol{\lambda_1} + \boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{1}):$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda_1 x_1} + \boldsymbol{\lambda_2 x_2}) \leq \boldsymbol{\lambda_1 f}(\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{\lambda_2 f}(\boldsymbol{x_2}). \qquad (5)$$

**Poznámka 1.** Využitím *podmienky konvexnosti* (5) môžeme okamžite zaviesť definíciu *konvexnej funkcie* aj pre prípad *funkcie* $n$ *−premenných*, t.j. funkcie $f: J \to \mathbb{R}$, kde $J \subset \mathbb{R}^n$, pričom vo všeobecnosti netreba žiadať, aby množina $J$ bola intervalom v $\mathbb{R}^n$, ale stačí aby $J \subset \mathbb{R}^n$ bola *konvexnou množinou*[2]. Toto súčasne napovedá, ktorú z podmienok (1) až (5) je výhodné vziať za definíciu konkávnej funkcie.

Je vhodné pripomenúť si, že s pojmom konvexnosti sa oboznamujú už žiaci základnej a strednej školy, keď hovoria o konvexných uhloch, konvexných mnohouholníkoch, konvexných telesách. Pojem konvexnej množiny patrí k základným pojmom geometrie i matematickej analýzy. Spravidla sa tento pojem definuje takto:

**Definícia 2.** Množinu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ nazývame *konvexnou množinou*, ak s ľubovoľnými bodmi $A, B \in \mathcal{D}$ patrí do množiny $\mathcal{D}$ celá úsečka spojujúca uvedené body. Algebricky zapísané: ak pre každé $A, B \in \mathcal{D}$ a každé $\lambda \in [0, 1]$ platí $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{D}$.

Ak každá z uvažovaných úsečiek $\overleftrightarrow{AB}$ leží celá (s možnou výnimkou krajných bodov $A, B$) vo vnútri $\mathcal{D}$, nazýva sa množina $\mathcal{D}$ *rýdzo konvexnou*.



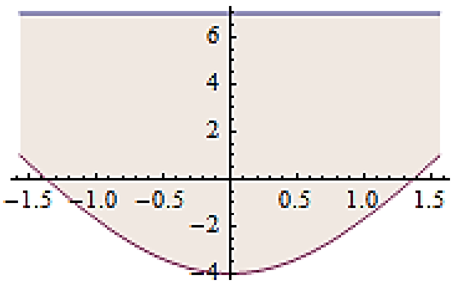
Obr. 2. *Konvexná a nekonvexná množina v* $\mathbb{R}^2$

Ako však súvisí pojem *konvexnej funkcie* s pojmom *konvexná množina*? Tento fakt, nebýva študentom celkom jasný. Jednou z možností, ako im môžeme ukázať súvislosť medzi pojmami *konvexná funkcia* - *konvexná množina* je, že definujeme tzv. *nadgraf* (*epigraf*) danej funkcie. Na chvíľu zvolíme trochu všeobecnejšie hľadisko a pojem nadgrafu zavedieme pre ľubovoľnú funkciu viacerých premenných.

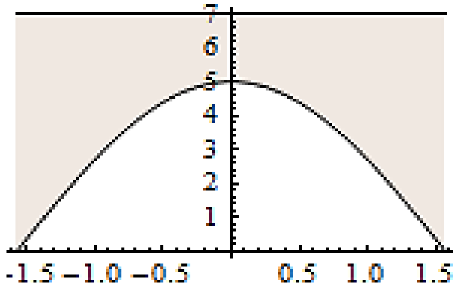
[2] Konvexná podmnožina $J \subset \mathbb{R}^1$ obsahujúca aspoň dva body je *interval*.

**Definícia 3.** Nech $f: D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^n$. *Nadgrafom (epigrafom)* funkcie $f$ rozumieme množinu $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}:\ x \in D,\ \ f(x) \leq y\}$.

Ľahko nahliadneme, že k tomu, aby *nadgraf funkcie* $f$ bol *konvexnou množinou* je nevyhnutné, aby aj *definičný obor funkcie* $f$ bol *konvexnou množinou*. Preto nás iste neprekvapí, že tento predpoklad sa objavuje v predpokladoch každej vety, ktorá nám dáva nutnú a postačujúcu podmienku k tomu, aby funkcia $f$ bola konvexná na množine $D$.




Obr. 3 Nadgraf *rýdzo konvexnej funkcie* $f: y = 1 - 5\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$




Nadgraf *rýdzo konkávnej funkcie* $g: y = 5\cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**Veta 1.** Nech $D \subset \mathbb{R}^n$ je konvexná množina a nech $f: D \to \mathbb{R}$. Funkcia $f$ je *konvexná* na množine $D$ vtedy a len vtedy, ak jej nadgraf, t.j. množina $G_f$ je *konvexnou množinou.*

*Dôkaz.* 1.⇒). Predpokladajme, že funkcia $f$ je konvexná na množine $D \subset \mathbb{R}^n$, dokážeme že jej nadgraf $G_f$ je konvexnou množinou. Nech $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_f$ a nech $\lambda \in [0, 1]$. Potom platí

$$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\,, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2\,).$$

Z konvexnosti funkcie a definície nadgrafu dostaneme

$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$, teda

$\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2) \in G_f$, čo znamená nadgraf $G_f$ funkcie $f$ je konvexná množina.

2.⇐). Nech $x_1, x_2 \in D$ a $\lambda \in [0, 1]$. Potom $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in G_f$ a teda

$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1 - \lambda)\big(x_2, f(x_2)\big) = \big(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\,,\ \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)\big) \in G_f$. .

Toto však podľa definície nadgrafu znamená, že

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

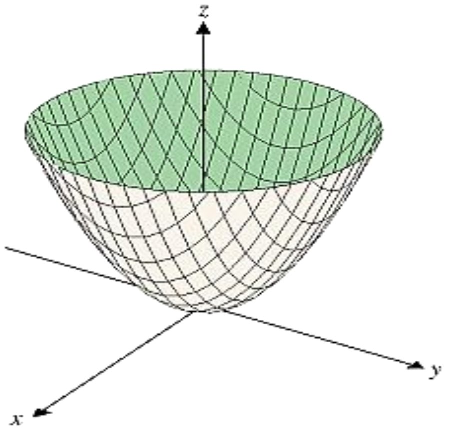
teda funkcia $f$ je konvexná.

V prípade funkcie *jednej*, príp. *dvoch premenných* je možné doplniť uvedené úvahy geometrickou interpretáciou prostredníctvom (modelov) grafov konvexných resp. konkávnych funkcií na konvexnej množine $D$.

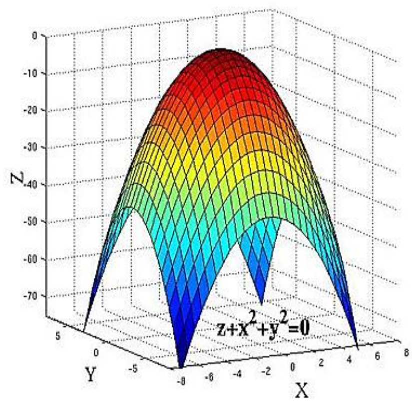
Konkrétne na Obr. 4a je graf *rýdzo konvexnej funkcie* $f: f(x, y) = x^2 + y^2$ definovanej na *konvexnej množine* $D = \mathbb{R}^2$ a na Obr. 4b je znázornený graf funkcie $g: g(x, y) = -x^2 - y^2$, ktorá je *rýdzo konkávna* na (*konvexnej*) *množine* $D = [-8{,}5] \times [-8{,}3]$.

Čo sa týka smeru zovšeobecňovania našich úvah o konvexnosti funkcie pre *funkcie viacerých premenných*, tento smer (napriek tomu, že je dôležitý) nebudeme ďalej rozvíjať, pretože pre našu, v podstate informatívnu úroveň výkladu, stačí využiť podmienky konvexnosti platné pre funkciu *jednej premennej*. Platí totiž nasledovná veta.

**Veta 2.** Funkcia $f: D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^n$, je konvexná množina, je *konvexnou funkciou* vtedy a len vtedy, ak zložená funkcia jednej premennej $g: g(t) = f(x + tv)$ je *konvexná* (vzhľadom na premennú $t$) pre všetky prípustné $x \in D, v \in \mathbb{R}^n$.




Obr. 4a: Graf rýdzo konvexnej funkcie dvoch premenných $f: f(x, y) = x^2 + y^2$




Obr. 4b: Graf rýdzo konkávnej funkcie dvoch premenných $g: g(x, y) = -x^2 - y^2$

**Nutné podmienky, postačujúce podmienky pre konvexnosť funkcie**

V základných kurzoch matematickej analýzy, v snahe dostať sa rýchle k aplikáciám, je venovaná hlavná pozornosť najmä postačujúcim podmienkam pre konvexnosť, resp. rýdzu konvexnosť funkcie, ktoré sú viazané najmä na existenciu derivácie prvého a druhého rádu danej funkcie. Menej pozornosti je venované *nutným podmienkam* pre konvexnosť funkcie. Vzhľadom na to, že *nadgraf konvexnej funkcie* na intervale $J$ je konvexnou množinou, ktorá je nevyhnutne i *súvislou množinou*, dá sa očakávať, že každá konvexná funkcia musí byť nevyhnutne *spojitou funkciou* v každom vnútornom bode intervalu $J$. Vzhľadom na nerovnosti v podmienke konvexnosti danej vzťahom (3), *diferenčné podiely* vystupujúce v tejto nerovnosti vykazujú istý druh monotónnosti a sú ohraničené, čo znamená, že ich jednostranné limity, ktoré sú jednostrannými deriváciami funkcie $f$ existujú v každom vnútornom bode intervalu $J$. Presnejšie, to môžeme sformulovať do nasledovnej vety takto:

**Veta 4.** Nech funkcia $f$ je *konvexná* na intervale $J$. Potom v každom vnútornom bode $x_0$ intervalu $J$ funkcia $f$:

(a) je *spojitá*,

(b) má konečné obe *jednostranné derivácie*, pričom $f'_+(x_0) \geq f'_-(x_0)$ a platí
$(\forall x \in J, x < x_0)$: $(f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$,
$(\forall x \in J, x > x_0)$: $(f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$.

(c) Množina bodov z intervalu $J$, v ktorých funkcia $f$ nie je diferencovateľná, je *najviac spočítateľná*. Ak funkcia je diferencovateľná v každom bode intervalu

$(a,b) \subset J$, potom derivácia $f'$ funkcie $f$ *neklesajúca* na $(a,b)$, resp. *rastúca* na $(a,b)$, ak funkcia $f$ je *rýdzo konvexná*.

Poznamenajme, že konvexná funkcia *nemusí byť spojitá v krajných bodoch* intervalu: stačí vziať napríklad funkciu $f: f(x) = 2 + \operatorname{sgn} x, x \in [-1,0]$, ktorá je konvexnou funkciou, ale zjavne *nie je spojitá* v bode $x = 0$.

Ak k základným predpokladom kladených na danú funkciu $f$, pridáme predpoklad *existenciu prvej derivácie*, či dokonca *druhej derivácie* v celom $J$, dostaneme veľmi jednoduché *postačujúce podmienky* pre konvexnosť, resp. rýdzu konvexnosť danej funkcie $f$.

**Veta 5.** Nech funkcia $f$ je diferencovateľná na intervale $(a,b)$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

(a) funkcia $f$ je rýdzo konvexná;

(b) funkcia $f'$ je rastúca;

(c) pre ľubovoľné $x_0 \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$ platí

$$(\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x_0}): (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \tag{6}$$

(t.j. nech pre každý bod $x_0 \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$ platí, body grafu funkcie $f$ prislúchajúce bodom $x \neq x_0$ ležia nad dotyčnicou ku grafu funkcie $f$ v bode $x_0$ ).

**Veta 6.** Nech funkcia $f$ je dvakrát diferencovateľná na intervale $(a,b)$. Funkcia $f$ je rýdzo konvexná (resp. rýdzo konkávna) na intervale $(a,b)$, vtedy a len vtedy, ak $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) pre všetky $x \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$ a keď neexistuje podinterval $I$ intervalu $(a,b)$, v ktorom by $f'' \equiv 0$. Špeciálne, ak $f''(x) > 0$ pre všetky $x \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$, tak funkcia $f$ je rýdzo konvexná na intervale $(a,b)$.

**Jensenova nerovnosť**

Ukážme si ešte dve ekvivalentné *podmienky konvexnosti*, ktoré formálne zovšeobecňujú podmienku konvexnosti (5) (samozrejme, že nie obsahovo, pretože to budú opäť *podmienky konvexnosti*, ktoré sú *ekvivalentné* s podmienkami predchádzajúcimi). Tieto podmienky konvexnosti, vzhľadom na ich široké možnosti využitia pri odvodzovaní dôležitých nerovností, sformulujeme explicitne do matematických viet a obe budeme nazývať *Jensenovou nerovnosťou*.

**Veta 7** (*Jensenova nerovnosť* I). Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Ak funkcia $f$ je *konvexná* na intervale $J$, potom pre každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in J$ a pre ľubovoľné kladné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda_1 x_1} + \boldsymbol{\lambda_2 x_2} + \dots + \boldsymbol{\lambda_n x_n}) \leq \boldsymbol{\lambda_1 f}(\boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{\lambda_2 f}(\boldsymbol{x_2}) + \dots + \boldsymbol{\lambda_n f}(\boldsymbol{x_n}) \tag{7}$$

Ak funkcia $f$ je *rýdzo konvexná* na intervale $J$, potom za vyššie uvedených predpokladov platí nerovnosť (7), pričom rovnosť v uvedenom vzťahu nastane len v prípade, ak platí $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

*Dôkaz*. Tvrdenie ľahko dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na *n*. Využitie indukčného predpokladu je zrejmé z nasledovnej schémy:

Predpokladajme, že tvrdenie vety platí pre nejaké $n = k \geq 2$, potom pre $n = k + 1$ a pre $\lambda_{n+1} < 1$ (opačnom prípade, nemáme čo dokazovať) platí

$$f\left(\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j x_j\right) = f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}}x_j\right) \le \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + $$
$$+ (1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}}x_j\right).$$

Využitím indukčného predpokladu a toho, že

$\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{k+1}}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-\lambda_{k+1}} = 1$, dostaneme

$$(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}}x_j\right) \le (1-\lambda_{k+1})\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{k+1}}f(x_j)\right) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j f(x_j).$$

**Veta 8** (*Jensenova nerovnosť* II). Nech $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Ak funkcia $f$ je *konvexná* na intervale $J$, potom pre každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in J$ a pre ľubovoľné kladné čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ platí vzťah

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right) \le \frac{\alpha_1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\boldsymbol{f}(x_1) + \frac{\alpha_1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\boldsymbol{f}(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_1}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\boldsymbol{f}(x_n). \quad (8)$$

Ak funkcia $f$ je *rýdzo konvexná* na intervale $J$, potom za vyššie uvedených predpokladov platí nerovnosť (8), pričom rovnosť v uvedenom vzťahu nastane len v prípade, ak platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

*Dôkaz.* Tvrdenie vety 8 bezprostredne vyplýva z vety 7, v ktorej kladieme $\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}$, pričom zrejme $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$.

**Fyzikálny význam Jensenovej nerovnosti**

Vlastnosť konvexných (resp. rýdzo konvexných) funkcií v tvare *Jensenovej nerovnosti* II má veľmi zaujímavú (a veľmi prirodzenú) ***fyzikálnu interpretáciu*** o polohe *ťažiska*[3] *(hmotného stredu, barycentra) sústavy hmotných bodov*, ktorá je pochopiteľná aj pre žiakov stredných škôl. Zopakujme si niektoré fakty.

V prvom rade, pod ťažiskom dvoch hmotných bodov $A, B$ s hmotnosťami $m_A, m_B$ budeme rozumieť taký bod $T$, že pre veľkosti $|AT|, |BT|$ úsečiek $AT, BT$ platí $\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{m_B}{m_A}$.

Toto je známa *podmienka rovnováhy na páke* (pozri Obr.5a). Karteziánske súradnice ťažiska $T$ je možné vyjadriť pomocou súradníc bodov $A, B$ veľmi jednoduchými vzťahmi:

$$x_T = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, y_T = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B}.$$

Túto definíciu ľahko zovšeobecníme aj na určenie *ťažiska* (*hmotného stredu*) troch bodov. Určíme ho ako *hmotný stred* ťažiska prvých dvoch bodov a tretieho bodu. Vo všeobecnosti ťažisko $n$ – bodov $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots, m_n$ určíme ako ťažisko bodov $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ a bodu $A_n$.

[3] *Ťažisko* (*hmotný stred*) je pôsobisko tiažovej sily pôsobiace na teleso. V skutočnosti je medzi pojmami *ťažisko a hmotný stred* principiálny rozdiel. Ťažisko zavádzame ako pôsobisko výslednice tiažových síl pôsobiacich na jednotlivé časti telesa v tiažovom poli (môžeme tiež povedať, že je to bod, voči ktorému je výsledný moment pôsobiacich tiažových síl nulový). Pojem ťažiska teda stráca význam v beztiažovom stave. Hmotný stred je bod, ktorý je pevne určený tvarom telesa a rozložením hustoty. Nezávisí na prítomnosti vonkajšieho silového poľa. V homogénnom tiažovom poli (napr. v tesnej blízkosti zemského povrchu) oba pojmy splývajú a veľmi často sa používajú ako synonyma. V nehomogénnom tiažovom poli je však nutné oba pojmy rozlišovať. Ťažisko homogénneho geometrického pravidelného telesa leží v jeho geometrickom strede (v geometrickom ťažisku).Ťažisko telesa leží v priesečníku ťažníc pri postupnom zavesení telesa v najmenej dvoch rôznych bodoch.

Jednoduchým výpočtom sa dá ukázať, že súradnice takto určeného ťažiska $T$ hmotných bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ nezávisí od poradia týchto bodov a platí:

$$x_T = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}, y_T = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

**Lema.** *Nech $\mathcal{U}$ je daný konvexný útvar, v ktorom leží sústava hmotných bodov $A_1, A_2, \dots, A_n$ s hmotnosťami $m_1, m_2, \dots, m_n$. Potom aj ťažisko (hmotný stred) $T$ tejto sústavy bodov leží v útvare $\mathcal{U}$.*

*Dôkaz.* Pre $n = 2$ tvrdenie lemy zrejme platí. Totiž ťažisko $T$ dvoch bodov z konvexného útvaru leží na úsečke spojujúcej tieto body, a táto celá leží v konvexnom útvare $\mathcal{U}$, teda aj $T \in \mathcal{U}$.
Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$, dokážeme, že platí aj pre $n = k + 1$. To však platí, pretože podľa predpokladu ťažisko $T_k$ bodov $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{U}$ leží v útvare $\mathcal{U}$. To však znamená, že ťažisko $T$ bodov $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ je ťažiskom dvoch bodov $T_k, A_{k+1} \in \mathcal{U}$, preto tiež leží v útvare $\mathcal{U}$.

Prepíšme tento *zákon statiky* do matematickej reči. Pre jednoduchosť predpokladajme, že body $A_1, A_2, \dots, A_n$, ktorých $x - ov$é súradnice sú po rade $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, ležia na grafe konvexnej funkcie $y = f(x)$, čiže $A_k = \left(x_k, f(x_k)\right)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ak uvážime, že body $A_1, A_2, \dots, A_n$ ležia v *nadgrafe* funkcie $f$, ktorý je podľa predpokladu *konvexnou množinou*, tak $y - ov$á súradnica $y_T$ ťažiska $T$ útvaru $\mathcal{U}$ nie je menšia ako hodnota funkcie $f$ v bode $x_T = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$, t.j. $f(x_T) \le y_T$ (pozri *Obr*. 5b). Teda platí

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\right) \le \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \cdots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

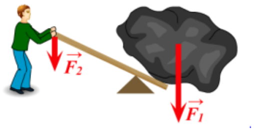
čo je *Jensenova nerovnosť* typu II.

Poznamenajme, že na úlohy typu: *nájsť ťažisko sústavy daných hmotných bodov*, môžeme pretransformovať aj veľa iných úloh z reálneho života. Konkrétne môže ísť i o takúto *úlohu optimalizačného typu*:

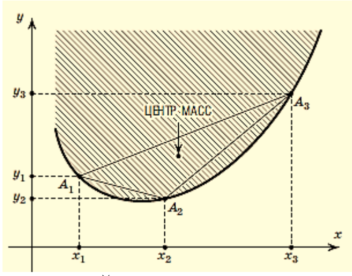
***Úloha****. Pre n dedín sa má postaviť spoločná škola. V prvej dedine žije $k_1$ detí školského veku, v druhej dedine žije $k_2$ detí a n-tej dedine žije $k_n$ detí školského veku. Akú geografickú polohu je potrebné zvoliť pre výstavbu novej školy, aby celková doba, ktorú potrebujú všetky deti k dochádzke do školy bola čo najmenšia?*

Túto úlohu môžeme riešiť *experimentálne* a jej riešenie je veľmi presvedčivé. Pre približné vyriešenie tejto úlohy totiž stačí položiť na stôl dostatočne podrobnú geografickú mapu oblasti, v ktorej sa nachádzajú všetky spomínané dediny, potom prevŕtať v stole otvory[4] v miestach, kde sa nachádzajú dediny, spustiť týmito otvormi *n* povrazov

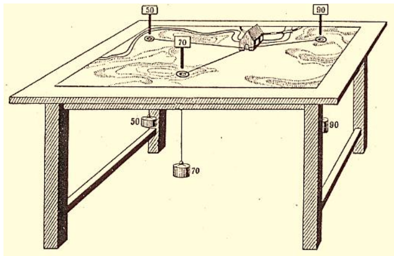
[4] Prirodzene dajú sa zvoliť i menej deštruktívne metódy.




Obr. 5a. *Rovnováha na páke*




Obr. 5b. Ťažisko (↓) bodov bodov $A_1, A_2, A_2$




Obr. 5c. *Určenie ťažiska sústavy hmotných bodov*

(zhotovených z čo najľahšieho materiálu, napríklad zo silónového vlákna), ktorých horné konce zviažeme uzlom a k spodným koncom priviažeme v príslušnom poradí závažia s hmotnosťami $k_1, k_2$, ..., $k_n$ vo vhodných hmotnostných jednotkách (napríklad v dekagramoch, aby sme mohli zanedbať vplyv hmotností jednotlivých povrazov). Riešenie sa nám objaví priamo pred očami. Škola má byť postavená na tom geografickom mieste, kde sa po vzniknutej rovnováhe objaví uzol. Na *Obr*. 5c je znázornené riešenie uvedenej úlohy pre $n = 3$, $k_1 = 50$, $k_2 = 70$, $k_3 = 90$, ktoré je uvedené v knihe (*Steinhaus*, 1953).

**Využitie Jensenovej nerovnosti**

*Jensenovu nerovnosť* sformulovanú pre ľubovoľnú konvexnú (resp. konkávnu) funkciu možno považovať" za základnú v klasickej teórii nerovností. Voľbou konkrétnych konvexných (resp. konkávnych) funkcií z nej možno získať viaceré dôležité nerovnosti. Poznamenajme, že v roku 1906 dánsky matematik *J. L. Jensen* uverejnil v časopise *Acta Mathematica* článok, v ktorom sa zaoberal Cauchyho dôkazom tzv. *AG – nerovnosti*, ktorú slávny francúzsky matematik *L. A. Cauchy* (1789 -1857) dokazoval tzv. spätnou indukciou. Pripomeňme si, že *AG – nerovnosť* je dôležitý vzťah medzi *aritmetickým a geometrickým priemerom* so širokým využitím v rozličných oblastiach matematiky.

**Príklad 1 (AG - nerovnosť).** Dokážte, že platí: *Pre ľubovoľné nezáporné čísla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *platí*

$$\sqrt[n]{x_1.x_2.\ \ldots.x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ \ldots + x_n}{n}.$$

*Pritom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, ak* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

*Dôkaz. Jensen* v spomínanom článku urobil pri dokazovaní *A-G nerovnosti* takúto úvahu. Ak aspoň jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je nula, *A-G nerovnosť* je triviálne splnená. Môžeme preto predpokladať, že všetky tieto čísla sú kladné. Vzhľadom na to, že funkcia $f: f(x) = -\ln x$ je klesajúca, tak logaritmovaním *A-G nerovnosti* dostaneme nerovnosť s ňou ekvivalentnú (pozor znak nerovnosti sa zmení na obrátený)

$$-\ln\frac{x_1 + x_2 + \ \ldots + x_n}{n} \leq \frac{-\ln x_1 - \ln x_2 - \ldots - \ln x_n}{n}. \qquad (9)$$

Túto nerovnosť je možné prepísať do tvaru

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ \ldots + f\ (x_n)}{n}.$$

*Jensen* analýzou *Cauchyho dôkazu* zistil že túto nerovnosť je možné odvodiť s využitím jediného predpokladu o funkcii $f$:
pre ľubovoľné dve čísla $x_1,\ x_2$ patriace intervalu $J$ platí
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$ [5])

Poznamenajme, že táto nerovnosť je historicky prvým známym špeciálnym tvarom *Jensenovej nerovnosti* (pre $n = 2,\ \lambda_1\ = \lambda_2 = \frac{1}{2}$). Funkcie spĺňajúce túto nerovnosť dnes označujeme názvom *J-konvexné funkcie*. Táto podmienka je slabšou podmienkou v porovnaní s *podmienkami konvexnosti* (1) až (8). Dá sa však dokázať nasledovné tvrdenie:
*Každá J-konvexná funkcia na intervale $J$, ktorá je spojitá na intervale $J$, je konvexnou funkciou (v zmysle definície 1) na tomto intervale.*

Vzhľadom na to, že funkcia $f: f(x) = -\ln x$ je J-konvexná a aj spojitá na (0,∞), tak je konvexná v zmysle definície 1. Túto skutočnosť môžeme štandardne overiť, priamo pomocou znamienka druhej derivácie funkcie $f$. Skutočne, pre každé $x \in (0,\infty)$ platí $f''(x) = (-\ln x)'' = \frac{1}{x^2} > 0$, preto funkcia $f$ je rýdzo konvexná na intervale $(0,\infty)$, čo znamená, že platí nerovnosť (9) a teda platí aj *AG – nerovnosť*, ktorá je s ňou ekvivalentná.

**Poznámka 1 (*GH-nerovnosť*).** Ak v *AG - nerovnosti* nahradíme $x_k > 0$ výrazom $\frac{1}{x_k}$ pre $k = 1,2,\dots,n$ dostaneme nerovnosť
$$\sqrt[n]{x_1.x_2.\ \dots.x_n} \ \ge\ \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}},$$
ktorá vyjadruje nerovnosť medzi *geometrickým* a *harmonickým priemerom* kladných čísel $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ a preto ju niekedy nazývame *GH-nerovnosťou.*

**Príklad 2 (Nerovnosť medzi váženým mocninným a váženým geometrickým priemerom).** Dokážte, že platí: *Pre ľubovoľné nezáporné čísla $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ a ľubovoľné kladné reálne číslo $p$, pre ľubovoľné kladné čísla $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ s vlastnosťou $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ platí*
$$\left(\lambda_1 x_1^p + \lambda_2 x_2^p + \dots + \lambda_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \ \ge\ x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}. \tag{10}$$
*Pritom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, ak $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.*

*Dôkaz.* Ak niektoré z čísel $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ sa rovná nule, nerovnosť zrejme platí. Môžeme preto predpokladať, že každé z uvedených čísel je kladné. Logaritmovaním vzťahu (10) a využitím monotónnosti logaritmickej funkcie dostaneme s ňou ekvivalentnú nerovnosť
$$\frac{1}{p}\ln\left(\lambda_1 x_1^p + \lambda_2 x_2^p + \dots + \lambda_n x_n^p\right) \ge \ln\left(x_1^{\lambda_1}.x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}\right),$$
ktorú jednoduchými ekvivalentnými úpravami prevedieme na nerovnosť
$$\ln\left(\lambda_1 x_1^p + \lambda_2 x_2^p + \dots + \lambda_n x_n^p\right) \ge \lambda_1 \ln x_1^p + \lambda_2 \ln x_2^p + \dots + \lambda_n \ln x_n^p.$$

[5] Táto podmienka sa objavila pri sledovaní Cauchyho dôkazu spätnej indukcie, ktorý spočíval v troch krokoch: najprv sa dokázala *A-G nerovnosť* pre $n = 2$, potom pre všetky čísla $n = 2^k,\ k \in \mathbb{N}$ a až v poslednom kroku pre zvyšné prirodzené čísla. Špeciálne sa dokazovalo, že ak uvedená nerovnosť platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, potom platí aj pre ľubovoľné prirodzené $m$, $2 \le m < n$.

Posledná nerovnosť je ekvivalentná s *Jensenovou nerovnosťou* pre funkciu $f\colon f(x) = -\ln x^p$, ktorá je rýdzo konvexná na intervale $(0,\infty)$, pretože v tomto intervale pre funkciu $f$ platí $f''(x) = \frac{p}{x^2} > 0$. Toto už dokazuje platnosť nerovnosti (10).

**Poznámka 2.** Ak v dokázanej nerovnosti položíme $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ a $p = 1$ dostaneme *AG-nerovnosť* a pre $p = 2$ dostaneme známu nerovnosť medzi *kvadratickým priemerom* a *geometrickým priemerom* nezáporných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$).

**Príklad 3 (Nerovnosti medzi mocninnými priemermi)**. Dokážte, že platí: *Pre ľubovoľné kladné čísla* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *a ľubovoľné* $p > q > 0$ *platí*

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}} \geq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q}{n}}.$$

*Dôkaz*. Vzhľadom na to, že $\frac{p}{q} > 1$, funkcia $f\colon f(u) = u^{\frac{p}{q}}$ je rýdzo konvexná na intervale $(0,\infty)$. Aplikáciou Jensenovej nerovnosti pre ľubovoľné kladné čísla $u_1, u_2, \dots, u_n$, a voľbou $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ dostaneme

$$\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots, + u_n}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \leq \frac{u_1^{p/q} + u_2^{p/q} + \cdots + u_n^{p/q}}{n}.$$

Umocnením poslednej nerovnosti s exponentom $\frac{1}{p}$ a dosadením za $u_k = x_k^q$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$ dostaneme požadovanú nerovnosť.

**Príklad 4 (Cauchyho – Schwarzova nerovnosť).** Dokážte, že platí: *Pre ľubovoľné kladné čísla* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ *platí*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

*Dôkaz.* Funkcia $f\colon f(x) = x^2$ je rýdzo konvexná na $(-\infty,\infty)$. Napíšme pre túto funkciu *Jensenovu nerovnosť II*

$$\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}\right)^2 \leq \frac{\alpha_1 (x_1)^2}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} + \frac{\alpha_1 (x_2)^2}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} + \cdots + \frac{\alpha_1 (x_n)^2}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}, \qquad (\alpha_k > 0).$$

Odtiaľ máme

$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)^2 \leq (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_1 x_2^2 + \cdots + \alpha_1 x_n^2) \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Položením $\alpha_k = b_k^2$, $x_k = \frac{a_k}{b_k}$ pre $k = 1,2,\dots,n$ dostaneme požadovanú nerovnosť.

**Príklad 5 (Hölderova nerovnosť).** Dokážte, že platí: *Nech* $p, q$ *sú ľubovoľné kladné čísla s vlastnosťou* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Potom pre ľubovoľné kladné čísla* $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ *platí nerovnosť*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Dôkaz.* Ľahko nahliadneme, že $p > 1$, preto funkcia $f: f(x) = x^p$ je rýdzo konvexná na $(0, \infty)$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade napíšme pre túto funkciu *Jensenovu nerovnosť II*

$\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}\right)^p \leq \frac{\alpha_1 (x_1)^p}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + \frac{\alpha_1 (x_2)^p}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + \cdots + \frac{\alpha_1 (x_n)^p}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$, $(\alpha_k > 0)$, odkiaľ dostaneme

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ak uvážime, že $\frac{p-1}{p} = q$, položením $\alpha_k = b_k^q$, $x_k = a_k\, b_k^{1-q}$ pre $k = 1, 2, \dots, n$, dostaneme požadovanú nerovnosť.

**Príklad 6 (Minkowského[6] nerovnosť).** Dokážte, že platí: *Pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ platí nerovnosť*

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . \ \dots\ . a_n} + \sqrt[n]{b_1 . b_2 . \ \dots\ . b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1).(a_2 + b_2). \ \dots\ .(a_n + b_n)}\,.$$

*Dôkaz.* Pri dôkaze tejto nerovnosti využijeme funkciu $f: f(x) = \ln(1 + e^x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. Ľahko overíme, že táto funkcia je rýdzo konvexná na intervale $(-\infty, \infty)$, pretože $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$. Aplikovaním *Jensenovej nerovnosti II*, pričom $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ dostaneme pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_n$ nerovnosť

$$\ln\left(1 + e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(1 + e^{x_k})\,.$$

Využitím základných vlastností logaritmickej funkcie a následným odlogaritmovaním získanej nerovnice dostaneme

$$1 + e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k} \leq (1 + e^{x_1})^{\frac{1}{n}}.(1 + e^{x_2})^{\frac{1}{n}}.\dots.(1 + e^{x_n})^{\frac{1}{n}}.$$

Zvolením $x_k = \ln\frac{b_k}{a_k}$ pre $k = 1, 2, \dots, n$ po jednoduchej úprave dostaneme nerovnosť

$$1 + e^{\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}}.e^{\ln\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}}}.\dots.e^{\ln\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \leq \sqrt[n]{\left(1 + e^{\frac{b_1}{a_1}}\right)\left(1 + e^{\frac{b_2}{a_2}}\right).\dots.\left(1 + e^{\frac{b_n}{a_n}}\right)},$$

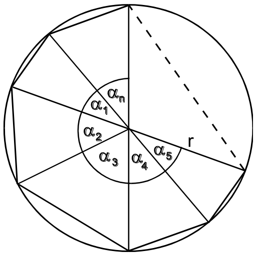
z ktorej po jednoduchej úprave a po vynásobení získanej nerovnosti vzťahom $\sqrt[n]{a_1 . a_2 . \ \dots\ . a_n}$ dostaneme požadovanú nerovnosť.

Na záver tejto časti uveďme ešte riešenie jednej peknej extremálnej úlohy.

**Príklad 7.** Dokážte, že zo všetkých konvexných $n$ −uholníkov $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ vpísaných do danej kružnice má pravidelný $n$-uholník najväčší obsah.

*Dôkaz.* Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ľubovoľne, ale pevne zvolené. Nech do kružnice so stredom $S$ a polomerom $r$ je vpísaný konvexný $n$-uholník. Vzhľadom na to, že hľadáme $n$-uholník s maximálnym obsahom, bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať, že stred kružnice

[6] *Hermann Amandus Schwarz* (1843-1921), *Otto Ludwig Hölder* (1859-1937) a *Hermann Minkowski* (1864 – 1909) boli významní nemeckí matematici




Obr. 6. *Konvexný $n$-uholník*

$S$ je vnútorným bodom daného $n$-uholníka. V opačnom prípade je totiž možné zostrojiť vpísaný $n$-uholník s väčším obsahom, pričom stred kružnice $S$ je už jeho vnútorným bodom. Z *Obr.* 6 ľahko nahliadneme, že každý takýto $n$-uholník sa skladá z $n$ *rovnoramenných trojuholníkov*, ktoré majú v strede $S$ danej kružnice spoločný vrchol. Označme jednotlivé stredové uhly (sú uhlami oproti základniam v jednotlivých rovnoramenných trojuholníkov), postupne symbolmi: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Zrejme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2\pi$, pričom $\alpha_k \in (0, \pi)$, pre $k = 1, 2, \dots, n$. Dôkaz bude ukončený, ak dokážeme, že $n$-uholník s maximálnym obsahom je taký, pre ktorý platí

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n.$$

Možno overiť, že obsah $P_k$ rovnoramenného trojuholníka, ktorý prislúcha stredovému uhlu $\alpha_k$ sa rovná hodnote $\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha_k$, preto pre obsah $P$ celého vpísaného $n$-uholníka platí $P = \sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{1}{2}r^2 \sum_{k=1}^{n} \sin \alpha_k$. Ľahko overíme, že funkcia $f: f(x) = -\frac{1}{2}r^2 \sin x$ je v intervale $J = (0, \pi)$ *rýdzo konvexná*, preto pre túto funkciu platí *Jensenova nerovnosť*

$$f\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}\right) \le \frac{f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_n)}{n}, \alpha_k \in (0, \pi), \text{pre } k = 1, 2, \dots, n,$$

pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, ak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.
To však znamená, že pre obsah $P$ ľubovoľného vpísaného $n$-uholníka platí nerovnosť $P = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n) \le \frac{1}{2}r^2 n \sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{2}r^2 n \sin \frac{2\pi}{n}$, preto vždy platí $P \le \frac{1}{2}r^2 n \sin \frac{2\pi}{n}$, pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, ak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{2\pi}{n}$. To je naozaj možné a nastane práve vtedy, ak príslušný vpísaný $n$-uholník je *pravidelný*.

## Záver

Ukázali sme, že *Jensenova nerovnosť* je skutočne užitočným, účinným a najmä vysoko efektívnym nástrojom pre dokazovaní *klasických nerovností*, na ktorých sú založené dôkazy dôležitých viet, resp. s ich využitím je možné skracovať riešenia rôznych, najmä extremálnych úloh (a to dokonca bez použitia derivácií). O význame konvexnosti funkcie svedčí fakt, že pri riešení extremálnych problémov s často s úspechom využívané tvrdenie, v ktorej predpoklad *konvexnosti funkcie* (vo všeobecnosti funkcie *n – premenných*) je veľmi dôležitý. Svedčí o tom napríklad nasledovné tvrdenie, ktoré zovšeobecňuje známe tvrdenie z jednorozmerného prípadu, na prípad ľubovoľnej dimenzie $n$ (dôkaz je možné nájsť napríklad v práci (*Došlý*, 2005) či (*Borwein & Lewis*, 2000)): *Nech $f: D \to \mathbb{R}$ je konvexná funkcia na konvexnej množine $D \subset \mathbb{R}^n$. Potom ľubovoľné lokálne minimum funkcie $f$ je aj globálnym minimom tejto funkcie. Množina bodov, v ktorých funkcia $f$ nadobúda svoje minimum je konvexnou množinou. V prípade, že funkcia $f$ je na množine rýdzo konvexná, tak táto množina nanajvýš jednoprvková. Ak funkcia $f$ je naviac diferencovateľná na množine $D$ a $x_0 \in D$ je jej stacionárnym bodom, potom bod $x_0$ je bodom globálneho minima.*

Azda i toto dokumentuje, že konvexnosť funkcie je naozaj dôležitou vlastnosťou funkcie a určite stojí za to, aby sa ňou študenti bližšie zaoberali už v úvodných partiách matematickej analýzy. Bližšie oboznámenie sa s vlastnosťami konvexných funkcií, spolu s matematickej analýzy. Bližšie oboznámenie sa s vlastnosťami konvexných funkcií, spolu s využitím *Jensenovej nerovnosti* pri odvodzovaní klasických nerovností, sa môže stať vhodnou propedeutikou pre štúdium konvexnej analýzy.

**Literatúra**

[1] Beckenbach, E.F.- Bellman, R. (1961) Introduction to Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[2] Borwein J. M., Lewis A. S. (2000) Convex Analysis and Nonlinear Optimization. Springer-Verlag. New Yourk-Berlin-Heidelberg. 2000.

[3] Došlý, O. (2005) Základy konvexnexní analýzy a optimalizace v $R^n$. Skriptum MU Brno, Brno 2005

[4] Engel, A. (1998) Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York 1998.

[5] Fulier , J. – Vrábel, P.(1997) Diferenciálny počet. UKF Nitra, Nitra 1997

[6] Gunčaga, J. (2001) Jensenova nerovnosť, In: Disputationes Scientificae, č. 2, 2001, KU, Ružomberok, s. 91 - 99.

[7] Ižboldin, O.- Kurljandčik, L. (2000) Neravenstvo Jensena. Kvant, 2000/No 4, s. 7-10

[8] Jensen J. L. W. V. (1906) Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. In: Acta Math. 30 (1906), strana 175 - 193

[9] Kufner, A. (1975) Nerovnosti a odhady, ŠMM 39. Praha, Mladá fronta 1975

[10] Larson, C. L. (1983) Problem Solving Through Problems, Springer Verlag GmbH &GKG New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983

[11] Přinosil, M. (2008) Užití Jensenovy nerovnosti. Matematika - fyzika - informatika. č. 6/17, s. 321-330. Praha: Prometheus, 2008.

[12] Solovjev, J.P. (2005) Neravenstva. Izd. Moskovskogo nepreryvnogo matematičeskogo obrazovania, Moskva 2005

[13] Steel, J. M. (2004) The Cauchy-Schwarz Master Class - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities, Cambridge University Press, New York 2004.

[14] Steinhaus, G. (1953) Matematický kaleidoskop. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953

*Článok prijatý dňa 1. júla 2012.*

**Adresa autora**

*Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: jfulier@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ROZVÍJANIE PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI PROSTREDNÍCTVOM MANIPULÁCIE S ARCHIMEDOVSKÝMI TELESAMI

# DEVELOPMENT OF SPATIAL IMAGINATION BY USING MANIPULATIVES WITH ARCHIMEDEAN SOLIDS

EVA BARCÍKOVÁ

**ABSTRAKT.** *V príspevku poukazujeme na použitie archimedovských telies vo vyučovaní stereometrie ako aj planimetrie. Zaoberáme sa princípom priestorovej manipulácie a virtuálnej vizualizácie ako dôležitej vyučovacej metódy zameranej na rozvoj priestorovej predstavivosti. Prezentujeme jeden z možných postupov skladania modelov týchto telies s použitím stavebnice Polydron. Prostredníctvom navrhnutých manipulačných aktivít chceme sústrediť pozornosť na tri spôsoby získania archimedovských telies z platónskych mnohostenov.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ:** *archimedovské telesá, stavebnica Polydron, manipulačné aktivity v geometrii.*

**ABSTRACT.** *In the article we pointed on using Archimedean solids in teaching of space geometry as well as in plane geometry. The contribution deals with the principle of spatial manipulation and virtual visualization, as an important teaching method aimed at promoting development of spatial imagination. We present one possible guidelines of how to build models of these solids by using the construction set, Polydron. Through these manipulating activities we want to focus on three possible ways of obtaining archimedean solids.*

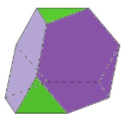
**KEY WORDS:** *Archimedean solids, construction set Polydron, manipulating geometry activities*

**CLASSIFICATION:** *D45, G45*

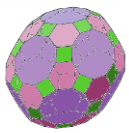
## Archimedovské telesá

Vo všeobecnosti za archimedovské teleso považujeme taký konvexný mnohosten, ktorého steny sú pravidelné mnohouholníky rôznych typov, ktorých hrany majú rovnakú dĺžku. pričom každý vrchol inciduje s pravidelnými mnohouholníkmi všetkých typov a tie sú "usporiadané" okolo každého vrcholu rovnakým spôsobom.

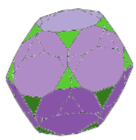
Medzi archimedovské radíme tieto telesá:



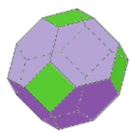
zrezaný štvorsten



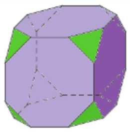
veľký rombikosahedron



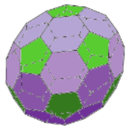
zrezaný dodekahedron



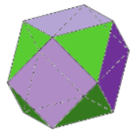
zrezaný oktahedron



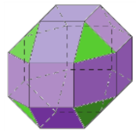
zrezaná kocka



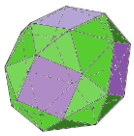
zrezaný ikosahedron



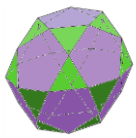
kubooktahedron



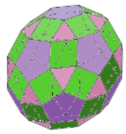
malý rombokubooktahedron



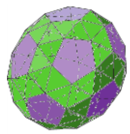
otupená kocka



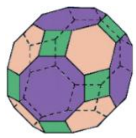
ikosadodekahedron



malý romboikosahedron



otupený dodekahedron



veľký rombikoboktahedron

Pomenované sú podľa Archimeda (287 – 212 pred n. l.), ktorý ich študoval a popísal 13. Predpokladá sa, že ich zostrojil z piatich pravidelných mnohostenov. O Archimedovej práci sa však dozvedáme sprostredkovane z diela iného matematika – Alexandrijského encyklopedistu Pappa *Mathematikai synagogai*. V období renesancie boli „znovuobjavené“ a venovali sa im tak matematici, ako aj umelci (napr. dielo Luca Pacioliho ilustrované Leonardom Da Vincim, Albrecht Dürrer.). Teóriu polopravidelných mnohostenov rozvíjal okrem iných aj Johannes Kepler (1571 - 1630), ktorý pomenoval 13 archimedovských telies a určil vzorce pre výpočet ich obsahov a objemov. Definoval tiež prismy a antiprismy. Vo svojom diele *Harmonices mundi* Kepler popisuje zostrojenie archimedovských telies osekaním platónsky telies a uvádza tiež dôkaz existencie práve 13 polopravidelných mnohostenov. Až v 20. storočí bol objavený tzv. archimedovsko-aškinezeovský mnohosten, ktorý sa často označuje ako 14. archimedovské teleso. Vo svojich prácach sa im venovali okrem iných aj Coxeter H. S. M.[4] Cromwell P. R.[2]a iný. Z domácich autorov napríklad Jucovič E. [3], v ktorého diele možno nájsť odvodenie rovníc vrcholových postupností polopravidelných konvexných mnohostenov. Podrobnejšie odvodenie týchto rovníc uvádza M. Konrádová v článku *Archimedovské mnohosteny veselo i vážne* [12].

### Konštrukcia archimedovských telies

Podľa Heróna vznikli Archimedovské telesá jedným z týchto 4 spôsobov, ktoré spolu označujeme ako ***orezanie*** :

1. vrcholy pravidelných mnohostenov zrezal rovinami rozpoľujúcimi všetky hrany vedúce k jednotlivým vrcholom

2. reznými rovinami odťal z hrán menšie časti ako polovice tak, aby vznikli pravidelné mnohouholníky
3. odsekol hrany platónskeho telesa rovinou rovnobežnou s hranou, odtínajúcou na ostatných hranách rovnaké časti
4. do steny pravidelného mnohostena umiestnil sústredný pravidelný mnohouholník, podobný pôvodnému a pootočený o určitý uhol k hranám pôvodnej steny – vrcholy týchto mnohouholníkov pospájal a zvyšné časti odstránil.

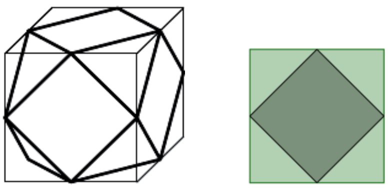
Ďalšie možné spôsoby vzniku archimedovských telies sú tzv. ***rozšírenie*** a **otupenie** platónskych, resp. archimedovských telies. Pri týchto postupoch z pôvodného telesa neodstraňujeme žiadne časti, ale pridávame ďalšie steny.

**Práca so študentmi**

Konštrukciu archimedovských telies spomenutými tromi spôsobmi (orezaním, rozšírením a otupením) sme demonštrovali na kocke s využitím stavebnice Polydron na workshope pre študentov a doktorandov. Workshop sa uskutočnil v rámci letnej školy doktorandov a zúčastnilo sa ho 14 doktorandov a 7 študentov. Úlohy nasledovali za sebou tak aby študenti v jednoduchej následnosti sami pochopili jednotlivé spôsoby vzniku archimedovských telies. Keďže išlo o budúcich učiteľov matematiky boli úlohy volené ako inšpirácia pre vyučovanie geometrie. Samostatnej práci študentov predchádzalo uvedenie niekoľkých základných pojmov ako vrcholová postupnosť a zadefinovanie konvexného polopravidelného mnohostena. Taktiež sme uviedli dôkaz, že počet stien incidujúcich s jedným vrcholom môže byť 3, 4 alebo 5. Po stručnom úvode do problematiky dostali študenti postupne tri úlohy, ktoré riešili v skupinkách (väčšinou po 3). Úlohy riešili skladaním stavebnice Polydron, pričom mali k dispozícii len niektoré diely stavebnice – malé štvorce, pravouhlé a rovnostranné trojuholníky. Zároveň mohli celý čas využívať dynamickú vizualizáciu modelu telesa prostredníctvom softvéru Poly 1.12.

Prvá úloha bola pre študentov najťažšia, avšak zároveň najlepšie preverila ich geometrické poznatky a priestorovú predstavivosť. Pri tejto úlohe mali možnosť si uvedomiť rozdiely v použití didaktickej stavebnice a softvéru, význam ich použitia na vyučovaní ako aj význam zaradenia archimedovských telies do vyučovania matematiky.

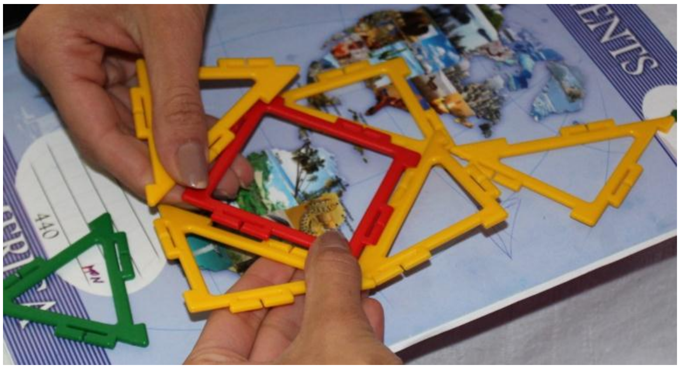
*Úloha*: Navrhnite ako vytvoriť kocku z Polydronu tak, aby ju bolo možné orezaním[7] vrcholov previesť na kubooktahedron.



Obrázok 1: Znázornenie kubooktahedronu a rezu na jednej stene kocky

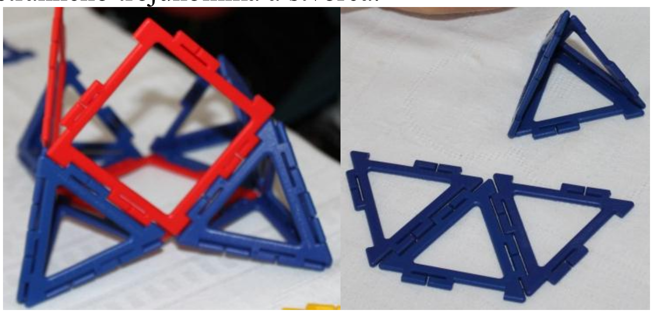
Úloha sa zdá byť jednoduchá avšak prepona pravouhlého trojuholníka má rôznu dĺžku ako strana štvorca, čiže tieto dva diely pri riešení nemohli spolu použiť.

[7] Jednotlivé diely stavebnice museli zostať zachované.



Obrázok 2

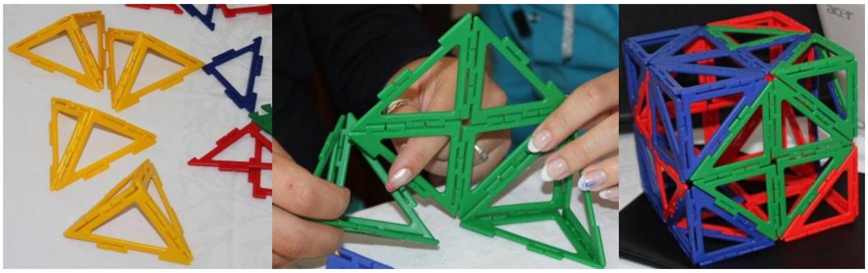
Po tomto zistení pokračovali v skladaní väčšinou spojením štvorca s rovnostranným trojuholníkom. Časť študentov si svoj omyl uvedomila až v momente, keď zložili celé teleso, ktoré však nebolo kockou. Následne sa niektorí snažili poskladať štvorec z rovnostranných trojuholníkov. Vhodnými otázkami boli vedení k zamysleniu sa nad vlastnosťami rovnostranného trojuholníka a štvorca.



Obrázok 3

Študenti, ktorí si uvedomili, že majú použiť pravouhlé trojuholníky pokračovali jedným z nasledovných postupov:

- v prvom kroku vytvorili „rohy“ kocky z troch pravouhlých trojuholníkov, ktoré budú orezávať a následne hľadali štvorcovú stenu prislúchajúcu kubooktahedronu.
- Snažili sa poskladať štvorec z pravouhlých trojuholníkov s vpísaným menším štvorcom tak ako znázorňuje obrázok rezu jednej steny kocky.



Obrázok 4

V tomto bode väčšinou dospeli k ďalšej prekážke, keď sa snažili menší štvorec zložiť z dvoch pravouhlých trojuholníkov. Takto zložený štvorec má stranu rovnako dlhú ako odvesna použitého trojuholníka a teda k nemu nemohli pripojiť ďalšie pravouhlé trojuholníky (spájali by odvesnu s preponou). Študenti si tak pri manipulácii so stavebnicou zopakovali aj vedomosti o pravouhlom trojuholníku.

Potom, ako prekonali tieto problémy podarilo sa im vyhovujúci model kocky poskladať.

Ďalšie úlohy boli zostrojiť kubooktahedron z kocky bez toho, aby z nej čokoľvek odstránili. Riešením bolo nahradenie hrán kocky rovnostrannými trojuholníkmi. Pri riešení danej úlohy bolo dôležité uvedomiť si, že steny archimedovských telies sú pravidelné mnohouholníky.

Následne boli študenti vyzvaní, aby skúmali pridávaním modelov štvorcov a trojuholníkov rôzne možnosti zostrojenia archimedovského telesa. Vďaka týmto úlohám pochopili proces rozšírenia a otupenia.

Keďže mali k dispozícii vizualizáciu telesa prostredníctvom Poly 1.12., s úlohami už študenti nemali problémy. Rozšírenie a otupenie považovali za jednoduchší spôsob vzniku archimedovského telesa ako procesu orezávania vrcholov.Na záver workshopu mohli študenti vyjadriť svoj názor na aktivity ako aj samotné použitie archimedovských telies na hodinách matematiky.

Z názorov študentov vyplýva, že tieto aktivity rozvíjajú :

- priestorovú predstavivosť,
- kreativitu,
- „predstavu o plášti telesa“,
- schopnosť predstaviť si teleso z rôznych strán“,
- logické myslenie a jemnú motoriku.

Skladanie archimedovských telies má podľa nich význam pri opakovaní učiva geometrie.

Ďalší postreh z priebehu workshopu je , že konštrukcia modelov archimedovských telies použitím manipulácie so stavebnicou Polydron má u študentov väčší ohlas ako vizualizácia prostredníctvom programu Poly 1.12.

## Záver

Hoci archimedovské telesá nie sú bežne zavádzané do vyučovania matematiky, práca so študentmi ukázala ich široké uplatnenie. Pri skladaní modelov a riešení úloh o archimedovských telesách s použitím rôznych didaktických stavebníc, či modelov sa u žiakov rozvíjajú kognitívne a motorické schopnosti. Žiaci si zároveň zopakujú poznatky o platónskych telesách, ale aj rovinných útvaroch (trojuholník, štvorec, pravidelné mnohouholníky). Študenti si počas workshopu mali možnosť vyskúšať manipulačné aktivity ako žiaci a zhodnotiť ich ako budúci učitelia. Vďaka týmto rôznym uhlom pohľadu sa domnievame, že si lepšie uvedomia význam didaktických pomôcok a manipulačných aktivít na hodinách geometrie.

## Literatúra

[1] Vallo, D. – Šedivý, O. (2010). Mnohosteny 1. Cesta k rozvoju geometrických predstáv. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2010, ISBN 978-80-8094-7354, s. 108

[2] Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra. New York: Cambridge University Press, ISBN 9-521-55432-2

[3] Jucovic, E. (1981). Konvexné mnohosteny, Bratislava, Veda vydavateľstvo SAV

[4] Coxeter, H. S. M. (1940).Regular and Semi-Regular Polytopes I. Math. Z. 46, 380-407

[5] Pavlíková, I. (2011). Polopravidelné mnohostěny. Bakalářská práce. Brno: Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita

[6] Židek O. (1998). Konvexné polopravidelné mnohosteny. Zborník PdF TU Trnava

[7] Žilková K. (2009). Metóda virtuálnej priestorovej manipulácie vo vyučovaní matematiky. In: Journal of Technology and Information Education, Roč. 2, č. 1 (2009), s. 33-39

[8] Vallo D. a kol. (2012) Geometria telies ...všeobecne a pútavo. Nitra: FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 505.ISBN 978-80-558-0106-3

[9] Vidermanová, K. (2008).Manipulatívna geometria In: Mladí vedci 2008 : vedecké práce doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov / Zdenka Rózová a kol. - Nitra : UKF, ISBN 978-80-8094-285-4, S. 703-707.

[10] Pavlovičová, G., Rumanová, L. (2008). Geometrický softvér vo vyučovaní matematiky In: Nové trendy v matematickom inžinierskom vzdelávaní 2008 : zborník vedeckých prác z medzinárodného vedeckého seminára. - Nitra : SPU, ISBN 978-80-552-0038-5, S. 115-120.

[11] Kavitha d/o Krishan. Polyhedra. [online], dostupný na http://www.math.nus.edu.sg/~urops/Projects/Polyhedra.pdf [cit. 20. 2. 2012]

[12] Konrádová, M.:Archimedovské mnohosteny veselo i vážne [online], dostupný na www http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2004/052_konradova.pdf [cit. 12. 1. 2012]

*Článok prijatý dňa 8. júla 2012*

## Adresa autorov

*PaedDr. Eva Barcíková*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozova*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74, Nitra*
e-mail: eva.barcikova@ukf.sk

## Poďakovanie

Príspevok je publikovaný s podporou projektu KEGA: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# STRUKTURÁLNÍ VLASTNOSTI JISTÝCH GRUP PROSTORŮ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC TŘETÍHO ŘÁDU

# STRUCTURAL PROPERTIES OF CERTAIN GROUPS OF SOLUTION SPACES OF THIRD ORDER LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA

**ABSTRAKT.** *V teorii lineárních diferenciálních rovnic je užitečný postup při zobecnění výsledků pro rovnice druhého řádu na případ rovnic n-tého řádu založen na vyřešení problému pro rovnice třetího řádu. Užitím jedno-jednoznačné korespodence mezi homogenními diferenciálními rovnicemi a jejich prostory řešení jsou získány informace o grupách prostorů řešení, konkrétně je zodpovězena otázka řešitelnosti grupy prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic a přiblíženy některé její další vlastnosti.*

**KLÍČOVÁ SLOVA**: *Diferenciální rovnice, prostory řešení homogenních diferenciálních rovnic, řešitelná grupa.*

**ABSTRACT.** *In the theory of linear differential equations there is the useful method for the generalization of the results for the second-order equations to the case of the n-th order equations, which is based on the solution of the problem for the third-order equations. Using a one-to-one correspondence between homogeneous differential equations and their solution spaces there is obtained the information about the solution spaces groups, specifically there is answered the question of solvability of solution spaces group of linear homogeneous differential equations, and there are expounded some of their other properties.*

**KEY WORDS:** *Differential equation, solution spaces of homogeneous differential equations, solvable group.*

**CLASSIFICATION:** *20G07, 20F16, 47E05, I75, H45.*

Důležitým úkolem současného matematického vzdělávání na vysokých školách je orientovat studenty na vzájemné vztahy různých matematických teorií za účelem hlubšího pochopení souvislostí mezi nimi. Tento příspěvek je zaměřen na vztah látky z oblasti matematické analýzy a teorie algebraických struktur, konkrétně vztah obyčejných diferenciálních rovnic třetího řádu a jejich prostorů řešení s teorií grup. Poznamenejme, že vztahy odvozené při studiu prostorů řešení diferenciálních rovnic třetího řádu jsou nesmírně užitečné při odvozování analogických vztahů pro prostory řešení diferenciálních rovnic řádu *n*-tého. Dále je nutno zdůraznit, že příspěvek úzce navazuje na problematiku studovanou v článcích [2 - 7]. V úvodu článku [5] je uvedena motivace a zasazení této problematiky, která svými kořeny sahá až ke Galoisově teorii řešitelnosti algebraických rovnic a moderní teorii rozšiřování těles, do obecnějšího teoretického rámce.

Prezentovaný příspěvek obsahuje důkaz řešitelnosti (v Galoisově smyslu) jisté grupy prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu. Je podstatně využit hlavní výsledek článku [6], který, v návaznosti na teorii řad grup, poskytuje důkaz řešitelnosti jisté grupy lineárních diferenciálních operátorů tvořících levé strany lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu.

Připomeňme standardně používané označení: Je-li $H$ normální podgrupa grupy $G$ (nazývaná také invariantní podgrupa nebo normální dělitel), píšeme $H \triangleleft G$. Dále, posloupnost podgrup $H_i$ $(i = 0, 1, ..., n)$ grupy $G$ taková, že

$$\mathbf{1} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G \qquad (\mathcal{S})$$

(symbol $\mathbf{1}$ označuje jednotkovou podgrupu grupy $G$), se nazývá subnormální řada grupy $G$ a příslušné podílové grupy $H_i / H_{i-1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ se nazývají faktory dané řady. Jsou-li všechny faktory řady ($\mathcal{S}$) komutativní, nazývá se tato řada řešitelná. Grupa se nazývá řešitelná, jestliže má alespoň jednu řešitelnou subnormální řadu (viz např. [8, 9, 11]). Při praktickém ověřování řešitelnosti je v některých případech cesta k důkazu řešitelnosti základní grupy rychlejší ověřením stabilizace řetězce komutantů (na úrovni triviální podgrupy) než prostřednictvím pracného ověřování komutativity faktorů existující subnormální řady podgrup, o níž se dokazuje, že je řešitelná.

Připomeňme, že podgrupa $G'$ grupy $G$ generovaná množinou komutátorů $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ všech dvojic prvků $[a, b] \in G \times G$ se nazývá komutant grupy $G$. Komutant $G''$ grupy $G'$ se nazývá druhý komutant grupy $G$. Obvyklé označení je také $G' = G^{(1)}$, $G'' = G^{(2)}$, atd. Obecně $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Komutant $G^{(n)}$ se také nazývá $n$-tá derivace grupy $G$ a řetězec komutantů grupy $G$

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots$$

je také nazýván derivovaný řetězec grupy $G$.

**Tvrzení:** ([15, Věta 10.31, s.172]). *Buď G grupa. Tyto podmínky jsou ekvivalentní:*

*(i) Grupa G je řešitelná.*

*(ii) Existuje celé kladné číslo n s vlastností* $G^{(n)} = \mathbf{1}$.

*(iii) Existuje řešitelná subnormální řada grupy G.*

V poměrně rozsáhlé literatuře lze nalézt množství klasických výsledků o řešitelných grupách. Připomeňme alespoň známou větu Feita-Thompsona nazývanou také věta o lichém řádu, která říká, že každá konečná grupa lichého řádu je řešitelná.

Použitý pojmový aparát je převzat z monografií [1, 8, 9, 10, 11, 12, 15] a prací [3 – 7]. Množinu všech reálných čísel budeme značit $\mathbf{R}$; pod označením $\mathbf{C}(J)$ budeme rozumět komutativní okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí (nevylučujeme případ $J = \mathbf{R}$). Okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu $J$, které mají ve všech bodech $x \in J$ všechny (spojité) derivace až do řádu $n$ včetně pro nějaké přirozené číslo $n$, budeme označovat $\mathbf{C}^n(J)$.

Nechť je dána množina diferenciálních rovnic třetího řádu

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0\,,\ y \in \mathbf{C}^3(J). \qquad (1)$$

Množinu všech diferenciálních rovnic (1), v nichž $p_0, p_1, p_2 \in \mathbf{C}(J)$, $p_0(x) \neq 0$, $x \in J$, označíme v souladu s [12 - 14] $\mathbf{A}_3(J)$. Dále označíme $I_d$ identický operátor na $\mathbf{C}^3(J)$, tj. $I_d\, y = y$ pro každou funkci $y \in \mathbf{C}^3(J)$, a položíme $D = \dfrac{d}{dx}$, tedy $Dy(x) = y'(x)$ pro každou funkci $y \in \mathbf{C}^3(J)$. Nechť pro trojici funkcí $p_i \in \mathbf{C}(J)$, $i = 1, 2, 3$, označuje $L(p_0,p_1,p_2)$ diferenciální operátor

$$L(p_0,p_1,p_2) = D^3 + p_2(x)\,D^2 + p_1(x)D + p_0(x)\,I_d\ .$$

V tomto označení má rovnice (1) tvar $L(p_0, p_1, p_2)\, y = 0$.

Věnujme nyní pozornost analýze soustavy $\boldsymbol{VA}_3(J)_2$ všech třírozměrných lineárních prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu

$$y'''(x)+\sum_{k=0}^{2} p_k(x)y^{(k)}(x) = 0, \; y \in \boldsymbol{C}^3(J).$$

Levou stranu rovnice lze označit užitím lineárního diferenciálního operátoru $L(p_0(x), p_1(x), p_2(x))$ jako obraz funkce $y \in \boldsymbol{C}^3(J)$ symbolem

$$L(p_0(x), p_1(x), p_2(x))\, y(x).$$

Užijeme-li vektorové funkce $\vec{p}\,(x) = (p_0(x), p_1(x), p_2(x))$, $\vec{D}y(x) = (y(x), y'(x), y''(x))$, při označení $L(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = L(\vec{p}\,(x))$, lze zapsat výše uvedenou diferenciální rovnici (užitím skalárního součinu vektorových funkcí) ve tvaru

$$L(\vec{p}\,(x))\, y(x) = y'''(x)+(\vec{p}(x),\vec{D}y(x)), \quad y \in \boldsymbol{C}^3(J).$$

Tyto operátory mají již dostatečně obecný tvar pro řešení výše zmíněného problému (tj. řešitelnosti grupy lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu a následně grupy prostorů řešení příslušných rovnic) v plné obecnosti.

V návaznosti na [3 - 7] nyní uvažujme množinu diferenciálních operátorů

$$\boldsymbol{LA}_3(J)_2 = \{L(p_0(x), p_1(x), p_2(x));\, p_k \in \boldsymbol{C}(J),\, p_2(x) \neq 0,\, x \in J\}.$$

Definujeme-li binární operaci $\circ_2 : \boldsymbol{LA}_3(J)_2 \times \boldsymbol{LA}_3(J)_2 \to \boldsymbol{LA}_3(J)_2$ předpisem

$$L(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) \circ_2 L(q_0(x), q_1(x), q_2(x)) =$$

$$= L(p_2(x)q_0(x) + p_0(x), p_2(x)q_1(x) + p_1(x), p_2(x)q_2(x)), \; x \in J.$$

obdržíme - [7], a také jako důsledek dříve publikovaných úvah, že $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ je nekomutativní grupa s neutrálním prvkem $L(0, 0, 1)$,
(zde obraz L(0;0;1) y(x) = $y'''$ (x)+ $y''$ (x) pro každou funkci y$\in$ $\mathbf{C}^3$(J)).
Inverzní prvek k operátoru L($p_0$(x), $p_1$(x), $p_2$(x)) = L( $\vec{p}$ (x)) je operátor

$$L^{-1}(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = L\left(-\frac{p_0(x)}{p_2(x)}, -\frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \frac{1}{p_2(x)}\right).$$

Vskutku

$$L(\vec{p}\,(x)) \circ_2 L^{-1}(\vec{p}\,(x)) = L(\vec{p}\,(x)) \circ_2 L\left(-\frac{p_0(x)}{p_2(x)}, -\frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \frac{1}{p_2(x)}\right) =$$

$$= L\left(-\frac{p_2(x)p_0(x)}{p_2(x)} + p_0(x), -\frac{p_2(x)p_1(x)}{p_2(x)} + p_1(x), \frac{p_2(x)}{p_2(x)}\right) = L(0;0;1).$$

Podobně obdržíme neutrální prvek ze součinu uvažovaných operátorů v opačném pořadí.

V dalším textu budeme stručně psát $p_k$ místo $p_k(x)$. Platí ovšem $p_k \in \boldsymbol{C}(J)$, pro $k = 0,1,2$, $p_2 \neq 0$ na celém intervalu $J$. Označme

$$\boldsymbol{L}_{2C}\boldsymbol{A}_3(J)_2 = \{L(p_0, p_1, r);\, p_0, p_1 \in \boldsymbol{C}(J)\},\, r \in \boldsymbol{R},\, r \neq 0\},$$

$$\boldsymbol{L_1 A_3}(J)_2 = \{L(p_0, p_1, 1);\, p_0, p_1 \in \boldsymbol{C}(J)\}.$$

Z obecné teorie lineárních diferenciálních rovnic a jejich transformací (monografie F. Neumana a další práce tohoto autora) je známa existence jedno-jednoznačné korespodence mezi množinou $\boldsymbol{LA}_3(J)$ všech lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu a systémem $\boldsymbol{VA}_3(J)$ všech prostorů řešení příslušných lineárních homogenních diferenciálních rovnic vytvářených těmito operátory. Tuto bijekci označíme – jako již v dřívějších pojednáních - $\Phi\colon \boldsymbol{LA}_3(J) \to \boldsymbol{VA}_3(J)$. K definici jedno-jednoznačného zobrazení $\Phi$ podrobněji uveďme: Pro každý diferenciální operátor $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{LA}_3(J)$ vybereme libovolně bázi $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ prostoru $V$ všech řešení diferenciální rovnice $L(p_0, p_1, p_2)y = 0$. Tento prostor označíme $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$. Označíme-li dále $\mathscr{B}$ systém všech takto vybraných – pevně zvolených – bází prostorů řešení rovnic

$$y'''(x) + \sum_{k=0}^{2} p_k(x) y^{(k)}(x) = 0,$$

tj. $L(p_0, p_1, p_2)y = 0$, a pro každý operátor $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{LA}_3(J)$ položíme $\Phi(L(p_0, p_1, p_2)) = V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\} \in \mathscr{B}$, obdržíme jedno-jednoznačné zobrazení $\Phi\colon \boldsymbol{LA}_3(J) \to \boldsymbol{VA}_3(J)$. Uvažujeme pouze výše uvedené omezení, spočívající v požadavku různosti od nuly koeficientů u druhých derivací na celém intervalu $J$. Zde požadavek $p_2(x) \neq 0$ pro $x \in J$ je ekvivalentní s podmínkou

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1'''(x) & \varphi_2'''(x) & \varphi_3'''(x) \end{pmatrix} \neq 0,\ x \in J,$$

neboť tento determinant vydělený Wronskiánem báze $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ tvoří koeficient (až na znaménko) u druhé derivace funkce $y(x)$ v příslušné diferenciální rovnici. Nechť $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in \boldsymbol{VA}_3(J)$ jsou libovolně zvolené prostory řešení lineárních diferenciálních rovnic

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & y' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' & y'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3''' & y''' \end{pmatrix} = 0,\quad det\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & y \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' & y' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' & y'' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' & y''' \end{pmatrix} = 0,$$

tedy rovnic $L(p_0, p_1, p_2)\,y = 0$, $L(q_0, q_1, q_2)\,y = 0$.

Pak $L(p_0, p_1, p_2) = \Phi^{-1}(V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$, $L(q_0, q_1, q_2) = \Phi^{-1}(V(\psi_1,\psi_2,\psi_3))$. Nyní pro zvolenou libovolnou dvojici prostorů $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in \boldsymbol{VA}_3(J)$ položíme

$$V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \cdot V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = V(\omega_1,\omega_2,\omega_3),$$

kde $V(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \Phi(L(p_0, p_1, p_2) \circ_2 L(q_0, q_1, q_2))$.

V článku [3] je pro obecný případ rovnic $n$–tého řádu a tedy $n$-rozměrných prostorů řešení dokázána věta, která říká, že grupoid $\boldsymbol{VA}_3(J)$ výše definovaný je nekomutativní grupa.

V práci [7] je dokázána věta 4, která říká, že pro libovolný otevřený interval $J \subset \boldsymbol{R}$ grupa $(\boldsymbol{LA}_3(J), \circ_2)$ lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu je řešitelná, tj. $\{L(0, 0,1)\} = G'' \subset G' \subset G^{(0)} = \boldsymbol{LA}_3(J)$ je řetězec komutantů grupy $\boldsymbol{LA}_3(J)$, přesněji $G'$, $G''$ jsou první a druhá derivace grupy $\boldsymbol{LA}_3(J)$. Odtud a z výše provedené úvahy pak bezprostředně vyplývá tato věta:

**Věta 1:** Buď $\mathrm{J} \subset \mathbf{R}$ otevřený interval, $\mathbf{VA}_3(\mathrm{J}) = \Phi(\mathbf{LA}_3(\mathrm{J}))$. Grupa $(\mathbf{VA}_3(\mathrm{J}), \cdot)$ prostorů řešení lineárních diferenciálních rovnic třetího řádu je řešitelná.

Nyní se zaměřme na prostory řešení diferenciálních rovnic, které obdržíme konkrétní volbou některých koeficientů – funkcí v obecní diferenciální rovnici třetího řádu. Konkrétně, uvažujme o diferenciálních rovnicích třetího řádu

$$y''' + y'' + q(x)y' + p(x)y = 0\,,\ \ y''' + y'' + p(x)y' = 0\,,$$

$$y''' + y'' + p(x)y = 0\,,\ p,\, q \in \boldsymbol{C}(J),\ \text{dále pak}\ p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 1.$$

Označme množiny příslušných diferenciálních operátorů třetího řádu takto:

$$\boldsymbol{L_1 A}_3(J)_2 = \{L(p, q, 1);\, p, q \in \boldsymbol{C}(J)\},\ q \neq 0\},$$

$$\boldsymbol{G_0}(J) = \{L(0, p, 1);\, p \in \boldsymbol{C}(J)\},\ \boldsymbol{G_1}(J) = \{L(p, 0, 1);\, p \in \boldsymbol{C}(J)\}.$$

Uvažujeme-li na těchto množinách restrikci výše definované binární operace na $\boldsymbol{LA}_3(J)_2$, obdržíme vztahy popsané v níže uvedené větě. Poznamenejme ještě, že jedničkou grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ -a všech jejích podgrup - je operátor $L(0, 0, 1)$ a $\Phi$-obrazem tohoto operátoru je prostor všech řešení diferenciální rovnice $y''' + y'' = 0$, tedy

$$\boldsymbol{V}(1, x, e^{-x}) = \{\, f;\ f(x) = c_1 + c_2 x + c_3\, e^{-x};\ c_1, c_2, c_3 \in \boldsymbol{R}\,\} = \Phi(L(0, 0, 1)).$$

Označme $\boldsymbol{G_{01}}(J)$, $\boldsymbol{G_{11}}(J)$ nekonečné cyklické grupy $\{L(0, m,1);\, m \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{L(k, 0, 1);\, k \in \boldsymbol{Z}\}$ v daném pořadí. O některých vztazích zmíněných podgrup grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ vypovídá následující věta:

**Věta 2:** *Nechť* $J \subset \boldsymbol{R}$ *je otevřený interval. Grupoidy* $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2)$ *jsou komutativní podgrupy grupy* $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$, *pro které platí:*

$1^0$ $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2) \cong (\boldsymbol{C}(J),+) \times (\boldsymbol{C}(J),+) = (\boldsymbol{C}(J) \times \boldsymbol{C}(J),+)$,

$(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2) \cong (\boldsymbol{Z},+) \cong (\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2)$.

$2^0$ $(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2) \lhd (\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$,

$(\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$.

$3^0$ *Podgrupa* $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$ *grupy* $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ *je direktním součinem grup* $(\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2)$.

*Důkaz*: $1^0$ Pro libovolnou dvojici operátorů $L(p_0, p_1, 1), L(q_0, q_1, 1) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$ platí
$L(p_0, p_1, 1) \circ_2 L(q_0, q_1, 1) = L(q_0 + p_0, q_1 + p_1, 1) = L(p_0 + q_0, p_1 + q_1, 1) =$
$L(q_0, q_1, 1) \circ_2 L(p_0, p_1, 1)$, tedy $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2) \cong (\boldsymbol{C}(J),+) \times (\boldsymbol{C}(J),+) = (\boldsymbol{C}(J)\times \boldsymbol{C}(J),+)$.
Speciální volbou koeficientů $p_0(x) \equiv 0,\ p_1(x) \equiv 1,\ q_0(x) \equiv 1,\ q_1(x) \equiv 0$ pak obdržíme druhé tvrzení, neboť

$$L(0, m, 1) \circ_2 L(0, n, 1) = L(0, m + n, 1),$$

$$L(m, 0, 1) \circ_2 L(n, 0, 1) = L(m + n, 0, 1), \text{ kde } m, n \in \boldsymbol{Z}.$$

$2^0$ Nechť $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{LA}_3(J)_2$ je libovolný operátor, $L(q_0, q_1, 1) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$. Potom

$$L^{-1}(p_0, p_1, p_2) \circ_2 L(q_0, q_1, 1) \circ_2 L(p_0, p_1, p_2) = L\left(-\frac{p_0}{p_2}, -\frac{p_1}{p_2}, \frac{1}{p_2}\right) \circ_2 L(p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2)$$

$$= L\left(\frac{-p_0 + p_0 + q_0}{p_2}, \frac{-p_1 + p_1 + q_1}{p_2}, 1\right) = L\left(\frac{q_0}{p_2}, \frac{q_1}{p_2}, 1\right) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \text{ tedy}$$

$L^{-1}(p_0, p_1, p_2) \circ_2 \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2 \circ_2 L(p_0, p_1, p_2) \subset \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$, takže $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$ je normální (tj. invariantní) podgrupa grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$. Jelikož další podgrupy uvedené ve formulaci tvrzení $2^0$ jsou komutativní, vztahy uvedené ve $2^0$ jsou platné.
$3^0$ Platí $\boldsymbol{G_0}(J) \cap \boldsymbol{G_1}(J) = \{L(0, 0, 1)\}$. Dále pro libovolné operátory $L(0, p, 1) \in \boldsymbol{G_0}(J)$, $L(q, 0, 1) \in \boldsymbol{G_1}(J)$ platí $L(0, p, 1) \circ_2 L(q, 0, 1) = L(q, p, 1) = L(q, 0, 1) \circ_2 L(0, p, 1)$. Tedy $\boldsymbol{G_0}(J) \circ_2 \boldsymbol{G_1}(J) = \boldsymbol{G_1}(J) \circ_2 \boldsymbol{G_0}(J) = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$, takže grupa $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$ je direktním součinem podgrup $\boldsymbol{G_0}(J), \boldsymbol{G_1}(J)$ grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$. □

Dále označíme $\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2 = \Phi(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2)$, $\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_0}(J))$, $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_1}(J))$, $\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_{01}}(J))$, $\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_{11}}(J))$. Vzhledem k existenci izomorfismu

$$\Phi: (\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2) \to (\boldsymbol{VA}_3(J)_2, \cdot)$$

obdržíme větu:

**Věta 3:** *Nechť $J \subset \boldsymbol{R}$ je otevřený interval. Grupy $(\boldsymbol{VA}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$ mají tyto vlastnosti:*
*$1^0$ $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \cong (\boldsymbol{C}(J)\times \boldsymbol{C}(J),+)$,*
*$(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \cong (\boldsymbol{Z},+) \cong (\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$.*
*$2^0$ $(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{VA}_3(J), \cdot)$,*
*$(\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \cdot)$.*
*$3^0$ Podgrupa $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$ grupy $(\boldsymbol{VA}_3(J), \cdot)$ je direktním součinem grup $(\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$.*

V teorii obyčejných lineárních diferenciálních rovnic $n$-tého řádu při zobecňování výsledků získaných pro rovnice druhého řádu na rovnice $n$-tého řádu někdy dochází k situaci, že přímé zobecnění některých tvrzení o rovnicích druhého řádu na případ rovnic *n*-tého řádu není zcela jasné a názorné. Užitečným mezikrokem se pak ukazuje přístup přes rovnice třetího řádu, který vyjasňuje možnost zobecnění tvrzení pro rovnice *n*-tého řádu. Tento postup tedy není samoúčelný, nýbrž užitečný pro lepší názornost; v tom – mimo jiné – také spočívá motivace a význam tohoto příspěvku.

Na závěr připomeňme – jak již bylo učiněno v příspěvku [5], že rozsáhlá literatura je věnována algebraické teorii lineárních diferenciálních rovnic (jejíž podstatná část se nazývá Galoisova teorie lineárních diferenciálních rovnic) – připomínáme alespoň tituly publikací [16, 17, 18], v nichž lze nalézt odkazy na další bohatou literaturu. Mimo jiné, s využitím diferenciálních okruhů a těles nulové charakteristiky jsou konstruovány algoritmy poskytující Liouvillova řešení lineárních diferenciálních rovnic (tj. řešení vytvářená z racionálních funkcí algebraickými operacemi s užitím exponenciální funkce a integrace). Moderní algoritmy pro výpočet Liouvillových řešení jsou založeny na diferenciální Galoisově teorii. V tomto příspěvku prezentované výsledky jsou zaměřeny poněkud jiným směrem a tudíž nejsou obsaženy mezi konkrétními důsledky zmíněné algebraické teorie diferenciálních rovnic. Podstatný přínos k současnosti algebraické teorie diferenciálních rovnic náleží profesoru Michaelu Singerovi a jeho vědecké škole, srv. [16, 17, 18].

## Literatura

[1] Beran, Ladislav. Grupy a svazy. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1974. 358 s. Matematický seminář SNTL.

[2] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. O nekomutativní grupě lineárních prostorů hladkých funkcí dimenze dvě. In: Acta Mathematica 11, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2008. s. 11-16. ISBN 978-80-8094-396-7

[3] Beránek, Jaroslav - Chvalina, Jan. Algebraické struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu. In Acta Mathematica 12. Fakulta prírodných vied UKF, Nitra, 2009, s. 25-32. ISBN 978-80-8094-614-2.

[4] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu. In: Acta Mathematica 13, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2010, s. 43-47. ISBN 978-80-8094-781-1.

[5] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu. In Acta Mathematica 14, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2011, s. 51-57. ISBN 978-80-8094-958-7.

[6] Chvalina Jan, Chvalinová Ľudmila. Solvability of certain groups of second-order linear differential operators. 10th Internat. Conference APLIMAT, February 2011. Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2011, 113-119. ISBN 978-80-89313-51-8.

[7] Chvalina Jan, Chvalinová Ľudmila, Moučka, Jiří. Solvability of a Certain Group of the Third-Order Linear Differential Operators. Proc. of XXX. International Colloquium, University of Defence, Brno 2012, 10 s., ISBN 978-80-7231-865-0.

[8] Drápal, Aleš. Teorie grup - základní aspekty. Praha : Karolinum, 2009. 208 s. ISBN 80-246-0162-1.

[9] Hall, Marshall, J. The Theory of Groups. The Macmillan Company, New York 1959. (Ruský překlad : Těorija grupp – překl. N.V. Djumin, Z. P. Žilinskaja, red. L.A. Kalužnin – Izd. innostrannoj lit., Moskva 1962).

[10] Kalas, Josef, Ráb, Miloš. Obyčejné diferenciální rovnice. 2. vyd., Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[11] Kuroš, Aleksandr Gennadijevič. Teorija grupp. 3. vyd. Nauka Moskva 1967. 648 s.

[12] Neuman, František. Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991)

[13] Neuman, František. A survey of global investigations of lineary differential equations. Proc. of XXVIII. International Colloquium, Brno, University of Defence, Brno 2010, 7 s., ISBN 978-80-7231-722-6.

[14] Neuman, František. On a representation of linear differential equation. In: Mathematical and Computer Modelling 52 (2010), s. 355-360, ISSN 0895-7177.

[15] Procházka, Ladislav, Bican, Ladislav, Kepka, Tomáš, Němec, Petr. Algebra. Academia Praha 1990.

[16] Singer, Michael, F. Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations. arXiv:712.4124v2 [math.CA] 10 jan 2008, s. 1-83.

[17] Singer, Michael, F. Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations, in Algebraic Theory of Differential Equations. M. A. H. macCallum and A. V. Mikhalov, eds., London Math. Soc. Lecture Note Series (no. 357), Cambridge Univ. Press, 2009, 1-82.

[18] van der Put Marius, Singer, Michael. F. Galois Theory of Linear Differential Equations. Grundlehrer der math. Wissenschaften, Vol. 328, Springer-Verlag, Berlin – New York – Heidelberg 2003.

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

**Adresa autorov**

*Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta pedagogická*
*Masarykova Univerzita*
*Poříčí 7*
*ČR - 603 00 Brno*
e-mail: beranek@ped.muni.cz

*Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.*
*Ústav matematiky*
*Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií*
*Vysoké učení technické*
*Technická 8*
*616 00 Brno*
e-mail:chvalina@feec.vutbr.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# OVEROVANIE A DOKAZOVANIE PLANIMETRICKÝCH VIET

# VERIFICATION AND PROVING PLANE GEOMETRY THEOREMS

MARTIN BILLICH

**ABSTRAKT.** *Overovanie, dokazovanie a objavovanie matematických viet má svoje miesto v procese moderného matematického vzdelávania na všetkých typoch škôl. V príspevku sa zaoberáme možnosťou aplikácie metódy obsahu v overovaní a dokazovaní konštrukčných geometrických viet. Základné princípy tejto metódy budú prezentované na niekoľkých príkladoch elementárnej geometrie.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *dokazovanie viet, metóda obsahu, geometrické konštrukcie*

**ABSTRACT**. *The process of verification, proving, and discovering theorems is important in modern mathematics education at schools of all types and levels. In this paper, possible approach how to use the area method in verification and proving some constructive geometric statements is discussed. The basic principles of this method will be illustrated through examples from elementary geometry.*

**KEY WORDS:** *theorem proving, area method, geometric constructions*

**CLASSIFICATION:** *E50, G40*

## 1. Úvod

Predpokladať, že dokazovanie v matematike patrí medzi obľúbené činnosti na našich školách, je dozaista odvážne a pre mnohých nepredstaviteľné. Treba však pripomenúť, že bez pochopenia pojmu dôkaz a základných princípov matematického dokazovania sú študenti ukrátení o významný atribút matematiky, ktorý odlišuje matematiku od ostatných vedných odborov [6]. Z formálneho hľadiska, pod pojmom dôkaz rozumieme proces overovania platnosti istého tvrdenia v tvare konečnej postupnosti formúl, na základe logických zákonov, pomocou definícií, axióm a už známych a dokázaných viet. Vzhľadom na to, že dôležitosť systematického budovania matematickej logiky, resp. logiky všeobecne, sa vo vzdelávacom procese už na stredných školách  častokrát podceňuje, netreba zabúdať na dôležitosť výberu vhodných spôsobov, metód a foriem práce, ktoré môžu prispieť k rozvíjaniu žiakovho logického myslenia, schopnosti komunikovať a argumentovať pri riešení rôznych matematických problémov. Dôkaz v matematike je v tomto smere nositeľom istej presnosti, ktorej úroveň rozvíjania determinuje prístup učiteľa a jeho primeraný dôraz ako na formálnu, tak i na vecnú stránku dôkazov.

V tomto príspevku uvedieme základné princípy *metódy obsahu,* ako jednej zo syntetických metód na dokazovanie istej skupiny geometrických viet. Konkrétne sa zameriame na tzv. konštrukčné geometrické tvrdenia (viď [5]). Dôkazy tvrdení tohto typu možno považovať za „zrozumiteľné“ v tom zmysle, že každý ich krok má jasnú geometrickú interpretáciu. Nami uvedené príklady dôkazov geometrických viet z elementárnej geometrie prezentujú jednoduchý algoritmus, ktorý sa stal v poslednom období základom pre prácu viacerých systémov automatického dokazovania matematických viet.

## 2. Základné pojmy metódy obsahu

Hlavnou myšlienkou metódy obsahu, založenej na princípoch priameho dôkazu, je vyjadrenie predpokladov dokazovaného tvrdenia pomocou základnej množiny daných bodov a množiny konštrukcií, ktorých výsledkom sú „*nové*“ body - závislé geometrické útvary [5]. Dokazovanú vlastnosť zapíšeme v tvare rovnosti dvoch výrazov, ktoré obsahujú vopred definované geometrické veličiny (bez viazanosti na súradnicový systém). Ďalej nasleduje postupná eliminácia skôr zostrojených bodov, pričom postupujeme v opačnom poradí, ako boli tieto body zostrojené. Na elimináciu premenných parametrov, ktoré obsahujú závislé geometrické útvary, používame všeobecne platné pomocné tvrdenia, tzv. *eliminačné lemy*. Výsledkom takéhoto algoritmu je vzťah (rovnosť) dvoch výrazov zahŕňajúcich iba voľné body (resp. geometrické útvary). Ak sa výrazy na oboch stranách rovnajú, tak dokazovaná vlastnosť platí. V opačnom prípade je tvrdenie nepravdivé a nemožno ho považovať za matematickú vetu.

Základné pojmy (geometrické veličiny) metódy obsahu sú: *pomer orientovaných vzdialeností*, *obsah orientovaného trojuholníka* a *pytagorejský rozdiel* [5].

**Definícia 1**. Pre štvoricu kolineárnych bodov $A, B, C, D$ $(C \neq D)$ je *pomer orientovaných úsečiek* $AB, CD$ reálne číslo $\frac{\|AB\|}{\|CD\|}$, kde $\|AB\|$ je (podľa [6]) *orientovaná vzdialenosť* bodov $A, B$, t.j. platí: $\|AB\| = -\|BA\|$.

**Definícia 2**. *Obsah orientovaného trojuholníka* $ABC$ je obsah daného trojuholníka, ktorý je kladný alebo záporný, v závislosti od jeho orientácie v rovine, t.j. je kladný, ak postupujeme od vrcholu $A$ do $B$ a $C$ v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek); v opačnom prípade je tento obsah záporný. Označenie podľa [6] je $\|ABC\|$.

**Poznámka**. Predchádzajúci pojem možno rozšíriť aj na degenerovaný trojuholník, ktorého vrcholy sú navzájom kolineárne body a jeho obsah je rovný 0.

**Definícia 3**. Nech sú dané tri body $A$, $B$, $C$. *Pytagorejským rozdielom* trojice bodov $A$, $B$ a $C$ nazveme reálne číslo

$$P_{ABC} = \|AB\|^2 + \|CB\|^2 - \|AC\|^2 .$$

V tabuľke 1 uvádzame aspoň niektoré vzťahy medzi geometrickými útvarmi a k nim zodpovedajúce vyjadrenia pomocou vyššie definovaných geometrických veličín.

| **Vzťah medzi útvarmi** | **Formalizácia** |
|---|---|
| Body $A$ a $B$ sú *totožné* | $P_{ABA} = 0$ |
| Body $A, B$ a $C$ sú *kolineárne* | $\|ABC\| = 0$ |
| $AB$ je *rovnobežné* s $CD$ | $\|ACD\| = \|BCD\|$ |
| $AB$ je *kolmé* na $CD$ | $P_{ACD} = P_{BCD}$ |
| Úsečky $AB$ a $CD$ sú *zhodné* | $P_{ABA} = P_{CDC}$ |

Tabuľka 1.

Z definície pomeru orientovaných vzdialeností a obsahu orientovaného trojuholníka vyplývajú nasledujúce vlastnosti:

(V1) Pre trojicu kolineárnych bodov $A, B, C$ $(A \neq B)$ platí:

$$(i)\ \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = -\frac{\|CA\|}{\|AB\|} = \frac{\|CA\|}{\|BA\|} = -\frac{\|AC\|}{\|BA\|} \qquad (ii)\ \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = 0 \Leftrightarrow A = C$$

(V2) Pre dva navzájom rôzne body $A, B$ a reálne číslo $r$ existuje jediný bod $P$, že body $A, B, P$ sú kolineárne a platí:

$$(i)\ \frac{\|AP\|}{\|AB\|} = r \qquad (ii)\ \frac{\|AP\|}{\|AB\|} + \frac{\|PB\|}{\|AB\|} = 1$$

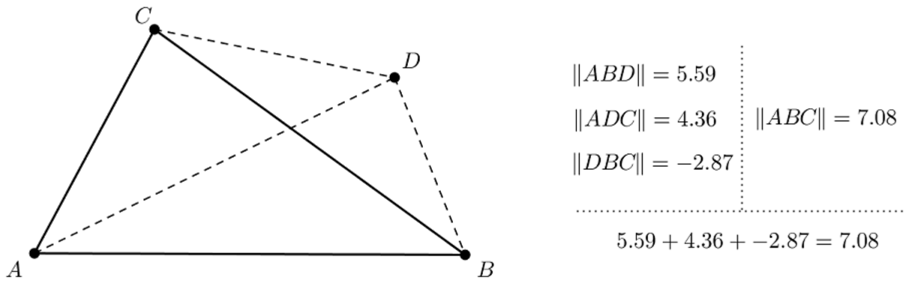
(V3) $\|ABC\| = \|CAB\| = \|BCA\| = -\|BAC\| = -\|CBA\| = -\|ACB\|$. Ak $A, B, C$ sú nekolineárne body, tak $\|ABC\| \neq 0$.

(V4) Pre každú štvoricu bodov $A, B, C, D$ roviny platí:

$$\|ABC\| = \|ABD\| + \|ADC\| + \|DBC\|.$$

(V5) Nech $A, B, C$ sú kolineárne body, pričom $\|AB\| = r\|AC\|$ $(r \in \mathbb{R})$. Potom pre každý bod $P$ platí: $\|PAB\| = r\|PAC\|$.

Tieto vlastnosti možno overiť aj v prostredí programu GeoGebra vytvorením nových nástrojov „*pomer orientovaných vzdialeností*“ a „*obsah orientovaného trojuholníka*“. Na obrázku 1 je načrtnutá jedna z možných konfigurácií bodov $A, B, C, D$ a príslušne obsahy orientovaných trojuholníkov (a ich súčet), z ktorých vyplýva vlastnosť (V4). Ak by sme pri formulácii tejto vlastnosti nepoužili pojem obsahu orientovaného trojuholníka, museli by sme vo všeobecnosti skúmať sedem možných vzájomných polôh bodu $D$ vzhľadom na trojicu bodov $A, B, C$, ktoré sú (nie nutne) vrcholmi trojuholníka.




Obrázok 1: Overenie $\|ABC\| = \|ABD\| + \|ADC\| + \|DBC\|$ v programe GeoGebra.

V nadväznosti na vymedzenie predchádzajúcich základných pojmov možno definovať aj obsah orientovaného štvoruholníka $ABCD$, ako aj pytagorejský rozdiel štvorice bodov $A, B, C, D$ nasledovne [5]:

$$(a)\ \|ABCD\| = \|ABC\| + \|ACD\|$$

$$(b)\ P_{ABCD} = P_{ABD} - P_{CBD} = \|AB\|^2 + \|CD\|^2 - \|BC\|^2 - \|DA\|^2\ .$$

Medzi základné pomocné tvrdenia metódy obsahu, ktoré budeme neskôr potrebovať, patria nasledujúce *eliminačné lemy* (podrobnejšie v [2], [5]).

**Lema 1**. Nech $M$ je priesečník dvojice navzájom rôznobežných priamok $AB$ a $PQ$, pričom $M \neq Q$. Potom platí:

$$\frac{\|PM\|}{\|QM\|} = \frac{\|PAB\|}{\|QAB\|}; \ \frac{\|PM\|}{\|PQ\|} = \frac{\|PAB\|}{\|PAQB\|}; \ \frac{\|QM\|}{\|PQ\|} = \frac{\|QAB\|}{\|PAQB\|}.$$

**Lema 2**. Nech $M$ je bod priamky $PQ$, pričom $\|PM\| = r\|PQ\|$ ($r \in \mathbb{R}$). Potom pre každú dvojicu bodov $A, B$ platí:

$$\|MAB\| = r\|QAB\| + (1-r)\|PAB\|. \qquad (EL1)$$

## 3. Metóda obsahu v príkladoch

V úvode tejto časti si môžeme na známej vete o strednej priečke trojuholníka ukázať, ako demonštrovať metódu obsahu v dôkazoch niektorých viet elementárnej geometrie. Pre tento účel budeme v dôkazoch používať jazyk typický pre automatické dokazovanie.

**Príklad 1**. Daný je trojuholník $ABC$. Nech body $A_1$ a $B_1$ sú stredy strán $BC$ a $AC$ v danom poradí. Dokážte, že priamka $A_1B_1$ je rovnobežná so stranou $AB$ daného trojuholníka.

***Dôkaz***. Konštrukcia bodov $A_1, B_1$ vyplýva priamo s vlastnosti (V2) bodu ($i$) pre $r = \frac{1}{2}$. Tvrdenie vety v tvare $A_1B_1 \parallel AB$ vyjadríme v jazyku metódy obsahu ako

$$\|A_1B_1A\| = \|A_1B_1B\|. \qquad (1)$$

Našou úlohou je teraz eliminovať body $A_1, B_1$ vo vzťahu (1), pričom postupujeme v opačnom poradí, ako boli tieto body zostrojené. Pre elimináciu bodu $B_1$ podľa lemy 2 ($P = A, Q = C, M = B_1, A = A\ [B], B = A_1$) dostávame:

$$\|A_1B_1A\| = \|B_1AA_1\| = \tfrac{1}{2}\|CAA_1\| + \tfrac{1}{2}\|AAA_1\| = \tfrac{1}{2}\|CAA_1\|,$$

$$\|A_1B_1B\| = \|B_1BA_1\| = \tfrac{1}{2}\|CBA_1\| + \tfrac{1}{2}\|ABA_1\|.$$

Vzťah (1) teraz nadobúda tvar

$$\|CAA_1\| = \|CBA_1\| + \|ABA_1\|.$$

Ďalej nasleduje eliminácia bodu $A_1$, keď podľa lemy 2 máme:

$$\|CAA_1\| = \|A_1CA\| = \tfrac{1}{2}\|CCA\| + \tfrac{1}{2}\|BCA\| = \tfrac{1}{2}\|BCA\|,$$

$$\|CBA_1\| = \|A_1CB\| = \tfrac{1}{2}\|CCB\| + \tfrac{1}{2}\|BCB\| = 0,$$

$$\|ABA_1\| = \|A_1AB\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\| + \tfrac{1}{2}\|BAB\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\|,$$

a vzťah (1) má tvar

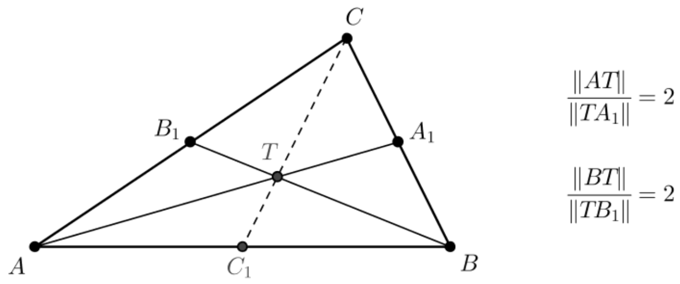
$$\tfrac{1}{2}\|BCA\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\|.$$

Keďže platí $\|BCA\| = \|CAB\|$, tak tvrdenie vety je dokázané.

Nasledujúca úloha o ťažniciach (resp. ťažisku) ľubovoľného trojuholníka patrí medzi základné dôkazové planimetrické úlohy.

**Príklad 2**. Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý delí každú z ťažníc v pomere $2:1$.

***Konštrukcia***. Dané sú tri navzájom rôzne nekolineárne body $A, B, C$ (trojuholník $ABC$), pomocou ktorých zostrojíme všetky ostatné body, a to stredy $A_1$, $B_1$ strán $BC$, $AC$ daného trojuholníka a priesečník $T$ jeho ťažníc $AA_1$ a $BB_1$.




Obrázok 2: Ťažisko trojuholníka (v programe GeoGebra)

Našou úlohou je dokázať

$$\frac{\|AT\|}{\|TA_1\|} = 2 \tag{2}$$

***Dôkaz***. Na elimináciu bodov $A_1$, $B_1$ a $T$ na ľavej strane vzťahu (2) použijeme obe pomocné lemy z predchádzajúcej časti. Postupne dostávame:

$$\frac{\|AT\|}{\|TA_1\|} = -\frac{\|AT\|}{\|A_1T\|} = -\frac{\|ABB_1\|}{\|A_1BB_1\|} \qquad \text{(eliminácia bodu } T\text{)}$$

$$\|ABB_1\| = \|B_1AB\| = \tfrac{1}{2}\|AAB\| + \tfrac{1}{2}\|CAB\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\| \qquad \text{(eliminácia bodu } B_1\text{)}$$

$$\|A_1BB_1\| = -\|B_1BA_1\| = -\left(\tfrac{1}{2}\|CBA_1\| + \tfrac{1}{2}\|ABA_1\|\right) \qquad \text{(eliminácia bodu } B_1\text{)}$$

$$\|CBA_1\| = \|A_1CB\| = \tfrac{1}{2}\|BCB\| + \tfrac{1}{2}\|CCB\| = 0 \qquad \text{(eliminácia bodu } A_1\text{)}$$

$$\|ABA_1\| = \|A_1AB\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\| + \tfrac{1}{2}\|BAB\| = \tfrac{1}{2}\|CAB\| \qquad \text{(eliminácia bodu } A_1\text{)}$$

Vzťah (2) môžeme teraz upraviť na tvar

$$-\frac{\tfrac{1}{2}\|CAB\|}{-\left(\tfrac{1}{2}\|CBA_1\| + \tfrac{1}{2}\|ABA_1\|\right)} = 2$$

$$-\frac{\tfrac{1}{2}\|CAB\|}{-\left(0 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\|CAB\|\right)} = 2$$

$$2 = 2$$

Týmto sme dokázali, že bod $T$ delí ťažnicu $AA_1$ v pomere $2:1$. Analogická vlastnosť sa dokáže aj pre ťažnicu $BB_1$. Vzhľadom na skutočnosť, že predchádzajúci postup možno uplatniť pre každú dvojicu ťažníc trojuholníka $ABC$ a ich priesečník $T$, tak dostávame, že bodom $T$ prechádzajú všetky jeho ťažnice, čo bolo treba dokázať.

## 4. Záver

Metódu obsahu možno považovať za jednu zo zaujímavých metód školskej geometrie, pričom v súčasnosti je úspešná aj v oblasti automatického dokazovania planimetrických viet. Práve rozvoj moderných informačných technológií doviedol dôkaz do štádia, keď jeho správnosť možno overiť aj pomocou počítača. Na tento účel existuje viacero systémov automatického dokazovania, ktoré v sebe zahŕňajú ako analytické, tak aj syntetické metódy. Dokazovanie algebrickými metódami (*Wuova metóda, Buchbergerova metóda* [2]) sú považované vo všeobecnosti za veľmi efektívne, avšak nimi získané dôkazy málokedy odrážajú geometrickú podstatu problému. Na druhej strane, počítačové programy založené na syntetických metódach (*metóda obsahu* [3], [5]), umožňujú vytvárať „zrozumiteľné" dôkazy istej skupiny geometrických viet. Ani v tomto prípade však nemusia byť syntetické dôkazy stručné a prehľadné, čo je nutné zohľadniť pri ich využití vo vyučovaní na rôznych typoch škôl. Aj keď v tomto príspevku sme uviedli iba dva príklady využtia metódy obsahu, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že uvedené postupy možno jednoducho uplatniť aj na ďalšie úlohy z elementárnej geometrie.

## Literatúra

[1] CHOU, S., GAO, X. S., ZHANG, J. Z., Machine Proofs in Geometry – Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems. Word Scientidic, 1994.

[2] JANIČIĆ, P., NARBOUX, J., QUARESMA, P., The Area Method: a Recapitulation. Journal of Automated Reasoning, 2010 (to appear).

[3] NARBOUX, J., A Decision Procedure for Geometry in Coq. In: K. Slind et al. (eds.): TPHOLs 2004, LNCS 3223, Springer-Verlag Heidelberg, 2004, 225 – 240.

[4] PECH, P., Selected topics in geometry with classical vs. Computer proving. World Scientific Publishing, New Jersey, 2007.

[5] QUARESMA, P., JANIČIĆ, P., The Area Method, Rigorous Proofs of Lemmas in Hilbert's Style Axioms Systems. Technical Report TR2006/001, Center for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2009.

[6] TAKÁČ, Z., O motivovaní žiakov k odôvodňovaniu matematických tvrdení. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, ročník 54 (2009), č. 3, s. 243 – 251.

*Článok prijatý dňa 3. Júla 2012.*

## Adresa

*RNDr. Martin Billich, PhD.*
*Katedra matematiky, Pedagogická fakulta*
*Katolícka univerzita v Ružomberku*
*Hrabovská cesta 1*
*SK – 034 01 Ružomberok*
e-mail: billich@ku.sk

## Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 001UJS-4/2011.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# NEMÁ PÍSANÁ KOMUNIKÁCIA V PODOBE PLAGÁTU

# SILENT WRITTEN COMMUNICATION IN THE POSTER FORM

KRISTÍNA CAFIKOVÁ, JOZEF FULIER

**ABSTRAKT.** *V príspevku popisujeme ukážku vyučovacej metódy Nemá písaná komunikácia realizovanej na hodine diskrétnej matematiky a kombinatoriky. Hlavná myšlienka metódy spočíva v študentských reakciách na impulz „Kombinatorika je časť matematiky, ktorá...“. Reakcie mohli mať podobu napísanej myšlienky, definície alebo vety, prípadne nakreslených obrázkov a pod. Každý študent používal inú farbu pera, čo nám umožňovalo sledovať prácu jednotlivých študentov.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ:** *nemá písaná komunikácia, plagát, kombinatorika.*

**ABSTRACT.** *Our contribution describes an example of using the teaching method Silent written communication during the lessons Discrete mathematics and Combinatorics. The main idea of the method consists of the students´ responses to the impulse "Combinatorics is the part of mathematics, which ...”. Responses take the form of written ideas, definitions or sentences, or drawn images and so on. Each student used a different color of pen, allowing us to monitor the work of individual students.*

**KEY WORDS:** *silent written communication, poster, combinatorics.*

**CLASSIFICATION:** *D45, K24*

## Úvod

V poslednom storočí vyučovací proces prešiel veľkými zmenami. Učebné osnovy boli prispôsobené k potrebám spoločnosti. Napriek tomu, že učivo bolo zjednodušené a rozsah hodín určených na vyučovanie matematiky bol znížený, negatívny postoj žiakov voči matematike sa nezmenil. Predmet matematika patrí medzi najmenej obľúbené vyučovacie predmety často už na prvom stupni základných škôl, a tento vzťah sa zhoršuje až po štúdium na vysokých školách. Príčinou tohto stavu môžu byť zastarané tradičné vyučovacie metódy. Preto je potrebné implementovať nové metódy do vyučovacieho procesu, ktorými by sme mohli vzbudiť záujem žiakov o samostatné riešenie problémov a zároveň aj rozvíjať ich argumentačné schopnosti. Jednou takou metódou je Nemá písaná komunikácia.

## Nemá písaná komunikácia

Nemá písaná komunikácia (z nemeckého názvu *stumme Schreibgespräch*, preklad autori) pochádza z Nemecka. Táto vyučovacia metóda sa dá efektívne využívať v rôznych fázach vyučovacieho procesu. V našej ukážke popisujeme jej aplikáciu v diagnostickej fáze.

Žiaci pracujú v štvor- až päťčlenných skupinách. Všetky skupiny dostanú plagát formátu napríklad A1 alebo A2, na ktorom je napísaný impulz. Impulz môže byť citát, otázka, začiatok vety, kresba, náčrt atď. Žiaci musia reagovať na impulz. Reakcie môžu mať podobu napísanej myšlienky, definície alebo vety, prípadne nakreslených obrázkov a pod. Počas práce môže hrať tichá a príjemná hudba. Najdôležitejšia charakteristická vlastnosť tejto metódy je ***nemá spolupráca žiakov***. To znamená, že žiaci sa nemôžu rozprávať medzi sebou ani v rámci skupiny, môžu komunikovať iba písomnou formou na pridelenom papieri. Takto sú žiaci prinútení vyjadriť svoje myšlienky. Učiteľ je v role pozorovateľa. Po ukončení práce v skupinách nasleduje slovná diskusia najskôr v rámci jednotlivých skupín, potom medzi skupinami navzájom a nakoniec medzi skupinami a učiteľom.

**Priebeh vyučovacej hodiny v rámci Nemej písanej komunikácie formou plagátu**

Prvý krok - Príprava

Tento krok je najdôležitejší a zároveň aj najnáročnejší pre učiteľa. On musí vybrať správny impulz pre svojich žiakov, ktorí potom budú musieť na impulz reagovať. Pri výbere impulzu si učiteľ musí dôkladne premyslieť všetky možné stratégie riešenia.

Učiteľ pomáha aj pri vytváraní skupín. Každej skupine dá papier s rovnakým impulzom a informuje ich o pravidlách tejto metódy. Žiaci si musia uvedomiť, že komunikácia v rámci skupiny môže prebiehať len písomnou formou na papieri, na ktorom je napísaný aj samotný impulz. Nemôžu ústne komunikovať nielen so spolužiakmi v triede, ale ani s učiteľom. Žiaci sú vopred oboznámení o časovom limite pre vykonanie práce.

Druhý krok – Písanie reakcií žiakov na plagát

Žiaci si pozrú impulz a napíšu všetko, čo im v súvislosti s impulzom napadne. Môžu nakresliť obrázky alebo aj napísať otázky. Každý žiak vidí všetko, čo na plagát napíšu jeho spolužiaci v skupine. Môžu písomne odpovedať na položené otázky alebo zareagovať na iné napísané myšlienky. Na plagáte sa môže uskutočniť aj rozhovor. Môže sa stať, že niektorý žiak skupiny považuje už pred tým vyjadrenú myšlienku za nedokončenú, preto pokračuje v rozvíjaní spolužiakovej myšlienke.

Táto vyučovacia metóda poskytuje žiakom určitú voľnosť pri reakciách na impulz. Vyjadria aj také myšlienky, ktoré by slovne, očakávajúc neúspech, nevyslovili. Majú čas premyslieť si všetko, čo napíšu na papier. Odporúča sa, aby každý žiak v rámci jednej skupiny písal perom rôznej farby. Potom učiteľ vie identifikovať výkon jednotlivých žiakov a sledovať ich myšlienkový postup aj po ukončení práce. Z tohto dôvodu postačuje, ak učiteľ sleduje prácu svojich žiakov z jedného pevného miesta v triede. Do práce žiakov však nesmie zasahovať žiadnym spôsobom. Jeho hlavnou úlohou v tejto fáze je zabezpečiť, aby sa žiaci nerozprávali. Dĺžku tohto kroku musí určiť učiteľ podľa náročnosti impulzu.

Tretí krok - Diskusia a hodnotenie práce žiakov

Po skončení práce skupín sa vyvesia plagáty na dobre viditeľné miesto v triede. Všetci majú možnosť pozrieť si prácu jednotlivých skupín. Uskutoční sa verbálny rozhovor o jednotlivých riešeniach. Žiaci sa môžu priamo opýtať učiteľa na určité nejasnosti, s ktorými sa stretli počas práce alebo diskusie. Učiteľ má možnosť problematické učivo ešte raz vysvetliť pred celou triedou, alebo vyzve žiakov, aby si ho vysvetlili navzájom.

**Výhody a nevýhody nemej písanej komunikácie**

Výhody:
- ✓ pokojné a tiché prostredie počas práce;
- ✓ lepšia koncentrácia žiakov je podporená tichým prostredím;
- ✓ žiaci si môžu sami určiť stratégiu práce;
- ✓ podporovanie spolupráce a komunikácie v skupine - myšlienka jedného žiaka môže vyvolať ďalšiu dobrú myšlienku iného žiaka;
- ✓ v tom istom čase môže napísať svoje myšlienky viacero žiakov;
- ✓ rozvíjajú sa komunikačné zručnosti a schopnosť porozumenia;
- ✓ počas práce žiakov je učiteľ v role pozorovateľa.

Nevýhody:

- jednotliví žiaci môžu ovplyvňovať neverbálne ostatných členov v skupine (šikovnejší žiaci môžu zneistiť slabších žiakov);
- niektorým žiakom písomné vyjadrenie myšlienok trvá dlhšie, ako ich vyslovenie;
- učiteľ musí pri vytváraní skupín dbať o to, aby boli rovnocenné;
- môže sa stať, že sa do práce nezapoja všetci žiaci;
- niektorí žiaci môžu znervóznieť, keď zistia, že ich prácu ostatný žiaci v skupine ostro sledujú;
- veľmi náročná príprava pre učiteľa.

## Ukážka a výsledky využitia Nemej písanej komunikácie formou plagátu v praxi

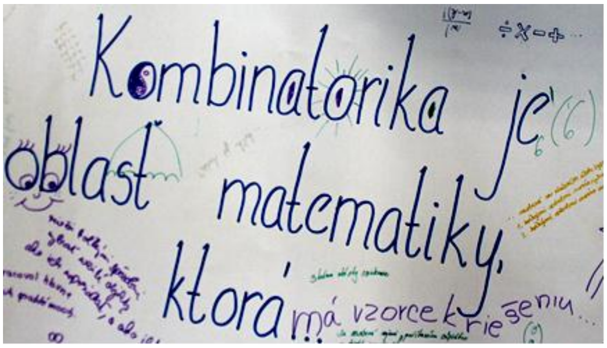
Metóda bola vyskúšaná na dvoch vyučovacích hodinách na UKF v Nitre ako opakovanie celku kombinatorika. Jedna hodina (diskrétna matematika) bola so študentmi učiteľstva informatiky a druhá hodina (kombinatorika) so študentmi učiteľstva matematiky. Uvedenú metódu sme využili vo vyučovacom procese na konci semestra, s cieľom preopakovať pred kontrolnou písomnou prácou základné pojmy, vzťahy a súvislosti.

Môžeme konštatovať, že metóda študentov zaujala a väčšina študentov sa aktívne zapojila, pri dodržiavaní predpísaných pravidiel, do práce.

### Priebeh jednotlivých hodín

Príprava

Ako impulz sme zvolili nedokončenú vetu „*Kombinatorika je oblasť matematiky, ktorá...*“ (Obr. 1). Žiaci mohli dopísať alebo dokresliť všetko, čo im v súvislosti s daným začiatkom vety napadlo.




Obrázok 1: Impulz napísaný na papieri

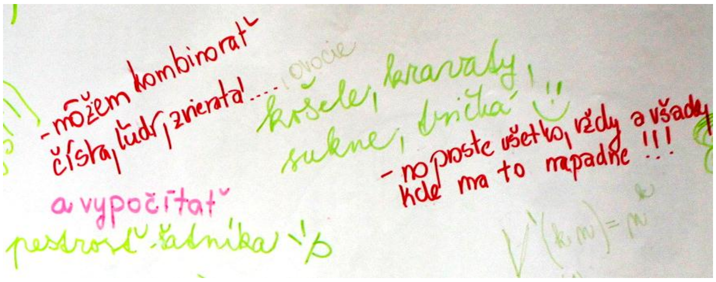
Písanie reakcií študentov na impulz

Študenti pracovali v skupinách – na hodine diskrétnej matematiky 7 študentov a na hodine kombinatoriky 4 študenti. Študentom sme rozdali perá rôznych farieb, aby sme mohli sledovať, ktorý zo študentov bol najaktívnejší a aký bol priebeh celej neverbálnej komunikácie.

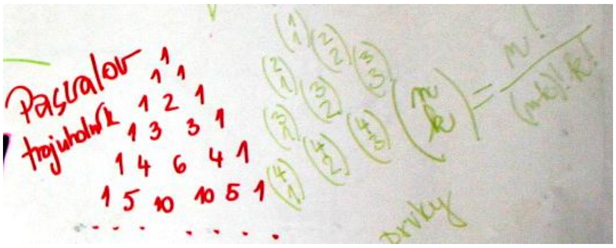
Vzájomné doplňovanie myšlienok je zobrazené na obr. 2 (je to časť plagátu z hodiny kombinatorika).

Na jednotlivých plagátoch si môžeme všimnúť, že študenti na oboch hodinách mali podobné myšlienky, ale inak ich zapísali (Obr. 3a, 3b).

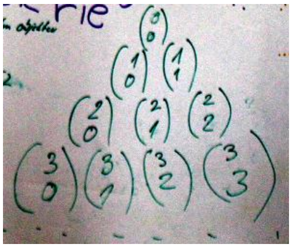
Študenti mali k dispozícii 30 minút na písanie svojich myšlienok.




Obrázok 2: Vzájomné doplňovanie myšlienok




Obrázok 3a: Pascalov trojuholník podľa jednej zo skupín na hodine kombinatoriky

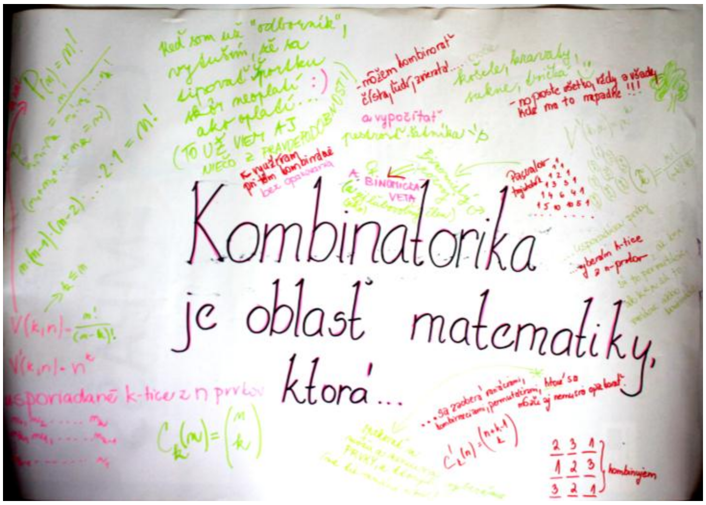


Obrázok 3b: Pascalov trojuholník napísaný inou skupinou na hodine diskrétnej matematiky

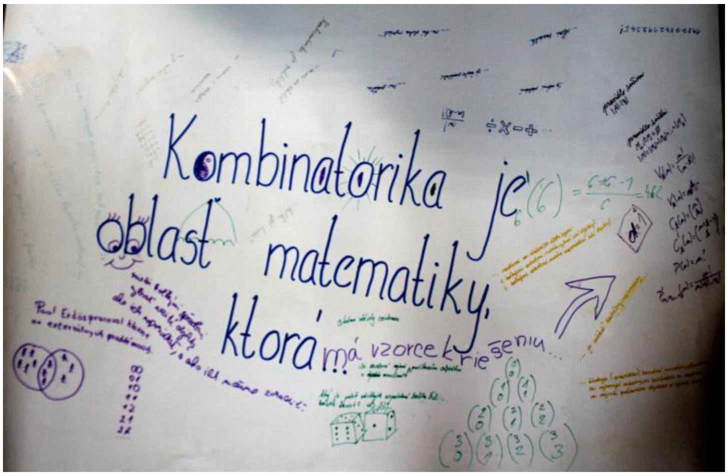
Diskusia

Po ukončení práce sme so študentmi diskutovali o napísaných myšlienkach, vzťahoch a iných poznámkach. Študenti sa nám priznali, že niektoré svoje myšlienky nevedeli zapísať. Našli sa študenti, ktorí sa priznali, že spočiatku mali trému zapísať myšlienku, pretože „*čo ak je to náhodou zle*“. Treba priznať, že sa našli aj takí študenti, ktorí pre pobavenie svojich spolužiakov napísali aj niekoľko nevhodných, s témou nesúvisiacich, poznámok.

Finálnym produktom každej, takto vedenej vyučovacej hodiny bol plagát (Obr. 4 a Obr. 5).




Obr. 4: Ukážka plagátu z hodiny Kombinatorika




Obr. 5: Ukážka plagátu z hodiny Diskrétna matematika

Vzhľadom na to, že študenti, ktorí vyskúšali nemú písanú komunikáciu, sú budúci učitelia, považovali sme za dôležité poznať ich názor na túto metódu. Prezentované názory je možné začleniť do nasledovnej schémy.

**Názory študentov a pedagógov na túto metódu**

<u>Pozitíva podľa študentov</u>

- ✓ vyučovaciu metódu považovali za zaujímavú;
- ✓ učiteľ môže jednoducho zistiť nedostatky žiakov;
- ✓ žiaci sa musia stručne a odborne vyjadrovať;
- ✓ žiaci sú novou metódou motivovaní.

<u>Negatíva podľa študentov</u>

- ✗ dominantní žiaci môžu potláčať aktivitu zvyšných;
- ✗ sú žiaci, ktorí sa písomnou formou ťažko vyjadrujú;
- ✗ prostredníctvom použitia vyučovacej metódy sa žiaci rýchlejšie naučia opisovať na písomkách.

Po vyskúšaní tejto metódy sme aj my, pedagógovia, spísali pozorovania z hodín.

<u>Pozitívne aspekty metódy:</u>

- ✓ aj po ukončení práce môžeme sledovať aktivitu študentov, keďže používali perá rôznych farieb;
- ✓ ľahko sa dajú identifikovať problematické časti učiva alebo tie, ktoré študenti najskôr zabúdajú;
- ✓ je to inovujúca a motivujúca vyučovacia metóda, ktorú by si budúci učitelia chceli vyskúšať aj v pedagogickej praxi.

<u>Negatívne aspekty metódy:</u>

- ✗ príprava učiteľa je náročnejšia, keďže musí dopredu vedieť všetky možné myšlienkové stratégie riešenia;
- ✗ medzi študentmi sa našli aj takí, ktorým písomná komunikácia robila nemalé problémy;
- ✗ niektorí študenti často zabúdali na to, že musia pracovať bez jediného slova

## Záver

Možno konštatovať, že nemá písaná komunikácia sa osvedčila (najmä svojou neobvyklosťou a inakosťou). Pozitívna spätná väzba, ktorú sme získali, je pre nás inšpiráciou pre oboznámenie s touto technikou aj ďalších študentov učiteľstva, budúcich učiteľov matematiky. Vtedy je totiž šanca, že sa táto metóda dostane aj na naše základné a stredné školy. Predpokladáme, že táto neobvyklá forma vyučovacieho procesu môže prebudiť záujem žiakov o matematiku a tým zefektívňovať vyučovací proces v matematike.

## Literatúra

[1] Gerbode, B. – Richter, J. – Schluckebier, D. (2005) Simsen (SMS) im Mathematikunterricht – Stumme Schreibgespräche. In: Praxis der Mathematik in der Schule 5/05, Hallbergmoos 2005, S. 12-17. ISSN: 0032-7042; (1617-6960)

[2] Ehret, C. (2009) Schreibgespräch. In: Mathematik lehren 156, Seelze 2009, S. 38-39. ISSN 0175-2235

[3] Dienes, Z. (1999). Építsük fel a matematikát. Budapest: SHL Hungary kft., 1999. 258. ISBN 963-03-7265-7

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

## Adresa autorov

*Mgr. Kristína Cafiková*
*Katedra matematiky*
*Fakulta porodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: kristina.cafikova@ukf.sk

*prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta porodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: jfulier@ukf.sk

## Poďakovanie

Príspevok a výskum popisovaný v rámci neho bol realizovaný z projektu UGA VI/7/2012 Rozvíjanie záujmu žiakov o matematiku prostredníctvom zaujímavých algebrických úloh.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# O INTEGRÁLOCH IRACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

# ABOUT THE INTEGRALS OF IRRATIONAL FUNCTIONS

MICHAELA KLEPANCOVÁ – MAREK VARGA

**ABSTRAKT.** *Eulerove substitúcie predstavujú najvšeobecnejšiu metódu, umožňujúcu transformovať integrály iracionálnych funkcií na integrály racionálnych funkcií, ktoré vo väčšine prípadov vieme vypočítať aplikáciou známych postupov. V príspevku poukážeme na možnosť geometrickej interpretácie uvažovanej situácie, na základe ktorej odvodíme aj tvar jednotlivých Eulerových substitúcií.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ:** *Integrály iracionálnych funkcií, kužeľosečky, Eulerove substitúcie.*

**ABSTRACT.** *Euler´s substitutions represent a general method allowing to transform the integrals of irrational functions to the integrals of rational function which we can solve in many cases by using known techniques. In the contribution we point at the possibility of a geometric interpretation of the situation under consideration and based on that we derive the form of Euler´s substitutions.*

**KEY WORDS:** *Integral of irrational functions, the curves, Euler´s substitutions.*

**CLASSIFICATION:** *I 15*

## Úvod

V úvode do integrálneho počtu sa dozvedáme, že ak pre všetky $x \in (a;b)$ platí $F'(x) = f(x)$, potom funkciu $F$ nazývame primitívnou funkciou k funkcii $f$ na intervale $(a;b)$. Ďalej vieme, že pre ľubovoľnú konštantu $c$ platí $(c)' = 0$. Preto ak je $F$ primitívnou funkciou, potom určite aj funkcia $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je primitívnou funkciou k funkcii $f$ na intervale $(a;b)$. Množinu všetkých primitívnych funkcií potom nazývame neurčitý integrál a označujeme $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Otázka integrovania je neporovnateľne náročnejšia ako derivovanie funkcií. Na výpočet neurčitých integrálov existujú najrôznejšie postupy. K základným však radíme metódu úpravy integrandu, substitučnú metódu a metódu per partes. Samotný postup v jednotlivých prípadoch, či vhodný tvar substitúcie potom závisí od toho, či sa venujeme problematike výpočtu neurčitých integrálov racionálnych, iracionálnych, goniometrických, transcendentných funkcií, či trebárs binomickým integrálom.

Vzhľadom na to, že existujú rôzne metódy (rozklad na parciálne zlomky, dopĺňanie na štvorec atď.), ktorými je možné vypočítať neurčitý integrál mnohých racionálnych funkcií, snažíme sa aj integrály iracionálnych, goniometrických či transcendentných funkcií vhodnou substitúciou pretransformovať na integrály racionálnych funkcií.

**Eulerove substitúcie**

V ďalších riadkoch sa budeme venovať postupom pri výpočte integrálov iracionálnych funkcií, konkrétne integrálom tvaru $\int \Re\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, kde $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, $\Re$ je racionálna funkcia premenných $x$ a $y$, pričom $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Za univerzálnu metódu pri výpočte integrálov iracionálnych funkcií tvaru $\int \Re\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ považujeme Eulerove substitúcie. Rozlišujeme pri tom tri prípady:

$(E1)$ ak $a>0$, použijeme substitúciu $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t \pm \sqrt{a}x$;

$(E2)$ ak $c>0$, položíme $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm xt \pm \sqrt{c}$;

$(E3)$ ak $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (t.j. existujú dva rôzne reálne korene), potom $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-\alpha)$ resp. $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-\beta)$ [*].

Ak sa pozrieme trebárs na prvú z uvedených substitúcií ($E1$), po umocnení by z rovnosti vypadli na oboch stranách kvadratické členy $ax^2$ a zo zostávajúcich sčítancov, kde sa $x$ nachádza už len lineárne, premennú $x$ ľahko vyjadríme.

Čiže substitúcie sú zvolené tak, aby bolo možné pomerne jednoducho vyjadriť premennú $x$ ako racionálnu funkciu premennej $t$, (t.j. $x=r(t)$, kde $r$ je nejaká racionálna funkci. Konkrétne vyjadrením premennej $x$ z rovností ($E1$), ($E2$), ($E3$) v danom poradí dostávame $x=\dfrac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$, $x=\dfrac{b-2t\sqrt{c}}{a-t^2}$, $x=\dfrac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a}$.

Pomocou substitúcie $x=r(t)$ následne vyjadríme aj samotnú druhú odmocninu kvadratického trojčlena $\sqrt{ax^2+bx+c}$, ako i diferenciál d$x$. Pôvodný integrál $\int \Re\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ tak po substitúcii prejde na integrál racionálnej funkcie premennej $t$, ktorý dokážeme vyriešiť pomocou známych postupov.

Ako však dospieť k jednotlivým tvarom uvedených Eulerových substitúcií?

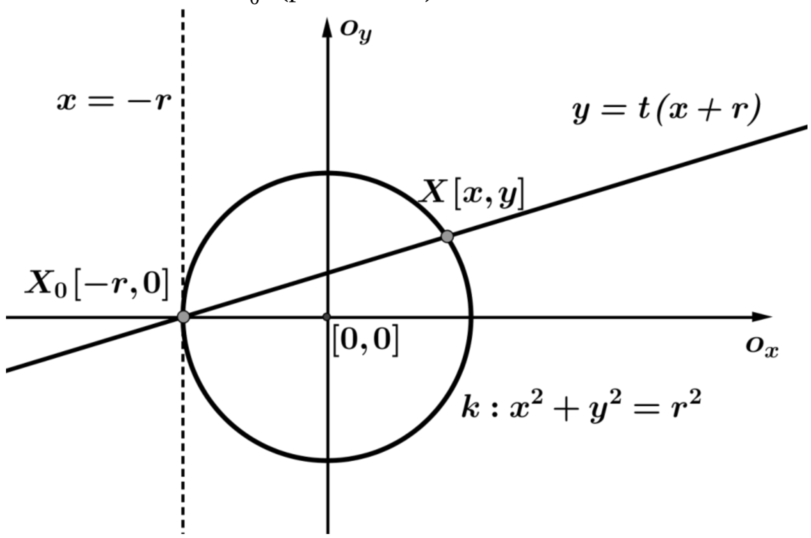
## Parametrizácia krivky

Všimnime si, že ak $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, rovnicou $y^2=ax^2+bx+c$ (resp. $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$) je určená kužeľosečka so stredom $S[m,0]$, $m=-\dfrac{b}{2a}$ (prípadne jej časť). Vzhľadom na to, že $a \neq 0$, uvažovanou kužeľosečkou je kružnica, elipsa, či hyperbola. No kužeľosečky ako krivky druhého stupňa môžu byť parametrizované racionálnymi funkciami. To znamená, že súradnice bodov $K[x,y]$ uvažovaných

[*] Konkrétna voľba kombinácie znamienok „+“ resp. „–“ je vo všetkých prípadoch ľubovoľná.

kužeľosečiek môžeme vyjadriť v tvare $x = r_1(t)$, $y = r_2(t)$, kde $t \in J$ a funkcie $r_1(t)$, $r_2(t)$ sú racionálne funkcie premennej $t$.

Nájsť parametrické vyjadrenia kužeľosečiek, a tak sa presvedčiť o pravdivosti predchádzajúceho tvrdenia, je možné rôznymi spôsobmi. Pre jednoduchosť uvažujme najskôr kužeľosečky so stredom v bode $S[0,0]$, či ešte lepšie – zoberme najskôr kružnicu $k : x^2 + y^2 = r^2$. Pri jej parametrizácii môžeme postupovať takto: zvoľme jeden z priesečníkov kružnice $k$ s osou $o_x$, napríklad bod $X_0[-r,0]$. Priamka $x = -r$ je dotyčnicou kružnice $k$ v bode $X_0$ (pozri obr. 1).




Obrázok 1: Parametrizácia kružnice.

Každá ďalšia priamka $p$ prechádzajúca bodom $X_0$ má rovnicu $y = t(x + r)$, kde parameter $t$ je smernicou tejto priamky. Priamka $p$ je už samozrejme sečnicou kružnice $k$ a pretne kružnicu $k$ v ešte jednom bode $X[x, y]$, pre ktorého súradnice platí $x^2 + [t(x + r)]^2 = r^2$. Riešením tejto kvadratickej rovnice s neznámou $x$ a parametrom $t$, ako sa ľahko presvedčíme, sú čísla $x_1 = -r$ a $x_2 = -\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} r$. Pre príslušné $y$ – ové súradnice priesečníkov dostávame $y_1 = 0$ resp. $y_2 = -\frac{2t}{t^2 + 1} r$. Vzhľadom na popísanú situáciu pre súradnice bodu $X$ zrejme platí $X\left[-\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} r; \frac{2t}{t^2 + 1} r\right]$. Navyše, ak parameter $t$ bude nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$, bod $X$ opíše celú kružnicu $k$; pochopiteľne s výnimkou bodu $X_0$, ktorý nezodpovedá žiadnej hodnote parametra $t$.

Zopakujeme, že veľký význam pre nás má fakt, že obe súradnice bodu $X$ získané parametrizáciou krivky sú dané racionálnymi funkciami (premennej $t$). Úplne podobný proces by sme mohli zopakovať či už s elipsou alebo hyperbolou. v ďalších riadkoch však využijeme už zovšeobecnené úvahy.

Uvedeným spôsobom môžeme teda nájsť parametrické vyjadrenie ľubovoľnej kužeľosečky určenej rovnicou $y^2 = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$. Zvoľme na nej ľubovoľný bod $X_0[x_0, y_0]$, pre ktorého súradnice zrejme platí $y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c$ $(*)$. Bodom $X_0$ zostrojíme sečnicu $p$ danej krivky, ktorej rovnica má tvar $y - y_0 = t(x - x_0)$, kde $t$ je smernica priamky $p$. Uvedená sečnica samozrejme pretína našu krivku v ešte jednom bode $X[x, y]$, pričom musí platiť $\left[t(x - x_0) + y_0\right]^2 = ax^2 + bx + c$. Využijúc vzťah $(*)$ dostávame $2y_0 t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a\left(x^2 - x_0^2\right) + b(x - x_0)$, odkiaľ po úprave máme $2y_0 t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b$.

To znamená, že súradnica $x$ (a teda aj $y$) sa dá vyjadriť ako racionálna funkcia premennej $t$. Navyše zmenou hodnôt parametra $t$ možno opísať celú uvažovanú krivku.

Odtiaľ je už potom zrejmé, že rovnosť $ax^2 + bx + c = \left[t(x - x_0) + y_0\right]^2$ resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) + y_0$ určuje tú substitúciu, ktorá umožňuje racionalizovať integrand v integráloch tvaru $\int \Re\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$. Zápis $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) + y_0$ resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = t(x - x_0)$ teda predstavuje všeobecný tvar Eulerových substitúcií. Ako sa dostaneme k jednotlivým Eulerovým substitúciám potom závisí už len od špeciálnej voľby súradníc bodu $X_0[x_0, y_0]$ vo vyššie uvedenom vzťahu.

## Eulerove substitúcie geometricky

V ďalšom musíme začať úvahami o definičnom obore funkcie $f : y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Predovšetkým, podmienkou $b^2 - 4ac \neq 0$ sme vylúčili prípad dvojnásobného koreňa polynómu $ax^2 + bx + c$. Potom, aby bola funkcia $f$ vôbec niekde definovaná, musí nastať jeden z prípadov:

(I) $a < 0$ a súčasne $c > 0$;[**]

(II) $a > 0$.

Začnime prípadom (I). Ak sú splnené uvedené podmienky, z úvah v poznámke pod čiarou vyplýva, že náš kvadratický trojčlen má dva rôzne reálne korene, t.j. $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V tomto prípade je funkciou $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ určená časť elipsy alebo kružnice so stredom v bode $S[m, 0]$, $m = -\dfrac{b}{2a}$.

[**] Ak by $a < 0$, a kvadratický trojčlen by nemal žiadny reálny koreň, tj. $b^2 - 4ac < 0$, tak by muselo platiť aj $c < 0$. Avšak potom by celá parabola ležala pod osou $o_x$, z čoho by vyplývalo $D(f) = \varnothing$.

Ak pri uvedenom spôsobe parametrizácie tejto krivky, t.j. v rovnosti $\sqrt{ax^2+bx+c}-y_0=\pm t\left(x-x_0\right)$, zvolíme za bod $X_0\left[x_0,y_0\right]$ niektorý z jej priesečníkov s osou $o_x$, t.j. $\bar{X}_0\left[\alpha,0\right]$ resp. $\bar{\bar{X}}_0\left[\beta,0\right]$, dostávame $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\left(x-\alpha\right)$, resp. $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\left(x-\beta\right)$, čo je tvar tretej Eulerovej substitúcie ($E3$).

Zostaňme uvažovať situáciu (I), sústreďme sa však na kladnú hodnotu koeficientu $c$. Naša krivka totiž pretína v dvoch bodoch i os $o_y$, konkrétne v priesečníkoch $\bar{Y}_0\left[0,\sqrt{c}\right]$ resp. $\bar{\bar{Y}}_0\left[0,-\sqrt{c}\right]$. Ak teda pri parametrizácii krivky určenej rovnicou $y^2=ax^2+bx+c$ zvolíme za bod $X_0\left[x_0,y_0\right]$ niektorý z uvedených priesečníkov s osou $o_y$, dostávame $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm tx\pm\sqrt{c}$, čiže tvar Eulerovej substitúcie ($E2$).

Na prípad (II), ktorý by si zaslúžil podrobnejší popis, sa pozrieme len v krátkosti. Je zrejmé, že asymptotami hyperboly $y^2=ax^2+bx+c$, pričom $a>0$, sú priamky $y=\pm\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$. Potom každá priamka, rovnobežná s niektorou z asymptôt, t.j. $y=\pm\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)+z$, kde $z\neq 0$, pretne uvažovanú hyperbolu práve v jednom bode $X\left[x,y\right]$. Ak $z$ bude postupne nadobúdať všetky nenulové hodnoty, bod $X\left[x,y\right]$ opíše celú krivku. Po roznásobení a oreznačení hodnoty $t=\pm\dfrac{b}{2\sqrt{a}}+z$ môžeme rovnicu priamky $y=\pm\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)+z$ napísať v tvare $y=\pm\sqrt{a}x\pm t$. To však znamená, že substitúcia $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x\pm t$ umožňuje racionalizovať integrand v integráloch tvaru $\int\Re\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ pričom $a>0$. Podarilo sa nám teda odvodiť aj prvú Eulerovu substitúciu ($E1$).

*Príklad.* Aspoň jedno použitie Eulerových substitúcií si môžeme ukázať na výpočte konkrétneho integrálu, napr. vypočítajme $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}\mathrm{d}x$.

Zrejme $a=1>0$, asymptotami hyperboly $y^2-x^2=c$ sú priamky $y=\pm x$, priamky s nimi rovnobežné majú rovnice $y=\pm x\pm t$, kde $t\in\mathbb{R}$. Pre substitúciu zvoľme verziu $\sqrt{x^2+c}=-x+t$. Potom dostávame $x=\dfrac{t^2-c}{2t}$, $dx=\dfrac{c}{2t^2}dt$, a napokon $\sqrt{x^2+c}=\dfrac{c}{2t}$.

Využitím týchto faktov máme

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\mathrm{dt}=\ln\left|t+c\right|=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+c\text{; kde } c\in\mathbb{R}.$$

## Záver

Najvšeobecnejšou metódou na výpočet integrálov iracionálnych funkcií sú Eulerove substitúcie. Na samotné hľadanie primitívnych funkcií nám postačí poznať ich tvar, prípadne si ich algebraicky odvodíme, ak vieme, čo nimi sledujeme. V článku sa zameriavame na geometrické vysvetlenie týchto formúl väčšinou známych len z matematickej analýzy.

## Literatúra

[1] Fichtengoľc, G. M. (1951). Kurs differenciaľnogo i integraľnogo iscislenija II. Gosudarstvennoje izdateľstvo techniko – teoretičeskoj literatury, Moskva, 1951; 863 s.

*Článok prijatý dňa 30. júna 2012*

## Adresa autorov

*Mgr. Michaela Klepancová*
*KM FPV UKF*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 94974 Nitra*
michaela.klepancova@ukf.sk

*PaedDr. Marek Varga, PhD.*
*KM FPV UKF*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 94974 Nitra*
mvarga@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# OBJAVNÉ EDUKAČNÉ STRATÉGIE PRI VYUČOVANÍ MATEMATIKY S VYUŽITÍM INTERDISCIPLINARITY

# INQUIRY BASED LEARNING IN TEACHING MATHEMATICS WITH USING THE INTERDISCIPLINARY RELATIONS

LÝDIA KONTROVÁ, IVANA POBOČÍKOVÁ

**ABSTRAKT.** *Objavné edukačné stratégie predstavujú matematiku ako účinný nástroj popisujúci zákonitosti a riešenia problémov v iných vedných disciplínach, a prezentujú ju nielen ako abstraktnú a exaktnú vedu, ale aj ako vedu aplikovateľnú a užitočnú pre každodennú prax. Uplatňovanie metódy objavného vyučovania v procese výučby matematiky je vhodným prostriedkom na rozvíjanie interdisciplinárnych väzieb a integrovaného vyučovania. Článok na dvoch príkladoch poukazuje na možnosti uplatňovania tejto metódy.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *objavné vyučovanie, interdisciplinarita, integrované vyučovanie*

**ABSTRACT**. *Inquiry based learning introduces mathematics as an efficient tool for describing laws and solutions of problems in various branches of science and presents it not only as an abstract and exact science, but also as a useful science applicable for everyday practice. Use of this method in the process of teaching mathematics allows us to develop interdisciplinary bonds and integrated education. This article shows two examples of how it is possible to apply this method.*

**KEY WORDS:** *inquiry based learning, relationships between objects, integrated Learning.*

**CLASSIFICATION:** *A30.*

## Úvod

Prebiehajúca reforma školstva v Slovenskej republike priniesla aj do vyučovania matematiky viaceré zmeny. Tieto premeny sa týkajú jednak obsahu, ale tiež metód, foriem a organizácie matematického vzdelávania a vyučovania. Čoraz väčší dôraz sa kladie na rozvoj kľúčových matematických kompetencií študenta, pričom za prvoradý vzdelávací cieľ sa považuje schopnosť študentov používať a aplikovať relevantné matematické úsudky, pojmy a vzťahy pri riešení problémov každodenného života.

Rozvoj spomínaných kompetencií môže podporiť predovšetkým akcentovanie využívania medzi predmetných vzťahov vo vyučovaní: aplikovanie preberaných matematických pojmov a vzťahov pri riešení konkrétnych problémov predovšetkým v prírodných, technických, ekonomických a spoločenských vedách. Prekonávanie izolácie jednotlivých vyučovacích predmetov umožňuje ukázať matematiku ako účinný nástroj popisujúci zákonitosti a riešenia problémov v iných vyučovacích predmetoch.

Druhou kľúčovou úlohou učiteľa matematiky je podať matematiku atraktívnym spôsobom. Matematika je vtedy zaujímavá, ak živí našu predstavivosť, vynachádzavosť, tvorivosť a odpovedá na otázky, ktoré vyplynuli z konkrétnych životných potrieb alebo skúseností. Uvádzané atribúty spĺňa tzv. objavné vyučovanie, ktoré umožňuje učiacim sa aktívne participovať pri objavovaní riešení skutočných problémov z praxe.

Študenti pri riešení problému v rámci objavného vyučovania zapájajú širokú škálu aktivít, akými sú zjednodušovanie a štruktúrovanie komplexných problémov, systematické pozorovanie, meranie, vytváranie grafických a numerických modelov, formulovanie definícií, triedenie údajov, tvorba úsudkov, stanovenie predpokladov a hypotéz, kontrolovanie premenných, experimentovanie, vizualizácia, objavovanie vzťahov, prepojení a vzájomnú komunikáciu.

Cieľom objavného vyučovania je simulovať matematickým modelom problém z oblasti inej vednej disciplíny a následne tento problém riešiť. Študenti získavajú cenné kompetencie, matematická gramotnosť v zmysle schopnosti riešiť vhodne zvolenými matematickými úsudkami konkrétne problémy praxe sa zvyšuje. Rocard [5] uvádza, že objavné vyučovanie zvyšuje záujem o matematiku v kontexte s prírodnými vedami.

## Matematika v biológii alebo biológia v matematike?

V našom článku uvádzame dva príklady aplikovania metódy objavného vyučovania pri riešení úloh z biológie. Pri riešení oboch uvedených problémov predchádza vytvoreniu matematického modelu etapa vyhľadávania a triedenia informácií a údajov z oblasti botaniky. Táto aktívna činnosť študentov vyústi do formulovania a následného overovania hypotézy nástrojmi matematickej štatistiky. Inšpiráciu pre prvú úlohu sme získali zo zdroja [4].

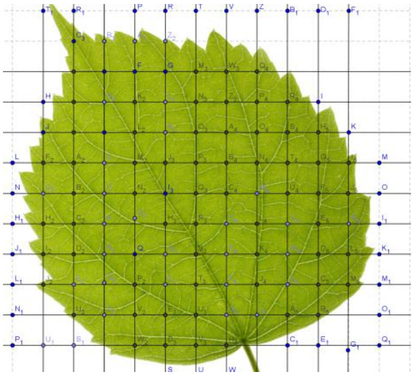
**Príklad 1.** Je známe, že listy na strome, ktoré rastú na obvode koruny, majú často menšiu listovú plochu ako listy, ktoré rastú vo vnútri koruny. Aby sa porovnala veľkosť listovej plochy istého druhu stromu, vybralo sa náhodne $n$ = 10 listov z obvodu koruny a $m$ = 10 listov z vnútra koruny.

Na meranie plochy listov sa použila bodová metóda. Na každý list sa položila fólia s mriežkou pravidelne rozmiestnených bodov 0,5 $cm$ × 0,5 $cm$. Spočítal sa počet bodov $k_1$, ktoré celé ležia na liste a počet bodov $k_2$, ktorých časť leží na liste (Obrázok 1). Každý bod, ktorý celý leží na liste znamená $0,25\,cm^2$ listovej plochy. Celková listová plocha je rovná $\left(k_1+0,5\,k_2\right).0,25\,cm^2$ .Výsledky meraní sú v tabuľke 1.

Dá sa tvrdiť, že slnečné žiarenie nemá vplyv na veľkosť listovej plochy?

| **Listy z obvodu koruny** $x_i$ | **Poradie** $R_{1i}$ | **Listy z vnútra koruny** $y_i$ | **Poradie** $R_{1i}$ |
|---|---|---|---|
| 42 | 3 | 56 | 13 |
| 45 | 4,5 | 62 | 16 |
| 77 | 20 | 68 | 18 |
| 41 | 2 | 76 | 19 |
| 48 | 7,5 | 55 | 12 |
| 60 | 15 | 58 | 14 |
| 53 | 10,5 | 48 | 7,5 |
| 40 | 1 | 53 | 10,5 |
| 47 | 6 | 63 | 17 |
| 45 | 4,5 | 52 | 9 |

Tabuľka 1.



Obrázok 1.

**Riešenie.**
Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$.

Pretože máme malý rozsah výberov a nepoznáme rozdelenie pravdepodobnosti, použijeme na test hypotézy neparametrický Wilcoxonov-Mann-Whitneyov test. Testujeme hypotézu

$H_0$ : Oba výbery pochádzajú z toho istého rozdelenia pravdepodobnosti, proti

$H_0$ : Oba výbery nepochádzajú z toho istého rozdelenia pravdepodobnosti.

Všetky namerané hodnoty usporiadame podľa veľkosti a priradíme im poradie. Výsledky a ich poradia sú v tabuľke. Odtiaľ sčítame poradia pre prvý a pre druhý výber

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} R_{1i} = 74, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{10} R_{2i} = 136.$$

Potom

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - T_1 = 81, \quad U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - T_2 = 19.$$

Kritická hodnota je $W(\alpha) = W(0,05) = 23$. Hodnota testovacej štatistiky je $\min(U_1, U_2) = 19 \leq 23$ hypotézu $H_0$ zamietame.
Na základe získaných výsledkov sa dá tvrdiť na hladine významnosti $\alpha = 0,05$, že slnečné žiarenie má vplyv na veľkosť listovej plochy.

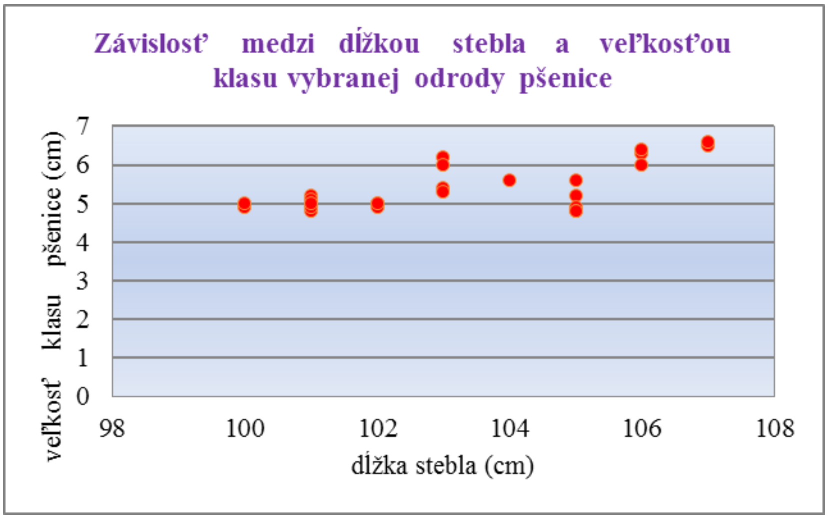
**Príklad 2.** Zaujíma nás vzťah medzi dĺžkou stebla (cm) vybranej odrody pšenice a veľkosťou klasu (cm) skúmanej odrody pšenice. Na poli bolo náhodne vybraných 25 rastlín, u ktorých boli odmerané dĺžky oboch znakov. Výsledky meraní sú zaznamenané v tabuľke 2. Dá sa tvrdiť, že dĺžka stebla pšenice a veľkosť klásku sú závislé javy?

| rastlina | dĺžka stebla | veľkosť klasu |
|---|---|---|
| 1 | 105 | 5,6 |
| 2 | 103 | 6,2 |
| 3 | 101 | 4,8 |
| 4 | 107 | 6,5 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 103 | 5,4 |
| 6 | 102 | 5 |
| 7 | 104 | 5,6 |
| 8 | 103 | 6 |
| 9 | 102 | 4,9 |
| 10 | 106 | 6,3 |
| 11 | 105 | 5,2 |
| 12 | 101 | 4,9 |
| 13 | 103 | 5,3 |
| 14 | 107 | 6,6 |
| 15 | 106 | 6,4 |
| 16 | 102 | 5 |
| 17 | 100 | 4,9 |
| 18 | 100 | 5 |
| 19 | 106 | 6 |
| 20 | 105 | 4,9 |
| 21 | 105 | 4,8 |
| 22 | 101 | 5,2 |
| 23 | 105 | 4,8 |
| 24 | 101 | 5,1 |
| 25 | 101 | 5 |

Tabuľka 2.

**Riešenie.** Závislosť medzi dĺžkou stebla vybranej odrody pšenice a veľkosťou jej klásku na základe získaných údajov znázorníme korelačným grafom.




Graf 1.

Pozorovanými znakmi sú znaky *X, Y*, kde *X* označuje dĺžku stebla vybranej odrody pšenice a *Y* veľkosť klasu pšenice. Budeme predpokladať, že náhodný vektor (*X,Y*) má dvojrozmerné normálne rozdelenie s korelačným *Pearsonovým* koeficientom $\rho$.
Vypočítame hodnotu výberového koeficientu korelácie $r$ zo vzťahu

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Dostávame $r = 0{,}66$.

Po vypočítaní výberového koeficientu korelácie, ktorý poukazuje na pomerne silný stupeň závislosti medzi pozorovanými znakmi sme si položili otázku, či je možné získané výsledky zovšeobecniť pre celý základný súbor.
Odpoveď získame realizovaním testu významnosti koeficientu korelácie $r$.

Na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$ budeme testovať, či je závislosť medzi dĺžkou stebla vybranej odrody pšenice a veľkosťou jej klasu štatisticky významná.
Testovaný problém bude mať nasledujúci tvar:
$H_0$: $\rho = 0$ proti $H_1$: $\rho \neq 0$.
Nulová hypotéza $H_0$ vyjadruje, že pozorované znaky *X, Y* sú nezávislé a alternatívna hypotéza $H_1$ vyjadruje, že medzi pozorovanými *X,Y* znakmi existuje signifikantná štatistická závislosť.
Ako testovacie kritérium použijeme štatistiku:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2},$$

ktorá má za platnosti testovanej hypotézy $H_0$ Studentovo $t$ - rozdelenie o $(n - 2)$ stupňoch voľnosti. Hypotézu zamietame na hladine významnosti $\alpha$ , ak $|t| > t_\alpha(n-2)$, kde $t_\alpha(n-2)$, sú kritické hodnoty Studentovho $t$ - rozdelenia o $n - 2$ stupňoch voľnosti. V opačnom prípade, t.j.
ak $|t| \le t_\alpha(n-2)$, hypotézu $H_0$ nemôžeme zamietnuť, čo znamená, že korelácia nie je štatisticky významná.
Dostávame

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} = \frac{0{,}66}{\sqrt{1-0{,}4356}}\sqrt{23} = 4{,}21.$$

Získanú hodnotu porovnáme s tabuľkovou hodnotou $t_{0,01;23} = 2{,}81$.
Zamietame na hladine významnosti $\alpha = 0{,}01$ nulovú hypotézu. To znamená, že medzi pozorovanými znakmi *X, Y* existuje štatisticky významná závislosť. Čiže so vzrastajúcou dĺžkou stebla pšenice zväčšuje sa aj veľkosť jej klásku.

**Záver**

Obe vyššie uvádzané úlohy majú znaky problému, ktorý je možné riešiť v rámci objavného vyučovania matematiky. Študenti sa počas jeho riešenia oboznamujú s problematikou z oblasti botaniky, je možné realizovať aj meranie dĺžky stebla a kláskov pšenice v teréne v rámci ďalšieho vyučovacieho predmetu. Registrujeme, že pri objavnom vyučovaní sa dostávajú do popredia okrem interdisciplinarity tiež prvky integrovaného vyučovanie, ktoré akcentuje komplexný rozvoj osobnosti študenta. Takýto spôsob vyučovania matematiky je pre študentov atraktívny a predovšetkým ukazuje matematiku v inom svetle; nie len ako svet abstraktných pojmov, definícií a viet ale predovšetkým ako užitočný nástroj na riešenie problémov z praxe.

## Literatúra


[1] Anděl, J. (1998). Statistické metody. Praha, Matfyzpress Praha, 1998. ISBN 80-85863-27-8.

[2] Dorociaková, B., Pobočíková, I. (2005). Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Žilina, Edis Žilina, 2005. ISBN 80-8070-384-1.

[3] Plocki, A. (2004). Pravdepodobnosť okolo nás. Ružomberok, Katolícka univerzita, Ružomberok, 2004. ISBN 80-89039-51-0.

[4] www.vedajezabava.upol.cz/docs/prakticke_ulohy_z_biologie.pdf.

[5] Rocard, M. (2007). Science Education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Brussels: European Commision. Directorate-General for Research, 2007. 22 s. ISBN 978-92-79-05659-8.


*Článok prijatý dňa 8. júla 2012*

## Adresy autorov


*RNDr. Lýdia Kontrová, PhD.*
*Katedra aplikovanej matematiky*
*Fakulta humanitných vied*
*Žilinská univerzita v Žiline*
*Univerzitná 1*
*SK – 010 26 Žilina*
e-mail: lydia.kontrova@fhv.uniza.sk

*Mgr. Ivana Pobočíková, PhD.*
*Katedra aplikovanej matematiky*
*Strojnícka fakulta*
*Žilinská univerzita v Žiline*
*Univerzitná 1*
*SK – 010 26 Žilina*
e-mail: ivana.pobocikova@fstroj.uniza.sk


## Poďakovanie

Článok vznikol s podporou projektu KEGA 046/2011 – Informačný vek modifikuje metódy a formy vyučovania matematiky.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ROZVÍJANIE TVORIVOSTI MATEMATICKY NADANÝCH ŠTUDENTOV V DIGITÁLNOM PROSTREDÍ

# CREATIVITY DEVELOPMENT OF GIFTED AND TALENTED STUDENTS IN DIGITAL ENVIROMENT

LILLA KOREŇOVÁ

**ABSTRAKT.** *Pre matematicky nadaných študentov je typický zrýchlený rozvoj kognitívnych schopností, ktoré môžeme rozvíjať pomocou vhodnej motivácie k tvorivosti vo vhodnom didaktickom prostredí. Ďalšie typické charakteristiky nadaných študentov sú zvedavosť, radosť z objavovania, schopnosť klásť nevšedné otázky a dobrá schopnosť argumentovať. Preto je konštruktivistický prístup vo vyučovaní veľmi vhodným nástrojom pre rozvoj kreativity matematicky nadaných študentov. V príspevku uvádzame niekoľko príkladov výučby matematiky touto metódou v digitálnom prostredí.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ***: kreativita, IKT, konštruktivizmus, GeoGebra*

**ABSTRACT.** *Accelerated cognitive growth is typical for gifted and talented students, which can be developed under sufficient motivation and creativity using proper didactic environment. Other typical characteristics of gifted students involve curiosity, joy from discovering, asking uncommon questions and a good ability to argue. Therefore a constructivist approach in teaching is very appropriate for developing the creativity of mathematically gifted students. In this contribution we present several examples of teaching mathematics in a digital enviroment.*

**KEY WORDS:** *creativity, ICT, constructivist approach, GeoGebra*

**CLASSIFICATION:** *U54, U53*

## Úvod

### Čo je to tvorivosť? Aký je rozdiel medzi inteligenciou a tvorivosťou?

Problematika tvorivosti je mimoriadne zložitá, komplikovaná, nedostatočne preskúmaná. V súčasnosti existuje niekoľko sto definícií tvorivosti, nazývanej aj kreativita. Jedna z najznámejších definícií je od Torrance, ktorý kreativitu popisuje ako vznik niečoho nového, ako proces formovania myšlienok alebo hypotéz, testovania hypotéz a komunikácie výsledkov. Kreatívny proces potom podľa neho ústí v niečo nové, dovtedy nevytvorené. Na základe popredných svetových odborníkov opisuje Turek niekoľko axióm o tvorivosti. Z nich vyberáme pre nás dôležitú axiómu: Tvorivosť, tvorivé schopnosti, tvorivé myslenie je možné rozvíjať, formovať, trénovať, t. j. je možné ich zvyšovať. [9]

Rozdiel medzi tvorivosťou a inteligenciou je najmä v tom, že inteligencia je intelektová schopnosť zakladajúca sa na konvergentnom myslení, ktorá signalizuje kvalitu orientácie v problémových situáciách, vo výbere vhodného riešenia a v miere preukázanej pružnosti a ľahkosti v zmene zamerania. Naproti tomu tvorivosť je proces, ktorého zložkami sú aj medzery a nedostatky v poznávaní, senzibilita k chýbajúcim prvkom, proces odhaľovania problémov a hľadania nových originálnych postupov, vytvárania, overovania a hodnotenia hypotéz.

Ako pri inteligencii, tak aj pri tvorivosti ide o intelektovú činnosť. Inteligencia a tvorivosť však nie sú totožné. Všeobecne však platí, že vysoká inteligencia sa môže spájať s nižšou úrovňou tvorivosti, ale vysoká úroveň tvorivosti myslenia sa nevyskytuje s veľmi nízkou úrovňou inteligencie.

**Čo je nadanie (matematické)?**

S pojmom tvorivých schopností sa viažu pojmy nadanie a talent. Nadpriemerná úroveň schopností jednotlivca prejavujúca sa v určitej oblasti ľudskej tvorivosti je nazývaná nadaním alebo talentom k vykonávaniu určitej činnosti. Najmä psychológovia sa dlhú dobu zaoberajú štruktúrou nadania - hľadaním faktorov, ktoré samotné nadanie vytvárajú a ovplyvňujú. Prišli na to, že nadanie nie je len súbor vysokých schopností, ale aj iných vlastností osobnosti. Tak vznikol Renzulliho trojprstencový model nadania, ktorý zobrazuje nadanie ako prienik vysokých schopností, tvorivosti a motivácie (snahy, zanietenia). [6]

Renzulli vypracoval model talentu na základe rozboru dôsledkov vyplývajúcich z toho, že v praxi bola rozhodujúcim kritériom pre výber talentovaných hodnota IQ. Vyčlenil v ňom tri základné skupiny charakteristík osobnosti a talent chápe ako interakciu medzi nimi (obrázok 1)


Obrázok 1

Pre učiteľa vyplýva , že môže ovplyvňovať motiváciou kreativitu a zaangažovanosť študentov. Tým pomáha rozvoju talent žiakov.

Vieme, že tvorivosť sa dá rozvíjať! Ďalej vieme, že pomocou motivácie sa zvyšuje zaangažovanosť študentov a to pomáha rozvoju jeho talentu. Tieto tvrdenia platia aj pre matematicky nadaných študentov.

**Ako motivovať ku kreatívnej činnosti? Prečo konštruktivistický prístup k vyučovaniu?**

Pre žiakov je digitálny svet v súčasnosti veľmi prirodzený. Všetci pracujú s internetom, používajú mobily, počítače, notebook, tablet, rôzne softvéry, žijú vo svete IKT. Digitálne prostredie vo vyučovaní (aj matematiky) je pre študentov veľmi motivujúce.

Teória konštruktivistického poznávania a učenia sa, ktorú vypracoval švajčiarsky psychológ Jean Piaget, vychádza z predpokladu, že žiak v aktívnej interakcii s prostredím postupne konštruuje svoj vnútorný systém poznania. Proces učenia sa by mal prebiehať v podnetnom vzdelávacom prostredí, ktoré inšpiruje žiakov k bádaniu. [4]

V rámci pedagogického konštruktivizmu existuje viac koncepcií vyučovacieho procesu zamerané na rozvoj tvorivosti. Z nich sú najznámejšie problémové vyučovanie a projektové vyučovanie. Obe tieto koncepcie môžu v sebe zahŕňať vyučovacie metódy ako heuristická metóda, výskumná metóda, metóda riadeného skúmania, a ďalšie.

Takýmto podnetným prostredím je digitálne prostredie, využívanie IKT, počítačov, tabletov, interaktívnej tabule, softvérov a pod. Digitálne prostredie je žiakom blízke, je ich bežnou realitou. Riadené skúmanie alebo výskumnú metódu môžeme vhodne využívať v digitálnom prostredí, ako je napríklad učebňa s interaktívnou tabuľou, vybavená počítačmi alebo tabletmi pre každého žiaka.

O pozitívach aj negatívach využívania interaktívnej tabule píše podrobnejšie Edita Partová [5] a Katarína Žilková [11]

Vhodným podnetným digitálnym vzdelávacím prostredím pre všetky metódy konštruktivistického prístupu je otvorený softvér GeoGebra. O využívaní softvéru GeoGebra píšu Ján Gunčaga [2], Péter Körtesi [3] a Emilia Veliková [10].

V príspevku prezentujeme softvér GeoGebra ako nástroj pre podnetné digitálne prostredie riadeného skúmania žiakov. V takomto digitálnom prostredí môžeme rozvíjať kreativitu žiakov. Žiaci majú možnosť vytvárať hypotézy, overovať, riešiť nové problémy. Môžeme rozvíjať ich zvedavosť, tendenciu pýtať sa, nezávislosť v myslení, pozorovaciu schopnosť. Pri prezentácii výsledkov bádania sa rozvíja aj ich sebavedomie, asertivita. To všetko môže napomôcť k rozvíjaniu kreativity žiakov.

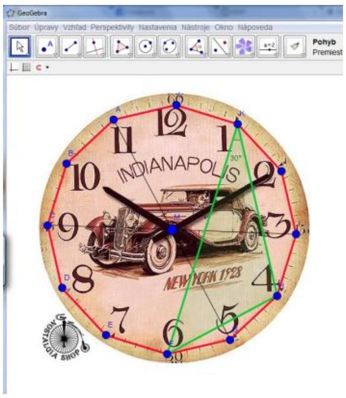
Uvádzame niekoľko námetov pre riadené skúmanie študentov základných a stredných škôl v prostredí GeoGebra. Námety metodík sú vytvorené ako súčasť prípravy budúcich učiteľov v oblasti didaktiky digitálneho vyučovania matematiky v predmete „Didaktický softvér vo vyučovaní matematiky“ (http://elearn.ematik.fmph.uniba.sk/), ako aj v rámci Národného projektu „Modernizácia vzdelávacieho procesu na stredných školách“ https://www.modernizaciavzdelavania.sk/) , kde sme navrhli a odskúšali niekoľko námetov konštruktivistického poznávania v prostredí GeoGebra.

## Niekoľko námetov na vyučovanie

### Obvodové a stredové uhly

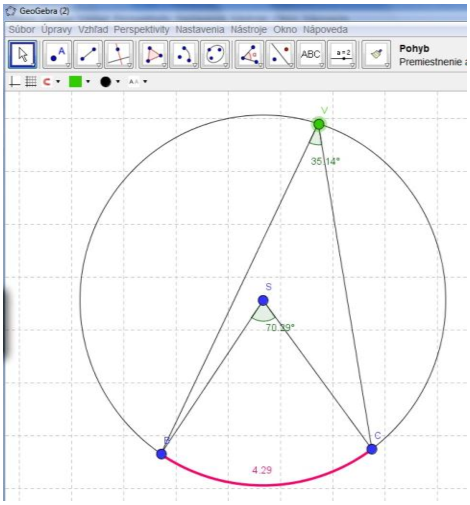
Pri tejto ukážke sme použili metódou riadeného skúmania obohatenú o rozmer digitálneho prostredia GeoGebry. Študentom postupne predostrieme problémy, ktoré riešia pomocou predpripravených pracovných listov v softvéri GeoGebra. Najprv študenti pracujú s uhlami v trojuholníku ktorý je vpísaný do ciferníka hodín. Postupnými otázkami objavujú hypotézu, že obvodový uhol (pri číslici na hodinách) je dvojnásobok stredového uhla (v strede hodín) Hypotézu si overujú len experimentovaním v GeoGebre.

Úloha 1 pre žiakov: Určte vnútorné uhly trojuholníkov, vpísaných do ciferníka hodín. Postupne vytvárajte rôzne takéto trojuholníky. Možné riešenie žiakov je na obrázku 2.

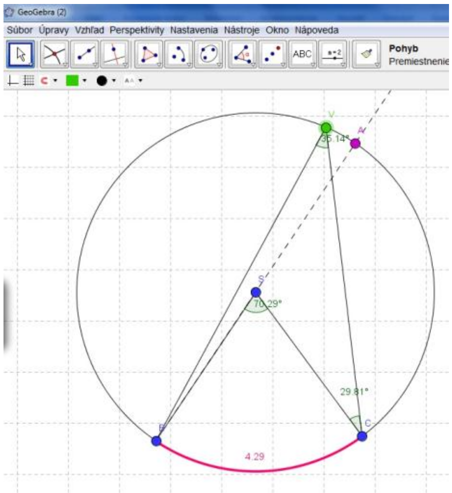



Obrázok 2

Úloha 2 pre žiakov: Na kružnici si zvoľte kružnicový oblúk ľubovoľnej dĺžky. Zapisujte si postupne do tabuľky údaje: dĺžka kružnicového oblúka, veľkosť obvodového uhla (pri vrchole V) a veľkosť stredového uhla (pri S). Zistite, aký vzťah platí medzi stredovým uhlom a obvodovým uhlom. Súvisí veľkosť oblúka s obvodovým uhlom? Premiestnite bod V do bodu X a odvoďte vzťah medzi obvodovým a stredovým uhlom. Možné riešenia žiakov sú na obrázku 3 a 4.

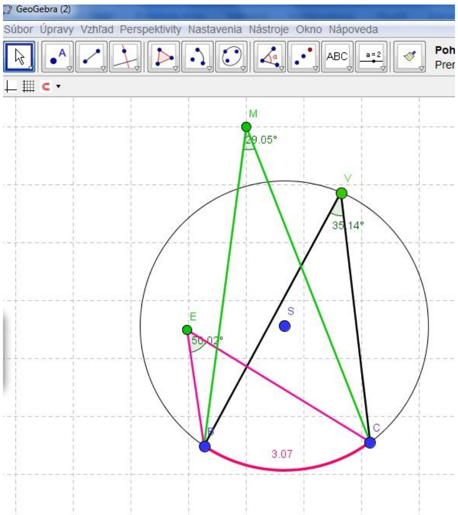



Obrázok 3




Obrázok 4

Úloha 3 pre žiakov: Na kružnici si zvoľte kružnicový oblúk ľubovoľnej dĺžky. Bod M je vonkajší bod kružnice (zvoľte rôzne umiestnenia) a bod N je vnútorný bod kružnice. Zapisujte si postupne do tabuľky údaje: dĺžka oblúka, niekoľko k nemu prislúchajúcich údajov uhla BVC, BMC, BNC. Zistite či ide o nejakú závislosť. Svoje tvrdenie odôvodnite. Možné riešenie žiakov je na obrázku 5.

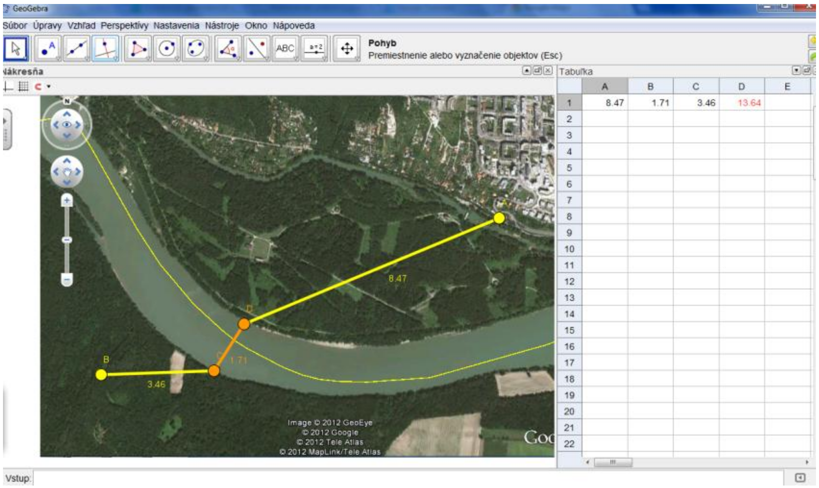



Obrázok 5

**Konštrukčné úlohy riešené pomocou zhodných zobrazení**

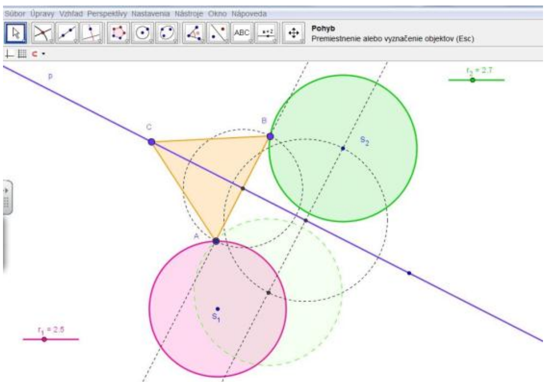
Konštrukčné úlohy vo vyučovaní témy zhodné zobrazenia vyžadujú vyššiu mieru abstrakcie a sú pomerne náročné na čas a presnosť. Študenti pomocou dynamického softvéru GeoGebra môžu experimentovať, simulovať všetky potrebné konštrukcie. V danej téme sme použili konštruktivistický prístup - riadené skúmanie.

Úloha 1 pre žiakov: Nájdi na internete fotografiu zaujímavého mesta a rieky. Nájdi na rieke šírky d miesto, kde postavíme most v smere kolmom na tok rieky tak, aby cesta z miesta A do miesta B bola čo najkratšia. Možné riešenie žiakov je na obrázku 6.



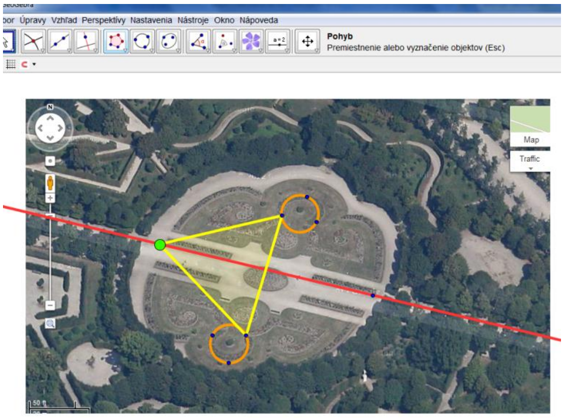
Obrázok 6

Úloha 2 pre žiakov: Záhony kvetín v zámockom parku majú tvar kružníc k a l a ležia na opačnej strane hlavného chodníka - priamky p (v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p). Záhradník chce vyznačiť chodníček tvaru rovnostranného trojuholníka tak, aby konce chodníčka boli na okraji záhonov a hlavného chodníka. Matematický model tejto úlohy sa dá napísať: zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby bod A ležal na kružnici k, bod B na kružnici l a bod C na priamke p. Možné riešenie žiakov je na obrázku 7. Okrem precvičenia využitia zhodných zobrazení dáva dynamický softvér GeoGebra žiakom aj možnosť skúmania riešiteľnosti úlohy a následnej diskusie.



Obrázok 7

Úloha 3 pre žiakov: Nájdite na internete zaujímavé záhony kvetín a formulujte podobnú úlohu pre záhradníka ako v predchádzajúcej úlohe. Riešte a overte riešenie v GeoGebre. Formulujte postup pre záhradníka. Možné riešenie žiakov je na obrázku 8.



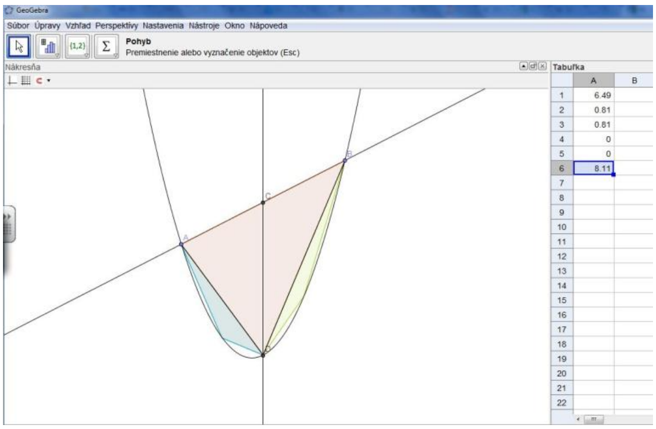

Obrázok 8

**Archimedova kvadratúra paraboly**

Využitím Archimedovej kvadratúry paraboly vo vyučovaní matematiky na strednej škole popísal Ján Gunčaga vo svojej publikácii [1].

Tento výborný nápad chceme doplniť využitím softvéru GeoGebra. Študenti simulujú bádanie podľa Eudoxovej exhaustačnej metódy, ale pomoc dostávajú napríklad v automatizácii niektorých procesov. Môžu si totiž vytvoriť Nástroj (Tools), ktorým vytvoria trojuholník nad danou úsečkou vpísaný parabole. Pomocou nástroja Tabuľka postupne vytvárajú sumu obsahov týchto trojuholníkov, čím sa približujú hodnote obsahu oblasti ohraničenej parabolou a priamkou. Na podnet učiteľa môžu túto hodnotu porovnať a hodnotou 4/3 obsahu trojuholníka vpísaného do tejto oblasti.

Po tomto dynamickom bádaní je vhodné, aby sa študenti zoznámili aj s dôkazom prostredníctvom súčtu nekonečného geometrického radu. Tento dôkaz tu neuvádzame, lebo je všeobecne známy. Možné riešenia žiakov sú na obrázku 9.




Obrázok 9

## Záver

Podľa nášho názoru je konštruktivistická metóda vyučovania veľmi vhodná na rozvíjanie kreativity nadaných žiakov. Využitie digitálnych technológií, ako napríklad open-source softvér GeoGebra umožní žiakom experimentovať, vytvárať a overovať hypotézy a tak rozvíjať ich tvorivosť. Tieto metódy ale vyžadujú aj kreatívnych učiteľov. Len kreatívny učiteľ môže efektívne rozvíjať kreativitu svojich žiakov.

## Literatúra

[1] Gunčaga, J. (2002). Archimedova kvadratúra paraboly. In: III. Vedecká konferencia doktorandov, UKF Nitra, 2002, s. 43- 47. ISBN 80-8050-501-2

[2] Gunčaga, J. (2011). GeoGebra in Mathematical Educational Motivation. In: Annals. Computer Science Series. 9th Tome 1st Fasc. Tibiscus University Timisoara s. 75-84. ISSN: 1583-7165

[3] Körtesi, P. (2011). Computer Aided Teaching of mathematics and the Pilot Course in ECADL. Novi Sad : Prirodnomatematicki fakultet u Novom Sadu, 2011. Proceedings of the International GeoGebra Conference for South-East Europe. s. 27-38.

[4] Lukáč, S.a kol. (2010) Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre stredné školy. Košice, elfa s. r. o.ISBN 978-80-8086-149-0.

[5] Partová, E. (2011). Vyučovanie matematiky pomocou moderných technológií. Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislave, 2011. ISBN 978-80-223-3144-9.

[6] Renzulli, J. (1977). The enrichment triad model: A guide for developing defensible program for the gifted and talented. Mansfield Center : Creative Learning Press, 1977. ISBN 0-936386-01-0.

[7] Simonka, Zs. - Mojžišová, E. (2009). PC a didaktický softvér vo vyučovaní matematiky na EU v Bratislave. Zborník medzinárodnej vedeckej konferencie Inovačné technológie v školstve. Pedagogická fakulta UKF a SPU v Nitre, SlovDidac, 26.11.2009 Nitra. ISBN 978-80-8094-676-0

[8] Turek, I. (2010). Didaktika. Bratislava : Iura Edition spol s. r. o., ISBN 978-80-8078-322-8.

[9] Turek, I. (1999). Tvorivé riešenie problémov. Bratislava : Metodické centrum v Bratislave, ISBN 80-8052-054-2.

[10] Velikova, E. (2011). Geo-Gebra: Technology can advance creative mathematical activities in the classroom. [Online] http://www.igmcg.org/files/newsletter_1.pdf

[11] Žilková, K. ( 2009). Školská matematika v prostredí IKT. Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislave, ISBN 978-80-223-2555-4.

[12] www.nadanie.sk

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

**Adresa autora**

*PaedDr. Lilla Koreňová, PhD.*
*Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky*
*Fakulta matematiky, fyziky a informatiky*
*Univerzita Komenského v Bratislave*
*Mlynská dolina*
*SK – 84248 Bratislava*
e-mail: korenova@fmph.uniba.sk

**Poďakovanie**

Tento príspevok vznikol v rámci grantu MŠVVaŠ SR KEGA č. 057UK-4/2011

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# NIEKTORÉ SÚČTOVÉ VZORCE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

# SOME SUM FORMULAS IN MATHEMATICAL EDUCATION

LUKÁŠ LEDNICKÝ

**ABSTRAKT.** *V tomto príspevku sa zaoberáme niektorými súčtovými vzorcami, ich odvodením, ako aj dôkazom s využitím geometrickej interpretácie daného súčtu. Uvádzame štyri úlohy spolu s riešením, ktoré by mali pomôcť žiakom vytvoriť si ucelenejšie poznatky z matematiky.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *Súčtové vzorce, geometrická interpretácia, matematická indukcia.*

**ABSTRACT.** *In this paper we deal with some sum formulas, their derivation and proof, using geometric interpretation of the sum. Here are four tasks and their procedure of solutions that would help students develop a more comprehensive knowledge of mathematics.*

**KEY WORDS**: *Sum formulas, geometric interpretation, mathematical induction.*

**CLASSIFICATION:** *D14*

## Úvod

So súčtami členov postupností sa žiaci stretávajú pri učive o postupnostiach na gymnáziu. Špeciálne sa venujú aritmetickej a geometrickej postupnosti. S niektorými súčtami členov postupností prirodzených čísel sa však môžu stretnúť aj pri učive o matematickej indukcií. Tam sú im predložené vzorce na súčet všetkých prirodzených čísel od 1 po *n*, alebo súčet prvých *n* štvorcov. Tieto majú následne dokázať pomocou matematickej indukcie. V tomto príspevku chceme ukázať, ako je možné tieto vzťahy odvodiť a aj dokázať bez použitia matematickej indukcie. Takto chceme žiakom objavným spôsobom ukázať, ako sa dajú tieto a ďalšie podobné vzťahy odvodiť a dokázať. Úlohou žiakov bude skúmať jednotlivé súčty, vytvoriť ich vizualizáciu, vytvoriť hypotézu, ktorú budú musieť následne dokázať. Pri dôkaze sa budeme snažiť využívať geometrickú interpretáciu daných súčtov.

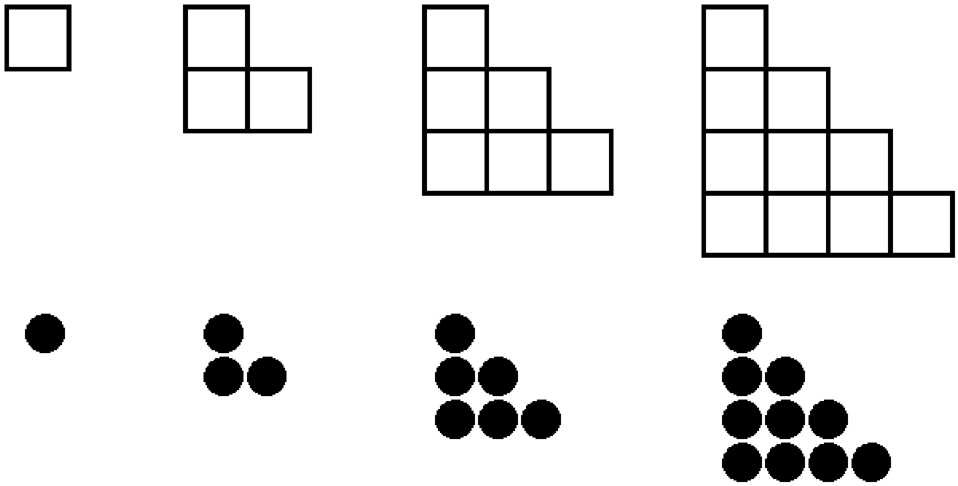
## Niektoré súčtové vzorce a ich odvodenie

V dnešnej dobe je často kritizované, že sa žiakom predkladajú hotové poznatky miesto toho, aby si ich svojou vlastnou aktivitou vytvorili. V učive o matematickej indukcií žiaci dokazujú súčtové vzorce, o ktorých nevedia často takmer nič navyše ako napríklad spôsob ako ich odvodiť alebo historické pozadie odvodenia daných súčtov. Podľa nášho názoru je pre žiakov obohacujúce, ak dostanú možnosť na hodine získať takéto poznatky.

Teraz uvedieme niekoľko úloh aj s postupom ich riešenia, ktoré vedú k odvodeniu a dokázaniu niektorých súčtových vzorcov objavným spôsobom.

Úloha 1: *Nájdite vzorec na výpočet súčtu prvých n prirodzených čísel.*

Na úvod môžeme žiakom pre názornosť predviesť jeden konkrétny súčet pre zvolené *n*. Potom ich vyzveme, aby navrhli postup, ako nájsť nejaký vzorec na výpočet tohto súčtu pre ľubovoľné *n*. Najvhodnejšie sú návrhy, ktoré vedú k postupnému určovaniu hodnôt tohto súčtu pre rôzne hodnoty *n*, na základe ktorých môžeme vytvoriť hypotézu. Súčasne od žiakov žiadame, aby navrhli vhodnú reprezentáciu tohto súčtu obrázkom. Existuje niekoľko možností, ktoré žiaci môžu navrhnúť (úsečky s dĺžkami 1 cm, 2 cm, ... vytvoria jednu úsečku; rovnaké geometrické objekty usporiadať do vhodného tvaru; a pod.). Tu môžeme žiakom položiť otázku, ktorý návrh je najvhodnejšie použiť? Geometrická interpretácia prostredníctvom úsečiek je analógiou k postupnému pripočítavaniu čísel. Lepšie je použiť usporiadanie nejakých geometrických útvarov (kruhy, štvorce, a iné) do vhodných zoskupení alebo tvarov, napríklad do trojuholníka (vid obrázok 1).



Obrázok 1

Každý z týchto trojuholníkov je možné doplniť rovnakým trojuholníkom na obdĺžnik. Túto skutočnosť musia žiaci objaviť, aby mohli sformulovať potrebnú hypotézu. Správna hypotéza je

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Tento postup je istou obmenou postupu, ktorý objavil Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) pri hľadaní súčtu čísel od 1 do 100. Sčítaním prvého a posledného čísla, druhého a predposledného čísla, atď získame vždy rovnaký súčet $n$+1. Týchto dvojíc je však polovica z celkového počtu sčítavaných čísel. Celkový súčet je potom rovný $\frac{n}{2}(n+1)$. Pre nepárne $n$ je potrebné uvážiť, že prostredné číslo nebude možné sčítať s ďalším číslom. V takomto prípade je možno ešte vhodnejším postupom pripočítať k danému súčtu rovnaký súčet, ale v opačnom poradí. Takto vytvoríme dvojice, ktorých súčet je $n$+1 a ich počet je $n$. Potom hľadaný súčet je rovný polovici zo súčinu $n(n+1)$. Tento postup môžeme zapísať takto:

$$2s=(1+2+3+\ldots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1)=$$
$$=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots(n+1)=n(n+1).$$

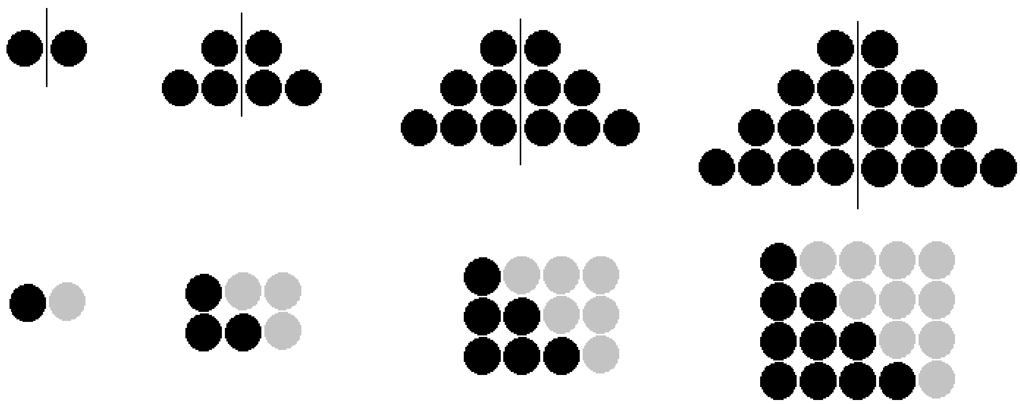
Okrem spomínanej hypotézy je možné, že žiaci navrhnú aj niektoré iné. Ak interpretujú daný súčet ako obsah pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžky $n$, tak vytvoria hypotézu

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2}{2}.$$

Použitím zvolenej geometrickej interpretácie hypotézu aj dokážeme.

Úloha 2: *Nájdite súčet prvých n párnych prirodzených čísel.*

Použijeme analogický postup ako v predchádzajúcej úlohe. Rozdiel nastane až pri geometrickej interpretácií daných súčtov. Ak zvolíme podobnú interpretáciu ako v predchádzajúcej úlohe, tak vznikne pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny tvorí $n$ a $2n$ zvolených objektov. Znova je možné každý z týchto trojuholníkov doplniť rovnakým trojuholníkom na obdĺžnik so stranami $n$ a $2n+2$. Iný spôsob usporiadania môžeme vidieť na obrázku 2. Každý lichobežník na obrázku je možné rozdeliť na 2 zhodné trojuholníky, ktoré spolu vytvárajú obdĺžnik so stranami $n$ a $n+1$.



Obrázok 2

Obidva postupy vedú k správnej hypotéze

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1).$$

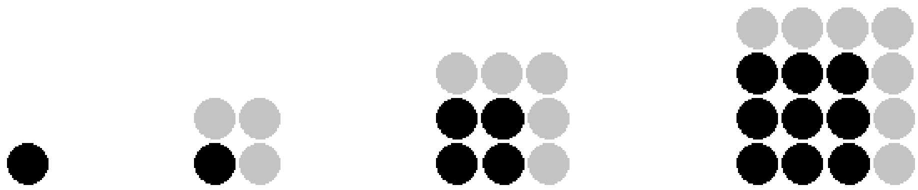
Platnosť tejto hypotézy dokážeme opäť prostredníctvom úvahy a zvolenej geometrickej interpretácie.

Úloha 3: *Nájdite súčet prvých n nepárnych prirodzených čísel.*

V tejto úlohe bude opäť postup analogický s postupmi v oboch predchádzajúcich úlohách. Rozdiel znova nastáva pri zvolení vhodnej geometrickej interpretácie. Geometrické interpretácie z oboch predchádzajúcich úloh sa dajú použiť aj tu. Okrem nich je možné použiť ešte názornejší spôsob. Po vypočítaní niekoľkých súčtov pre zvolené hodnoty $n$ zistíme, že výsledkom je vždy druhá mocnina počtu sčítavaných čísel. Jednotlivé nepárne čísla, reprezentované daným počtom zvolených geometrických objektov, skúsime rozmiestniť tak, aby tvorili štvorec. Na obrázku vidíme toto usporiadanie. Potom už ľahko vytvoríme hypotézu

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2,$$

ktorú následne dokážeme.



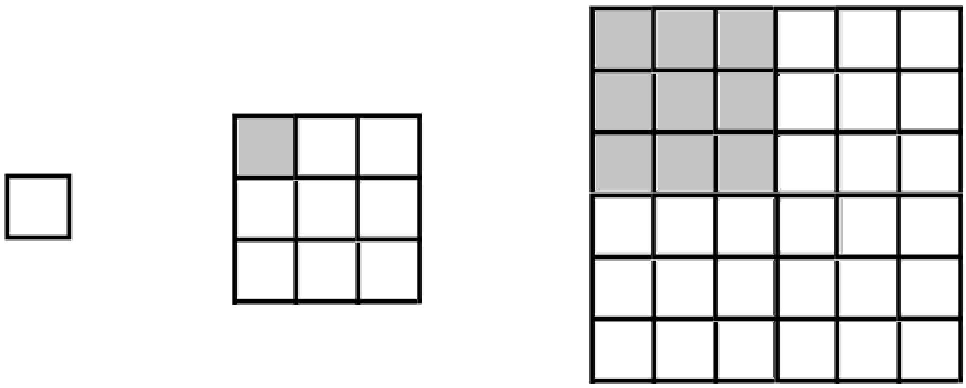
Obrázok 3

Úloha 4: *Nájdite súčet tretích mocnín prvých n prirodzených čísel.*

Začnime znova vypočítaním niekoľkých súčtov. Žiaci z výsledkov by mali zistiť, že súčet je vždy druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla. Na zistenie, ako toto prirodzené číslo závisí od zvoleného počtu sčítavaných tretích mocnín použijeme vhodné usporiadanie zvolených objektov. Môžeme použiť štvorčeky papiera alebo môžu žiaci priamo kresliť na papier. Musia potrebný počet štvorčekov usporiadať do tvaru štvorca. Dĺžka strana tohto štvorca sa rovná súčtu prvých $n$ prirodzených čísel. S využitím tohto faktu a poznatku z prvej úlohy žiaci vytvoria hypotézu

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Dôkaz hypotézy vykonáme úvahou s využitím opísanej geometrickej interpretácie.



Obrázok 4

**Poznámka 1:**

Vo vyššie uvedených postupoch sa hovorí o usporiadaní geometrických objektov do tvaru trojuholníka, lichobežníka, obdĺžnika a štvorca. V prípade ak $n$ je rovné 1, tieto tvary nemusia vzniknúť. Tento prípad môžeme chápať napríklad ako pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 1.

**Poznámka 2:**

Vo vyššie uvedených postupoch sme uviedli, že dôkaz vykonáme úvahou s využitím zvolenej geometrickej interpretácie. Mnohí matematici takýto spôsob „dôkazu“ neuznávajú. Na druhej strane sú však matematici, ktorí ho akceptujú. Podľa nášho názoru je tento spôsob dokazovania pre potreby školskej praxe prijateľný.

## Záver

Vyššie uvedené úlohy a postupy ich riešenia by mali podporiť implementáciu objavného vyučovania na hodinách matematiky. Pri riešení týchto úloh žiaci musia uplatniť rôzne procesy objavného vyučovania, ako napríklad vizualizáciu, tvorbu hypotéz, experimentovanie. Tieto úlohy je možné zaradiť do učiva o matematickej indukcií, ktorá však už nie je povinným učivom predmetu matematika na gymnáziách. Predložené postupy sa môžu využiť na odvodenie daných súčtových vzorcov a ich dôkaz sa môže vykonať matematickou indukciou. Takto môžu žiaci získať ucelenejší obraz o tvorbe matematických poznatkov a ich dokazovaní.

## Literatúra

[1] Fulier, J., Šedivý, O. (2001). Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky. Nitra, Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa, 2001. ISBN 80-8050-445-8.

[2] Nelsen R. (1993). Proofs without words. The mathematical Association of America, 1993. ISBN 0-883857006.

[3] Nelsen R. (2000). Proofs without words II. The Mathematical Association of America, 2000. ISBN 0-88385-721-9.

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

## Adresa autorov

*Mgr. Lukáš Lednický*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Trieda A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail:lukas.lednicky@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# CRUSHING OF THE TASKS IN MATHEMATICS EDUCATION AT VARIOUS EDUCATIONAL LEVELS

JOANNA MAJOR, MACIEJ MAJOR

**ABSTRACT.** *The subject of this paper are selected issues concerning some non-standard method of solving mathematical tasks. The method of crushing tasks (presented in the paper) is a way of working on the task which involves modifying the text of the task (providing more or less data, replacing the data, transforming the task, introducing new associations, etc.). The method can be used at every level of education.*

**KEY WORDS:** *mathematics education, solving mathematical tasks, crushing tasks*

**CLASSIFICATION:** *AMS 97C30, C74.*

## Introduction

Mathematical knowledge and skills have been playing a more and more important role in our daily lives. At the same time, solving tasks is the essence of mathematics understood as a field of human activity. One of the possible ways of looking at mathematics is that from the perspective of mathematical tasks. We can say that creating and solving problems is the major goal of mathematics at every stage of mathematics education. With the goal in mind to prepare students, in the course of the educational process, to living in the surrounding reality, one should emphasize the tasks which allow the pursuit of general objectives of mathematical instruction, i.e. those developing skills and attitudes necessary to a modern person, regardless of his or her field of activity. This goal may be reached by suggesting the *strategy of crushing* to the students.

The method of *crushing tasks* is a way of working on the task which involves modifying the text of the task (providing more or less data, replacing the data, transforming the task, introducing new associations, etc.). The name of the method is adopted from the French pedagogues A. Kaufmann, M. Fustier, A. Drevet. The researchers assume that deep immersion in the past and present inhibits the development of the future. And in fact, it is necessary to make room in the mind for new objects that do not exist yet but are about to come to being. We must, therefore, crush the existing objects to create new ones in their place (Hanisz, 1990).

The starting point in this method is the base task. "This is a task which is complex, open, and never contains questions" (Nowik, 2011). Themes underlying the task must be close to the student and somehow related to the interests of the person working on the task. The crushing method can be applied in different versions. J. Hanisz offers five versions of this method (1990).

**Version I**. Forming questions to the base task given by the teacher (What can be calculated?)
**Step 1.** Familiarizing students with the text of the base task;
**Step 2.** Forming questions to the base task (What can be calculated using the text and data of the base task?);
**Step 3.** Verifying the questions proposed by the students (If and how to calculate the unknown contained in the question?);

**Step 4.** Modifying the text of the base task (Select any question. Compose a word problem that fits it. Solve the problem).

**Version II.** Composing the mathematical formula fitting the base task given by the teacher (What will you calculate with this formula?)

**Version III.** Elaborating coded schemes for solving the base task.

**Version IV.** Modifying the base task given by the teacher according to the question: What would happen if…?

**Version V.** Posing questions and adding new data to the base task given by the teacher (see Jabłońska, 2011).

These versions of the crushing method do not exhaust all possibilities. Teachers and students can modify them or create new versions of the crushing method.

The first part of the paper presents a small piece of the research results. The second part presents a problem which can be considered at various levels of education.

## Discussion of the research

Students were placed in a situation which was unusual for them. It was suggested that they would work on nonstandard tasks. The research methodology was based on the analysis of the solutions presented by the students. Additional research material included the students' responses to the questions attached to the tasks. The research group consisted of 35 fourth-grade students of a Krakow primary school (eleven-year-olds) divided into five groups. All of them were students with average results in science.

The main aim of the study was to identify students' skills in solving and composing word problems. The research attempted to diagnose the fluency (i.e. Does the student stop at forming a single question, or is he or she capable of forming a series of questions?) and flexibility (i.e. Does the student change the direction of thinking, move from one thinking track to another as new relationships in the base task appear to him?) of the participants' way of thinking. The study also aimed at answering the following questions. Are the tasks and questions created by the students original? Are the tasks and questions properly built in terms of language and mathematical construction?

Analyzing the results of the research, attention was paid to whether the students, answering the question of the given task, were using the tasks solved previously. The questionnaire contained a few math problems. In this paper, one selected problem is presented and discussed. It is the following task.

> Janek bought 7 pencils at PLN 2 in a shop, and Kasia bought 5 notebooks at PLN 4 each.
>
> Compose as many questions as you can to the base task.

The number of questions composed by each student ranged between two and fourteen. There were 241 questions composed by the students altogether (on average one student composed approximately seven questions). The students were very creative in the process of forming questions and justifying that a question could or could not be answered. Schemes of solving individual tasks were laid out (see step two of problem solving by Polya (1975)). When the students concluded that the task could not be solved, the appropriate data were provided. The participants of the study were very active and willing to participate in the discussion. They presented accurate arguments to convince the others of their reasons. The participants created various questions as well as formed questions which indicated deep analysis of the task's text. The questions proposed by the children were divided into groups. Below are selected groups with sample questions specific for each group in brackets:

1. Questions related to Janek (e.g. How much did Janek pay?)
2. Questions related to Kasia (e.g. How many items did Kasia buy?)
3. Questions related to Kasia and Janek (e.g. How much did they pay together? Who paid more?)
4. Questions related to other objects present in the task (How much was the notebook?)

Several questions formed by the students contained additional information, such as the amount of money the children (or one child) had (What would be the change of Janek if he had PLN 20?).

Analyzing the results, we can state that in almost all tested students (except two) fluent and flexible thinking was well developed. Students with average learning results do not stop at composing one or two questions, easily creating whole series of them. This may indicate that they notice more and more new relationships in the base task. Therefore, they move from one track of thinking to another. As for the linguistic and mathematical correctness of the tasks composed by the students, it can be concluded that, in spite of numerous language mistakes, mathematical errors occurred rarely.

Within the study, the students had to solve some of their own tasks. For most of them this did not pose major difficulties. The analysis shows that most students (60%) were not able to use their previous knowledge (use the solutions of the previous tasks). They completed all calculations each time from the beginning.

**The sailor method**

In the next part of the paper a (real) situation is presented, which can serve as a starting point to crush non-standard tasks at different levels of mathematical education.

> Let us consider a commonly used procedure to draw one person from a group of n people, called the sailor method. The participants stand in a row and simultaneously hold up at least one finger of their right hand. Then all the fingers shown are added up and the participants are counted up to this number, as in the counting-out game. The person on whom the sum has been reached is the selected one.

This is not a math task; it is rather a description of a certain real situation. Several questions arise here.

It is a fair selection? I.e. Are each person's odds of being selected equal?

Do the odds of selecting a person depend on the order in which participants have been lined up?

Will the odds of selecting a particular person change if we start the counting from someone else?

These are the first questions that can be formulated on the basis of the considered problem. Searching answers leads us to the way of finding the general solution by setting variables, solving the simpler cases first, and then generalizing the procedure in order to obtain general results.

Assume that the participants are arranged in a row and the person from whom the counting will begin has been determined. Thus, the set of people has been ordered. It can therefore be assumed that each person has an assigned number, signifying his or her place in the counting line. It seems natural to assume that the participants extend fingers randomly , independently from each other. These assumptions allow mathematization. Adopting them, we turn the situation into an experiment. The problem is general, so we can start with the simplest situation when two people are involved in the selection. Let us find the answer to the question: Is the selection of one out of two people using the sailor method fair?

All equally likely cases of holding up fingers by two people are presented in the table. The header row contains possible numbers of fingers extended by the first person, whereas the header column contains possible numbers of fingers extended by the second person. The fields on the crossing of line i and column j contain the sum $i + j$ of fingers held up by both people, if the first has extended i fingers and the second j fingers, ($i \in \{1,2,3,4,5\}$ and $j \in \{1,2,3,4,5\}$).

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Consider two events: $A$ - the first person is selected, and $B$ - the second person is selected. Out of the 25 equally probable results,12 correspond to event $A$, and 13 results to event $B$, so the second person is more likely to be selected. Hence, the selection is not fair.
Let us consider another question: Is the selection of one out three people by means of the sailor method fair?

We can proceed in the same manner as before. We present all equally likely cases of extending fingers by three people (125 cases) in a three-dimensional table. In this interpretation, a set of outcomes of the experiment consists of 125 smaller cubes forming together one big cube.

It is easy to conclude that the selection is not fair in this case either. The third person in the counting line is less likely than either of the remaining two (the difference of the odds is 1/125).

Let us now ask the question if a number $n$ exists with which the selection by means of the sailor method is fair?

We can conduct the following reasoning.

When selecting one out of $n$ people, the set of outcomes of extending fingers consists of all $n$-member sequences whose members belong to the set {1,2,3,4,5}. Each outcome is equally likely. There are $5^n$ outcomes altogether.
A necessary condition of a fair selection is that n is a natural power of 5. This implies that when n is not a power of 5, the selection with the sailor method is not fair.

The above reasoning leads to the following questions:

Is the selection out of five people fair?

Is the selection out of 25, 125, 625, ... people fair?

What can be said about the fairness of the selection when the participants can hold up from 0 (fist) to 5 fingers?

What can be said about the fairness of the selection when the participants can hold up from 1 to 2 fingers?

What can be said about the fairness of the selection when the participants can indicate a natural number from the set $\{1,2, ..., k\}$?

Answering each of the above questions requires formulating and solving the relevant probabilistic task. For this purpose, it is necessary to translate the non-mathematical problem into the language of mathematics, to construct the appropriate probabilistic model, to perform the relevant calculations and interpret the obtained numerical results. Finding answers to the questions and thus solving the subsequent tasks is a method of finding the problem's solution which leads from the consideration of specific cases to obtaining certain general results. Crushing of the tasks may take here several forms.

## Conclusion

In conclusion it is worth noting that in mathematical education, the important students' activity of composing questions and problems should be considered. Such tasks allow students to learn more about the structure of the problem and allow them to develop mathematical activity, including creative activity.

## References

[1] J. Hanisz, Układanie i rozwiązywanie zadań „metodą kruszenia", Życie Szkoły 8(1990), 388-393

[2] J. Jabłońska, Rozwiązywanie zadań tekstowych metodą „kruszenia", http://www.zsi.com.pl/index.php/publikacje/585-rozwizywanie-zada-tekstowych-metod-kruszenia.html, 24 XI 2011.

[3] M. Major, Nietendencyjność losowania metodą„marynarza" jako problem stochastyczny, Ann. Acad. Paed. Cracov. 5 Stu. ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia 1(2002), 57-73.

[4] J. Nowik, Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej, Wydawnictwo Nowik, Opole, 2011.

[5] G. Polya, 1975, Odkrycie matematyczne. O rozumieniu, uczeniu się i nauczaniu rozwiązywania zadań, WNT, Warszawa

*Received July 10, 2012*

**Adresses**

*Joanna Major, dr*
*Maciej Major, dr*
*Pedagogical University of Cracow*
*Podchorążych 2*
*PL – 30-084 Kraków*
*e-mail: jmajor@up.krakow.pl, mmajor@up.krakow.pl*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# INTERDISCIPLINÁRNE VYUČOVANIE MATEMATIKY A PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOV NA SLOVENSKU – PILOTNÁ ŠTÚDIA

# INTERDISCIPLINARY TEACHING OF MATHEMATICS AND SCIENCE IN SLOVAKIA – PILOT STUDY

JANKA MELUŠOVÁ, JÁN ŠUNDERLÍK, SOŇA ČERETKOVÁ

**ABSTRAKT.** *V príspevku sa zaoberáme výsledkami pilotnej štúdie zameranej na prácu učiteľov po prijatí štátneho vzdelávacieho programu so zameraním na interdiciplinárne vyučovanie. Na základe prác Nikitina (2006) a Chevallard (2002, 2004) hľadáme v slovenských triedach hlavné prekážky a naopak, podmienky, ktoré môžu pomôcť rozšíreniu interdisciplinárneho vyučovania matematiky a prírodovedných predmetov do slovenských škôl.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *interdisciplinárne vyučovanie, práca učiteľov*

**ABSTRACT**. *In the article we present results of the pilot study interpreting teachers practice within the new school settings using interdisciplinary teaching. Based on Nikitina (2006), and Chevallard (2002, 2004) we define main limitation and concerns in Slovak classroom as well as formulate some possible approaches which can help broader integration of interdisciplinary teaching of mathematics and science in Slovakia.*

**KEY WORDS:** *interdisciplinary teaching, in-service teachers' practice*

**CLASSIFICATION:** *M13*

## 1 Introduction

The word interdisciplinary means integrating two or more disciplines. On the very beginning there was no separation into scientific fields at all. The growing human knowledge caused the rising of separate research/knowledge fields. But the complexity of the word and society required particular cooperation. There are plenty of examples in the history where the development in one discipline was caused by development of another mathematical discipline and vice versa. In contrast with the complexity of the word is the simplistic way of understanding the word as is dealt by media. Even people who conceive the reality as something complex sometimes accept simplistic arguments (Garcia & Abril, 2009). In the effort to grow up and educate critical and active citizens, the complex thinking should be introduced to schools. Interdisciplinary teaching is not new idea. It was one of the concepts of Progressive Education Movement in USA in late 1920's (Vars, 1969). In 1949 Tyler listed integration of subjects as one of criteria for effective organization of school.

## 2 Theoretical considerations

Integrating of two or more disciplines can be done in three main approaches according the level of cooperation of teachers (Spelt et al., 2009): multi-disciplinary teaching, interdisciplinary teaching and integrating curricula. Within multi-disciplinary teaching there is one shared topic, but the teachers do not cooperate. Within interdisciplinary is one shared topic taught by several teachers across different subjects, but the teachers collaborate. Students' knowledge from one discipline is enriched by other one. Integrated curricula are presented by one teacher in one subject.

Nikitina (2006) divided successful strategies of interdisciplinary teaching into three groups: (1) contextualizing, (2) conceptualizing and (3) problem-centering.

The first of the strategies, contextualizing, sets the discipline content in the broader context of history, ethics, society, culture or personal experience. Typical example of this approach is the history of mathematics which sets the discovery in the matter of time. Main advantage of contextualizing strategy is offering the student to gain the theoretical, methodological, epistemological and historical connections among disciplines, to make mathematics and science more accessible. But, we have to be careful while implementing, because it is not aimed to turn the mathematics classroom into philosophical debate.

The second defined strategy is conceptualizing. Conceptualizing means to identify the core concepts which are central for two or more disciplines (e.g. linearity, exponential growth). This strategy aims to understand essential natural laws which are valid without human intervention. It proceeds from the empirical data to more general knowledge. Instead rather philosophical issues characteristic for contextualizing, the conceptualizing connections need strong standard of verification, replication and mathematical expression. These links in practice usually need particular effort, they are not intuitive, students usually do not see the connections. The role of the teacher in this kind of approach is really crucial.

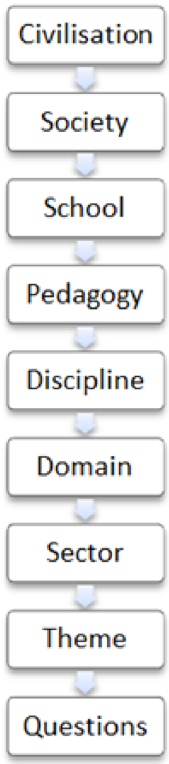



Figure 1 Levels of determination (Bosh & Gascón, 2006)

The last described strategy is problem-centering, it is pragmatic, real-life oriented pedagogy. In order to solve (usually) ill-structured problems, the concepts, processes and ideas from different disciplines have to be used. In contrast with previous two strategies, its aim is not to build coherence between different ideas, but to create tangible outcome or product. The epistemological goal of this strategy is not so much to advance the knowledge, but to use tools of different disciplines to "fight" with the difficult problem. Disciplines here are used precisely, but only particular parts necessary for attaching the problem. Students in problem-centering classes may acquire specific disciplinary knowledge, but classes like this should be supplemented by broader context and content to obtain the consistent and personally meaningful knowledge of each discipline.

Each of the three strategies has its own advantages and disadvantages, strength and weak points. Sticking on one of them is almost impossible, but by combining them, students can get coherent knowledge and sense of the world. In the hand of good teachers the reasonable combination of the strategies can be really powerful tool to provide meaningful and exiting nature for the classroom work.

In the effort to follow and understand the process of implementation of interdisciplinary teaching in Slovak schools we used the framework based in the Anthropological Theory of Didactics by Chevallard (1999) where good summary of its main constrict and evolution can be found in Bosh and Gascón (2006). Main tool for our analysis will be the levels of determination proposed by Chevallard (2002, 2004) in an attempt to categorise where this restrictions and constraints are coming from (see Figure 1).

We can divide this hierarchy in two parts: lower and upper levels. Upper levels are characterized by the policy makers and the organization of the education civilization – society – school – pedagogy. These levels influence what kind of mathematics and how it should be taught in schools. Then the lower levels discipline – domain – sector – theme – question represents the concrete situation how the different topics are taught.

## 3 The study

Within the European project COMPASS (www.compass-project.eu) were prepared several materials for interdisciplinary teaching at secondary schools. They also contain inquiry-based pedagogy with usage of ICT. The primary strategy for integrating disciplines was problem-centering, but the initial problem was set in the context of European society and particular contents in disciplines were stressed (see Figure 2).

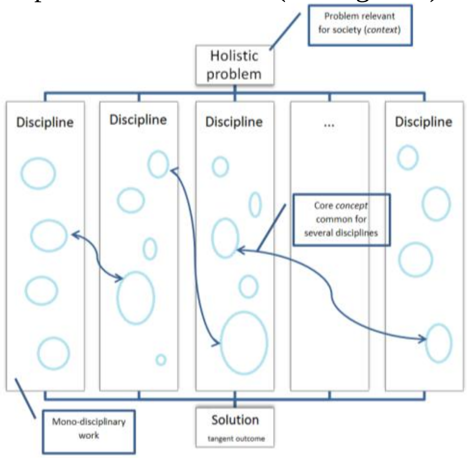



Figure 2 Model of integrating strategy used in project COMPASS

### Research questions

What kind of limitation and constrains do the teachers stress in our educational system that prevent interdisciplinary teaching in mathematics and science from being widely incorporate in daily class conditions?

What kind of conditions could help integration of interdisciplinary teaching in mathematics and science at schools in Slovakia?

### Methods and data collection

In our pilot study we have two teachers using one of developed materials “Food” in their teaching. The first teacher is specialist in math and physic and second teacher has specialization chemistry and biology. For the first teacher we used pseudonym “Peter“. He is experienced teacher and very active in projects and other activities. For the second teacher we used pseudonym “Olga“. She is a beginning teacher. Both of them teach at one of the best secondary schools in town, with mostly gifted and talented students. The lessons were thought in grade 8th (13 – 14 years old students). They spent nine lessons together with the materials. One introductory lesson, then physic lesson, two biology lessons, two chemistry lessons, two mathematics lessons and preparation of lunch menu for one week.

For data collection we used semi-structured group interview where both teachers had the opportunity to express their opinion and raise new topic. For data analysis we used proposed theoretical framework and focused on the upper levels.

## 3 Findings

According to theoretical framework we analysed semi-structured group interview with two teachers that experienced the interdisciplinary teaching within new approach that was problem-centered. Our main purpose was to understand the real situation in concrete school based on the teachers' beliefs and opinions, that can served as a key points for further investigation. This down-up approach help us identify main teachers complains and the usage of the material. Based on the identification of constraints we also offer few possible conditions that could help.

**Society level**

As the main constrains teachers see how the curriculum is set up. But on the other hand the current legislative supports students centered pedagogies and interdisciplinary teaching. "In the educational process it should be emphasized that there are no barriers/boarders between the science subjects and discovering of nature is possible only by the coordinated collaboration of all science fields using mathematics and ICT tools" (Hauser 2008).

The teachers still remain into old settings where the curriculum maps did not change from the time when the topics to teach were centrally given. Even thou Peter and Olga liked the idea, they were very skeptical about the practical usage of materials like this and project based learning in general. They see our school system very rigid as Peter mentioned „*our school system is 150 years old and we cannot change it so easily*".

**School level**

Peter felt that the school does not support the interdisciplinary teaching and mentioned several limitations to the hinder the implementation in his case. Similar but less explicit are also Olga's believes. Because of implementation of the interdisciplinary material they needed to change current curriculum map and consequently they were in time shortage with other topics. For the question if they could adapt their curriculum maps at the beginning of the school year they were less skeptical, but saw it as one approach how it could be done.

On the other hand, they saw the obstacle of school culture, where it should be more supported by other teachers too. They explicitly expressed that „*we need to have one curriculum map in the school year, but if there are three other teacher teaching in the same year it is not easy to change the plan.*"

**Pedagogy level**

Both teachers expressed that they did not change their teaching and the lessons were mostly transmisive teaching with interactive questioning. The intended pedagogy wasn't suitable for problem-centered education. The reason for this approach was that Peter thought that 14 years old students are not prepared for inquiry teaching and they are not used to look up for information by themselves. On the other side we observed that both teachers implemented several methods for active learning, but they were not aware of them. Possible explanation is that the implemented material design forced the teachers to use more student-centered pedagogies.

**Discipline level**

Within the level of discipline we focused on the three different strategies as mentioned in (Nikitina, 2006). Peter presented that he spontaneously built the problems into the

**context** of every day eating habits of students and was able to adapt the existing material quite easily.

For Peter and Olga the content of discipline was at the first place. They firstly needed to give students all prescribed information and then stress connection between the disciplines. For example pupils got information about saccharides, lipids and proteins and their role in human organism in biology lesson. Afterwards they worked with the **concept** of macronutrients again, in the chemistry lesson, where they learnt about the structure of saccharides, lipids and proteins and conducted several experiments.

In lesson plans we can see strong beliefs that students need wider overview that the **problem-centered** teaching offers. Advantage is that Olga and Peter are used to teach content and they are specialist in their area. On the other side, problem-centering caused the need for teachers to implement new, student-centered pedagogy, teaching strategies that are usually missing in Slovak schools.

## 4 Discussion and conclusions

Both teachers see interdisciplinary teaching as motivating for students but cannot see its normal usage in practice even thou they mentioned positive effect on students. In the pilot study teachers stressed two main limitations that prevent interdisciplinary teaching from being widely incorporate in daily class conditions: rigid curricular maps and pupils not prepared for inquiry-based learning. As mentioned in the findings, Peter expressed the opinion that his students were not able to work within inquiry based environment. It is in contradiction with research (Brown & Coles, 2008) which shown that 14 years old students were able to work like that and even more their intrinsic motivation to participate in mathematics was higher. We assume that this opinion is caused by lack of experience with student-centered pedagogy. However, design of materials helped both teachers in implementation of methods of active learning and at the end they were surprised by good work of students.

Curriculum concern is connected with the school culture that was another limitation influencing the implementation of interdisciplinary materials. The limitation comes from different views of several teachers within the one year used to teach common content. The new demand of competences arrived after the reform act in 2008 that increased the level of teachers' out-of-the-classroom work. To this situation arose another new competence of interdisciplinary planning of curriculum maps which requires also new way of professional communication between the science and math department.

Slovak teachers are good educated in content of their school subject but they are not experienced in development of common pupils' competencies within several subjects. Well-designed materials can support teachers in development of competences and teachers can prevent existence of blind spots in the disciplinary breadth (Nikitina, 2006) that can bring problem-centering strategy.

The teachers are influenced by their previous beliefs and experience from previous teaching. It is difficult to change their way of work in short period of time. That gives us a reason for longitudinal professional development of in-service teachers that would be focused on interdisciplinary teaching and student centered pedagogies.

## References

[1] Brown, L., Coles, A. (2008). Hearing Sillence: Learning to teach mathematics. Black Apollo Press, 136 p., ISBN 1900355590

[2] Bosch, M., Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transpostion. ICMI Bulletin,58, 51-63.

[3] Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques , Vol. 19, No. 2, pp. 221-266.

[4] Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Ed.), 11e École d'Été de didactique des mathématiques (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

[5] Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et novelle épistémologie scolaire. Saint-Flour, Cnatal.

[6] Garcia, F.J., Abril, A. (2009). COMPASS analysis of needs: framework for analysis.

[7] Hauser, J. et al. (2008). The School Educational Programme for ISCED 2 in Slovak republic

[8] Nikitina, S. (2006). Three strategies for interdisciplinary teaching: contextualizing, conceptualizing, and problem-centering. In Journal of Curriculum Studies, 2006, Vol. 38, No. 3, pp. 251-271

[9] North Carolina State Department of Public Education. (1987). Integrated learning what-why-how? In Instructional Services Curriculum Series, No. 1. Raleigh, NC. 1987.

[10] Spelt, E., H. Biemans, et al. (2009). Teaching and Learning in Interdisciplinary Higher Education: A Systematic Review. In Educational Psychology Review Vol. 21, No. 4, pp. 365-378

[11] Tyler, R.W. 1949. Principles of curriculum and instruction. Chicago: University of Chicago Press.

[12] Vars, G.F. 1969. Common learnings: Core and interdisciplinary team approaches. Scranton, PA: International Textbook Company.

*Received July 1, 2012*

**Adresses**

*PaedDr. Janka Melušová, PhD.*
*PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.*
*doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Trieda A. Hlinku 1*
*SK – 949 01 Nitra*
e-mail: jmelusova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# POZNATKY Z UPLATŇOVANIA ŠVP V MATEMATIKE NA GYMNÁZIU

# KNOWLEDGE OF THE APPLICATION OF THE STATE EDUCATION PROGRAM IN MATHEMATICS AT THE GYMNASIUM

ERIKA MIKOVÁ

**ABSTRAKT.** *V školskom roku 2008/2009 bola uvedená do základných a stredných škôl reforma obsahu vzdelávania vo forme Štátneho vzdelávacieho programu, ktorý obsahuje len základné poznatky, ktoré by mal žiak vedieť. Štátny vzdelávací program si jednotlivé školy rozpracovali do školských vzdelávacích programov, ktoré majú zohľadňovať cieľové požiadavky na poznatky potrebné pre vykonanie maturitnej skúšky. Obsah ŠVP je výrazne minimalizovaný a bez absolvovania voliteľného predmetu žiak nemôže uspieť na maturitnej skúške. V rámci voliteľných predmetov t.j. počas dvoch školských rokov je zvládnutie učiva veľmi náročné a ako príprava na štúdium na VŠ nedostatočné.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ:** *Štátny vzdelávací program, školský vzdelávací program, stredoškolské vzdelávanie, učebné osnovy pre povinný predmet, učebné osnovy pre voliteľné predmety*

**ABSTRACT.** *In school year 2008/2009 was introduced reform of curricula into primary and secondary schools in the form of State Education Program that includes only the basic knowledge that a student should know. Requirements of the target knowledge, required for the implementation of school-leaving examinations of State Education Program, were elaborated by individual schools into School Education Programs. The content of the State Education Program is significantly minimized and without completion of elective course student can not succeed in school-leaving exam. During the elective course, that is to say within two school years, it is very difficult to deal with the curriculum. It is also insufficient as a preparation for studies at university.*

**KEY WORDS:** *State Education Program, School Education Program, secondary education, curricula for mandatory course, curricula for elective courses*

**CLASSIFICATION:** *D74, G44.*

## 1 Úvod

Gymnáziá poskytujú všeobecné stredoškolské vzdelanie pre prípravu na vysokú školu. Záväzným dokumentom je Štátny vzdelávací program (ŠVP) pre gymnáziá v Slovenskej republike, ISCED 3A - vyššie sekundárne vzdelávanie. Podľa tohto dokumentu sa vzdelávajú žiaci gymnázií so štvorročným štúdiom a žiaci 5. až 8. ročníka gymnázií s osemročným štúdiom. Štátny vzdelávací program stanovuje povinné vyučovacie predmety, ktoré sú začlenené do jednotlivých vzdelávacích oblastí. Každá stredná škola si v súlade so ŠVP vypracováva školský vzdelávací program, v ktorom využitím voľných - disponibilných hodín určuje charakter svojho študijného programu. Okrem vyučovacích predmetov sú zavedené prierezové témy, ktoré sa prelínajú všetkými vzdelávacími oblasťami. Vzdelávacie oblasti sú okruhy, do ktorých patrí problematika vyčlenená z obsahu celkového vzdelávania a z formulovania kľúčových kompetencií. [1]

## 2 Štátny vzdelávací program pre gymnáziá (ISCED 3A)

Štátny vzdelávací program pre gymnáziá (vyššie sekundárne vzdelávanie) bol schválený na gremiálnej porade ministra školstva, vedy, výskumu a športu SR dňa 19.6.2008.

Až do roku 2011 boli presne stanovené tematické celky, ktoré sa majú preberať v jednotlivých ročníkoch a nebolo možné robiť úpravy a presúvanie tematických celkov v rámci ročníkov. Umožnením presúvania tematických celkov medzi ročníkmi sa ale môže stať, že žiak pri prestupe z jednej školy na druhú, má niektoré učivo už prebraté a niektoré nemá prebraté vôbec. V ŠVP sa uvádza, že zosúladenie vedomostí pri prestupe žiaka zabezpečí prijímajúca škola. Avšak, ak je týchto rozdielov v jednotlivých predmetoch veľa, je pre žiaka veľmi náročné tieto rozdiely zvládnuť.

### 2.1 Profil absolventa

Je založený na kľúčových spôsobilostiach, ktoré sa rozvíjajú a sú rozvíjané na sociokultúrnych obsahoch najmä súčasného vedného (a technického) vzdelávania. Predstavuje všeobecnú vzdelanosť (ako komplex znalostí a vedomostí, schopností, hodnotových postojov, osobných čŕt a iných dispozícií), ktoré jednotlivcovi umožňujú poznávať, konať, hodnotiť a dorozumievať sa i porozumieť si. Umožňujú mu úspešné začlenenie sa do pracovných a mimopracovných spoločenských štruktúr. Nadväzujú na spôsobilosti získané v priebehu predchádzajúcich stupňov, najmä nižšieho sekundárneho vzdelávania.

Spôsobilosti sa formujú na základe osobnej praktickej činnosti a skúsenosti a zároveň sú uplatniteľné v životnej praxi. Nevyjadrujú trvalý stav, ale menia svoju kvalitu a hodnotu počas celého života. Nezastarávajú ako vedomosti, ale majú potenciálnu vlastnosť neustále sa rozvíjať (a preto môžu byť základom celoživotného učenia sa a osobnej flexibility). Sú výsledkom a dôsledkom nielen formálneho – školského vzdelávania, ale aj neinštitucionálneho vzdelávania. [1]

### 2.2 Výkonový štandard

Jednoznačne určuje rozsah žiakových vedomostí so zameraním na schopnosť využívať získané vedomosti v praktickom živote, spájať a využívať nadobudnuté vedomosti pri formulovaní hypotéz a intuitívne ich hodnotiť, pracovať s jednoduchými návodmi, odbornými textami (využívanie poznatkov z internetu a aktívne využívanie IKT).

### 2.3 Štandard kompetencií

Jednotlivé kľúčové kompetencie (spôsobilosti) sa navzájom prelínajú, prepájajú a majú aj nadpredmetový programový charakter. Získavajú sa ako produkt celkového procesu vzdelávania a sebavzdelávania, t.j. kompletného vzdelávacieho programu a ďalších rozvíjajúcich aktivít, ktoré v rámci školy prebiehajú.

Ide o kompetencie :

- kompetencia uplatňovať základ matematického myslenia a základné schopnosti poznávať v oblasti vedy a techniky
- kompetencia riešiť problémy
- kompetencia v oblasti informačných a komunikačných technológií
- kompetencie k celoživotnému učeniu sa – učiť sa učiť
- sociálne komunikačné kompetencie
- kompetencie sociálne a personálne
- kompetencie pracovné - kompetencie smerujúce k iniciatívnosti a podnikavosti
- kompetencie občianske
- kompetencie vnímať a chápať kultúru a vyjadrovať sa nástrojmi kultúry [1]

## 3 Rámcový učebný plán

Rámcový učebný plán obsahuje stanovený počet hodín pre jednotlivé predmety a pre matematiku. V tabuľke 1 uvádzame tento plán do roku 2008.

| ***Ročník*** | ***1.*** | ***2.*** | ***3.*** | ***4.*** | ***spolu*** |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet hod. MAT/týž. | 4 | 4 | 3 | 3 | 14 |
| V každom ročníku bolo možné 1 hodinu týždenne deliť | | | | | |

Tabuľka 1: Rámcový učebný plán pre 4-ročné všeobecné štúdium do roku 2008

Každá trieda so špeciálnym zameraním mala vypracovaný svoj rámcový učebný plán a nie je možné ich všetky uviesť.

V tabuľke 2 uvádzame rámcový učebný plán pre matematiku od školského roku 2008/2009.

| ***Ročník*** | ***1.*** | ***2.*** | ***3.*** | ***4.*** | ***spolu*** |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet hod. MAT/týž. | 4 | 3 | 3 | 1 | 11 |
| Počet disponibilných hodín pre všetky predmety v ročníku | 4 | 4 | 7 | 15 | 30 |

Tabuľka 2: Rámcový učebný plán pre 4-ročné štúdium od školského roku 2008/2009

Disponibilné hodiny sa môžu rozdeliť v rámci jednotlivých ročníkov na :

- hodiny na posilnenie jednotlivých vyučovacích predmetov
- umožniť žiakom zvoliť si voliteľné premety z ponuky Školského vzdelávacieho programu (ŠkVP)

## 4 Obsah vzdelávania

Obsah vzdelávania je jednoznačne určený - predpísanými učebnými osnovami, ktoré v ŠVP boli zjednodušené a bolo stanovené základné učivo, ktoré musí ovládať každý žiak.

V 3.a 4. ročníku by sa žiaci v rámci ŠVP mali už orientovať a špecializovať prostredníctvom voliteľných predmetov na tie, ktoré chcú v budúcnosti študovať na vysokej škole.

### 4.1 Učebné osnovy

Takzvaná „stará koncepcia“ mala tematické celky rozdelené v jednotlivých ročníkoch nasledovne:

***1.ročník (132 hodín)***
*Úvod do štúdia matematiky*
*Funkcie rovnice a nerovnice I.*
*Planimetria I.*
*Kombinatorika*
*Teória čísel*
Rozširujúce učivo

***2. ročník (132 hodín)***
*Funkcie rovnice a nerovnice II.*
*Planimetria II.*
*Stereometria I.*
Rozširujúce učivo

***3. ročník (99 hodín)***
*Stereometria II.*
*Analytická geometria*
Rozširujúce učivo

***4. ročník ( 90 hodín)***
*Funkcie, rovnice a nerovnice III.- úvod do infinitezimálneho počtu* (limita funkcie, diferenciálny a integrálny počet)
*Štatistika a pravdepodobnosť*
Rozširujúce učivo

Učivo sa preberalo špirálovite a po stručnom zopakovaní sa učivo vo vyššom ročníku rozšírilo o nové poznatky, precvičilo a utvrdilo.

**V ŠVP boli učebné osnovy usporiadané nasledovne**:

***1.ročník (132 hodín)***
*Čísla, premenná a počtové výkony s číslami*
*Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy*
*Geometria a meranie* (Základné rovinné útvary, meranie, rovnobežné premietanie, Hranaté telesá –povrch a objem)
*Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika* (Organizácia súboru, Kombinatorika)
*Logika, dôvodenie, dôkazy* (výroková logika)

***2. ročník (99 hodín)***
*Čísla, premenná a počtové výkony s číslami* (nepresné čísla)
*Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy* (lineárna a exponenciálna závislosť, iné funkcie)
*Geometria a meranie* (Rezy kocky , Oblé telesá, ich povrch a objem, Cavalieriho princíp)

*Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika* (šanca a porovnávanie šancí, pravdepodobnosť a niektoré jej vlastnosti využitie v praxi
*Logika, dôvodenie, dôkazy* ( základy usudzovania, dôkaz priamy a sporom)

***3. ročník (99 hodín)***
*Geometria a meranie*
*Kombinatorika a pravdepodobnosť, štatistika* (štatistika)

***4. ročník (30 hodín)***
*Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika* (štatistika výberového súboru)

Východiskový dokument pre úpravy ŠVP na stránkach ŠPÚ je platný k 1.3.2011.

Od šk. roku 2011/12 je možné presúvanie tematických celkov medzi ročníkmi – táto úprava platí od 1. 9. 2011. Ako už bolo uvedené, pri prestupe žiakov medzi školami to žiakovi môže spôsobiť určité problémy pri dobratí učiva

### 4.2 Stav učebníc

K ŠVP je potrebné vydať nové učebnice, s ktorými je potrebné pracovať na vyučovacích hodinách – aktívne uplatňovať čítanie matematických textov s porozumením, ale aj na prácu doma – na precvičovanie a utvrdzovanie učiva. Pre SŠ sú zatiaľ vydané len učebnice pre 1. ročník 1. a 2. časť, učebnice pre 2. ročník 1. a 2. časť, pre vyššie ročníky učebnice nie sú vydané. V súčasnosti aj naďalej používame staré učebnice, ktoré však úplne nevyhovujú z dôvodu, že úlohy sú zoradené podľa predchádzajúcich osnov a učiteľ musí premyslene využívať príklady, aby sa nestalo, že pri riešení chýba neprebratý matematický aparát. Zbierky úloh na precvičovanie zatiaľ ešte vydané neboli, preto učitelia materiály pre žiakov rozmnožujú, alebo využívajú zverejňovanie úloh prostredníctvom internetu, čo je veľmi časovo náročné, pričom školská reforma už prebieha piaty školský rok.

## 5 Školské vzdelávacie programy (ŠkVP)

Jednotlivé školy si vypracovali svoje ŠkVP, kde časť disponibilných hodín podľa vlastného uváženia pridali jednotlivým predmetom v rámci ročníka ako tzv. rozširujúce hodiny, alebo ich ponechali ako voliteľné predmety v jednotlivých ročníkoch. V tabuľke 3 sú uvedené náhodne vybrané školy a ich hodinová dotácia na posilnenie predmetu matematika(*).

| **Škola/ročník** | **Predmet** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **spolu** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gymnázium Malacky [3] | Matematika | 4 | 3 | 3 | 1 | 11 |
| Gymnázium, Konštantínova 2, Prešov [6] | Matematika | 4 | 3 + *1** | 3 | 1 | 11 + *1** |
| Gymnázium M Bela, Zvolen [5] | Matematika | 4 | 3 | 3 | 1 | 11 |
| Gymnázium, Golianova 68, Nitra [4] | Matematika | 4 | 3 + *1** | 3 | 1 | 11 + *1** |

Tabuľka 3: Prehľad o pridelených disponibilných hodinách matematiky na niektorých gymnáziách

ŠkVP sú zverejňované na školských webových stránkach, aby sa verejnosť a predovšetkým rodičia dozvedeli o profilácii danej školy a možnosti získania vedomosti.

Ak žiak však chce ísť maturovať z matematiky musí zvládnuť „Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky“, ktoré boli schválené ŠPÚ Bratislava na prechodné obdobie 2012 – 2016, nakoľko žiaci študujú podľa ŠVP, ale ešte aj podľa „starej koncepcie“ v 6. - 8. ročníku osemročného štúdia. Samozrejme vedomosti získané na hodinách matematiky, v rámci ŠVP, nie sú postačujúce na absolvovanie maturity, a preto si ich nutne musia doplniť v rámci voliteľných hodín. Väčšina škôl volí cestu voliteľných predmetov v 3. a 4. ročníku. Keď sa predpokladá, že žiak už približne vie, na akej vysokej škole by chcel študovať.

### 5.1 Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky

Cieľové požiadavky od predchádzajúcich školských rokov nie sú odlišné, a preto v rámci voliteľných predmetov je potrebné doplniť aspoň nasledovné tematické celky:

**Logika a množinová matematika** – je potrebné doplniť časť množinová matematika

**Čísla, premenné a výrazy** – úpravy algebraických výrazov, určovať definičný obor výrazu, číselné obory a základné zákony platné pre základné matematické operácie, zavedenie intervalu a práca s intervalmi, absolútna hodnota

**Rovnice a nerovnice** – riešenie rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou, goniometrických, logaritmických, exponenciálnych rovníc, riešenie sústav dvoch rovníc o 2 neznámych (bolo úplne zo ZŠ posunuté na SŠ), ale aj troch rovníc s tromi neznámymi, nakoľko to potom chýba pri riešení úloh v analytickej geometrii (použitie súradnicovej sústavy v priestore).

**Funkcie –** zložená funkcia a jej graf – vlastnosti, lineárna lomená funkcia, postupnosti, práca s mocninami a odmocninami, v rámci goniometrie vyjadrenie uhla v stupňovej a oblúkovej miere, práca s jednotkovou kružnicou, vzťahy medzi goniometrickými funkciami – úprava goniometrických výrazov

**Analytická geometria v rovine** (nie je obsiahnutá v základných osnovách) – vektor, veľkosť vektora, uhol dvoch vektorov, skalárny súčin dvoch vektorov, analytické vyjadrenie priamky v rovine – parametrické vyjadrenie, všeobecná rovnica, normálový vektor, smernicový tvar, vzdialenosť dvoch bodov, vzdialenosť bodu od priamky, uhol dvoch priamok, analytické vyjadrenie kružnice, riešenie vzájomných polôh priamky a kružnice (riešenie sústavy kvadratickej a lineárnej rovnice)

### 5.2 Učebné osnovy pre voliteľné predmety

Uvedené tematické celky bolo potrebné spracovať do osnov ŠkVP pre voliteľné predmety. Nakoľko rozsah učiva je široký, odporúča sa žiakom, voliť si voliteľné predmety tak, aby v 3. a 4. ročníku na seba nadväzovali. Nie je možné uviesť celú paletu možných voliteľných predmetov a ich náplne.

Náhodnou voľbou uvádzame niektoré školy, ktoré majú svoje voliteľné predmety uverejnené na svojich webových stránkach, napríklad:

***Gymnázium, ul. 1. mája, Malacky***
3. ročník : Cvičenia z matematiky 2 h/týž.
4. ročník : Cvičenia z matematiky 3 h/týž. [3]

***Gymnázium Mateja Bela, Zvolen***
3. ročník : Cvičenia z matematiky 2 h/týž.
4. ročník : Cvičenia z matematiky 2 h/týž. [5]

***Gymnázium, Golianova 68, Nitra***
3. ročník: Rozširujúca matematika 2 h/týž.
Cvičenia z matematiky 1 h/týž.
4. ročník: Rozširujúca matematika 4 h/týž.
Cvičenia z matematiky 1 h/týž.
Deskriptívna geometria 2 h/týž.
Seminár z matematiky 2 h/týž. [4]

***Gymnázium, Konštantínova 2, Prešov***
3. ročník: Seminár z matematiky 2 h/týž.
4. ročník : Cvičenia z matematiky 2 h/týž.
Matematika 4 h/týž. [6]

Každá škola má vypracované a schválené osnovy podľa návrhu predmetovej komisie.

## Záver

Každá škola má podľa uváženia zvolené voliteľné predmety tak, aby svojím ŠkVP prilákala čo najviac žiakov a čo najlepšie pripravila žiakov na absolvovanie maturitnej skúšky. Učivo by malo byť v osnovách voliteľných predmetov spracované tak, aby sa stihlo prebrať, precvičiť ako aj utvrdiť a to je úloha veľmi náročná.

ŠVP znevýhodnil časovú dotáciu prírodovedných predmetov. Napr. v matematike poklesol počet hodín o 22 % v základnom – povinnom počte hodín, pričom niektoré tematické celky zo ZŠ sú presunuté do učiva SŠ a sú zavedené nové tematické celky do učiva SŠ. Žiaci síce získajú zručnosti vo vyhľadávaní poznatkov, napr. poznatky z finančnej matematiky, ktoré sa však neustále menia a sú špecificky regulované. Veľká pozornosť sa venuje tematickým celkom Kombinatorika a štatistika a ich využitiu v praxi. Zároveň zaviedol nové predmety, ktoré sú orientované spoločenskovedne a ich poznatky by bolo možné získať aj prostredníctvom bežných mediálnych prostriedkov. Žiaci nemajú pri určenom základnom učive možnosť získať poznatky z infinitezimálneho počtu, ktoré tvoria základ štúdia na technických a prírodovedne zameraných vysokých školách.

## Literatúra


[1] Štátny pedagogický ústav, Štátny vzdelávací program Matematika – príloha ISCED 3A, schválené ÚPK, Bratislava 2009

[2] Štátny pedagogický ústav, Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, Bratislava 2009

[3] Školský vzdelávací program - Gymnázium, ul. 1. mája, Malacky

[4] Školský vzdelávací program - Gymnázium, Golianova 68, Nitra

[5] Školský vzdelávací program - Gymnázium Mateja Bela , Zvolen

[6] Školský vzdelávací program - Gymnázium, Konštantínova 2, Prešov


*Článok prijatý dňa 9. júla 2012*

## Adresa autora


*PaedDr. Erika Miková*
*Gymnázium*
*Golianova 68*
*SK – 949 01 Nitra*
e-mail: mikovae@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# MOTIVACE NADANÝCH STUDENTŮ PROSTŘEDNICTVÝM MARKOVOVÝCH ŘETĚZŮ

# MOTIVATION OF GIFTED STUDENTS USING THE CHAINS OF MARKOF

JIŘINA NOVOTNÁ

**ABSTRAKT.** *Prezentujeme příklad z genetiky, jeho tři matematické modely a řešení užitím Markovových řetězů. Matematické prosředky řešení jsou zvoleny tak, aby je byli schopni akceptovat matematicky nadaní studenti středních škol v rámci rozšiřování učiva s využitím mezipředmětových vztahů.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *nadaní studenti, motivace, Markovovy řetězy, matematické modely*

**ABSTRACT.** *Three mathematical models of a genetic problem and its solving by the chains of Markof are presented as an example of special education of gifted students. In the compliance with it mathematics is chosen to be easy to understand for such gifted students of secondary schools in framework of the curriculum development by using of interdisciplinary relations.*

**KEY WORDS:** *gifted studetns, motivation, chains of Markof, matematical models*

**CLASSIFICATION:** *D55.*

## Úvod – matematika a nadaní žáci

Matematika (z řec. μαθηματικός (*mathematikós*) znamená milující poznání; μάθημα (*máthema*) značí vědu, vědění, poznání), matematika je tedy věda, zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Dle Olejáre [4] se bez matematiky neobejde žádná vědecká disciplína, matematické poznatky, zvláště pak logika, tvoří pozadí každé vědy.

Zákony matematické statistiky, aplikované na soubory s velkým počtem prvků, jsou neúprosné: měřené veličiny jsou zpravidla symetricky rozloženy kolem jisté střední hodnoty, charakteristické pro největší počet prvků, jedná se o Gaussovo či normální rozložení pravděpodobnosti. Nejinak je tomu i v případě našeho zájmu o nadání populace žáků např. v celé ČR. Kromě žáků zaostávajících (na jednom konci spektra) se zde vyskytují i žáci nadprůměrně nadaní na opačném konci spektra. Zdá se, že pro matematické, přírodovědné a technické nadání symetrie neplatí a že je mnohem více žáků, pro které jsou tyto obory velmi obtížné než těch, kteří mají pro ně nadání,. Ve skutečnosti však víc jak polovina těchto talentů zůstane neodhalena. Navíc podle posledních výzkumů se dokonce stává, že i když se talent dítěte pro matematiku projeví, tak se s ním dál nepracuje! Nelze tvrdit, že nadprůměrným studentům je poskytováno speciální vzdělání, které by rozvíjelo jejich vrozený potenciál a tak dochází ke ztrátě talentů a následně k nevyčíslitelným škodám ve vědě, technice, umění, apod.

Při analýze současných teorií nadání [1] zjistíme, že téměř vždy se v nich nachází silný motivační prvek. Nadaný jedinec je silně vnitřně motivován, nejčastěji v podobě zájmu o danou oblast. Tento zájem je těsně spjat s nadáním, má však svoji historii. Zájem musí být v člověku podnícen a rozvíjen a zde je právě nezastupitelná role nejen učitelů, ale i rodičů.

V následující kapitole prezentujeme motivační úlohu pro nadané studenty středních škol, jde o rozšiřující přístup, o mezioborovou integraci, na rozdíl od akceleračního přístupu k nadaným jedincům. Struktury – stromové diagramy, se kterými se při řešení úlohy pracuje, jsou vlastně polosvazy a zde by byla další možnost rozšíření matematických poznatků směrem k teorii matematických struktur.

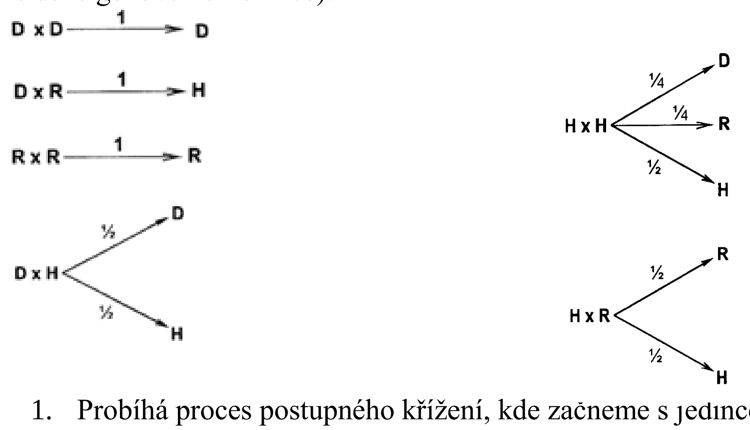
Před řešením úlohy doporučujeme krátkou zmínku o G. J. Mendelovi (1822-1884), světoznámém zakladateli genetiky. Kdyby si býval G. J. Mendel nezapsal navíc v době svých univerzitních studií přednášky z matematiky, ačkoliv studoval fyziku a přírodopis, těžko by se setkal se spisem Ettingshausenovým: *Die combinatorische Analysis*, v němž našel matematické modely pro svoji práci. Na základě vlastních předběžných pokusů a kombinatorických úvah dospěl Mendel k této domněnce: Zjistí-li se počet různých forem, které se vyskytují v potomstvu kříženců a stanoví-li se numerické vztahy mezi nimi, pak bude možno porozumět procesům spojeným s přenosem znaků z rodičů na potomky.

**Křížení fazolí – řešená úloha**

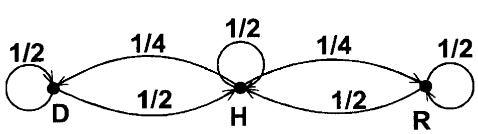
Křížíme fazole s červenými a bílými květy. Charakteristický znak barvy květů je určován dvojicí genů, z nichž každý může být jednoho ze dvou typů, které označíme písmeny G – červenokvětost a g – bílokvětost. U jedince se mohou vyskytovat tyto dva typy genů v tomto uspořádání – GG; (Gg; gG); které jsou geneticky totožné; a gg. Kombinace GG a Gg jsou navenek barevně nerozpoznatelné. Tomuto případu říkáme, že gen G dominuje nad genem g.

Každý potomek zdědí po jednom genu od jednoho rodiče. Existují tedy tři typy potomků: **Dominantní D** s geny GG, **hybridní H** s geny Gg a **recesivní R** s geny gg. Otázkou je, s jakou pravděpodobností dostaneme potomka dominantního, hybridního či recesivního po mnohokrát opakovaném křížení s různými jedinci nezávisle na genetickém charakteru původního jedince.

Při křížení jedinců nastávají tyto případy (číslo nad šipkou udává pravděpodobnost příslušné genové kombinace):

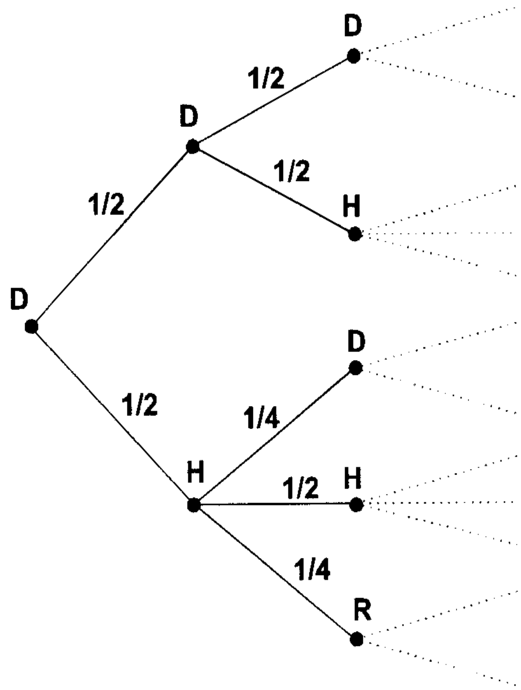



1. Probíhá proces postupného křížení, kde začneme s jedincem neznámého genetického charakteru a zkřížíme ho **s hybridem**. Jejich potomka dále s hybridem, atd.
   Diagram přechodu:



$$P = \begin{array}{c} D \\ H \\ R \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\quad\quad D \quad H \quad R$$

Strom, jehož kořenem je dominantní jedinec, vypadá takto:




Výpočet pravděpodobnostního vektoru po $n$-tém křížení: $\boldsymbol{p_n} = \boldsymbol{p_0 P^n}$, kde $p_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Součin $\boldsymbol{p_0 P^n}$ aproximujeme pevným vektorem $\boldsymbol{w}$=(x, y, z) matice $\boldsymbol{P}$.
Platí:

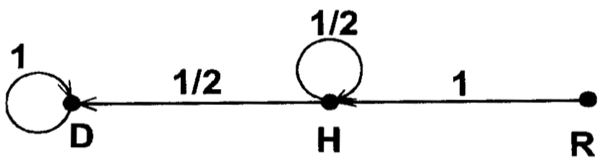
$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých a k této soustavě přidáme následující rovnici: $x+y+z=1$. Po vyřešení obdržíme vektor : $w=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.
Budeme-li opakovaně křížit fazole nezávisle na genetickém charakteru původního jedince, získáme s pravděpodobností P(D) = $\frac{1}{4}$ potomka dominantního, potomka hybridního s pravděpodobností P(H) = $\frac{1}{2}$ a potomka recesivního s pravděpodobností P(R) = $\frac{1}{4}$.

2. Když jedince neznámého genetického charakteru zkřížíme s jedincem dominantním či recesivním, půjde opět o Markovův řetězec, ale matice přechodu bude mít jiný tvar.
A) **Křížení s jedincem dominantním.**
Matice přechodu:

$$P=\begin{array}{c}D\\H\\R\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc}D & H & R\end{array}$$

Přechodový diagram má tvar:




Strom odpovídající této matici by se sestrojil obdobně jako v předchozím případě.
Platí:

$$(x,y,z)=(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ze soustavy rovnic:

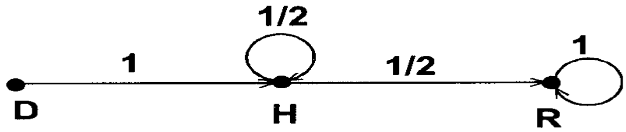
$$x=x+\frac{1}{2}y$$
$$y=\frac{1}{2}y+z$$
$$z=0$$
$$1=x+y+z$$

získáme vektor $\boldsymbol{w}$ = (1,0,0). Po opakovaném křížení nějakého jedince s jedincem dominantním bude potomek s pravděpodobností P(D) = 1 dominantní jedinec. Jedná se o absorbující Markovův řetězec.

B) Křížením jedincem **recesivním.**
Přechodová matice:

$$P = \begin{array}{c} D \\ H \\ R \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\quad D \quad H \quad R$$

Přechodový diagram:




Platí rovnost:

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po vyřešení příslušné soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých obdržíme vektor $\boldsymbol{w}$= (0,0,1). Opět jde o absorbující Markovův řetězec. Pravděpodobnost toho, že potomci budou recesivního typu, je P (R) =1.

**Závěr/diskuse**

Domníváme se, že matematické modely použité při řešení předchozí úlohy jsou přiměřené myšlenkovému potenciálu nadaných žáků. Stromové diagramy sice nejsou v naší republice zařazené do povinného matematického učiva, ale z výzkumů uveďme např. J. Příhonskou [5] vyplývá, že jsou je schopni pochopit i žáci na 1. stupni základní školy. Násobení matic je sice obtížnější algebraická operace, ale na středních ekonomických školách byla běžně probírána. Z vlastní zkušenosti z práce s nadanými žáky vím, že jsou nejen schopni prakticky zvládnout algoritmus násobení matic , ale dokonce ho i naprogramovat v Pascalu. Poznatek, že součin $\boldsymbol{p_0 P^n}$ lze aproximovat pevným vektorem $\boldsymbol{w}$ příslušné stochastické matice $\boldsymbol{P}$, sice studenti musí přijmout bez důkazu, ale možná, že je vyprovokuje k hledání odpovědí na otázku: *Proč a za jakých podmínek je tato aproximace možná?*

Řešení úlohy bylo vyzkoušeno v rámci matematického semináře na gymnáziu Slovanské náměstí v Brně. Vyučující překvapil velký motivační náboj historické zmínky o J. G. Mendelovi, dvě studentky navrhli, že si připraví o něm projekt. Úloha podnítila zájem studentů nejen o matematiku, ale i o genetiku. Při řešení úlohy si studenti dobře uvědomili, že bez matematiky nelze řešit problémy z mnoha oblastí lidské činnosti a že matematika má účinné prostředky nejen při řešení, ale i při formulaci problémů. Mohli také porovnávat efektivitu a výpovědní hodnotu tří prezentovaných modelů. Máme připravenou sérii pěti úloh , jejichž řešení vede na Markovovy řetězy, vzhledem k rozsahu článku ji prezentujeme jednou z úloh.

Bylo by dobré, kdyby si nejen studenti, ale i tvůrci školských vzdělávacích dokumentů uvědomili, že bez matematiky by nikdy nebyla možná např. elektrifikace, rádiové a televizní přenosy, nikdy by nevznikly počítače, lodě, rakety a kosmické lodě, v lékařství by neexistovaly moderní vyšetřovací metody jako RTG, EKG, EEG, počítačová tomografie, atd. Vždyť význam matematiky si uvědomoval i J. A. Komenský, který téměř před čtyřmi staletími prohlásil: „*Bez matematiky nemůže člověk nic dělati, ani díla Boží studovati, ani díla tvořiti*".

## Literatura


[1] Davis, G. A., Rimmová, S. B., Education of the Gifted and Talented. (1998). Needham Hights: Allyn a Bacon, 1998. ISBN 0-205-2700-X.

[2] Kemeny, J.,G., Snell, J., L., Thompson, G., L.. (1971). Úvod do finitní matematiky. Praha, SNTL, 1971. 470 s.

[3] Novotná, J. Matematika v Mendelových objevech. (2003) In Matem. a didaktika matem., Sborník prací, č.171, Brno, Katedra matematiky, Pedag. fak. MU v Brně, 2003. 6s. ISBN 80-210-331-8.

[4] Olejár , M. a kol. Úvod do viedy. (2011). Bratislava: Young Scientist. 2011. 86 s. ISBN 80-88792-33-9.

[5] Příhonská, J.: The "Sets of generated problems" with a view to use the graph coding close to solving of given problems. (2003). In: Annales Academiae Paedagogicaec Cracoviens, Folia 16, Studia mathematica III. Wydawnictvo Naukowe Akademii Pedagogocznej, Krakow 2003, s. 207-215. ISSN 1643-6555


*Článok prijatý dňa 11. júla 2012*

## Adresa autorů


*PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta pedagogická*
*Univerzita Masarykova*
*Poříčí č. 31*
*ČR – 603 00 Brno*
e-mail: novotna@ped.muni.cz


## Poďakovanie - Acknowledgement

Článek je výsledkem výzkumu v oblasti matematiky a speciální pedagogiky a vznikl v rámci řešení výzkumného záměru VZ MSM 00211622443 Speciální potřeby žáků v kontextu RVP pro základní vzdělávání, jehož řešitelkou je prof. PhDr. Marie Vítková, CSc.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# RÔZNE PRÍSTUPY K TVORBE GEOMETRICKÝCH ÚLOH

# VARIOUS APPROACHES TO CREATION OF THE GEOMETRICAL TASKS

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, LUCIA RUMANOVÁ

**ABSTRAKT.** *V príspevku sa zameriame na tvorivosť z pohľadu tvorby a využitia obrazového materiálu pri riešení úloh s cieľom ich vizualizácie ako aj využitia prostriedkov IKT. Uvádzame ukážky tvorby rôznych matematických úloh vychádzajúcich z jedného obrázka.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *obrázok, geometrická úloha, vizualizácia, tvorba úloh*

**ABSTRACT.** *In this paper we focus on creativity in terms of creation and use illustrative material in solutions of the tasks, to their visualization and using of ICT. There are some examples of various mathematical problems based on one picture.*

**KEY WORDS:** *picture, geometrical task, visualization, creation of tasks*

**CLASSIFICATION:** *D43, G13*

## Úvod

Úloha učiteľa je vo výchovno-vzdelávacom procese nezastupiteľná. Jednou z kompetencií, ktoré by mal každý učiteľ mať, je i schopnosť pripravovať a tvoriť vlastný učebný materiál primerane úrovni a vedomostiam žiakov. Na túto tvorbu sú potrebné nie len odborné vedomosti a schopnosti, ale aj tvorivosť, ako schopnosť pracovať s rôznym študijným materiálom s cieľom obohatiť vyučovanie vlastným kreatívnym prístupom. Veľký význam má v tomto procese aj využitie tvorivosti žiakov, ktorí môžu byť aktívne zapojení do vyučovacieho procesu s cieľom zvýšiť ich motiváciu k štúdiu matematiky a zároveň aj ich matematické schopnosti. Ako uvádza Petty (2008), tvorivá práca je dôležitá pre učiteľa všetkých odborov z troch hlavných dôvodov:

- Rozvíja u žiakov schopnosť premýšľať tvorivým spôsobom.
- Zvyšuje motiváciu žiakov. Tvorivosť uspokojuje hlbokú ľudskú potrebu niečo vytvárať a byť za to ocenený. Tvorivá práca môže uspokojovať potrebu sebarealizácie i potrebu uznania, na ktorú kladie dôraz Maslowova hierarchia ľudských potrieb.
- Prostredníctvom sebavyjadrenia dáva príležitosť skúmať pocity a osvojovať si zručnosti.

V školskom vyučovaní sa pod rozvojom tvorivosti chápe predovšetkým formatívny vplyv na žiaka, jeho vnútorný rozvoj, rozvoj jeho dispozícií, predpokladov na tvorivú činnosť. Tvorivé vyučovanie vyžaduje, aby učiteľ vytváral a uplatňoval v jednotlivých predmetoch také úlohy, ktoré žiakom umožnia voľnejšie využívať osvojené poznatky, používať ich v nových kontextoch a pri riešení nových, neznámych problémov. Rozvoj osobnosti žiaka vo vyučovaní je možné zabezpečiť prostredníctvom učebných úloh, ktoré ho motivujú, rozvíjajú jeho tvorivosť a hodnotové myslenie, ktoré okrem poznatkov obsahujú i formatívne prvky rozvíjajúce osobnosť (Lokšová, I., 1999).

My sa zameriame na tvorivosť z pohľadu tvorby a využitia obrazového materiálu pri riešení úloh s cieľom ich vizualizácie ako aj využitia prostriedkov IKT.

Podľa Mareša (2007) má učenie z obrazového materiálu svoj základ v spracovaní vizuálnych informácií. Informácie obsiahnuté v obraze sú vnímané oddelene. Obraz môže byť rozkladaný na jednotlivé prvky, ktoré sa spájajú do určitých skupín, identifikujú sa jednotlivé vzťahy medzi nimi. Z pohľadu psychologických aspektov je dôležité, aby obrazové prostriedky vyvolali u učiacich sa adekvátne predstavy o znázornených objektoch, dejoch či procesoch.

Prácou s obrazovým materiálom sa buduje a rozvíja aj vizuálna gramotnosť, čím tento materiál plní pri učení sa rôzne funkcie. Mareš (2007) udáva tieto funkcie obrazového materiálu:

- dekoratívna – obrázok vecne nesúvisí s ostatným textom;
- reprezentujúca - obrázok je vyjadrením textu;
- organizujúca – obrázok usporadúva už existujúce vedomosti a predstavy;
- interpretujúca – uľahčuje žiakom pochopenie učiva;
- transformujúca – ovplyvňuje spôsob učenia sa žiaka spracovávať informácie;
- afektívno - motivačná – obrázok prebúdza u žiaka záujem o učivo, oživuje jeho učenie;
- koncentrovanie pozornosti – usmerňuje pozornosť na podstatné veci a orientovanie sa v probléme;
- kognitívno- regulačná – podporuje poznávací proces.

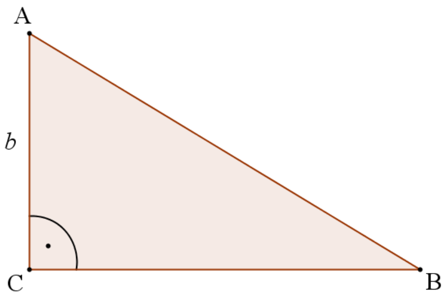
Z rôznych definícií vizuálnej gramotnosti, ktoré sú oficiálne uznávané Medzinárodnou asociáciou pre vizuálnu gramotnosť IVLA (International Visual Literacy Association) uvádzame definíciu jej zakladateľa Johna Debesa (1969), ktorý ako prvý použil termín „Visual Literacy“: *Vizuálna gramotnosť sa vzťahuje na skupinu zrakových schopností, ktoré si človek môže rozvíjať pozeraním a súčasne integrovaním ďalších zmyslových vnemov. Rozvoj týchto kompetencií je zásadný pre normálne ľudské učenie sa. Tieto schopnosti umožňujú vizuálne gramotnému človeku rozoznávať a interpretovať viditeľné pohyby, objekty, symboly, prírodné alebo umelo vyrobené, s ktorými sa stretáva vo svojom okolí. Vďaka použitiu týchto schopností je človek schopný porozumieť a tešiť sa z majstrovského diela vizuálnej komunikácie.* (dostupné na http: //www.ivla.org/org_what_vis_lit.htm)

### Tvorba geometrických úloh vychádzajúcich z obrázka

Budovanie a rozvoj geometrických predstáv je už od útleho veku spojený s prostredím, v ktorom dieťa vyrastá. Na získavanie trvalých a neformálnych vedomostí žiakov vo vyučovacom procese je potrebné zachovávať spojitosť nových poznatkov s reálnym životom. To môžeme realizovať aj riešením matematických aplikačných úloh, ktoré rozvíjajú u žiakov samostatnosť, aktivitu a tvorivosť už od najnižších ročníkov základnej školy. Riešením aplikačných úloh by sa žiaci mali naučiť formulovať problémy, vedieť získavať informácie potrebné k ich riešeniu, vedieť ich riešiť v súvislostiach a napokon vedieť sformulovať názory a závery týchto riešení.

Ďalej uvádzame ukážky tvorby rôznych matematických úloh vychádzajúcich z jedného obrázka. Môže ním byť obrázok trojuholníka bežný v školskej praxi alebo fotografia, v ktorej sa priamo trojuholník nenachádza ale môžeme ho dotvoriť a využiť pri tvorbe zadania úloh. Uvedené úlohy majú charakter otvorených neparametrických úloh, ktoré môže učiteľ sám modifikovať primerane veku a matematickým schopnostiam žiakov. Riešenie geometrických úloh je vhodné vizualizovať aj využitím prostriedkov IKT, my sme konkrétne využili softvér GeoGebra.

**Štandardné úlohy**

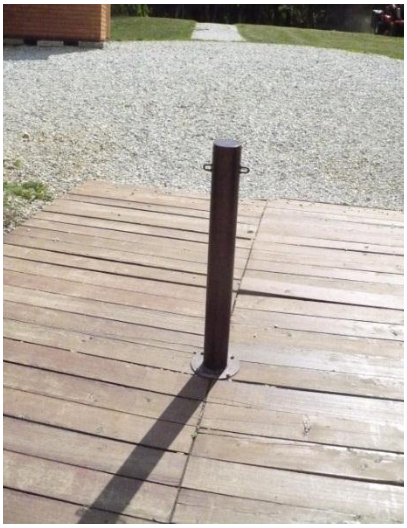



Obrázok 1

Daný je pravouhlý trojuholník *ABC* s dĺžkou strany *b* ako na obrázku 1.

- Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka *ABC*.
- Vypočítajte dĺžky strán *BC*, *AB* trojuholníka *ABC*.

**Aplikačné úlohy**



Obrázok 2

Stĺp na obrázku je na móle pri jazierku a slúži na uchytenie lodiek.

- Aký vysoký môže byť stĺp, ak by sme poznali dĺžku jeho tieňa?
- Aká bude dĺžka lana, ktoré upevníme cez oká na stĺpe a do dosiek na móle, pričom lano so stĺpom zviera ľubovoľný uhol?
- Medzi stĺp a jeho tieň natiahneme lano tak, aby vytvorili trojuholník. Aké dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov bude mať takto vytvorený trojuholník?
- Mólo tvaru obdĺžnika so stranami *a*, *b* je pokryté drevenými latkami v dvoch radoch, ako je to na obrázku. Aký približne je rozmer jednej drevenej latky na móle, ak jedna latka tvorí priemerne 3% z plochy tohto móla?

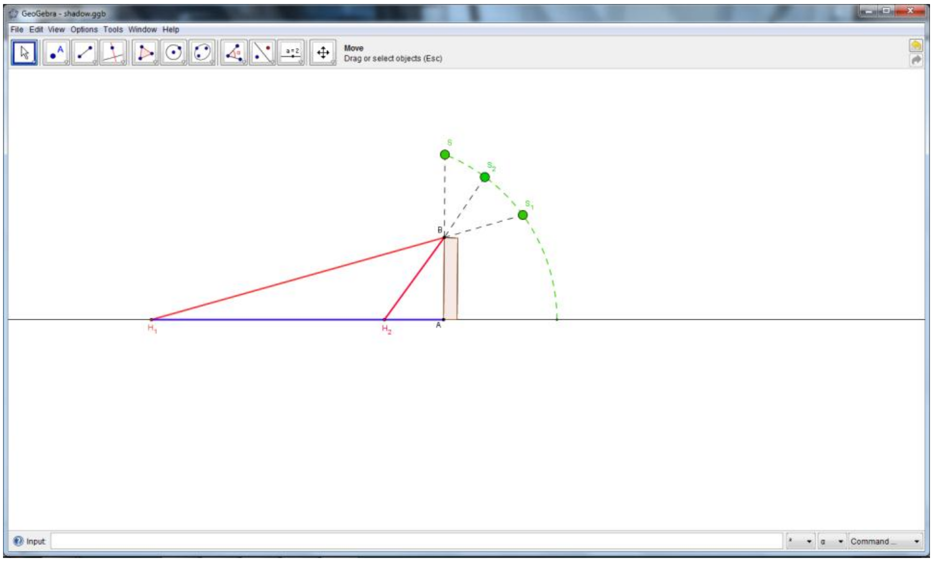
**Riešenie aplikačných úloh využitím GeoGebry**

Obrázok 3

Stĺp na obrázku je postavený na móle pri rybníku a slúži na prichytenie lode. Medzi stĺp a jeho tieň natiahneme lano tak, aby vytvorili trojuholník.

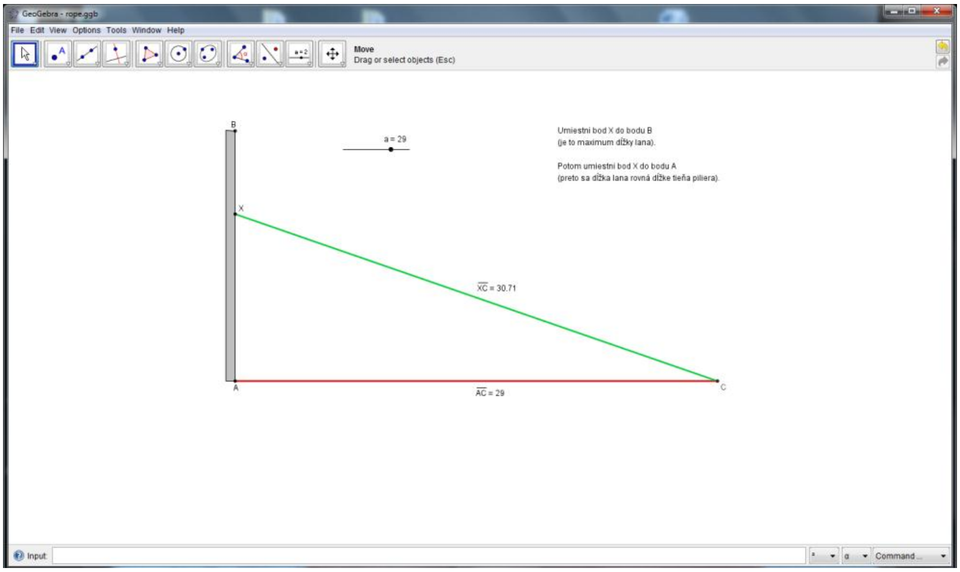
- Ako závisí dĺžka lana od dĺžky tieňa stĺpu? Kedy má tieň maximálnu a kedy minimálnu dĺžku?
- Ako závisí dĺžka lana od jeho uchytenia na stĺpe?

Pri riešení prvej úlohy použijeme vlastnosť, že dĺžka tieňa závisí od dopadu slnečného svetla na stĺp. S využitím softvéru GeoGebra môžeme danú situáciu prezentovať pohybom bodu *S* po kružnici, ktorej polomer je vzdialenosť medzi Slnkom a Zemou. Situácia na obrázku 4 je modelom, v ktorom zanedbáme polohu tieňa a zameriame sa na jeho dĺžku. To nám umožní simulovať trojrozmerný jav v rovine, pričom polomer Zeme a Slnka zanedbáme.




Obrázok 4: Závislosť tieňa stĺpu od polohy slnka

V druhej úlohe dĺžka lana závisí od jeho umiestnenie na stĺpe. V GeoGebre môžeme meniť dĺžku lana pohybom bodu *X* na úsečke *AB* (*X* je bod, v ktorom je upevnené lano na stĺpe a úsečka *AB* predstavuje daný stĺp). Ak umiestnime bod *X* do bodu *B*, dostaneme maximálnu dĺžku lana. Umiestnením bodu *X* do bodu *A* sa dĺžka lana rovná dĺžke tieňa.




Obrázok 5: Dĺžka lana v závislosti od jeho umiestnenie na stĺpe

Využitím možností použitého softvéru môžeme uvedené riešenia úloh prezentovať v dynamickom prostredí. Žiaci tak môžu konkrétnu situáciu vnímať „v pohybe“ a skúmať požadované vzťahy a vlastnosti objektov. Učiteľ si môže pripraviť takéto úlohy aj formou apletov.

## Záver

V tomto príspevku sme chceli poukázať na rôzne možnosti tvorby matematických úloh s cieľom zvýšenia motivácie a tvorivosti žiakov na hodinách matematiky. Jedným z možným spôsobov ako získať obrazový materiál, konkrétne fotografie objektov z reálneho života, je zapojiť žiakov do aktivít v rámci netradičnej formy vyučovania. Hľadanie matematiky v rôznych podobách v našom okolí, predstavuje aktivitu, ktorú môžeme realizovať so žiakmi napríklad v rámci nejakého projektu, ako uvádzajú Vidermanová a Melušová (2011), Švecová a Rumanová (2012). Naším cieľom nebolo prezentovať a analyzovať riešenia uvedených úloh, skôr poukázať na možnosti využitia obrazového materiálu a prostriedkov IKT ako námetov pre prácu učiteľov so zámerom rozvoja matematických kompetencií žiakov.

## Literatúra


[1] Čáp, J. – Mareš, J. (2007). Psychologie pro učitele. Praha: Portál, 2.vyd., 2007. 655 s. ISBN 978-80-7367-273-7

[2] Drábeková, J. - Rumanová, L. (2008). Funkcia obrázkov v matematike. In: Acta mathematica. Nitra : UKF, 2008. S. 71-77. ISBN 978-80-8094-396-7

[3] Lokšová, I. – Lokša, J. (1999). Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Praha: Portál, 1999. 199 s. ISBN 80-7178-205-X

[4] http://www.ivla.org/org_what_vis_lit.htm

[5] Pavlovičová, G. - Rumanová, L. - Švecová, V. (2011). Geometrija v gradini i parkove. In: Matematika i informatika: rasprostranenije na izsledovatelskija podchod v evropejskogo obrazovanije po matematika i prirodni nauki. Roč. 36, č. 1. 2011. s. 27-36. ISSN 1310-2230

[6] Pavlovičová, G. (2012). Obrázok ako didaktický prostriedok k tvorbe matematických úloh. In: Matematika 5 : Elementary Mathematics Education 2012, sborník příspěvků z konference konané v Olomouci 25. - 27. 4. 2012. - Olomouc: Univerzita Palackého, 2012. s. 197-201. ISBN 978-80-244-3048-5

[7] Petty, G. Moderní vyučování. (2008). Praha: Portál, 5.vyd., 2008. 280 s. ISBN 978-80-7367-427-4

[8] Švecová, V. - Rumanová, L. (2012). Supporting mathematical creativity in realistic surroundings. In: CME 2012. Generalization in mathematics at all educational levels: proceedings from international conference, Rzeszów, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Poland. 2012. s. 248-257. ISBN 978-83-7338-780-5

[9] Vallo, D. – Záhorská, J. (2009). Modelovanie vybraných viet a poznatkov školskej matematiky v prostredí IKT. In: Potenciál prostredia IKT v školskej matematike. Bratislava: UK, 2009, s.72-81. ISBN 978-80-223-2754-1

[10] Vidermanová, K.- Melušová, J. (2011). Projekt Geometria v našom meste - využitie digitálneho fotoaparátu a GeoGebry. In: Užití počítaču ve výuce matematiky : sborník příspěvku 5. konference konané 3. - 5. listopadu 2011 v Českých Budějovicích. - České Budějovice : JU, 2011. s. 401-409. ISBN 978-80-7394-324-0

*Článok prijatý dňa 9. júla 2012*

## Adresa autorov

*PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Trieda A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
*e-mail: gpavlovicova@ukf.sk*

*PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Trieda A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: lrumanova@ukf.sk

## Poďakovanie

Článok bol napísaný s podporou projektu KEGA 007UKF-4/2011 *Zvyšovanie kľúčových kompetencií v oblasti matematického a prírodovedného myslenia na primárnom stupni vzdelávania.*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# AKTIVIZUJÍCÍ ČINNOSTI PŘI ROZVOJI KOMBINATORICKÉHO MYŠLENÍ ŽÁKŮ PRVNÍHO STUPNĚ ZÁKLADNÍ ŠKOLY

# STIMULATING ACTIVITIES FOR DEVELOPMENT OF COMBINATORY THINKING OF FIRST-GRADE PUPILS

JANA PŘÍHONSKÁ, LUCIE VILIMOVSKÁ

**ABSTRAKT.** *Příspěvek se zabývá problematikou rozvoje kombinatorického myšlení žáků prvního stupně základní školy. Jsou uvedeny ukázky aktivizujících činností s ohledem na rozvoj různorodých řešitelských strategií žáků.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ***: kombinatorika, kombinatorické myšlení, řešitelské strategie, aktivizující činnosti*

**ABSTRACT**. *In the ccontribution, the development of combinatorial thinking of pupils of elementary school is discussed. Examples of stimulating activities for developing combinatorial thinking are given. We mainly focus on the development of various solving strategies of students in combinatorial problems solving.*

**KEY WORDS:** *combinatorics, combinatorial thinking, solving strategies, stimulating activities*

**CLASSIFICATION:** *A60, B50, C70, D40, K20*

## Úvod

Matematické vzdělávání by mělo vést žáky k vytvoření si pozitivního vztahu k matematice. Hlavní úlohou školské matematiky je naučit řešit žáky problémové úlohy, divergentní úlohy a úlohy zaměřené na aplikaci. Pojetí matematiky na prvním stupni základní školy se odvíjí od školních vzdělávacích programů každé ze základních škol a bezpochyby také souvisí s přístupem každého učitele matematiky. Obecně je však ovlivněno očekávanými výstupy a učivem daným RVP ZV. Zde je definováno také cílové zaměření oblasti **Matematika a její aplikace**. Pro tuto oblast jsou definovány klíčové kompetence, které jsou rozvíjeny mimo jiné řešením kombinatorických problémů jako prostředku k rozvoji logického myšlení.

Úlohy pro rozvoj kombinatorického myšlení souvisí nejvíce s tematickými okruhy Nestandardní aplikační úlohy a problémy a Závislosti, vztahy a práce s daty. V základním vzdělávání je tato oblast založena zejména na aktivních činnostech, jež jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné pro praktický život a napomáhá tak k získávání matematické gramotnosti. (Fuchs aj. 2006, s. 7.)

Během řešení kombinatorických problémů žáci na prvním stupni hledají možné postupy a řešitelské strategie, které při jiných, resp. běžných úlohách většinou nevyužívají. Úspěšnost řešení kombinatorických úloh není primárně závislá na osvojených algoritmech a početních operacích, a může tak přinést pocit úspěchu a naplnění i žákům jindy neúspěšným.

## 1 Aktivizace žáků na prvním stupni ZŠ

Na prvním stupni by měl učitel zejména respektovat přirozené potřeby žáků. Z důvodu krátkodobé pozornosti a soustředěnosti žáků prvního stupně je nutné během výuky obměňovat organizační formy i vyučovací metody a volit zejména takové, které mají na žáky aktivizující vliv. Velký důraz by měl učitel klást na motivaci a pozitivní přistup k žákům. Nejen v hodinách matematiky by měl zapojovat zajímavá témata a podporovat přirozenou hravost a spontánnost dětí. Měl by citlivě pracovat s chybami žáků a dát jim prostor pro hledání vlastních postupů a experimentování

Aktivizující činnosti zvyšují obvykle zájem žáků o probíranou tematiku. Souvislost mezi aktivizujícími činnostmi a motivací je zřejmá. Lokšová; Lokša (1999, s. 10) uvádí, že: „*Motivace má dynamizující, **aktivizující** a usměrňující funkci.*“ Dalším z přínosů aktivizujících činností je rozvoj kooperace. Nejde pouze o kooperaci mezi žáky, ale také mezi žáky a učitelem. Aktivizující metody, podobně jako ostatní vyučovací metody, můžeme dělit dle různých hledisek (Kotrba; Lacina 2007, s. 81 – 141):

- podle náročnosti přípravy (času, materiálů, pomůcek)
- podle časové náročnosti samotného průběhu ve výuce
- podle účelu a cílů použití ve výuce (diagnostické, opakovací, motivační, výkladové, k odreagování)
- podle zařazení do kategorií
  - **hry** (např. didaktické, soutěže, interakční, neinterakční hry)
  - **problémové úlohy** (např. metody heuristické, m. černé skříňky, úlohy na předvídání, atd.)
  - **diskusní metody** (např. brainstorming, brainwriting, řetězová diskuse, m. Philips 66, m. cílených otázek, atd.)
  - **situační metody** (rozborové, m. konfliktních situací, m. incidentu, m. postupného seznamování s případem, atd.)
  - **inscenační metody** (strukturní, nestrukturní, mnohostranné hraní rolí)
  - **speciální metody** (m. icebreakers, projektová výuka, atd.)

Je na učiteli, aby zvážil, jaké aktivizující metody jsou pro danou skupinu žáků vhodné a realizovatelné.

### 1.1 Aktivizace žáků při rozvoji kombinatorického myšlení

Kombinatorika hraje v rozvoji matematického myšlení výraznou roli. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení a obecných kombinačních schopností, v neposlední řadě ji lze považovat za základ pro následné řešení různých pravděpodobnostních problémů. Při řešení kombinatorických úloh na prvním stupni ZŠ využíváme různých metod, které se opírají o žákovské aktivity vyplývající z použité řešitelské strategie:

- pokus (experiment) – náhodný či systematický
- kreslení obrázku (s využitím barev)
- kreslení diagramu (např. stromového)
- využití tabulky
- užití grafu (např. uzlového)
- výpis možností
- logická úvaha
- využití matematického příkladu (popř. vzorce)

Při zapojování kombinatorických problémů do výuky na 1. stupni by měli učitelé postupovat následujícím způsobem (Bálint In Scholtzová 2003, s. 5):

1. Žáci hledají nejprve jednu, potom několik možností. Učitel si tak ověří, zda pochopili zadání a vědí, co mají hledat.
2. Žáci hledají co nejvíce různých možností řešení úlohy.
3. Žáci hledají všechny možnosti řešení. Měli by si být jistí, že našli všechny možnosti – to je možné tehdy, pokud objeví určitý pořádek/systém v hledání možností.
4. Žáci nemusí najít (resp. vypsat) všechny možnosti, ale měli by nalézt určitý systém, na jehož základě usoudí, jaké bude pokračování a kolik bude řešení.
5. Není třeba, aby žáci vyjmenovali/vypsali všechny případy, neboť dle analýzy podmínek zvládnou vypočítat všechny možnosti.

Na prvním stupni s žáky nejvíce pracujeme na bodech 1. – 3. Je zřejmé, že učitel by měl vést žáky k organizaci své práce (nejen v matematice) a k hledání určitého systému řešení. Žáci při řešení kombinatorických úloh postupují od konkrétního zachycování skutečnosti ke zjednodušování řešení (resp. grafického záznamu), což souvisí právě i s rozvojem systematičnosti. Pokud žáci naleznou určitý systém, pak svůj záznam zjednodušují, zrychlují a obvykle naleznou i více možností řešení.
Učitelé by s kombinatorikou na prvním stupni ZŠ měli začít prostřednictvím manipulativní činností dětí. K tomu velmi dobře poslouží např. barevné kostky, obrázky, pastelky, aj. Je vhodné využít i osvědčených her, jako např. Logic, Tangramy, Člověče, nezlob se, Scrabble. Velkou oblibu jistě žáci najdou v hledání cest z bludišť a labyrintů (ať už v těch na papíře, či v opravdových).

## 2 Ukázky problémů a aktivit pro žáky

### Ukázka č.1 – ČLOVĚČE NEZLOB SE

*Klárka s Vojtou hrají hru Člověče, nezlob se. Vojtovi se moc nedaří, ale Klárčina poslední figurka je už jen 5 políček od domečku. Hodila tedy poprvé (to se ještě do domečku nedostala), pak hrál Vojta. Posledním hodem Klárka zvítězila – její figurka se dostala do domečku. Co padlo Klárce na kostkách během těchto dvou hodů? Zkus najít všechny možnosti.*

Obrázek 1

**Cíl:** propedeutika pojmu kombinace (různé kombinace dvou hodů, které vedou k posunutí o pět políček)

**Motivace**: tematika (oblíbená hra)

**Metody**:

- práce ve dvojicích: experimentování s kostkami, hledání kombinací dvou hodů vedoucích k posunutí o pět políček, zaznamenání možností
- společná kontrola (zeptáme se všech na počet možností, poté je vypíšeme a porovnáme)

**Pomůcky**: kostka pro každou dvojici, nákres situace pro každou dvojici

**Řešení:**
Úvaha: Klárka je pět políček před „domečkem“. Po dvou hodech zvítězí. Co může být na kostce při těchto dvou hodech?

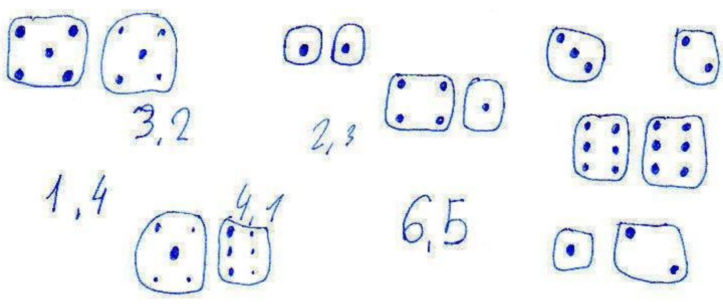
**1 + 4**
**4 + 1**
**2 + 3**
**3 + 2**

**6 + 5** (poprvé „přehodila“ počet polí, takže zůstala na místě, druhým hodem se dostala rovnou do „domečku“)

**Odpověď:** Klárce mohlo na kostkách padnout pět různých kombinací.

**Záznam z průběhu řešení žáků**

Žáci řešili úlohu ve dvojicích. Dostali lísteček s obrázkem situace. Nejprve byli dotázáni, zda uhodnou, co je to za situaci, popřípadě za hru. Většina žáků se hlásila a správně odpověděli, že se jedná o Člověče, nezlob se. Až poté jim bylo přečteno zadání a mohli začít řešit. Každá dvojice dostala k dispozici jednu hrací kostku. Žáci přišli většinou velmi rychle na možnosti, kdy na kostce padlo: 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2. V tomto okamžiku jim bylo sděleno, že to ještě nejsou všechny možnosti - přibližně polovina žáků přišla na možnosti 6 + 5 a 5 + 6, z nichž druhá možnost je zbytečná (pokud hodí Klárka 5, tak zvítězí a již nepotřebuje dál házet). Žáci ještě přišli na jednu možnost: při prvním hodu spadne Klárce kostka na zem (tedy hod je neplatný), dále hází Vojta, poté Klárka hodí znovu a padne jí právě požadovaná 5. Většina žáků zapisovala možnosti pomocí příkladů. U dvou dívek se objevilo kreslení horní stěny kostky s číslem, které padlo (viz obr. 2).




Obrázek 2

Rychlým dvojicím byl zadán další úkol: **Zjistěte, kolik různých kombinací může padnout na dvou kostkách**. Žáci většinou začali s vypisováním všech možných kombinací. Pouze u dvou chlapeckých dvojic se objevilo řešení $6 \cdot 6 = 36$. Dále byl příklad zapsán na tabuli a bylo vysvětleno všem žákům, co vyjadřují dvě šestky (jedná se o šest možností na každé kostce).

**Ukázka č.2 – MOTÝLÍ KŘÍDLA**

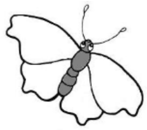
*Kolika způsoby lze vybarvit motýla na obrázku, pokud můžeš použít jen červenou a žlutou barvu? Barvy mohou být uspořádány jakkoliv.*

**Cíl**: propedeutika pojmu variace, rozvoj orientace v rovině (pravé – levé, horní – dolní křídlo)

**Motivace**: matematika bez čísel – hra s barvami

**Metody**: samostatné vybarvování – porovnání ve skupince, společné shrnutí (lze využít barevné papíry, vystříhat si čtyři červená a čtyři žlutá křídla a skládat možné variace, poté nám křídla mohou posloužit k výzdobě třídy (motýlci na oknech)

**Pomůcky**: pastelky, popř. barevné papíry, nůžky, lze vytvořit pracovní list s natištěným motýlem (obr. 3), resp. několika stejnými motýly



Obrázek 3

**Ukázka č.3 – ZVÍŘECÍ DŽUNGLE - dramatizace**

*Jednou se zvířata v džungli rozhodla, že vyšlou delegaci ke králi zvířat, aby zjistila, co je nového. Chtěla jich vyrazit spousta: 4 pštrosi, 2 tygři, 2 pavouci, 3 berušky, 2 žirafy a slon. Zvědavá opice potřebovala zjistit, kdo všechno se delegace zúčastní, proto se schovala ve křoví a sledovala, kdo kolem ní projde. Viděla však jenom nohy.*
*A) Kolik by opice viděla projít nohou, pokud by za lvem vyrazila úplně všechna zvířata?*
*B) Kdo se mohl účastnit delegace, pokud opice viděla 12 nohou? Najdi co nejvíce možností.*
*C) Kdo se mohl účastnit delegace, pokud by opice viděla projít nohy v tomto pořadí: 6 nohou stejného druhu, 4 nohy stejného druhu, 8 nohou stejného druhu?*
*D) Mohla by se spolu ve skutečnosti sejít všechna tato zvířata?*

**Cíl**: uvědomění si pořadí u uspořádání, nácvik systematičnosti, tvoření různých skupin zvířat s ohledem na počet nohou (A, B, C) a s ohledem na pořadí (C); rozvoj tvořivosti, mezipředmětové vztahy (propojení matematiky s přírodovědou), rozvoj kritického myšlení (bod D)

**Motivace**: zvířecí tematika, masky, tvorba zvířecích příkladů

**Metody**:

- zdramatizovaná delegace s využitím zvířecích masek; nesmíme zapomenout: některým zvířatům nutno „přidat“ končetiny (pavouk, beruška), vyrobíme je předem z punčocháčů nebo pruhů látky a přehodíme žákům přes záda).
- skupinová práce (body B, C): využijeme nastříhané nakopírované obrázky zvířat, žáci pomocí nich sestavují (popř. lepí) zvířecí příklady (např. 2 pštrosi + pavouk = 12 nohou)
- řízená diskuse (bod D) – využití učebnice (popř. encyklopedie, mapy, či internetu) s informacemi o jednotlivých zvířatech, žáci mají odpovědět na otázku, zda se mohou zmiňovaná zvířata skutečně sejít. Musí tedy zvážit, zda žijí ve stejném prostředí a zda nějaké ze zvířat není potravou pro ostatní

**Pomůcky**: masky jednotlivých zvířat (čelenky, šátky/kusy látek, masky, zobáky, končetiny z punčocháčů či látky), kopie s obrázky zvířat pro každou skupinku, nůžky, lepidlo, volné papíry pro lepení příkladů, učebnice (encyklopedie, internet, mapa) s informacemi o jednotlivých zvířatech (místo výskytu a potrava!)

## Závěr

Kombinatorika má nezastupitelnou roli pro rozvoj logického myšlení. Obecné kombinační schopnosti můžeme považovat za jedny ze základních pro celkovou matematickou gramotnost žáka. Na základní škole se s kombinatorikou víceméně více setkávají pouze žáci navštěvující školy s rozšířenou výukou matematiky. Různé kombinatorické úlohy se však vyskytují často v matematických olympiádách a dalších soutěžích. Je proto třeba rozvoji kombinatorického myšlení věnovat náležitou pozornost již od útlého věku. Aktivizující činnosti, které jsou jen krátce nastíněny v příspěvku, jsou velice důležité pro motivaci žáků k řešení praktických problémů a uvědomění si aplikace matematických poznatků v reálném životě.

## Literatura

[1] Fuchs, E., Hošpesová, A., Lišková, H. Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu Základní vzdělávání. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-326-7

[2] Kotrba, T., Lacina, L. Praktické využití aktivizačních metod ve výuce. Vyd. 1. Brno: Společnost pro odbornou literaturu, 2007. ISBN 978-80-87029-12-1.

[3] Lokšová, I., Lokša, J. Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Vyd. 1. Překlad Jakub Dobal. Praha: Portál, 1999, 199 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8205-X.

[4] Příhonská, J. Úvod do kombinatoriky. [Monografie] Tribun EU s r.o., Brno 2008, 104 s. ISBN 978-80-7399-456-3

[5] Scholtzová, I. Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni základnej školy: Rozvíjanie kombinatorického myslenia [online]. Metodicko-pedagogické centrum v Prešove, 2003 [cit. 2012-01-31]. Dostupné z: http://www.mcpo.edu.sk/modules/umpdownloads/viewcat.php?cid=36.

[6] Vilimovská, L. Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ. [Diplomová práce]. TU v Liberci, 2012

*Článok prijatý dňa 8. júna 2012*

## Adresa

*doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.*
*Katedra matematiky a didaktiky matematiky*
*Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická*
*Technická univerzita v Liberci*
*Studentská 2*
*ČR – 468 17 Liberec*
e-mail: jana.prihonska@tul.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# EXAMPLES OF GEOGEBRA COUPLED WITH AN INTERACTIVE WHITEBOARD TO ACHIEVE FRESH APPROACHES IN TEACHING MATHEMATICS

TADEUSZ RATUSIŃSKI

**ABSTRAKT.** *V posledných rokoch sa spolu s technologickým pokrokom objavili nové možnosti a požiadavky, ktoré súvisia s vyučovacím procesom. V článku uvedieme príklady nových prístupov vo vyučovaní matematiky, pričom sa zameriame na použitie GeoGebry s kombináciou interaktívnej tabule vo vyučovacom procese.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**:*didaktika matematiky, matematika výukové, informačné a komunikačné technológie, nové technológie, GeoGebra, interaktívnu tabuľu.*

**ABSTRACT**. *With the great technological advances of recent years appeared in both new opportunities and new requirements related to the teaching-learning process. The article will shown examples of possible new approaches to teaching math offered combination use GeoGebra with interactive whiteboard in the classroom*.

**KEY WORDS:** *Didactics of mathematics, mathematics teaching, ICT, new technology, GeoGebra, interactive whiteboard.*

**CLASSIFICATION:** *D40, U50, Q64*

## Introduction

With the great technological advances of recent years both new opportunities and new requirements related to the teaching-learning process have appeared. You can see that around the world, including Poland, teachers and other educational enthusiasts are enhancing the efficiency of the educational process, as well as increasing student involvement, and the use of activity aids which often introduce additional building on the achievements of ICT. Extending the teaching arsenal of modern technology, however, imposes new approaches to teaching and it is becoming necessary to update the process. The way this transformation occurs, however, will depend on the means of teaching.

## Interactive Whiteboard - an intuitive way to control your computer

An Interactive Whiteboard is one of many educational media which is becoming increasingly popular in Polish schools. The directors of many institutions are attempting to have their classrooms fitted with such technology.

In practice, the interactive whiteboard is a device that (usually) resembles a large white board, and which allows interoperability through its connection to a computer and multimedia projector. You can compare it to a big screen that responds to touch. Thus, you can treat it as a device for input and output in an easy and intuitive way with the use of a computer. It gives you control of all the programs running on the computer using only a pen [1]. The user of an interactive whiteboard can, in addition to the computer screen, display any content (such as MS Word files, MS PowerPoint, web pages, photos, videos, etc.) and also use it to handle any running program. An Interactive Whiteboard also includes other functions including the possibility of taking notes, writing the curriculum, etc., but these aspects have been deliberately omitted in this article.

## GeoGebra - a universal tool

Among a group of mathematics' teachers belonging to the enthusiasts TI, free software is gaining increasing popularity. One such project is the program GeoGebra [2], which can be applied to various areas of science such as mathematics, physics, geography or economics. GeoGebra is a mathematical tool for interactive presentation and examination of issues connected to geometry, algebra, analysis and statistics. It is designed for both teachers and students. It is therefore a kind of DGS combined with CAS. Characteristic for this project is that all objects identified in the program (such as curves, equations, functions, tables, sets of points, etc.) and their properties, are closely related. It gives a unique opportunity not only to look at an object from the perspective of the various branches of mathematics (eg, the circle as a geometric object on a plane set of points satisfying a certain property, the equation of a circle, etc.) but also the possibility of linking and the free passage from one property to other in terms of algebraic and geometric analysis. Such an approach allows the automatic adaptation to the needs of the problem or issue under consideration in every aspect, no matter what the nature of the object was imposed on it during its definition at the beginning. This is a very valuable opportunity that good teachers can use in their lessons.

New and interesting possibilities arise when the teacher, engaged in the teaching process, combines the comprehensive capabilities of a computer program such as GeoGebra with an easy system for use with an interactive whiteboard.

## Interactive help

The teacher, in order to fully realize the objectives which are pursued in the teaching of mathematics, cannot skip any of its basic components, namely: the development of mathematical concepts, solving problems, conducting mathematical reasoning, creating mathematical language [3]. In each of them we can find a place for ICT. Below are examples of lessons aimed at developing a new mathematical concept, exploration properties and relationships of mathematical objects, analyzing problems in a given situation, solution and interpretation tasks (especially tasks requiring high precision design), implementation and interpretation of the claims and their leadership and development of mathematical language.

The experiment was based on a number of lessons conducted on the basis of interactive materials - work-sheets prepared in the form of GeoGebra files. Dynamic interactive teaching aids presented: definitions, theorems, proofs, tasks, applications of the theorems, the study of property and structures. Topics focused on the properties of plane figures. Students who participated in the experiment are from high school classes (16 years old). The main emphasis of this class is on mathematics, physical and information technology. During the operation, the daily use of information technology is in the broad sense of the word. The resource use - e-learning platform or Internet - as well as graphing calculators and various computer programs, which for these students is as natural as traditional classroom drawing on paper, supported the task.

## Introduction of new concepts (definitions)

Students traditionally encounter definitions on paper, where they read verbal notation, formal language, and sometimes even analyze a drawing illustrating one of many situations. Materials created in the GeoGebra program depict an innovative look at existing solutions. During the experiment conducted with the students, a unique method for introducing new concepts was met. This interpretation allowed the student to pay special attention to all the conditions required by a mathematical object. Simultaneous interactive geometric interpretation allows you to see many cases in a short time using any combination of the conditions of the object (Fig. 1). This ensures that the TI pupil will have many examples of objects etc. which will help them understand and learn more comprehensively than if they were to base all their knowledge on a couple of 2D examples from a book.

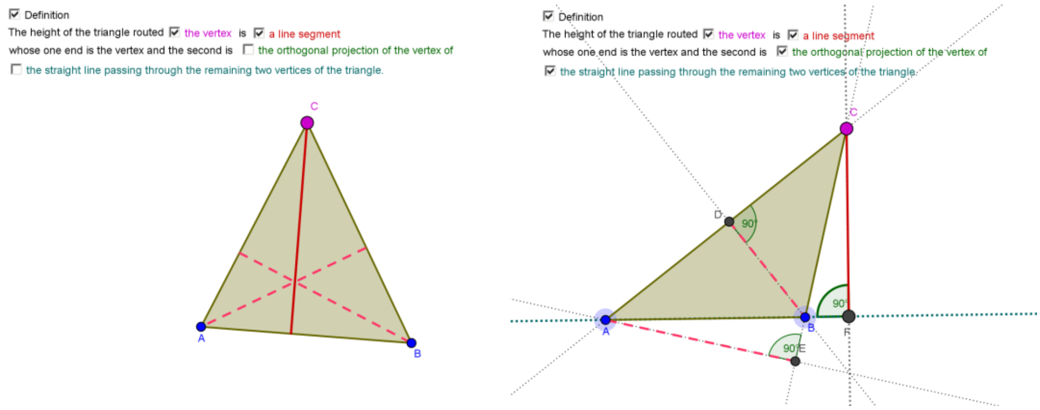



Figure 1 - Interactive definition of a triangle

That which is important in the case of interactive definition can also be a color, it is thanks to this that the student can relate the verbal condition included in the definition of a mathematical object or its property. Individual parts of this definition focus on showing the essential features of that object. The student can read the definition and actively participate in its creation.

In the opinion of students, a phrase which has been repeated many times is: this definition is "alive". There is only one opinion, but clearly you can see and extract the features necessary and sufficient for the designate as a given concept. Students emphasized that this approach affects the images which shape the concept and thus facilitates the search for counter-examples of the solution and its special cases.

## Studying the concepts of ownership

Another aspect of the use of drawing as a dynamic interactive teaching aid is to study the properties of mathematical concepts. When students are faced with a problem they have to decide whether a given situation has met the definition, which often creates considerable dilemma when diagnosing the presented case. For example, there might be a problem in the construction of a particular type of triangle, e.g. an obtuse triangle (Fig. 2). Interactive help allows for easier imaging and makes suggestions for choosing arguments.

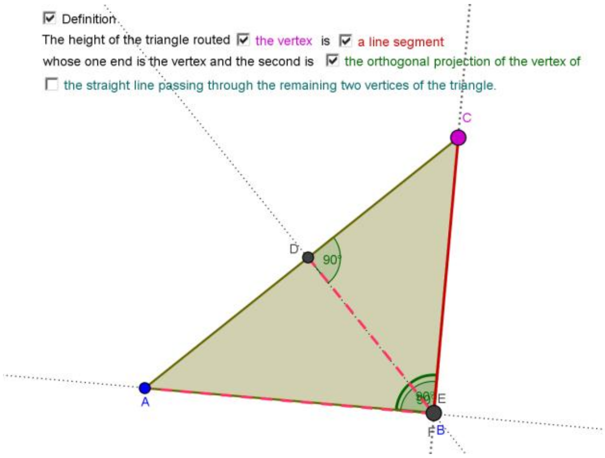



Figure 2 - Interactive definition of triangle - special case

In addition to resolving whether a situation is an example or perhaps a counter-example it is important to also study the properties of the observed objects and relationships in mathematics. One of the situations which were presented during the experiment was to investigate the position of the triangle, the orthocentre, depending on its type (Fig. 3).

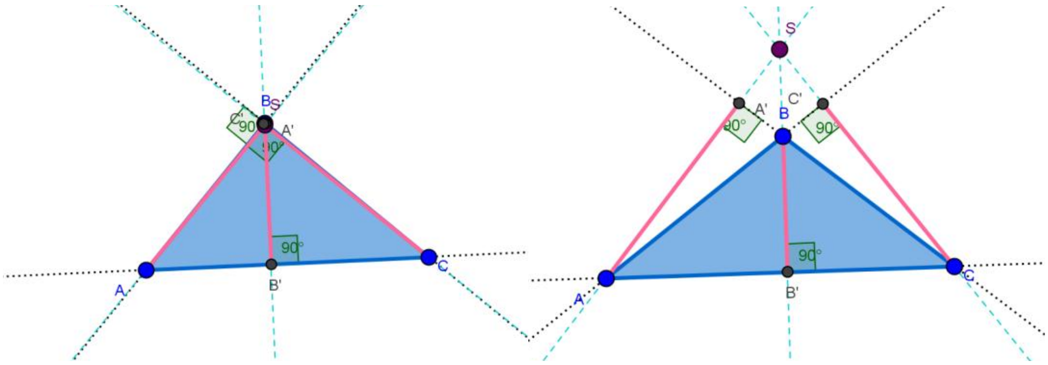



Figure 3 - Orthocenter of triangle - interactive simulation

Performed in the same way, lessons could be realized as an individual task, with discussion of the simulation, or otherwise. This stage of the definition introduced a combination, allowing the properties of newly-discovered objects to be found as well as preparing the groundwork for the formulation of new theorems resulting in a good field for problem-solving (this particular problem).

Students recognized this part of the experiment as most "active" and "creative". The ease with which they interacted with and manipulated the prepared materials meant that in a short time they were able to analyze a wide range of diverse examples, and to make classifications and formulate observations. A variety of examples facilitated students in gaining their arguments during the discussion, which was a great help.

### Discovering and refining statements

This step may be preceded by a number of tasks (provoking) leading to the formulation of hypotheses. Formulating conclusions and making disciplines, however, can be problematic.

A new approach may help to refer matters when formulating proposals and claims. For example, the gradual introduction of further elements as assumptions and dependencies allow the observation of pertinent observations leading to the placing of hypothesis (Fig. 4).

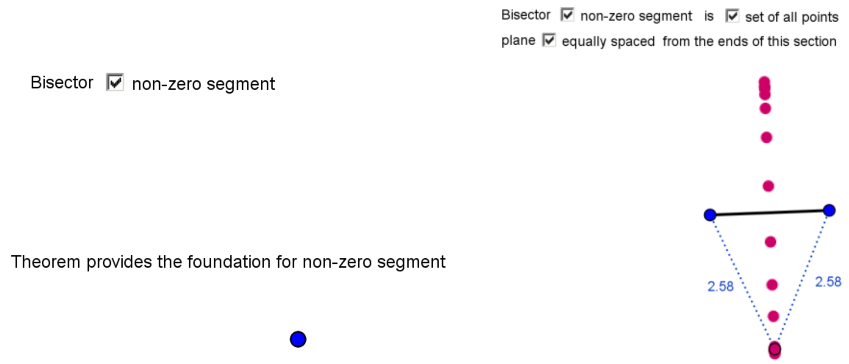



Figure 4 - Interaction and the discovery of theorems

Working in this way, the teacher takes care of the formal language in which observations are formulated as comprehensive and containing vocabulary of factual correctness. Furthermore, the teacher ensures that all necessary conditions have been included in the proposal, and draws attention to special cases. As with the definitions, the students were very enthusiastic about this new "theoretical" approach, which in most cases tied to the "rule with books." Here each of the formulated theorems allowed the observation of all the conditions and assumptions in specific instances. Many of the students emphasized that they preferred watching what happens to the object of mathematical analysis when such conditions are not met as assumptions. Didactic 'spoiling' can lead to better awareness of the need for some assumptions or the essence of certain dependencies.

### Theorem

Do not forget the necessity of proving hypotheses. How can I make the proof easier to understand? Interactive teaching aids utilized in the GeoGebra program allow the student to be led step by step through a formalized proof and encourages the student, at the same time, to actively participate. The traditional paper-pupil method immediately reveals the course of the whole proof. The solution proposed by applications in the program encourages students to analyze each step while focusing his attention on the current situation and the relationships presented in a given time. Another attractive aspect is that the evidence of situation drawings is not bound. When finding proof using interactive teaching aids it is possible to check many different combinations of "set" objects without losing the evidential reasoning (Fig. 5).

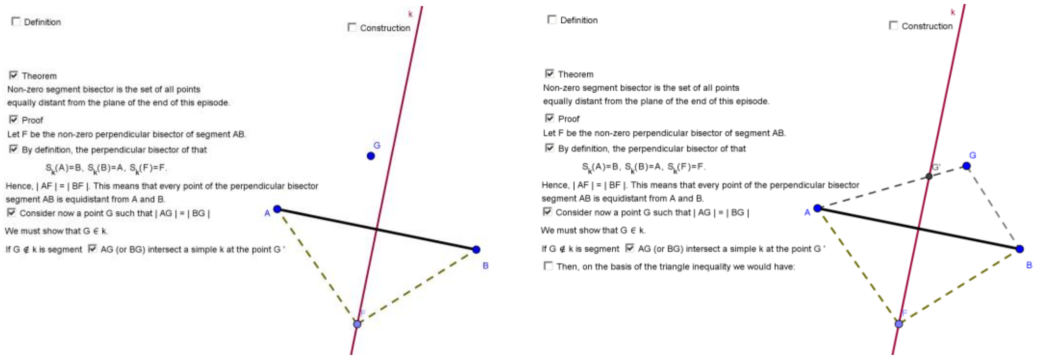



Figure 5 - Multi-stage interactive proof

Retaining evidence in such a way self-motivates students through the application of command executed in the program. An example of such student activity may be evidence that the length of the segment joining the sides of the harness means is equal to the arithmetic mean length of the base (Fig. 6).

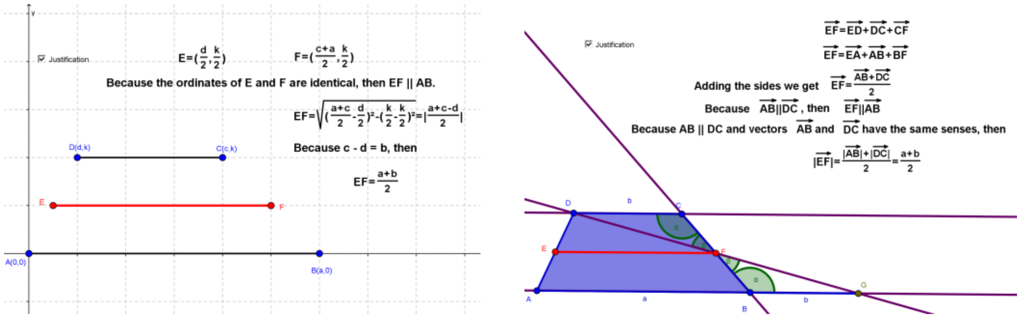



Figure 6 - Examples of evidence made spontaneously by students using GeoGebra

Students used the tools learned in the GeoGebra class. It replaced the tools with a piece of paper. Enrolled in the formal proof of the theorem, they made, on that occasion, an interactive drawing. In this way, an interactive document was created showing proof of the case, which an observer can change in any way. One student said, "Such a form I like, because the proof is formal, but made for a particular case. However, I can modify this case and see what will change. The proof, however, remains true in every case." This observation is particularly valuable, since many teachers have probably encountered situations where after the formal proof of a theorem in the general case the student was still not convinced of its truth for a particular case.

## Conclusions and observations

Based on our experiment we can hypothesize that the transfer of knowledge using information technology in the broad sense of the term facilitates the assimilation of new knowledge, compared to traditional forms of communication. Consistent application of ICT as part of the learning process (in class) and learning/studying (eg at school, at home) meant that the students observed in class believe that a figure is not evidence, as well as simulation and testing of dozens of examples of the problem is not sufficient enough compared to recognition of the real observations. But it must be remembered that the group taking part in the experiment cannot be regarded as average. These are people who definitely declare a positive attitude to ICT. The test performed indicated that these students would be happy to use the tool, not only for a deeper penetration of the substantive material but also as a tool for keeping notes, saving illustrations, discovering the logic, or observing his/her own conduct or progress. Constant use of skillfully-selected ICT changes the form of reasoning presented by the student or the solution. Students in this class reached for interactive visualization in the form of a file such as GeoGebra, as others have reached for drawings. However, it is a very valuable didactic instilling awareness that the ICT process of reasoning cannot be concluded that formal proof is required, whether it is the administration's argument or a counterexample. Students derive great help from the constant presence of modern technology in the classroom in the reinforcement of this approach.

## References

[1] Ratusiński T. (2011). Tablica interaktywna jako narzędzie wspomagające proces nauczania matematyki, Edukacja otwarta, 1/2011, Płock, 2011, s. 61-74.

[2] http://www.geogebra.org/

[3] Ratusiński T. (2003). Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych. Roczniki PTM, seria V, Dydaktyka Matematyki 25, Kraków, 2003, s. 262-269.

*Received July 11, 2012*

## Adresses

*Dr Tadeusz RATUSIŃSKI*
*Institute of Mathematics*
*Pedagogical University of Cracow*
*ul. Podchorążych 2*
*30-084 Kraków*
e-mail: ratusita@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# SPRACOVANIE VÝSLEDKOV TESTU NOVOU TEÓRIOU TESTOV

# THE INTERPRETATION OF TEST RESULTS BY THE NEW TEST THEORY

ĽUBOMÍR RYBANSKÝ, MARTA VRÁBELOVÁ

**ABSTRAKT.** *Cieľom tohto článku je poukázať na teóriu odpovedí na položky IRT a použiť ju pri spracovaní výsledkov výstupného testu projektu KEGA 3/7001/09 v školskom roku 2009/2010.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ***: IRT, SG model, náročnosť úlohy, schopnosti*

**ABSTRACT.** *The aim of this paper is to mention the Item Response Theory and to use this theory for the treatment of the KEGA 3/7001/09 project outcoming test results from the school year 2009/2010.*

**KEY WORDS:** *IRT, SG model, item extremity, ability*

**CLASSIFICATION:** *MESC B10*

## 1. Úvod

Tento článok nadväzuje na článok [6], v ktorom boli klasickou teóriou testov spracované výsledky výstupného testu pre 5. ročník základnej školy vypracovaného v rámci projektu KEGA 3/7001/09 s názvom *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií – alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA*. Pripomíname, že projekt pokračuje projektom KEGA 015 UKF - 4/2012 a cieľom týchto projektov je vypracovať a experimentálne overiť nové, doplňujúce učebné materiály vo forme problémových úloh zameraných na riešenie problémov súčasného, bežného života pre 5. – 9. ročník ZŠ. Výsledky vstupného testu projektu obsahuje článok [5], a výsledky výstupného testu pre 6. ročník sú spracované v článku [3].

Novou teóriou testov použitou v tomto článku, nazývanou teória odpovedí na položky (Item Response Theory - IRT), odhadujeme charakteristické a informačné krivky pre jednotlivé úlohy výstupného testu pre 5. ročník ZŠ, úroveň matematických kompetencií pre každého žiaka, porovnáme túto úroveň pre experimentálne a kontrolné školy, a tiež pre skupiny škôl pri rozklade vzhľadom na skupinu a vyučovací jazyk. Najprv však čitateľovi priblížime podstatu IRT a predpoklady jej použitia. Teória odpovedí na položky bola použitá napr. v článku [7] s využitím balíka `ltm` programu *R* uvedeného v [4], a používa sa tiež pri spracovaní výsledkov testov PISA. Podrobnejšie informácie o IRT možno získať v [1], [8], [9], [10].

## 2. Podstata a predpoklady použitia IRT

Klasická teória testov je zameraná na deskriptívne charakteristiky skóre testu, na výpočet reliability testu, posúdenie validity testu, korelácie medzi položkami. Teória odpovedí na položky je moderná teória testov (v porovnaní s klasickou teóriou testov), ktorá je veľmi populárna, pretože pomocou nej možno zistiť vlastnosti položiek a celého testu, ktoré klasická teória neposkytuje. Má však silnejšie predpoklady použitia. Prvým predpokladom je existencia spoločného faktora (latentnej premennej, schopnosti - ability) vysvetľujúceho korelácie položiek. Tento predpoklad nikdy nie je presne splnený, ale malé porušenia tohto predpokladu nespôsobujú veľké rozdiely. Stačí, keď pre údaje existuje jeden dominantný prvý faktor. Druhým predpokladom je, že vzťah medzi pozorovanými odpoveďami a latentnou premennou má špecifickú formu. Krivka znázorňujúca tento vzťah sa nazýva charakteristická krivka položky označovaná ako ICC. Latentná charakteristika sa označuje $\theta$ a predpokladá sa, že má normované rozdelenie, teda strednú hodnotu 0 a smerodajnú odchýlku 1. Charakteristická krivka je najčastejšie grafom logistickej funkcie. Na odhad logistickej funkcie sa v prípade testov s dichotomistickými odpoveďami (1 a 0) používa trojparametrický logistický model (niekedy menej alebo viacparametrický) tvaru

$$P\left(v_i = 1 \mid \theta = t\right) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + \exp\left(-1{,}7 a_i \left(t - b_i\right)\right)}.$$

Je to model pravdepodobnosti, že osoba s úrovňou latentnej premennej $t$ odpovie na položku $i$ správne (vyberie odpoveď 1). Parameter $b_i$ sa nazýva parameter náročnosti (obťažnosti) $i$-tej položky, $a_i$ je diskriminačný parameter a $c_i$ je parameter hádania. Pre dobrý odhad parametrov charakteristickej krivky sú potrebné údaje veľkého rozsahu. Najdôležitejším parametrom je parameter náročnosti $b_i$. V bode $b_i$ má krivka inflexný bod. Je to bod na osi $x$, pričom, ak $c_i = 0$, osoba so schopnosťou $\theta = b_i$ si vyberie danú odpoveď s pravdepodobnosťou 0,5. Čím je parameter $b_i$ väčší, tým je položka náročnejšia. Náročnosť položky a schopnosť – ability sú na tej istej škále. Parameter diskriminácie $a$ je tým väčší, čím je krivka strmšia, teda čím položka lepšie rozlišuje. Položky s malým diskriminačným parametrom slabo rozlišujú medzi osobami s rôznou úrovňou schopností a mali by sa z testu vylúčiť. Parameter $c_i$ sa používa vtedy, keď sú v teste položky s výberom odpovede. Je to pravdepodobnosť, že osoba so žiadnou schopnosťou vyberie danú odpoveď. Výhodou IRT modelu je invariancia parametrov, čo znamená, že parametre nezávisia od výberu vzorky z populácie. Namiesto reliability v klasickej teórii testov sa v IRT používa informácia. Každá položka testu prispieva určitou informáciou do informácie testu. Táto informácia položky závisí od parametrov $a$ a $b$ položky, informácia testu je rovná súčtu informácií položiek. Uvedený trojparametrický model sa používa na reprezentáciu kognitívnych testov. Okrem tohto modelu sa používajú aj ďalšie modely.

## 3. Aplikácia IRT na výstupný test pre 5. ročník ZŠ

Výstupný test pre 5. ročník ZŠ bol použitý ako výskumný nástroj projektu KEGA 3/7001/09. Metódou výskumu bol experiment, školy zapojené do výskumu boli náhodne rozdelené na experimentálne a kontrolné. Výskumnú vzorku tvorí 877 žiakov 5. ročníka základných škôl zo štyroch okresov Nitrianskeho kraja. Niektoré školy sú školy s vyučovacím jazykom maďarským. Test obsahoval 6 úloh (položiek) obsahujúcich niekoľko podúloh. Všetky úlohy boli otvorené a boli bodované. Za každú zo 6 položiek žiak mohol získať 0 – 5 bodov.

Najprv sme overili splnenie predpokladov použitia IRT. Vypočítali sme korelačnú maticu položiek testu a zistili sme, že všetky korelácie sú významné. Metódou faktorovej analýzy sme našli jeden dominantný faktor vysvetľujúci 49,9% celkovej variability. Tento faktor nazveme *matematické kompetencie*.

Na spracovanie uvedeného testu je vhodné použiť *Samejima's Graded Response (SGR) Model* ([2]), čo je polytomický IRT model, ktorý predpokladá, že kódy (skóre, body) odpovedí na položky sú usporiadané. V tomto modeli sa pravdepodobnosť výberu $k$-tej odpovede (zisku $k$ bodov) v $i$-tej položke (za $i$-tu úlohu) počíta podľa vzorca

$$P\left(v_i = k \mid \theta = t\right) = \frac{1}{1+\exp\left(-1,7a_i\left(t-b_{i,k}\right)\right)} - \frac{1}{1+\exp\left(-1,7a_i\left(t-b_{i,k+1}\right)\right)},$$

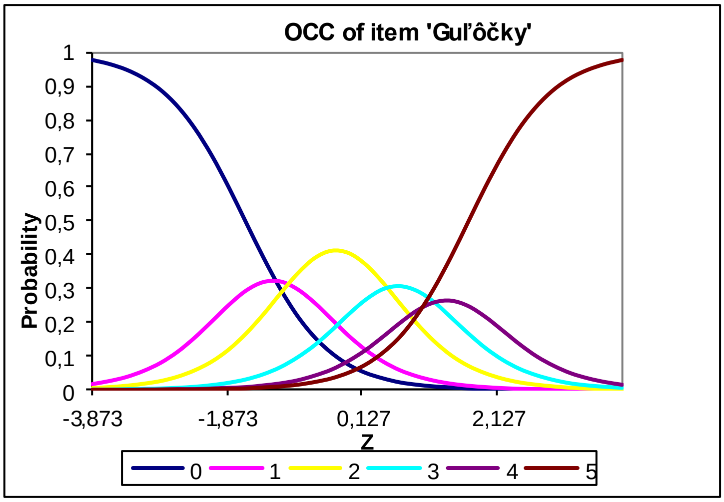
kde $a_i$ je parameter diskriminácie, o ktorom sa predpokladá, že je rovnaký pre každý výber odpovede na $i$-tu položku, $b_{i,k}$ je parameter náročnosti $k$-tej odpovede na $i$-tu položku, pričom $b_{i,k-1} < b_{i,k} < b_{i,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, s_i$, $b_{i,s_i+1} = \infty$, $s_i$ je počet odpovedí na $i$-tu položku.

Na odhad parametrov modelu sme použili voľne šíriteľný program *eirt*, ktorý tvorí doplnok do Excelu. V tomto programe sme odhadli parametre charakteristických kriviek odpovedí na položky (získaných bodov) - OCC, uvedené sú v tabuľke 1. Najlepšie medzi žiakmi rozlišuje úloha *Koľko áut vyrobili* ($a_1$ = 2,193), nasledujú úlohy *Domy a ich čísla*, *Návšteva divadla* a *Guľôčky*, a najmenej rozlišujúcimi úlohami sú *Stavba* a *Požičovňa bicyklov*. Ak by sme náročnosť úloh posudzovali podľa parametra $b_{i,5}$, tak najnáročnejšími úlohami sú úlohy *Guľôčky* ($b_{4,5}$ = 1,720) a *Požičovňa bicyklov* ($b_{2,5}$ = 1,565). Menej náročnými sú úlohy *Koľko áut vyrobili* ($b_{1,5}$ = 0,485) a *Domy a ich čísla* ($b_{5,5}$ = 0,435). Najmenej náročnými úlohami sú *Stavba* ($b_{3,5}$ = 0,223) a *Návšteva divadla* ($b_{6,5}$ = -0,067). Nakreslili sme tiež grafy OCC pre jednotlivé počty bodov získané za úlohy. Úroveň matematických kompetencií je znázornená na tej istej škále (v intervale [-4, 4]) ako náročnosť. Ako ukážku uvádzame grafy OCC pre úlohu *Guľôčky* (obrázok1) a *Návšteva divadla* (obrázok 2). V prípade úlohy Guľôčky (obrázok 1) žiak s úrovňou matematických kompetencií pod -1,079 najpravdepodobnejšie získa 0 bodov, žiak s úrovňou matematických kompetencií nad -1,079 a pod -0,825 najpravdepodobnejšie získa 1 bod, žiak s úrovňou matematických kompetencií nad -0,825 a pod 0,444 najpravdepodobnejšie získa 2 body, žiak s úrovňou matematických kompetencií nad 1,206 najpravdepodobnejšie získa 5 bodov. OCC pre ostatné úlohy, okrem *Návšteva divadla*, vyzerajú podobne. Z charakteristických kriviek úlohy *Návšteva divadla* (obrázok 2) je vidieť, že na celej škále latentnej premennej je najpravdepodobnejšie získať 0 bodov – úlohu nevyriešiť resp. 5 bodov – úlohu vyriešiť. Ostatné počty bodov majú relatívne malé pravdepodobnosti, čo naznačuje, že uvedenú úlohu by bolo vhodné prekódovať na dichotomickú premennú (0 - nesprávna odpoveď, 1 – správna odpoveď).

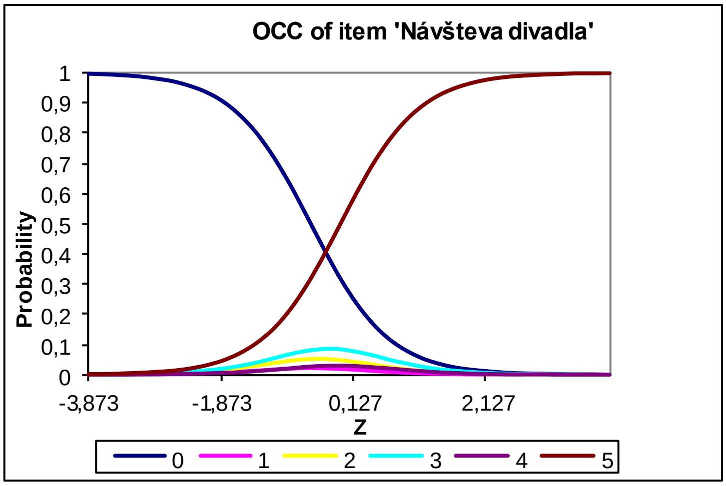
Testová informačná krivka je zobrazená na obrázku 3, celková informácia testu je rovná 21,26, informácia v intervale [-4, 4] je rovná 20.92 (98.41%). Testové informačné krivky indikujú, že úlohy *Koľko áut vyrobili*, *Domy a ich čísla* a *Guľôčky* poskytujú najviac informácie (postupne 4,99, 4,53 a 4,44). Menej informácie sa získa z úloh *Požičovňa bicyklov* (2,73), *Stavba* (2,45) a *Návšteva divadla* (2,12). Výpočet množstva informácie sme urobili v programe *R*. Z predchádzajúceho vyplýva, že najmenej vhodnou úlohou testu je úloha *Návšteva divadla*.

| | $a_i$ | $b_{i,k}$ 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Koľko áut vyrobili... | 2,193 | -1,354 | -1,006 | -0,384 | 0,011 | 0,309 | 0,485 |
| Požičovňa bicyklov | 1,230 | -1,545 | -1,200 | -0,355 | 0,699 | 1,409 | 1,565 |
| Stavba | 1,278 | -1,964 | -1,709 | -1,059 | -0,434 | 0,009 | 0,223 |
| Guľôčky | 1,642 | -1,599 | -1,191 | -0,249 | 0,673 | 1,390 | 1,720 |
| Domy a ich čísla | 1,880 | -1,929 | -1,576 | -1,053 | -0,493 | 0,166 | 0,435 |
| Návšteva divadla | 1,695 | -0,515 | -0,490 | -0,402 | -0,239 | -0,102 | -0,067 |

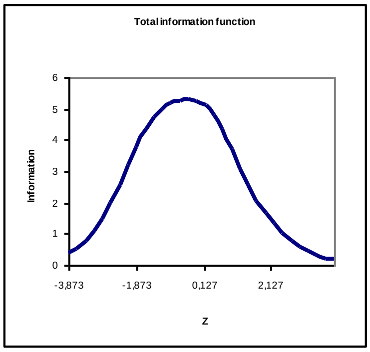
Tabuľka 1: Odhad parametrov charakteristických kriviek odpovedí



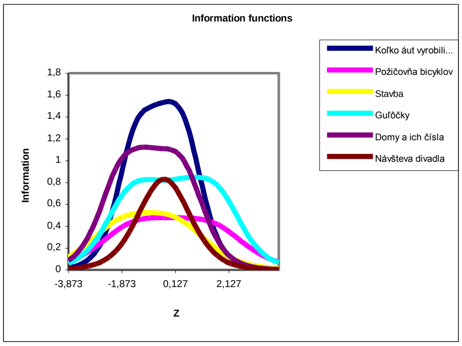

Obrázok 1: OCC pre *Guľôčky*




Obrázok 2: OCC pre *Návšteva divadla*




Obrázok 3:Testová informačná funkcia




Obrázok 4: Položkové informačné funkcie

Dôležitým výsledkom IRT je odhad matematických kompetencií žiakov. Pre vybraných šesť žiakov je odhad matematických kompetencií uvedený v tabuľke 2. Tu si môžeme všimnúť, že žiaci s rovnakou úrovňou matematických kompetencií (0,144) majú rozdielne skóre testu (18, 20) a traja žiaci, ktorí majú rovnaké skóre testu majú rozdielnu úroveň matematických kompetencií. Žiak číslo 552 s úrovňou matematických kompetencií 0,554 získal 20 bodov, pričom nevyriešil len najľahšiu úlohu *Návšteva divadla* a žiak číslo 457 s úrovňou matematických kompetencií 0,021 získal tiež 20 bodov, pričom za najťažšiu úlohu získal len jeden bod. Teda aj žiaci s veľmi rôznou úrovňou matematických kompetencií môžu získať rovnaký počet bodov.

| žiak | skupina | VJ | Ú1 | Ú2 | Ú3 | Ú4 | Ú5 | Ú6 | Skóre | mat.kompetencie |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 516 | E | SJ | 2 | 2 | 1 | 3 | 5 | 5 | 18 | 0,144 |
| 633 | E | SJ | 1 | 2 | 5 | 2 | 5 | 5 | 20 | 0,144 |
| 112 | K | SJ | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 | 28 | 1,307 |
| 423 | E | MJ | 5 | 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 27 | 1,409 |
| 552 | E | SJ | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 0 | 20 | 0,554 |
| 457 | E | MJ | 4 | 3 | 5 | 1 | 2 | 5 | 20 | 0,021 |

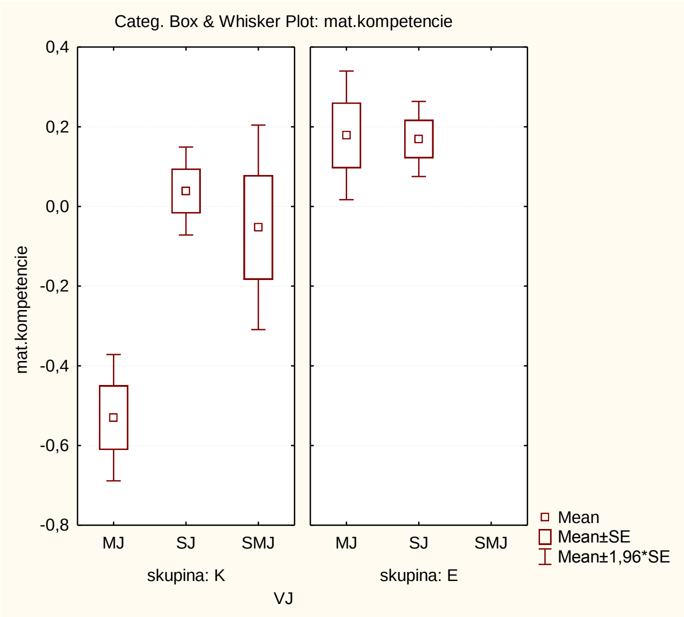
Tabuľka 2

Vypočítané matematické kompetencie žiakov významne korelujú s bodovým hodnotením úloh. Spearmanove koeficienty korelácie obsahuje tabuľka 3.

| Variable | Spearman Rank Order Correlations (mat.kompetencie) MD pairwise deleted Marked correlations are signi ficant at p <,05000 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Koľko áut vyrobili ... | Požičovňa bicyklov | Stavba | Guľôčky | Domy a ich čísla | Návšteva divadla |
| matematické kompetencie | 0,809 | 0,596 | 0,596 | 0,736 | 0,756 | 0,672 |

Tabuľka 3: Korelácie matematických kompetencií žiakov a bodového hodnotenia úloh.

Aritmetický priemer matematických kompetencií je pre kontrolnú skupinu rovný -0,166, pre experimentálnu skupinu je rovný 0,172, smerodajné odchýlky sú 0,913 a 0,852. Rozdiel priemerov je významný (*p*-hodnota = 0,00000). Pri rozklade škôl vzhľadom na skupinu a vyučovací jazyk zistíme, že najvyššie priemerné kompetencie (0,179) dosiahli žiaci experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským, nasledujú experimentálne školy s vyučovacím jazykom slovenským (0,169), kontrolné školy s vyučovacím jazykom slovenským (0,038), kontrolné školy slovensko-maďarské (-0,052) a kontrolné školy s vyučovacím jazykom maďarským (-0,53). Významný rozdiel v priemerných matematických kompetenciách je len medzi školami kontrolnej skupiny s vyučovacím jazykom maďarským a ostanými školami. Tento výsledok je zhodný s výsledkom získaným klasickou teóriou testov v [6]. Matematické kompetencie žiakov pri rozklade na všetky skupiny zobrazujú kategorizované škatuľové grafy na obrázku 5.




Obrázok 5: Kategorizované škatuľové grafy

## 4. Záver

Pri hodnotení výstupného testu projektu KEGA 3/7001/09 metódami IRT sme zistili, že všetky úlohy sú približne rovnakej náročnosti. Žiadalo by sa, aby náročnosť úloh testu mala väčšiu variabilitu. Najmenej vhodnou úlohou je úloha *Návšteva divadla*, ktorá poskytuje najmenej informácií a je nevhodne bodovaná. Pri ďalšom použití tohto testu by ju bolo treba vhodne upraviť. Najnáročnejšími úlohami sú úlohy z oblasti pravdepodobnosť (*Guľôčky*) a z oblasti logika (*Požičovňa bicyklov*).

## Literatúra


[1] Baker F.-Kim S. H. (2004). Item Response Theory: Parameter estimation techniques (2nd ed). New York:, Marcel Dekker. 2004.s. 528. ISBN 978-08-2475-825-0

[2] Chernyshenko, O. S. and others (2001): Fitting Item Response Theory Models to Two Personality, Inventories: Issues and Insights. Multivariate Behavioral Research, 36 (4), 2001,s. 523-562. ISSN 0027-3171

[3] Kóšová M.-Rybanský Ľ. (2011): Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 6. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z IX. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre (22. –23. September 2011), Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2011. s. 117-123. ISBN 978-80-8094-958-7

[4] Rizopoulos D. (2006). ltm: An R package for latent variable modeling and item response theory analyses. Journal of Statistical Software, 17 (5), 2006. s. 1-25. ISSN 1548-7660. URL http://www.jstatsoft.org/v17/i05/

[5] Rybanský Ľ.-Vrábelová M. (2010). Štatistické spracovanie výsledkov vstupného testu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z vedeckej konferencie Pedagogická veda a školská prax v historickom kontexte (28. Január 2010), Katedra pedagogiky Filozofickej fakulty Univerzity sv. Cyrila a Metoda v Trnave, 2010. s. 175-184. ISBN 978-80-8105-182-1

[6] Rybanský Ľ.-Vrábelová M. (2010). Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z VIII. Nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre (16. – 17. September 2010), Fakulta prírodných vied UKF v Nitre 2010. s. 225-232. ISBN 978-80-8094-781-1

[7] Rybanský Ľ.-Vrábelová M. (2012). Využitie programového balíka `ltm` na spracovanie výsledkov projektu KEGA. In: Forum Statisticum Slovacum, č. 3, 2012. s. 126-131. ISSN 1336-7420

[8] http://info.worldbank.org/etools/docs/library/117765/Item%20Response%20Theory%20-%20F%20Baker.pdf

[9] http://personality-project.org/r/book/Chapter8.pdf

[10] http://www.metheval.uni-jena.de/irt/VisualIRT.pdf

*Článok prijatý dňa 27. júna 2012*

**Adresa autorov**

*RNDr. Ľubomír Rybanský,*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 94974Nitra*
e-mail: `lubomir.rybansky@ukf.sk`

*doc.RNDr. Marta Vrábelová, CSc.,*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 94974Nitra*
e-mail: `mvrabelova@ukf.sk`

**Poďakovanie**

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 015 UKF - 4/2012.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ANALÝZA ŽIACKYCH RIEŠENÍ ÚLOHY Z MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

# THE ANALYSIS OF PUPILS' SOLUTIONS OF THE TASK FROM MATHEMATICAL OLYMPIAD

MIROSLAVA SOVIČOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ

**ABSTRAKT.** *V príspevku sa zaoberáme analýzou písomných riešení žiakov, ktorí sa zúčastnili krajského kola kategórie C Matematickej olympiády v roku 2012. Žiacke riešenia vybranej úlohy analyzujeme na základe a priori analýzy možných riešení tejto úlohy. Úloha patrí do kategórie izolovaných problémov. Je vhodné podobné problémy predstaviť aj žiakom, ktorí nie sú riešiteľmi Matematickej olympiády. V príspevku uvedieme vybrané podobné problémy.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *a priori analýza, žiacke riešenia, izolované problémy, Matematická olympiáda*

**ABSTRACT.** *In the contribution, we deal with the analysis of written solutions of pupils who attended the county round of C category in Mathematics Olympiad in 2012. We analyse pupils' solutions of a chosen task on the basis of a priori analysis of its possible solutions. The task belongs to the category of isolated problems. It is suitable to introduce similar problems also to pupils who do not attend Mathematical Olympiad. We offer more problems from this category in the contribution.*

**KEY WORDS:** *a priori analysis, pupils' solutions, isolated problems, Mathematical Olympiad*

**CLASSIFICATION:** *D54*

## Úvod

Matematická olympiáda je súťaž žiakov základných a stredných škôl, ktorú vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov a Slovenskou komisiou Matematickej olympiády. V školskom roku 2011/2012 bol zorganizovaný už 61. ročník Matematickej olympiády. Súťaž má viacero kategórií, v príspevku sa orientujeme na krajské kolo kategórie C. Táto kategória je určená pre žiakov stredných škôl, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky, t.j. pre prvákov štvorročných gymnázií a kvintánov z osemročných gymnázií.

Krajské kolo Matematickej olympiády kategórie C sa konalo v utorok, 17. apríla 2012. V Nitrianskom kraji sa krajského kola kategórie C zúčastnilo spolu 42 žiakov zo 16 stredných škôl. Zadanie obsahovalo štyri úlohy, každá z týchto úloh patrí do kategórie izolovaných problémov. V našom príspevku sa zameriavame na analýzu žiackych riešení jednej z úloh.

## Teoretické východiská

Izolovaný problém je taká úloha na určitom stupni vzdelávania v matematike, ktorá je pre žiaka netradičnou úlohou svojim zadaním, ale najmä postupom riešenia, jeho riešenie si vyžaduje matematické skúmanie. Počiatočná situácia je v zadaní izolovaného problému presne popísaná, cesta k cieľu nie je známa (t.j. je otvorená) a ani cieľ, ktorý má žiak dosiahnuť, nie je presne daný alebo nie je daný vôbec (t.j. cieľ je otvorený) [1]. Pojmom izolovaný problém zvyčajne označujeme úlohu, ktorej riešenie nie je na prvý pohľad, resp.

po prvom prečítaní, z dovtedy získaných vedomostí v matematike zrejmé. Žiak sa predtým s podobnou alebo analogickou úlohou nestretol. Nedokáže okamžite nájsť postup riešenia. Dokáže však problém analyzovať, načrtnúť riešenie čiastkových úloh, ktoré si riešenie izolovaného problému vyžaduje a neskôr, „vyskladať“ riešenie izolovaného problému ako celku. Typickými príkladmi izolovaných problémov sú úlohy matematických súťaží, najmä úlohy Matematickej olympiády [2].

## Metódy

Na analýzu riešiteľského postupu žiakov, ktorí sa zúčastnili krajského kola kategórie C Matematickej olympiády v Nitre, sme zo zadania vybrali úlohu č.1:
*Pre všetky reálne čísla* $x, y, z$ *také, že* $x < y < z$, *dokážte nerovnosť* $x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2$.

V rámci prípravy na analýzu žiackych riešení úlohy z Matematickej olympiády sme ešte pred samotnou analýzou a nahliadnutím do žiackych riešení urobili a priori analýzu predpokladaného postupu riešenia úlohy žiakmi a určili premenné a priori analýzy (Tab. 1) [3].

| | **Premenné analýzy predpokladaného postupu riešenia úlohy** |
|---|---|
| P.1 | Žiak overil nerovnosť pre konkrétne trojice čísel. |
| P.2 | Žiak ovláda vzorec pre druhú mocninu trojčlena. |
| P.3 | Žiak upravil pravú stranu roznásobením. |
| P.4 | Žiak správne použil ekvivalentné úpravy pre nerovnosti. |
| P.5 | Žiak správne použil vynímanie pred zátvorku. |
| P.6 | Žiak dokázal rozhodnúť, či rozdiel dvoch premenných bude kladné alebo záporné číslo. |
| P.7 | Žiak vedel rozhodnúť, či súčin dvoch výrazov v zátvorkách bude kladné alebo záporné číslo. |
| P.8 | Žiak dokázal posúdiť, či pravá, resp. ľavá strana upravená na súčin spĺňa predpoklad. |
| P.9 | Žiak dokázal pôvodnú nerovnosť tak, že dokázal nerovnosť s ňou ekvivalentnú. |
| P.10 | Žiak uviedol v riešení, že ak dokáže ekvivalentnú nerovnosť, dokáže aj nerovnosť pôvodnú. |

Tabuľka 1: Premenné a priori analýzy.

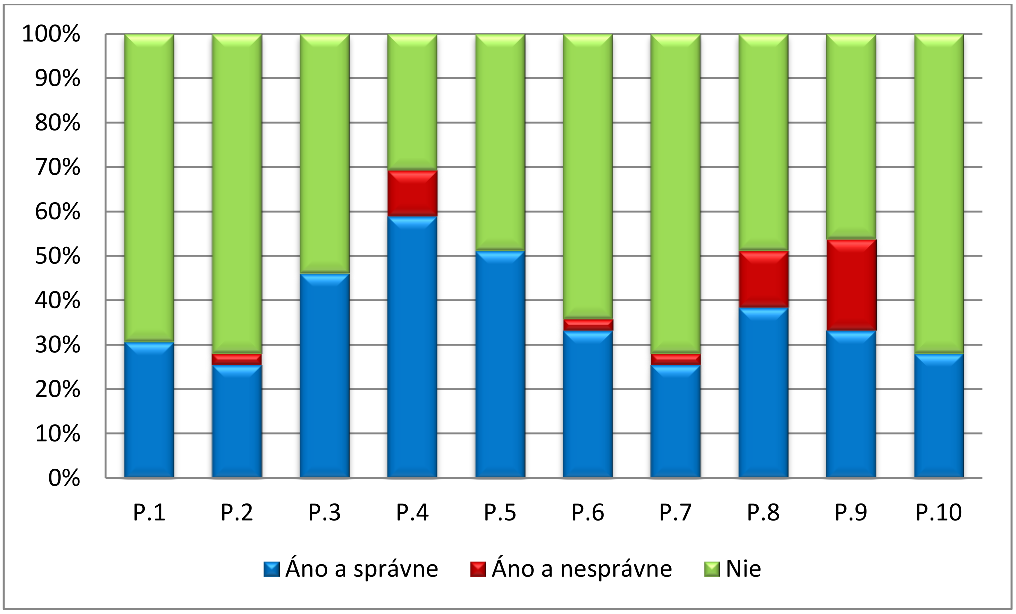
Podľa týchto premenných predpokladaného postupu riešenia boli následne analyzované riešenia žiakov.

## Diskusia

Zo 42 žiakov, ktorí sa krajského kola kategórie C zúčastnili, úlohu č.1 aspoň začalo riešiť 39 žiakov. Maximálny počet bodov, ktorí mohli žiaci za riešenie úlohy získať, bolo 6 bodov. Body žiaci získavajú nielen za správne riešenie, ale tiež za postup pri riešení a dôvodenie. Viac ako polovica bodov bola za riešenie úlohy udelená štrnástim žiakom, z toho trinásť žiakov získalo za riešenie úlohy plný počet bodov, a teda úlohu správne vyriešili až do konca.

Pri riešení si väčšina žiakov zvolila rovnaký postup, aký sme predpokladali v a priori analýze riešenia danej úlohy. Iný postup riešenia si zvolilo dvanásť žiakov, ale len v troch prípadoch bol tento postup správny a žiak platnosť nerovnosti dokázal. V ostatných deviatich prípadoch žiaci nesprávne upravili výraz na pravej strane nerovnosti, resp. použili pri svojom riešení neekvivalentné úpravy, a teda nerovnosť, ktorú na konci riešenia dostali a ktorej platnosť mala potvrdiť platnosť pôvodnej nerovnosti, nebola s pôvodnou nerovnosťou zo zadania úlohy ekvivalentná.

Nasledujúci graf (Graf 1) znázorňuje zastúpenie premenných vyplývajúcich z písomných riešení žiakov. Ak sa v žiackom riešení nachádzal údaj charakterizovaný jednotlivými premennými a jeho použitie bolo správne, premennú sme pri konkrétnom riešení označili „Áno a správne“. Ak sa síce údaj v riešení nachádzal, ale jeho použitie bolo nesprávne, premennú sme označili „Áno a nesprávne“. Ak premenná v riešení zastúpená nebola, označili sme ju ako „Nie“.




Graf 1: Zastúpenie premenných a priori analýzy v písomných riešeniach žiakov.

Z grafu (Graf 1) je zrejmé, že dvanásť žiakov v riešení úlohy overilo platnosť nerovnosti pre konkrétne zvolené usporiadané trojice čísel, ostatní žiaci sa pokúsili nerovnosť dokázať hneď pre všeobecne zvolené usporiadané trojice reálnych čísel $x, y, z$. Z analýzy žiackych riešení tiež vyplynulo, že osem žiakov bolo schopných riešiť túto úlohu len numericky, a teda po overení platnosti nerovnosti len pre niektoré vybrané usporiadané trojice čísel $x, y, z$ ďalej v riešení nepokračovali.

V prvom kroku všeobecného dôkazu nerovnosti (premenné P.2 a P.3) žiaci výraz na pravej strane nerovnosti častejšie upravovali jeho rozpísaním na dve zátvorky a následným roznásobením (osemnásť žiakov) ako použitím vzorca pre druhú mocninu trojčlena (desať žiakov, z toho jeden žiak použil vzorec nesprávne). Dôvodom mohlo byť napríklad to, že vzorec pre druhú mocninu trojčlena nepoznajú, resp. mali obavy, že sa pri úprave spamäti podľa vzorca môžu pomýliť.

Z údajov ďalej vyplýva, že väčšina žiakov, ktorí vo svojom riešení upravovali obe strany nerovnosti použitím ekvivalentných úprav (premenná P.4), vybrané ekvivalentné úpravy použila správne. Žiaden zo žiakov, ktorí pri úprave nerovnosti použili vynímanie pred zátvorku (premenná P.5), pri úprave neurobil chybu.

V časti riešenia, keď žiaci upravili nerovnosť do tvaru, v ktorom na jednej strane nerovnosti mali číslo 0 a na druhej strane výraz upravený na súčin, bolo dôležitým krokom vedieť rozhodnúť, či rozdiel dvoch premenných, resp. súčin dvoch výrazov v zátvorkách bude kladné alebo záporné číslo (premenné P.6 a P.7). Tento krok bol problémový len pre jedného žiaka, ostatní žiaci (trinásti pri premennej P.6, desiati pri premennej P.7) s rozhodnutím, či pôjde o kladné alebo záporné číslo, problém nemali.

V záverečnej fáze riešenia mali žiaci posúdiť, či pravá, resp. ľavá strana nerovnosti upravená na súčin spĺňa predpoklad zo zadania úlohy (premenná P.8). Piatim z dvadsiatich žiakov robilo toto rozhodnutie problém, čo mohlo byť u niektorých z nich spôsobené aj tým, že nesprávnymi úpravami dostali nerovnosť v tvare, ktorá nebola ekvivalentná s pôvodnou nerovnosťou zo zadania.

Ako sme už uviedli, správny dôkaz nerovnosti uviedlo trinásť žiakov, ktorí platnosť pôvodnej nerovnosti dokázali tak, že dokázali platnosť nerovnosti s ňou ekvivalentnej (premenná P.9). Iba jedenásť žiakov túto skutočnosť vo svojom riešení aj slovne opísalo (premenná P.10). Vzhľadom na to, že ide o krajské kolo matematickej súťaže, ktorého sa zúčastňujú vybraní žiaci, víťazi školských a obvodných kôl Matematickej olympiády, môžeme tento výsledok považovať len za uspokojivý.

**Podobné izolované problémy**

Úloha z krajského kola kategórie C Matematickej olympiády nie je vo svojej podstate zložitá. Zahŕňa jednoduché ekvivalentné úpravy, úpravu na súčin a menej náročné myšlienkové operácie. Žiakom pri jej riešení však nestačí mechanicky ovládať úpravu výrazov a ekvivalentné úpravy nerovností. Úloha si vyžaduje matematické skúmanie a dôvodenie, ktoré je nutné rozvíjať u všetkých žiakov, nielen u tých, ktorí sú riešiteľmi Matematickej olympiády.

Z toho dôvodu ponúkame ďalšie izolované problémy, ktoré sú svojou povahou podobné úlohe z Matematickej olympiády.

**Problém 1**: *Nech $x, y, z$ sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $xy + yz + zx = 1$. Ukážte, že platí nerovnosť:*

$$x + y + z \geq \sqrt{3}\ .$$

**Problém 2**: *Dokážte, že pre reálne čísla $x, y, z$ platí nerovnosť*

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

*Kedy nastane rovnosť?*

**Problém 3**: *Nech $x, y, z$ sú kladné reálne čísla vyhovujúce rovnici $x + y + z = 1$. Dokážte, že*

$$xy(x + y)^2 + yz(y + z)^2 + zx(z + x)^2 \geq 4xyz.$$

Každý z týchto problémov má aspoň tri metódy riešenia [2], preto je vhodné používať ich počas vyučovacích hodín matematiky pre všetkých žiakov na rozvoj ich logického myslenia, tvorivosti, predstavivosti, kritického myslenia a dôvodenia. Sú však veľmi nápomocné aj počas seminárov a cvičení z matematiky, alebo v rámci prípravy na Matematickú olympiádu, a to najmä kvôli možnosti predstaviť žiakom heuristické stratégie a rôzne nerovnosti, ktoré sú bežným nástrojom pri riešení izolovaných problémov, ako napríklad Cauchyho nerovnosť, Jensenova nerovnosť, či vzťah aritmetického a geometrického priemeru.

## Záver

Na dosahovanie výnimočných výsledkov nielen vo vyučovaní, ale aj v rôznych matematických súťažiach, ani zďaleka nepostačujú kvalitné učebnice a pasívny prístup žiakov k vyučovaniu. Žiaci potrebujú samostatne budovať svoje poznatky, a to skúmaním problému, jeho analýzou, kladením otázok, analýzou svojich zistení a diskusiou o nich so svojimi spolužiakmi a s učiteľom. Žiaci musia budovať svoje poznatky aktívnym prístupom k učeniu sa a neustálym dopĺňaním svojich vedomostí a zručností o rôzne nové matematické metódy, stratégie, techniky a nástroje na riešenie problémov. Tie sú pre žiakov nevyhnutné nielen počas vyučovacích hodín matematiky, ale aj v reálnom živote. Žiaci tiež musia vedieť svoje riešenia prezentovať, a to jasne a zrozumiteľne, podložiť ich logickými argumentmi a vhodne reagovať na kritické poznámky spolužiakov či učiteľa. Preto sa domnievame, že je vhodné zaraďovať izolované problémy do vyučovania matematiky.

Zaraďovanie izolovaných problémov a následná analýza žiackych riešení týchto problémov je pre učiteľa dôležitou informáciou o úrovni poznatkov žiakov aj o ich schopnosti komplexne zhodnotiť a vyriešiť zadaný problém. Analýza žiackych riešení úloh z Matematickej olympiády či iných matematických súťaží môže tiež významne prispieť k hodnoteniu úrovne vzdelania v oblasti matematiky v danom regióne či na celom Slovensku.

## Literatúra

[1] Čeretková, S. – Šedivý, O. (2005). Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky. Nitra : FPV UKF v Nitre, 2005. 144 s. ISBN 80-8050-923-9

[2] Sovičová, M. (2012). Vybrané metódy riešenia matematických problémov [Rigorózna práca]. Nitra : FPV UKF v Nitre, 2012. 113 s.

[3] Ulovec, A. et al. (2009) Motivating and Exciting Methods in Mathematics and Science – Prípadové štúdie. Olomouc : Palackého Univerzita v Olomouci, 2009. 137 s. ISBN 978-80-244-2347-0

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012.*

## Adresa autorov

*PaedDr. Miroslava Sovičová*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*949 74 Nitra*
e-mail: miroslava.sovicova@ukf.sk

*doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
949 74 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

**Poďakovanie**

Príspevok je publikovaný v rámci projektu UGA -> VI/24/2012 - Využitie izolovaných problémov vo vyučovaní matematiky SŠ.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# APLIKÁCIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC NA RIEŠENIE ÚLOH V DYNAMIKE STAVEBNÝCH KONŠTRUKCIÍ

# APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOLVING PROBLEMS OF STRUCTURAL DYNAMICS

DARINA STACHOVÁ

**ABSTRAKT.** *Príspevok sa venuje riešeniu problémov výpočtov vlastných hodnôt výpočtových modelov vozidla. Vlastné frekvencie a vlastné hodnoty sú považované za základné číselné charakteristiky definujúce dynamickú individualitu každého dynamického systému. Keď poznáme tieto charakteristiky, môžeme predpovedať správanie sa dynamického systému pri rozličnom budení. Vlastné hodnoty sa zvyčajne určujú bez ohľadu na tlmenie systému. V tomto prípade sú vlastné hodnoty reálne čísla. V prípade, že berieme do úvahy tlmenie, vlastné hodnoty sú komplexné čísla a výpočty sú komplikovanejšie.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *aplikácie, dynamický systém, vlastné hodnoty dynamického systému*

**ABSTRACT.** *This paper is dedicated to the solution of the problems of calculation of natural values of some computing model of vehicle. Natural frequencies and natural modes are the basic dynamical characteristics defining the dynamical individuality of a dynamical system. When we know these characteristics we can prognosticate the behaviour of the dynamical system under various excitation. Natural values are usually calculated without consideration the damping of the system. In this case the natural values are real numbers. In the case when the damping is taken into consideration the natural values are complex numbers and calculation is more complicated.*

**KEY WORDS:** *applications, dynamical system, natural values of a dynamical system*

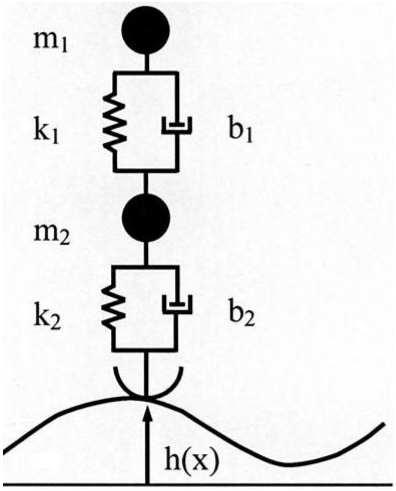
**CLASSIFICATION:** *M55*

## 1 Úvod

Vlastné hodnoty – vlastné frekvencie a tvary vlastného kmitania sú považované za základné číselné charakteristiky definujúce dynamickú individualitu každého dynamického systému [1], [2]. Ich výpočet je nedeliteľnou súčasťou každej komplexnej dynamickej analýzy. Útlm veľkej väčšiny stavebných a dopravných konštrukcií je relatívne malý (podkritický útlm), preto celá súčasná teória kmitania takýchto systémov bola budovaná tak, aby sa pri analýze kmitania mohlo pracovať s vlastnými hodnotami získanými za predpokladu, že tlmenie je malé a môžeme ho zanedbať. Skutočnosť, že pri výpočte vlastných hodnôt dynamického systému sa vo veľkej väčšine prípadov tlmenie neberie do úvahy má aj inú príčinu – matematické problémy spojené s ich analýzou. Pri analýze vlastných hodnôt netlmeného systému sú tieto hodnoty reálne čísla. Ich výpočet a grafické zobrazenie nepredstavuje dnes žiadny problém. Vlastné hodnoty tlmeného systému sú komplexné čísla. Ich výpočet z matematického hľadiska je zložitejší a nastáva tiež problém s grafickou interpretáciou získaných výsledkov. Prekladaný príspevok na konkrétnom príklade výpočtového modelu vozidla dokumentuje výpočet vlastných hodnôt za predpokladu, že tlmenie sa zanedbáva i za predpokladu, že tlmenie sa berie do úvahy v skutočných hodnotách. Poukazuje na matematické stránky obidvoch riešení a na možnosti grafickej interpretácie. Porovnávajú sa navzájom získané výsledky a potvrdzuje sa oprávnenosť zanedbania tlmenia pri analýze vlastných hodnôt takéhoto dynamického systému.

## 2 Použitý výpočtový model vozidla

Predmetom analýzy je tzv. štvrtinový model vozidla, zobrazený na obrázku 1. Tento výpočtový model reprezentuje polovicu jednej nápravy vozidla.




Obrázok 1: Výpočtový model vozidla

Ak práca sily nezávisí na trajektórii, ale len na počiatočnom a koncovom bode trajektórie, nazývame túto silu konzervatívnou. Príkladom konzervatívnych síl sú sila tiažová a sila gravitačná. V prípade, že práca sily závisí na trajektórii, hovoríme o silách nekonzervatívnych resp. disipatívnych. Príkladom disipatívnych síl je sila trenia a sila odporu prostredia. Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu je rovnaký v každom mieste konzervatívneho silového poľa. Je zrejmé, že práca nekonzervatívnych síl po uzavretej trajektórii je na rozdiel od práce konzervatívnych síl rôzna od nuly. Zákon zachovania mechanickej energie je špeciálnym prípadom *zákona zachovania energie*, ktorý sa vzťahuje na všetky druhy energie. V prípade disipatívnych síl akými sú napr. trecie sily, časť mechanickej energie sa mení na tepelnú energiu, avšak celková energia sa zachováva.

Takže rovnica disipatívnych tlmiacich síl je

$$\{\dot{F}_d\} = -[b]\{\dot{v}\} = -2\omega_b [m]_D \{\dot{v}\} \tag{1}$$

Po aplikácii Bettiho vety získame pohybové rovnice tvaru:

$$[m]_D \{\ddot{v}\} + [b]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} = \{0\} \tag{2}$$

t. j. dostaneme systém rovníc:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + b_1(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + k_1(v_1 - v_2) = 0 \\ m_2\ddot{v}_2 - b_1(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + b_2\dot{v}_2 - k_1(v_1 - v_2) + k_2 v_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ako modelový príklad použijeme číselné charakteristiky zodpovedajúce nákladnému automobilu Tatra T148.

$m_1 = 2514{,}1379\,\mathrm{kg}$ $\qquad$ $m_2 = 440\,\mathrm{kg}$

$k_1 = 197965\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ $\qquad$ $k_2 = 1200000\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$

$b_1 = 11423{,}6\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ $\qquad$ $b_2 = 1373{,}4\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$

## 3 Vlastné hodnoty tlmeného systému

Riešenie systému (3) hľadáme v tvare $\{v\} = \{v^0_{d(j)}\}\, e^{\lambda t}$, kde $\{v^0_{d(j)}\}$ je vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda$. Charakteristická rovnica má tvar:

$$\left(m_1\lambda^2 + b_1\lambda + k_1\right)\left(m_2\lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda + k_1 + k_2\right) - \left(b_1\lambda + k_1\right)^2 = 0\,, \tag{4}$$

ktorú úpravami prevedieme na rovnicu:

$$\lambda^4 + \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1}\right)\lambda^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2}\right)\lambda + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \tag{5}$$

Táto charakteristická bikvadratická rovnica má štyri komplexné korene a na ich určenie sme použili niekoľko substitúcií a rad úprav, pomocou ktorých sme mohli riešenia rovnice vyjadriť v tvare:

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4}\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1}\right)^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right) + y} \mp$$
$$\mp \frac{1}{8}\frac{\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1}\right)y - 2\left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1}\right)^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2}\right) + y}}\,, \tag{6}$$

kde $y$ je reálne riešenie kubickej rezolventy.

Vyjadrenie koreňov $\lambda$ charakteristickej rovnice (4) je už aj tak v tvare (6) značne objemné, preto pre zjednodušenie zápisu $y$ zjednodušene zapíšeme aj rovnicu (5) v tvare:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{7}$$

Potom rezolventa vystupujúca pri hľadaní riešenia (4) je v tvare

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_0)y + \left(4a_2 a_0 - a_1^2 - a_3^2 a_0\right) = 0 \tag{8}$$

Jej reálne riešenie má tvar (9):

$$y=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27}-\frac{a_2(a_1a_3-4a_0)}{3}+4a_2a_0-a_1^2-a_3^2a_0\right)+\sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27}-\frac{a_2(a_1a_3-4a_0)}{3}+4a_2a_0-a_1^2-a_3^2a_0\right)\right]^2+\left(\frac{a_1a_3-4a_0-\frac{1}{3}a_2^2}{3}\right)^3}}\;+$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27}-\frac{a_2(a_1a_3-4a_0)}{3}+4a_2a_0-a_1^2-a_3^2a_0\right)-\sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27}-\frac{a_2(a_1a_3-4a_0)}{3}+4a_2a_0-a_1^2-a_3^2a_0\right)\right]^2+\left(\frac{a_1a_3-4a_0-\frac{1}{3}a_2^2}{3}\right)^3}}$$

Metódami známymi z riešení systémov diferenciálnych rovníc následne určíme fundamentálny systém riešení a vytvoríme všeobecné riešenie systému (3). V modelovom príklade dosadíme do (4) resp. do (5) uvedené číselné charakteristiky $m_{1,2}, b_{1,2}$ a $k_{1,2}$.

Z uvedeného je zrejmé, že riešiteľ takejto úlohy nevystačí tak povediac s perom a papierom. Ďalej je možné pokračovať s použitím výpočtovej techniky. Program Maple síce problém vyrieši vo všeobecnom tvare, ale je pre bežné použitie nepraktický, pretože má dĺžku 579 strán po 26 riadkov.

Numerické riešenia charakteristickej rovnice je možné získať aj s použitím programu MATHEMATICA®:

$$\lambda_{1,2}=-1{,}70156\pm 8{,}1501i \text{ a } \lambda_{3,4}=-15{,}1124\pm 53{,}5682i \tag{10}$$

Ak výsledky (10) aplikujeme ďalej na systém (3), dospejeme ku konečným riešeniam, t. j. k vyjadreniu tlmených kmitov v tvare:

$$\{v\}=\begin{Bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{Bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

kde $v_i^0$ sú súradnice vlastného vektora prislúchajúceho ku koreňu $\lambda$ charakteristickej rovnice (4). Ku koreňu $\lambda_{1,2}=-1{,}70156\pm 8{,}1501i$ je priradený vlastný vektor

$$\begin{Bmatrix} v_{1(1)}^0 \\ v_{2(1)}^0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 178527{,}0592+93103{,}48236i \\ 18806{,}8361+23371{,}93607i \end{Bmatrix} \tag{12}$$

a ku koreňu $\lambda_{3,4}=-15{,}1124\pm 53{,}5682i$ patrí vlastný vektor

$$\begin{Bmatrix} v_{1(2)}^0 \\ v_{2(2)}^0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 25326{,}9874+61194{,}6895i \\ -661493{,}2116-345866{,}9145i \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Takže riešenie systému (3) má tvar:

$$\begin{aligned} v_1 = {} & e^{-16{,}8139t}c_3\big(0{,}991266e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t+0{,}008734e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t+ \\ & +0{,}284867e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t-0{,}009389e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+ \\ & +e^{-16{,}8139t}c_2\big(0{,}001302e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t-0{,}001302e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t+ \\ & +0{,}003016e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t-0{,}000785e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+ \\ & +e^{-16{,}8139t}c_1\big(-0{,}000624e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t+0{,}000624e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t+ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+0{,}125992e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t-0{,}000345e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+\\
&+e^{-16{,}8139t}c_4\big(0{,}06307e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t-0{,}06307e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t-\\
&-0{,}500496e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t+0{,}060357e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2={}&e^{-16{,}8139t}c_3\big(0{,}152319e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t-0{,}152319e^{1.70156t}\cos 53{,}5682t-\\
&-0{,}020327e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t-0{,}0350403e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+\\
&+e^{-16{,}8139t}c_1\big(0{,}0074406e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t-0{,}0074406e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t+\\
&+0{,}0172346e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t-0{,}0044849e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+\\
&+e^{-16{,}8139t}c_2\big(0{,}0003579e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t-0{,}0003579e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t+\\
&+0{,}0003339e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t+0{,}0185274e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big)+\\
&+e^{-16{,}8139t}c_4\big(-0{,}0212864e^{15{,}1124t}\cos 8{,}1501t+1{,}02129e^{1{,}70156t}\cos 53{,}5682t-\\
&-0{,}0720829e^{15{,}1124t}\sin 8{,}1501t+0{,}29841e^{1{,}70156t}\sin 53{,}5682t\big).
\end{aligned}
$$

## 4 Vlastné hodnoty tlmeného systému

Výpočet vlastných hodnôt netlmeného systému sa dá zapísať v maticovom tvare a transformovať na problém vlastných čísel matíc

$$[m]_D\cdot\{\ddot r(t)\}+[k]\cdot\{r(t)\}=\{0\}. \tag{14}$$

Frekvenčná rovnica v tvare (15) sa násobením zľava inverznou maticou $[m]_D^{-1}$ upraví na špeciálny problém vlastných čísel

$$\left([k]-\omega_{(j)}^2\cdot[m]_D\right)\cdot\left\{r_{(j)}^0\right\}=\{0\} \tag{15}$$

$$\left([m]_D^{-1}\cdot[k]-\omega_{(j)}^2\cdot[m]_D^{-1}\cdot[m]_D\right)\cdot\left\{r_{(j)}^0\right\}=\{0\}, \tag{16}$$

$$\left([D]^{-1}-\omega_{(j)}^2\cdot[E]_D\right)\cdot\left\{r_{(j)}^0\right\}=\{0\}. \tag{17}$$

Vlastné frekvencie sa vypočítajú ako vlastné čísla matice $[D]^{-1}$ a tvary vlastného kmitania sú vlastné vektory tejto matice. Pre analyzovaný dynamický systém sú číselné výsledky nasledovné:

$$\omega_{(1)}=8{,}20663\text{ rad/s}\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}r_{1(1)}\\ r_{2(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}9{,}89695878\\ 1{,}43185434\end{Bmatrix}$$

$$\omega_{(2)}=56{,}46755\text{ rad/s}\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}r_{1(2)}\\ r_{2(2)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}+0{,}25311709\\ -9{,}99679607\end{Bmatrix}.$$

## Záver

Vlastné hodnoty sú dôležité číselné charakteristiky definujúce dynamické vlastnosti každého dynamického systému. Z praktických dôvodov sa vyčísľujú pre netlmený dynamický systém. Výpočet vlastných hodnôt tlmeného systému je z matematického hľadiska náročný už aj pre systém s $2^0$ voľnosti, ako je možné vidieť z hore uvedeného textu. Problém je aj s grafickou interpretáciou výsledkov. Horeuvedené výsledky umožňujú pre konkrétny príklad urobiť vzájomné porovnanie vlastných frekvencií tlmeného a netlmeného systému. Netlmený systém má hodnoty vlastných frekvencií

$\omega_{(1)}$ = 8,20663 rad/s, $\omega_{(2)}$ = 56,46755 rad/s.

Pre tlmený systém dostávame výsledky v tvare

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{(1)} = -1{,}70156 \pm 8{,}1501 i \text{ a modul } \left|\lambda_{(1)}\right| = 8{,}3285$$

$$\lambda_{3,4} = \lambda_{(2)} = -15{,}1124 \pm 53{,}5682 i \text{ a modul } \left|\lambda_{(2)}\right| = 55{,}6591.$$

Tlmenie znižuje hodnoty vlastných frekvencií

$$\omega_{d(1)} = \lambda_{(1)} \cdot i = 8{,}1501 \text{ rad/s}, \qquad \omega_{d(2)} = \lambda_{(2)} \cdot i = 53{,}5682 \text{ rad/s}.$$

V prvom vlastnom tvare kmitajú hmoty netlmeného systému vo fáze, pričom výchylka hornej hmoty je väčšia ako výchylka dolnej hmoty. V druhom vlastnom tvare kmitajú hmoty v protifáze, pričom výchylka dolnej hmoty je väčšia ako výchylka hornej hmoty. Zobraziť tvary kmitania pre tlmený systém v komplexnom tvare sa javí ako problém.

## Literatúra


[1] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M. (1961). Matematika II. Bratislava, Alfa, 1961.SBN 63-001-70,

[2] Kuchárová, D., Melcer, J. (2000).: Dynamika stavebných konštrukcií, Skriptá, Žilina, EDIS, 2000, ISBN 80-71000-779-X,

[3] Melcer, J., Lajčáková, G. (2011). Aplikácie programového systému MATLAB pri riešení úloh dynamiky stavebných konštrukcií, Skriptá, Žilina, EDIS, 2011, ISBN 978-80-554-0308-3,

[4] Melcer, J., Kuchárová, D. (2004). Dynamika stavebných konštrukcií – príklady, Skriptá, Žilina, EDIS, 2004, ISBN 80-8070-326-4.


*Článok prijatý dňa 10. júna 2012*

## Adresa autorov


*RNDr. Darina Stachová, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta humanitných vied*
*Žilinská univerzita v Žiline*
*Univerzitná 1*
*SK – 010 26 Žilina*
e-mail: darina.stachova@fhv.uniza.sk


## Poďakovanie

Tento príspevok bol vypracovaný v rámci výskumnej činnosti podporovanej vedeckou grantovou agentúrou SR VEGA č. 1/0259/12.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# STRATÉGIE RIEŠENIA VYBRANÝCH SLOVNÝCH ÚLOH V PRÍPRAVE UČITEĽOV PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE

# STRATEGY OF SOLUTIONS SELECTED WORD PROBLEMS OF TEACHER TRAINING IN PRIMARY EDUCATION

VALÉRIA ŠVECOVÁ

**ABSTRAKT.** *V príspevku sa venujeme analýze študentských riešení vybraného typu slovných úloh. Zaoberali sme sa aj zvolenými stratégiami riešenia, vhodnými pre žiakov primárneho stupňa základnej školy.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *stratégie riešenia matematických úloh, úspešnosť riešenia*

**ABSTRACT.** *The article presents an analysis of student solutions to selected types of word tasks. We concerned ourselves with the chosen strategy of solutions, suitable for pupils of primary levels of elementary school.*

**KEY WORDS:** *strategy of solving mathematical problems, success of solution*

**CLASSIFICATION:** *B23*

## Úvod

Riešenie matematickej úlohy je odlišné na rôznych stupňoch škôl. Tú istú úlohu bude žiak riešiť inak na základnej škole, inak na strednej škole a taktiež na vysokej škole. Záleží na tom, aký matematický aparát je študentovi dostupný a aká je jeho úroveň vedomostí a schopností použiť určitú metódu riešenia úlohy. Neraz sme svedkami toho, ako zložito sú žiaci schopní riešiť jednoduchú matematickú úlohu. [1]

S riešením slovných úloh sa žiaci stretávajú postupne už na prvom stupni základnej školy. Žiaci sa učia samostatne zvládnuť každú fázu riešenia slovnej úlohy. Pojem slovnej úlohy pritom môžeme vymedziť nasledovne: „Termínom slovná úloha rozumieme matematickú úlohu, ktorá vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životnej skúsenosti.“ [2] Pre jazykové porozumenie je dôležité aby žiaci zvládli čítanie s porozumením. Následne po tejto fáze je nutné úlohu previesť na matematickú úlohu a teda danú situáciu zmatematizovať. Tento proces je možné previesť viacerými spôsobmi a vybrať si rôzne metódy riešenia slovných úloh. Fázy riešenia slovnej úlohy, ktoré sú nevyhnutné pre správne riešenie úlohy:

1. Čítanie s porozumením.
2. Matematizácia.
3. Stručný zápis slovnej úlohy (text, schéma, tabuľka, náčrt,...).
4. Vyriešenie slovnej úlohy (pomocou čísel, rovníc a nerovníc, náčrtov, grafov, tabuliek,...).
5. Overenie správnosti nájdeného riešenia (v matematizovanom i pôvodnom zadaní).
6. Diskusia, zisťovanie, či existujú aj ďalšie riešenia (návrat do pôvodného zadania úlohy).
7. Zápis riešenia úlohy (obor pravdivosti, množina koreňov, slovná odpoveď).

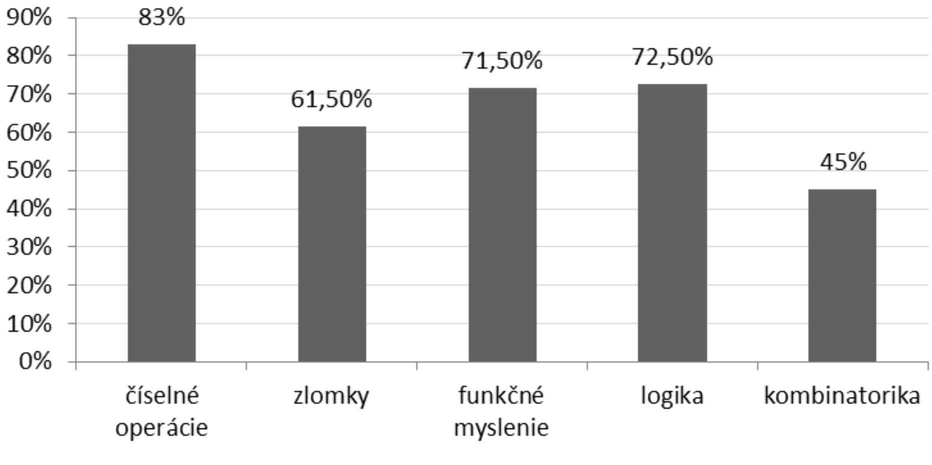
Slovnú úlohu môžeme riešiť pomocou kalkulu (t.j. súbor pravidiel pre zápisy výrazov pomocou jednoduchých symbolov a pre úpravy týchto výrazov na tvary výhodné pre získavanie výsledkov úloh), alebo bez kalkulu. Starší žiaci často siahajú po riešení pomocou rovnice s jednou neznámou, resp. využitím sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Na prvom stupni ZŠ. však ešte žiaci nemajú dostatočnú úroveň vedomostí aby využili tento matematický aparát. Mnoho úloh riešiteľných pomocou rovníc je možné riešiť aj inými metódami ako sú pokus- omyl, grafické znázorňovanie situácie a úsudok. Tieto metódy sú použiteľné aj u mladších žiakov. Pri grafickom znázorňovaní a riešení úsudkom môžu žiaci hlbšie preniknúť do podstaty problému ako pri použití naučeného algoritmu riešenia. [3]

**Stratégie riešenia slovných úloh**

Predmet Metódy riešenia matematických úloh je zaradený ako povinný predmet pre študentov odboru Učiteľstvo pre primárny stupeň. V rámci daného predmetu študenti riešia predovšetkým slovné úlohy zamerané na aritmetiku, funkcie, rovnice a ich sústavy, kombinatoriku, logiku, riešenia ktorých v prevažnej miere nepresahujú úroveň základnej školy. Úlohou študentov je nájsť riešenie vhodné pre žiakov primárneho stupňa. Sú vední k tomu, aby využívali grafické znázornenie, metódu úsudku, pokus- omyl, prípadne rozdelenie na dve časti. Zaradenie úloh do jednotlivých celkov samozrejme nie je vždy jednoznačné a uvedené metódy v riešeniach jednotlivých úloh sú zaraďované podľa ich vhodnosti postupne od prvého stupňa ZŠ. [4]

Hlavným zdrojom materiálu, ktorý príspevku spracovávame, sú výsledky študentov z písomiek povinného predmetu Metódy riešenia matematických úloh. Počas semestra študenti absolvujú dve čiastkové písomky, v ktorých riešili dve úlohy z každého celku.

Za úspešne vyriešenú úlohu sa považovala tá, ktorú študenti riešili metódou vhodnou na primárny stupeň základnej školy. Pre lepšiu prehľadnosť úspešnosti študentov pri riešení jednotlivých úloh uvádzame výsledky v grafe.

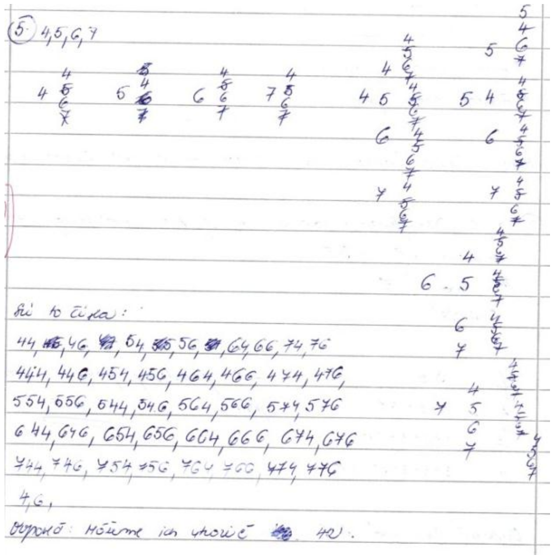



Graf 1 Úspešnosť riešenia jednotlivých úloh

Ako vidieť z grafu najúspešnejšie riešenou úlohou bola slovná úloha zameraná na číselné operácie, potom logická úloha, úloha na využitie funkčného myslenia, predposledná bola slovná úloha so zlomkami a najmenej úspešnou bola kombinatorická úloha. V príspevku priblížime študentské riešenia kombinatorickej úlohy a slovných úloh so zlomkami, ktoré študentom robili najväčšie problémy. Znenie kombinatorickej úlohy:

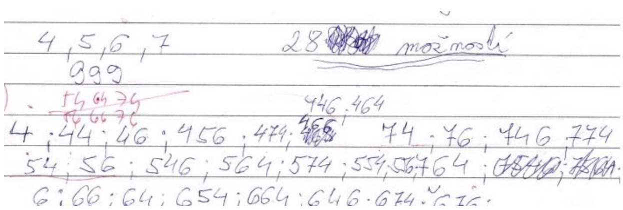
*Z číslic 4, 5, 6 a 7 tvoríme rôznociferné (ne)párne prirodzené čísla menšie ako 1 000. Koľko ich môžeme utvoriť? Čísla sa môžu opakovať.* [5]

Pri riešení kombinatorických úloh sa študenti na seminároch nestretávali so vzorcami. Boli vedení k tomu, aby podobné úlohy riešili systematickým vypisovaním všetkých možností a pomocou stromového grafu. Jedno zo správnych riešení uvádzame na obrázku 1.



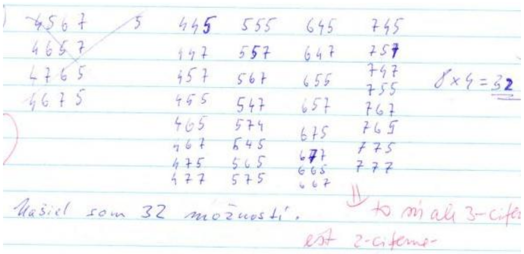
Obrázok 1

Nulovú úspešnosť pri riešení tejto úlohy malo 12 študentov, čo predstavuje 16 %. Teda to sú tí, ktorí sa danú úlohu ani nepokúšali riešiť. Väčšina študentov sa pokúsila vyriešiť úlohu vypisovaním možnosti, ale nakoľko hľadali riešenia nesystematicky, niektoré možnosti vynechali (Obrázok2).

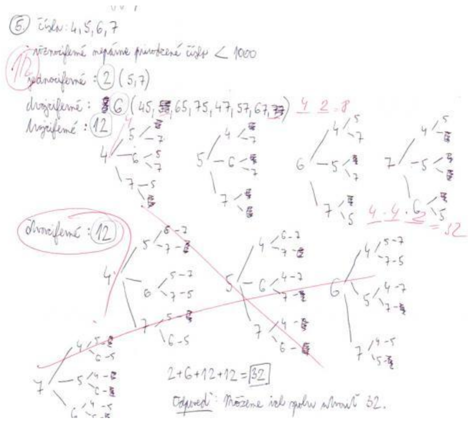


Obrázok2

Ďalšia skupina študentov nebrala do úvahy podmienku „rôznociferné“ a v riešení uvádzala iba trojciferné čísla (Obrázok3), prípadne uvádzali aj štvorciferné čísla (Obrázok4).



Obrázok 3

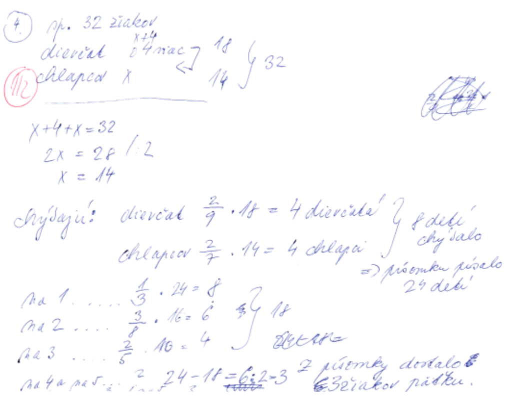


Obrázok 4

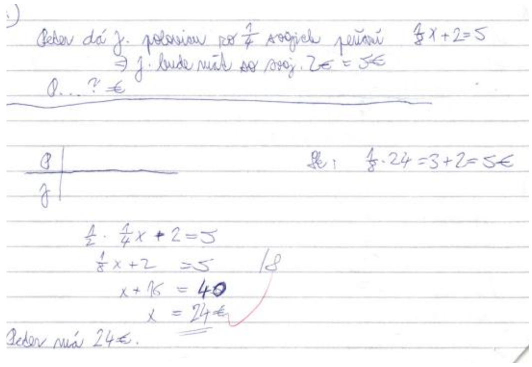
Znenie slovných úloh so zlomkami : *Ak dá Peter svojmu bratovi Jurajovi polovicu zo štvrtiny svojich peňazí, bude mať Juraj spolu so svojimi dvomi eurami 5 eur. Koľko eur má Peter?* [5]

*V triede je 32 žiakov, pričom dievčat je o 4 viac ako chlapcov. V deň písomky z matematiky chýbajú dve devätiny dievčat a dve sedminy chlapcov. Jedna tretina písomiek dopadla ne jednotku a tri osminy zvyšných písomiek bolo na dvojku. Z ostatných písomiek dve pätiny boli na trojku a štvoriek bolo toľko ako pätiek. Koľko žiakov z triedy dostalo z písomky päťku?* [5]

Pri úlohách takéhoto typu študenti väčšinou využívali algebraické riešenie prostredníctvom rovníc a úprav zlomkov(Obrázok 5, 6).

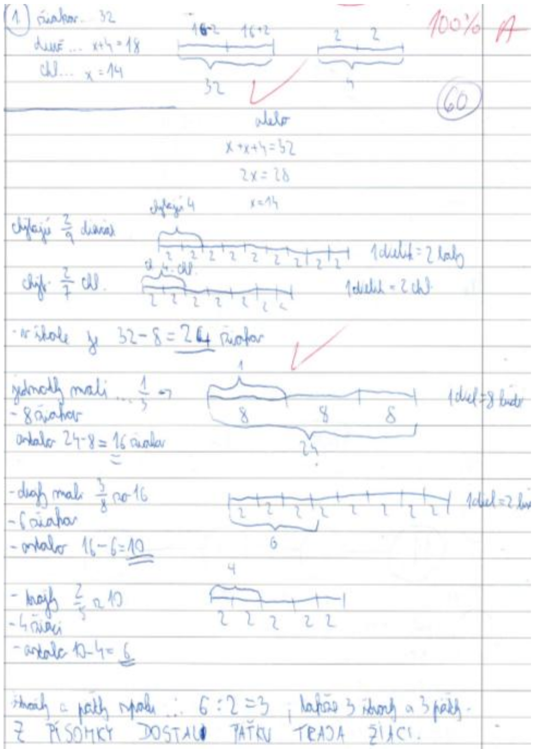


Obrázok 5



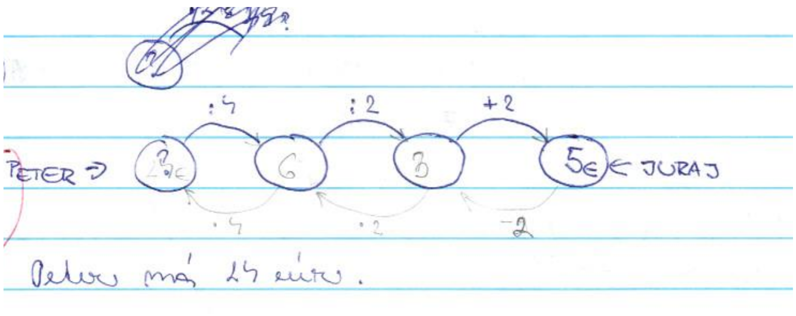
Obrázok 6

Nakoľko žiaci na primárnom stupni ešte tieto stratégie neovládajú, túto stratégiu sme nepovažovali za vhodnú a študenti boli hodnotení polovičným počtom bodov. V ďalšom uvádzame stratégie riešenia, ktoré by mali zvládnuť aj žiaci na primárnom stupni a ku ktorým boli študenti – budúci učitelia na primárnom stupni vzdelávania, vedení počas seminárov (Obrázok7)

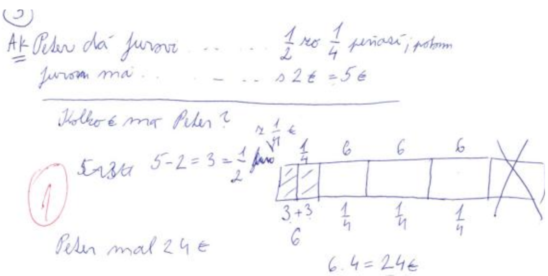


Obrázok7

Pri riešení druhej slovnej úlohy študenti využívali grafické riešenie, prípadne delenie celku na časti (Obrázok 8,9).




Obrázok 8




Obrázok 9:

## Záver

V článku sme priblížili náplň predmetu Metódy riešenia matematických úloh, ktorý je určený pre budúcich učiteľov – elementaristov. Zaoberali sme aj úspešnosťou riešenia jednotlivých úloh študentov ako aj výberu stratégii riešenia. Krátko sme sa venovali aj analýze najmenej zvládnutej úlohe. Študenti Učiteľstva pre primárne vzdelávanie pri riešení slovných úloh najlepšie zvládajú riešenie metódou rovníc s jednou neznámou. Túto metódu si volia v prípade, že dobre ovládajú potrebný matematický aparát. Hoci sú na seminároch vedení k používaniu stratégií vhodných pre žiakov primárneho stupňa základnej školy, majú pri ich použití menšiu úspešnosť.

## Literatúra

[1] Pavlovičová, G. – Rumanová, L. – Švecová, V.(2009) Stratégie riešenia rôznych matematických úloh. In: Nové trendy v univerzitnom matematickom vzdelávaní , Nitra, SPU, 2009. s. 102 – 108. ISBN 978-80-552-0197-9

[2] Hejný, M. (2003). Anatómia slovnej úlohy o veku. In: Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra (4. ročník). Ružomberok: 2003

[3] Barcíková,E. – Švecová, V. (2012) Vyhodnotenie jednej slovnej úlohy použitím implikačnej analýzy In: Forum statisticum slovacum. - Roč. 2012, č. 3, s. 7-12- ISSN 1336-7420,

[4] Švecová, V. (2012) Analýza metód riešenia matematických úloh v príprave učiteľov elementaristov. In: Matematika 5 : Elementary Mathematics Education 2012 - Olomouc : Univerzita Palackého, 2012. s. 280-284 - ISBN 978-80-244-3048-5

[5] Pavlovičová, G., Švecová, V., Záhorská, J. (2010). Metódy riešenia matematických úloh pre štúdium učiteľstva pre primárne vzdelávanie. Nitra : UKF, 2010. 100 s. ISBN 978-80-8094-776-7

*Článok prijatý dňa 10. júna 2012*

## Adresa autora

*PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Tr. A. Hlinku 1*
*949 74 Nitra*
e-mail: vsvecova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ZJEDNODUŠENÝ MATEMATICKÝ MODEL MULTI LEVEL MARKETINGU

# THE SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODEL OF MULTI LEVEL MARKETING

EDITA SZABOVÁ, PETER SZABO

**ABSTRAKT.** *Príspevok sa zaoberá zjednodušeným matematickým modelom multi level marketingu, jeho porovnaním s pyramídovými hrami, s následnou možnosťou použiť multi level marketing ako motiváciu zavedenia pojmov exponenciálna funkcia, exponenciálny rast.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *multi level marketing, pyramídová hra, exponenciálny rast*

**ABSTRACT.** *The paper deals with a simplified mathematical model of multi level marketing (also called network marketing), comparing it with a so-called pyramid schemes, with the possibility to use multi-level marketing as a motivation to the introduction of teaching exponential function, exponential growth.*

**KEY WORDS:** *multi level marketing, pyramid schemes, exponential growth*

**CLASSIFICATION:** *A40, M10*

## Multi-level marketing vs. pyramídová hra

Pod pojmom multi level marketing sa rozumie viacstupňový, viacúrovňový, štruktúrovaný alebo sieťový marketing (z angličtiny network marketing). Definuje sa ako systém predaja tovaru priamo zákazníkom (priamy predaj – direct marketing) prostredníctvom siete samostatných predajcov ([1]). Títo predajcovia sú nezávislí obchodníci, ktorí môžu nakupovať produkty spoločnosti za znížené ceny (pre ďalší predaj, pre vlastné alebo rodinné použitie a spotrebu); môžu tovar predávať ďalším spotrebiteľom, prípadne nezávislým obchodníkom; navyše získavajú ďalších nezávislých predajcov, ktorí zase môžu hľadať a prijímať ďalších nezávislých predajcov ([2]). Tým sa vytvára akási pyramída s rôznymi úrovňami v závislosti od toho, koľko nových predajcov je schopných získať si svojich ďalších potenciálnych predajcov, ktorí budú sieť ďalej rozvíjať. Takto vytvorená pyramídová schéma predaja je formou multi level marketingového plánu, so zameraním predovšetkým na vytváranie zisku formou získavania nielen zákazníkov, ale zároveň aj nových distribútorov ([3], [4]). Oproti priamemu marketingu je multi level marketing orientovaný teda na rozširovanie siete, pričom chce klásť dôraz na uspokojovanie potrieb známeho a stabilného okruhu zákazníkov z okolia distribútora ([5]).

Pojem multi level marketing sa zvykne niekedy mylne považovať za synonymum pyramídovej hry alebo tzv. lietadla. Hlavný rozdiel medzi multi level marketingom a pyramídovou hrou spočíva v tom, že pyramídové hry väčšinou neponúkajú konkrétny produkt, ide predovšetkým o hru s peniazmi. Ak sú ponúkané nejaké produkty, ide väčšinou len o získanie vstupných poplatkov ako investície do predraženého tovaru, ktorý sa často ani nakoniec nepredá. Poplatky sú tu v podstate jediným zdrojom peňazí v systéme – keď člen pyramídy privedie nového člena pyramídy, prijíma od neho vstupný poplatok, ktorého časť si ponecháva a časť posiela na prerozdelenie osobe, ktorá ho do pyramídového systému priviedla. Tá si opäť časť financií nechá a časť pošle o ďalšiu úroveň pyramídy vyššie. Takto by to malo pokračovať až na vrchol pyramídy k človeku, ktorý daný pyramídový systém založil. [6] Cieľom pyramídovej hry je získavať peniaze bez akéhokoľvek úsilia, pretože zisk bude zabezpečený vstupnými poplatkami nových členov, ktorých do pyramídy privedú členovia spodnej časti pyramídy.

Multi level marketing na rozdiel od pyramídovej hry operuje s výrobkami, ktoré distribuuje firma. Taktiež sú požadované vstupné investície, napríklad na vstupný balíček kozmetických produktov, ale vzhľadom na to, že ide o priamy predaj, investície sa s veľkou pravdepodobnosťou vrátia. Distribútor nakupuje od firmy výrobky za veľkoobchodné ceny a rozdiel v „katalógovej cene" ostáva jemu ako provízia. Pokiaľ získava nových členov (obvykle tým, že ich sám zaregistruje), získava ďalšiu províziu – určité percento aj z ich predajných aktivít.

Je tu ešte jeden podstatný rozdiel – pyramídové hry sú nelegálne, kým multi level marketing je legálnym spôsobom zisku.

## Príklad spôsobu odmeňovania v multi level marketingu / v pyramídovej hre

Slovenskí používatelia internetu sa mohli na webe stretnúť so stránkou http://www.supermilionar.okamzite.eu/ so sloganom „SUPERMILIONÁR - POMOC PRE KAŽDÉHO, KTO VIE OBDAROVAŤ INÉHO. NEDOTKNE SA VÁS SVETOVÁ KRÍZA! PRÍSPEVKY ZADARMO KAŽDÝ DEŇ NA VÁŠ ÚČET. OTVORTE SVOJE SRDCE, DARUJTE 10 EUR NIEKOMU A DOSTANETE OVEĽA VIAC OD NIEKOHO." V princípe funguje Supermilionár ako kedysi posielanie reťazových listov. V schránke sme si našli obálku od nášho priateľa/priateľky, v liste bol zoznam 5 mien s adresami. Našou úlohou bolo poslať list 10 ďalším ľuďom a navyše osobe, ktorá je v zozname listu na prvom mieste. List, ktorý sme mali odoslať, už nemal obsahovať meno a adresu prvej osoby z nám dodaného listu, ale zoznam sa mal posunúť o jedno meno smerom nahor a piata adresa bola tá naša.

Supermilionár požaduje zaplatenie 10 eur na účet prvého zo 6 účtov uvedených v zozname s tým, že platiť je potrebné bankovým prevodom, aby bolo možné identifikovať platiteľa. Po platbe „supermilionár" zašle platiteľovi list, na ktorom budú zoznamy čísel účtov, na dané čísla účtov budú platiť vstupné poplatky 10 eur ďalší ľudia, ktorých si nový platiteľ nájde. Supermilionár sľubuje v krátkej dobe príjem na účet vo výške $10.5^6$ =156 250 eur. Okrem neuveriteľného príjmu ponúka aj po zaplatení vstupných poplatkov zájazdy do Tatier, rôzne šperky a produkty dennej spotreby zadarmo.

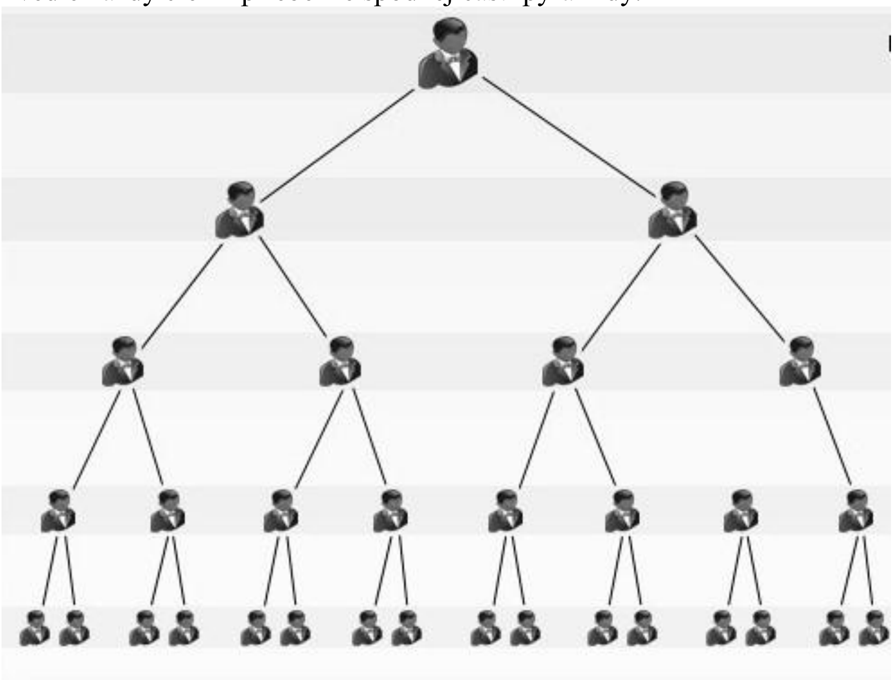
Na stránke sa opakovane píše, že nejde o pyramídovú hru, ale o legálny a fungujúci multi level marketing. Stránka je však nanajvýš podozrivá svojou formou (neštrukturovaná, je vytvorená na neregistrovanej doméne), ponúka veľké bohatstvo z prakticky ničoho, pôsobí prehnane na emócie chudobných, používa falošné argumenty a uvedený zakladateľ projektu je dlžníkom Sociálnej poisťovne, navyše jeho uvedená firma neexistuje. Či ide skutočne o podvod, alebo na danom systéme niekto zbohatol, ostáva nezistené.

**Motivácia zavedenia pojmu exponenciálna funkcia pomocou sieťového marketingu**

V tejto kapitole priblížime, ako doteraz uvedené súvislosti z oblasti multi level marketingu a pyramídových hier možno prepojiť s vyučovaním exponenciálnej funkcie, prípadne geometrickej postupnosti na stredných školách.

Multi level marketing, nazývaný aj sieťový marketing, funguje na systéme neustáleho získavania nových členov systému, ktorí privádzajú zase nových členov atď., čím sa vytvorí sieť tvaru pyramídy zložená z jednotlivých úrovní, pričom na vrchu je zakladateľ (director).

Nie je presne dané, koľko nových členov by mali získať členovia spodnej časti pyramídy, pre zjednodušenie modelu uvádzame schému pre počet nových členov $n=2$, ktorých privedie každý člen z priebežne spodnej časti pyramídy.



Obrázok 1: sieť členov multi level marketingu [Zdroj: http://excellent-internet-marketing.com/images/mlm.jpg]

Na prvej úrovni je iba 1 člen – zakladateľ. Ten si do systému privedie dvoch členov (na druhej úrovni sú 2 členovia), každý z nich si privedie ďalších dvoch (na tretej úrovni sú 4 členovia), na štvrtej úrovni máme 8 členov, na piatej 16 atď. Vo všeobecnosti môžeme vyjadriť počet členov systému na $n$-tej úrovni ako $2^{n-1}$, teda počet členov na $n$-tej úrovni exponenciálne rastie.

Koľko členov spolu má pyramída po jednotlivé úrovne? Počet členov na prvej úrovni je 1, počet členov po druhú úroveň je 3, po tretiu úroveň 7, po štvrtú úroveň 15, po piatu úroveň 31. Dokážeme teda vyjadriť aj celkový počet členov pyramídového systému na $n$ úrovniach – $2^n$-1.

V prípade, že by sme sieť skladali z troch, štyroch alebo piatich nových členov získaných každým členom pyramídy na poslednej úrovni, získali by sme počty členov pyramídy na $n$-tej úrovni a celkovo uvedené v tab. 1.

Ako sme si mohli všimnúť, aj odmena v Supermilionárovi vlastne narástla exponenciálne, podobne ako počet reťazových listov, ktoré sme mohli dostať. V prípade provízie v Supermilionárovi predpokladal zakladateľ získavanie vždy 5 členov až po 6 úrovní, teda zisk pre každého by mal byť $5^6.10$ eur (nepočítali s vrcholom pyramídy). Počet reťazových listov, ktoré sa nám za ideálnych okolností vrátia, ak posielame vždy 10 listov do piatej úrovne, bol až 10 000.

| Počet nových členov $a$ / Úroveň v pyramíde | 2 | 3 | 4 | 5 | … | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1 = 2^0$ | $1 = 3^0$ | $1 = 4^0$ | $1 = 5^0$ | … | $a^0$ |
| 2 | $2 = 2^1$ | $3 = 3^1$ | $4 = 4^1$ | $5 = 5^1$ | … | $a^1$ |
| 3 | $4 = 2^2$ | $9 = 3^2$ | $16 = 4^2$ | $25 = 5^2$ | … | $a^2$ |
| 4 | $8 = 2^3$ | $27 = 3^3$ | $64 = 4^3$ | $125 = 5^3$ | … | $a^3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $2^{n-1}$ | $3^{n-1}$ | $4^{n-1}$ | $5^{n-1}$ | … | $a^{n-1}$ |
| | | | | | | |
| Spolu členov po $n$-tú úroveň | $2^n$-1 | ½($3^n$-1) | ⅓($4^n$-1) | ¼($5^n$-1) | … | $\frac{1}{a-1}(a^n-1)$ |

Tabuľka 1: počty členov MLM pyramíd rôznych veľkostí

Pre firmy, ktoré podnikajú systémom multi level marketing, je vyhovujúce, keď počet ich členov exponenciálne rastie, pretože to znamená vyššie provízie smerom k zakladateľom. Exponenciálna funkcia prudko rastie do nekonečna. Aj preto systém MLM má nespočetne veľa kritikov, ktorí vedia, že MLM nedokáže donekonečna prijímať nových členov a neobmedzene vyplácať provízie. Taylor ([7]) tvrdí, že systémom MLM dokáže získať 1% členov firmy, ostatní budú stratoví.

## Iné možnosti zavedenia pojmu exponenciálna funkcia z oblasti marketingovej komunikácie

Žiaci strednej školy sa stretávajú s pojmom exponenciálny rast v médiách, kde sa používa na demonštrovanie prudkého, nekontrolovateľného zvyšovania miery určitého spoločenského javu, napr. „Internet rastie stále exponenciálne“, „Centrálne banky príliš zaháľajú, exponenciálne rastie dlh...“, „Česko a Slovensku sú korupciou presiaknuté a jej miera exponenciálne rastie“, „Exponenciálne rastie aj množstvo poznatkov, ktoré si majú študenti osvojiť počas štúdia medicíny“ atď.

O exponenciálnom raste či poklese hovorí aj marketingový odborník Philip Kotler v súvislosti so zlým výrobkom a prenosom informácie o ňom. Podľa jeho knihy *Marketing management*, ktorá je celosvetovou učebnicou marketingu, vznikla séria načítaných audioprednášok ([8]).

Tvrdí, že prvýkrát kupujúci zákazník má pred nákupom isté očakávania na základe toho, čo mu povedali známi, čo mu sľubuje predajca napríklad v reklame a z toho, čo predpokladá zo svojej skúsenosti. Po kúpe zaznamená jednu z piatich úrovní uspokojenia – veľmi spokojný, spokojný, neutrálny, nespokojný, veľmi nespokojný. Pravdepodobnosť jeho ďalšieho nákupu danej značky sa odvíja od jeho prvej skúsenosti s ňou. Škody značkám spôsobené nespokojnými zákazníkmi sa neodzrkadľujú len na strate príjmov od týchto zákazníkov. Silu jedného nespokojného zákazníka by podnik nemal v žiadnom prípade podceňovať. Štúdie zistili, že veľmi nespokojný zákazník sa môže podeliť so svojou zlou skúsenosťou so značkou až s 11 ďalšími ľuďmi a každý z nich zase s ďalšími, čo vedie k možnému exponenciálnemu rastu potenciálnych záujemcov, ktorí získajú o podniku negatívne referencie. Podnik preto stratí nielen doživotné príjmy od nespokojného zákazníka, ale tiež príde o ďalších potenciálnych zákazníkov, ktorí sa rozhodnú od podniku nič nekupovať.

Vo vyučovacom procese môžeme ilustrovať aj túto schému exponenciálneho rastu šírenia informácie, kde na $n$-tej úrovni sa negatívna referencia dostane k $11^{n-1}$ možným zákazníkom.

## Záver

Cieľom príspevku bolo stručne vysvetliť multi level marketing a pyramídové hry s možnosťou ich implementovania do vyučovania matematiky. Uviedli sme ich zjednodušený model, ktorý je vhodné použiť vo vyučovaní matematiky v 3. ročníku SŠ pri vyučovaní exponenciálnej funkcie alebo v 4. ročníku SŠ pri vyučovaní geometrickej postupnosti. Na tomto modeli môžeme žiakom demonštrovať prudký exponenciálny rast. Kontext marketingu má taktiež vysoký motivačný potenciál pre žiakov, keďže ide o oblasť každodenného života. Nemožno opomenúť ani výchovný aspekt zavedenia pojmu exponenciálna funkcia pomocou multi level marketingu či pyramídových hier. Myslíme si, že každý žiak či študent sa skôr či neskôr stretne pri hľadaní brigády alebo zamestnania s ponukou vstúpiť do multi level marketingovej firmy a možno dokonca aj do pyramídovej hry, preto je nutné, aby vedel, o čo presne ide. Nakupovanie drobného sortimentu ponúkaného priamym predajom nemôže viac či menej ohroziť budúcnosť žiaka/študenta. Horšie dôsledky môže mať uzatváranie rôznych zmlúv bez možnosti dôkladnejšieho premyslenia si ich náležitostí alebo pod nátlakom či na základe apelov na emócie, pretože, žiaľ, systémom multi level marketing fungujú aj tzv. finanční poradcovia, sprostredkovatelia poistenia či úverov.

## Literatúra


[1] Paul Smith. (2000). Moderní marketing. Praha : Computer Press, 2000. 518 s. ISBN 80-7226-252-1

[2] Hans Micklitz, Bettina Monazzahian, Christina Rößler. (1999). Door to door selling – Pyramid Selling – Multilevel Marketing. Online: http://ec.europa.eu/consumers/cons_int/safe_shop/door_sell/sur10_02.pdf

[3] Competetion Bureau Canada. (2009). Multi-level Marketing Plans and Schemes of Pyramid Selling. Online: http://www.competitionbureau.gc.ca/eic/site/cb-bc.nsf/vwapj/mlm-2009-04-29-e.pdf/. ISBN 978-1-100-12438-4

[4] Gini Grahamová Scottová. (1995). Úspech v multilevelovom marketingu. Bratislava : vydavateľstvo Igor Dráb, 1995. 335 s. ISBN 80-85441-06-3

[5] Jana Boučková a kol. (2003). Marketing. Praha : C. H. Beck, 2003. 439 s. ISBN 80-7179-577-1

[6] Jan Spilka. (2006). http://www.mesec.cz/clanky/multilevel-cesta-k-bohatstvi-ci-do-pekel/

[7] Jon M. Taylor. (2011). The case (for and) against multi-level marketing. Online: http://www.mlmwatch.org/01General/taylor.pdf

[8] Audiodigest. Prednášky Philipa Kotlera v českom jazyku. Online: http://rapidshare.com/files/102735069/Audiodigest.Marketing.podle.kotlera.rar

*Článok prijatý dňa 10. júla 2012*

**Adresa autorov**

*Mgr. Edita Szabová*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
*e-mail: edita.szabova@ukf.sk*

*Mgr. Peter Szabo, PhD.*
*Katedra masmediálnej komunikácie a reklamy*
*Filozofická fakulta*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Drážovská 4*
*SK – 949 74 Nitra*
*e-mail: pszabo@ukf.sk*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# MATEMATIKA V LETNOM TÁBORE

# MATHEMATICS IN THE SUMMER CAMP

EVA UHRINOVÁ

**ABSTRAKT.** *Nasledujúci príspevok je o súťaži obsahujúcej matematické úlohy z kombinatoriky, ktorá bola daná deťom vo veku 6-11 rokov v letnom tábore tematicky zameranom na rozprávky. Zmieňujeme sa o reakciách žiakov, ich schopnosti riešiť zadané úlohy a ochote žiakov riešiť matematické problémy (najmä z kombinatoriky) počas letných prázdnin.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *hra, súťaž, letný tábor*

**ABSTRACT.** *The following contribution is about the competition containing mathematical problems of combinatorics, which was given to children 6-11 years old in summer camp, which theme was aimed at fairy story. We concentrate at the reactions of students, their ability to solve the assigned tasks and willingness of students to solve mathematical problems (especially in combinatorics) during the summer holidays.*

**KEY WORDS:** *game, competition, summer camp*

**CLASSIFICATION:** *K20, D40*

## Úvod

Hravosť je prirodzeným prejavom detí. Vávrová a kol. [1] sa vyjadrujú, že hra je nevyhnutným sprievodcom detstva, **prejavuje sa pri nej aktivita, tvorivosť a vlastná iniciatíva**. Hra je vždy aktívny, dynamický proces, zamestnáva duševné i telesné schopnosti a tie prehlbuje a rozvíja. Potreba hry pretrváva v najrôznejších formách až do dospelosti.

Zaplnenie voľného času detí hrou a zábavou počas letných prázdnin poskytujú okrem iného aj letné tábory. V táboroch sú pre deti pripravené rôzne druhy hier a súťaží.

**Súťaživosť**, ako vo fyzickej obratnosti, tak i v intelektuálnych schopnostiach je charakteristickým rysom detí. Už samotný princíp súťaživosti často priťahuje účastníkov. Súťaž motivuje žiakov k vyšším výkonom, učí ich koncentrovať sa na zadané úlohy [2].

Práve pozitíva hry a súťaží nás motivovali k otázke, či bude deti v tábore, počas letných prázdnin, baviť aj matematická súťaž.

Nasledujúci príspevok podáva informácie o zapojení matematiky do súťaže v letnom tábore. Všímame si reakcie detí, schopnosť rozmýšľať a ochotu riešiť matematické problémy (najmä z kombinatoriky) počas letných prázdnin.

## Matematická súťaž v letnom tábore

Matematickú súťaž sme vyskúšali v detskom letnom tábore s názvom Pampulóni a Pampulónky v roku 2011. Odohrával sa v rekreačnom zariadení v Ľubietovej. Zúčastnilo sa ho 68 detí a 7 vedúcich. Jedná sa o rozprávkovo-fantastický tábor pre mladšie deti (6-11 rokov), kde sa deti každé ráno prebudia do inej rozprávky a pomáhajú jej hrdinom plniť zaujímavé úlohy [3].

V piaty deň sa členovia Pampulónie zobudili do rozprávky *Nevedkové dobrodružstvá*. Popoludní prebiehala aktivita s názvom *Páli vám to*, v ktorej deti pomáhali Nevedkovi vyriešiť rôzne matematicky zadané úlohy. Každé dieťa dostalo kartičku s názvami siedmich stanovíšť (obrázok 1). Úlohou detí bolo ísť na každé stanovište v ľubovoľnom poradí a vyriešiť úlohu, ktorú im zadá vedúci.

Úlohy boli zamerané na kombinatoriku. Po vyriešení úlohy získali deti *body* a podpis vedúceho do svojej kartičky. Počet správne vytvorených možností predstavoval počet získaných bodov. Za nesprávne vytvorenú možnosť sa odpočítal jeden bod. Na stanovišti Kronikár sa do kolónky body zapísal čas, za ktorý splnil súťažiaci zadanú úlohu.

Po skončení súťaže sa kartičky pozbierali a vyhodnotili sa najúspešnejší jednotlivci za každé stanovište. Keďže bol tábor tematikou rozprávkový, tak aj zadanie úloh bolo ladené takýmto spôsobom.

| Meno: | | |
|---|---|---|
| Oddiel: | | |
| p. č. | STANOVIŠTE | Body / podpis |
| 1. | Dvorná dáma | |
| 2. | Veža | |
| 3. | Zmrzlinový koktail | |
| 4. | Hod kockami | |
| 5. | Šašo | |
| 6. | Kronikár | |
| 7. | Zámocký bál | |
| | | |

Obrázok 1: Kartička na súťaž Páli vám to

**Dvorná dáma**

Koľkými spôsobmi sa môže obliecť dvorná dáma, ak má k dispozícii tri rôzne sukne a dve rôzne blúzky (každá blúzka sa hodí ku každej sukni)?

<u>Pomôcky</u>: z farebného papiera vystrihnuté farebné blúzky (štyri kusy z dvoch rôznych farieb) a farebné sukne (po štyri kusy z troch rôznych farieb) (obrázok2)

<u>Riešenie</u>: K dvom rôznym blúzkam môžeme priradiť tri rôzne sukne, teda spolu 2.3 = 6 možností. B1 - S1, S2, S3; B2 – S1, S2, S3

Obrázok 2: Súťažiaci pri stanovišti Dvorná dáma

**Veža**

Koľko farebných veží skladajúcich sa z troch druhov farebne odlíšených tehál môžu postaviť murári pre princeznú?

Pomôcky: farebné drevené kocky (10 kusov z 3 rôznych farieb)

Riešenie: BMČ, BČM, MBČ, MČB, ČBM, ČMB. Počet permutácií z troch prvkov, teda 3! = 3.2.1 = 6.

**Zmrzlinový koktail**

Zámocký kuchár vie pripraviť chutné zmrzlinové koktaily, ktoré vždy pripravuje z troch rôznych druhov zmrzlín. Koľko rôznych koktailov nám môže kuchár pripraviť, ak ráno pripravil štyri druhy zmrzlín?

Pomôcky: farebné kruhy z papiera (po 10 kusov zo 4 rôznych farieb)

Riešenie: 123, 124, 234, 341, čo sú 4 možnosti. Vytvárame trojice zo štyroch prvkov, pričom nezáleží na poradí prvkov, teda C(3,4) = 4.

**Hod kockami**

Princezná Evelin má veľmi rada spoločenskú hru s názvom Osadníci, pri ktorej je rozhodujúci súčet hodu dvoch kociek. Aké súčty bodiek padajú princeznej pri tejto hre najčastejšie?

Pomôcky: dve hracie kocky, pero, papier

Riešenie: 2 = 1+1; 3 = 1+2, 2+1; 4 = 1+3, 3+1, 2+2; 5 = 1+4, 4+1, 2+3, 3+2; 6 = 1+5, 5+1, 2+4, 4+2, 3+3; 7 = 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3; 8 = 2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4; 9 = 3+6, 6+3, 5+4, 4+5; 10 = 4+6, 6+4, 5+5; 11 = 5+6, 6+5; 12 = 6+6. Najčastejšie padá súčet 7.

**Šašo**

Pampulónsky šašo Jašo rád žongluje s farebnými kockami. Dnes si vybral modrú, žltú, bielu a červenú kocku. Uhádni, v akom poradí si z nich chce šašo postupne pridávať do žonglovania (Obrázok 3).

Pomôcky: 8 farebných kociek (po dve farby zo štyroch druhov farieb), tvrdý papier na zakrytie šašového poradia kociek

Obrázok 3: Súťažiaca pri stanovišti Šašo

**Kronikár**

Aj Pampulónia má svoju kroniku. Na starosti ju má kráľovský kronikár Hugo. Veľmi rád do nej vlepuje tabuľky a grafy, ktoré buď sám vytvára, alebo vystrihuje z miestnych novín. Dnes má kronikár veľa práce, a tak nás poprosil o pomoc. Tabuľky a grafy, ktoré znázorňujú tie isté údaje, sa mu pomiešali. Pomôž Hugovi vytvoriť správne dvojice.

Pomôcky: kartičky, na ktorých sú tabuľky a grafy týkajúce sa kráľovstva Pampulónie, niektoré tabuľky, alebo grafy nemajú k sebe dvojicu

**Zámocký bál**

Vytvor všetky možné dvojice z dvorných dám a pánov, ktorých by sme mohli vidieť na bále zatancovať úvodný valčík, ak máme k dispozícii tri dvorné dámy a štyroch pánov.

Pomôcky: 7 kartičiek s menami vedúcich, pero, papier

Riešenie: Ku každej dvornej dáme z troch môžeme priradiť jedného pána zo štyroch, teda 3.4 = 12 možností. D1P1, D1P2, D1P3, D1P4, D2P1, D2P2, D2P3, D2P4, D3P1, D3P2, D3P3, D3P4.

## Priebeh súťaže

Súťaž bola povinná pre všetky deti. V úvode dostali deti kartičky (Obrázok 1) a boli oboznámené s pravidlami súťaže.

Každé stanovište malo aj pomôcky na rýchlejšie odhalenie, respektíve predstavenie si riešenia úlohy. Pri jednom stanovišti sa deti zdržali priemerne 5 minút.

Najviac detí riešilo úlohy manipulovaním s pomôckami a po vyzvaní vedúceho stanovišťa aj vypisovaním možností. Stromový diagram si pri riešení úloh nenakreslil nikto. U mladších detí (6-8 rokov) bolo vidieť, že neuvažovali nad správnosťou svojho riešenia. Napríklad, na obrázku 2 môžeme vidieť ako dievča vľavo (6 rokov) vytvorilo dve rovnaké možnosti (oranžová sukňa a oranžová blúzka). K dvom žltým blúzkam neskôr pridala zelenú a oranžovú sukňu. Naopak, dievča vpravo (10 rokov) si zvolilo pri zoraďovaní systém – k blúzke jednej farby postupne priradila všetky možné sukne.

V úlohe *Zmrzlinový koktail* si len šiesti uvedomili, že pri utváraní trojíc nezáleží na poradí prvkov, keďže sa zmrzliny v koktaile aj tak zmiešajú.

Pri stanovišti *Hod kockami* väčšina detí hodila kockami niekoľkokrát. Urobili si súčet bodiek pri hodoch, a keď sa im niektorý súčet zopakoval, povedali ten súčet ako odpoveď. Niektorí hodili párkrát kockami a výsledok si typli. Jeden chlapec (10 rokov) začal uvažovať o jednotlivých súčtoch, ktoré môžu padnúť pri hode dvomi kockami, nevypisoval si ich na papier, ale hovoril ich nahlas. Výsledok však nepovedal správny.

Pri úlohe *Kronikár* sa opäť preukázal vekový rozdiel detí. Mladšie deti (6-8 rokov) mali problém pospájať kartičky. Pre starších (9-11 rokov) bolo toto stanovište najľahšie.

Na stanovišti *Zámocký bál* jedno dievča (7 rokov) vyradilo možnosť jedného páru vedúcich s odôvodnením, že oni nebudú spolu tancovať, pretože sa nemajú radi. Tu sme si uvedomili na jednej strane, že deti vnímajú vzťahy medzi vedúcimi a na strane druhej, že deti do úloh vkladajú reálnosť.

Na stanovišti *Šašo* nezohrával vek žiadnu rolu, keďže táto úloha závisela významnou mierou na náhode.

Našim cieľom bolo všímať si okrem správnosti riešenia úloh aj zapojenie detí do súťaže. Keďže išlo o zapojenie matematiky do klasického (nie matematického) tábora, očakávali sme pasivitu a neochotu detí riešiť matematické úlohy. Stretli sme sa však s ochotou detí riešiť stanovené úlohy. Pripisujeme to súťaživosti detí, správnej motivácii a prostrediu (uvoľnené – nešlo tu o známky v škole, nikto nekontroloval, v čom máte nedostatky a nevyvodil negatívne závery).

Len dve deti zareagovali hneď po druhom stanovišti negatívne: „To všetky úlohy sú na matiku? Ja neznášam matiku.“ A druhý komentár: „Mne sa to nechce.“ Obaja však mali negatívny prístup aj pri iných súťažiach. Pri ich poznámke sme si uvedomili, že vhodnejšie by bolo, dať menej úloh zameraných na matematiku, respektíve, nedávať len matematické úlohy, ale pomiešať ich aj s inými úlohami – hádanky, praktické úlohy (napíš, čo najviac slov začínajúcich na dané písmeno za 1 minútu, a podobne).

## Záver

V príspevku opisujeme priebeh súťaže v detskom letnom tábore, ktorá obsahovala úlohy z kombinatoriky. Pri rozbore priebehu súťaže sme prišli na to, že deti nemajú problém riešiť úlohy z matematiky aj cez letné prázdniny. Vhodnejšie by však bolo, pomiešať do súťaže úlohy z viacerých oborov, nielen z matematiky.

Takisto sme zistili, že pre mladšie deti (6-8 rokov) boli úlohy náročné. Žiadne dieťa v tomto veku nevyriešilo správne viac ako tri úlohy. Najťažšie boli pre nich úlohy *Hod kockami* a *Kronikár*. Náročnosť ostatných úloh zjednodušovali pomôcky. Deti sa pri úlohách viac-menej hrali s pomôckami a zoraďovaním vytvárali rôzne možnosti. Aj napriek náročnosti úloh pre túto vekovú kategóriu, vidíme zmysel týchto úloh najmä v tom, že sa deti môžu naučiť samostatne zoraďovať prvky, rozmýšľať nad rôznymi možnosťami zoradenia prvkov. Vhodnejšie by však bolo, pomôcky poskytnúť len mladším deťom, starším dať len pero a papier. Staršie deti (9-11 rokov) až na úlohy *Hod kockami* a *Šašo*, získali pri každom stanovišti plný počet bodov.

## Literatúra

[1] Vávrová, A. a kol. (2006). Hry ve vyučovaní matematice jako významná strategie edoucí k rozvoji klíčových kompetencí žáků. Praha: JČMF, 2006. 44 s., *[2011-30-05]. Dostupné na internete: <class. pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=102>*

[2] Foltinová, K. – Novotná, J. (1997). Matematické hry a soutěže na druhém stupni základní školy. Praha: Pedagogické centrum, 1997. 45 s. ISBN 2592073352

[3] Letné tábory Tik-Tak, 2012, *[2012-06-20]. Dostupné na internete: < http://www.tiktak.sk/index.php?RtDif=tiktak&Params[Cmd]=tabory_detail&Params[tabor]=7>*

*Článok prijatý dňa 3. júla 2012*

## Adresa autorov

*Paeddr.. Eva Uhrinová*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Trieda A. Hlinku 1*
*SK – 94974 Nitra*
e-mail: eva.uhrinova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# VIZUALIZÁCIA VO VÝUČBE MATEMATIKY – KONCEPT PERCENTUÁLNEHO POČTU

# VISUALIZATION IN MATH TEACHING – CONCEPT OF PERCENT

DUŠAN VALLO, VILIAM ĎURIŠ

**ABSTRAKT.** *V článku prezentujeme geometrický prístup k výpočtu percent. Na základe geometrickej úmery riešime vybrané úlohy percentuálneho počtu pomocou geometrického softvéru. Príspevok je koncipovaný s dôrazom na vizualizáciu tohto štandardne vyučovaného počtu.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *percento, graficky, aplet, Geogebra, vizualizácia, predstavivosť, názornosť*

**ABSTRACT**. *We present a geometric approach to calculation of percent. Based on the geometric theory of portion selected tasks are solved by using of special diagrams sketched in geometric software. The contribution is concerned with aim to emphasize the visualization in standards of percent teaching.*

**KEY WORDS:** *percent, graphics, aplet, GeoGebra, visualisation, imagination, spartial imagination, ICT, math education*

**CLASSIFICATION:** *D44*

## Introduction

In the preface of [1] the author states that "*students of elementary and secondary schools, so students and teachers of mathematics have a relatively underdeveloped geometric imagination …*".

Of course, this statement belongs to a resource that is already more than 20 years old, but the problem is still current.

In the last period one can observe that goals of researches are questions related to a geometric and spatial imagination [3], [4], [5], [8], [9]. A domain of visualization exploiting ICT plays also important role is math education [6], [7].

Implementation of ICT in math education significantly promotes the development of those phenomena [12], considering with didactic problems [14]. Linking ICT with a pragmatic approach to math education through real-world problems [2], [10], [11], suitably supplemented with discovery methods and problem-solving [13] gives a teacher many features to enhance an effectiveness of teaching.

### Visualization in teaching - the concept of percent

It is not the aim of this article to analyze in detail results of several studies in area of the illustration and visualization in math education. Based on the idea that "*a graphical representation of arithmetic relations historically preceded the algebraic expression*" [1], we present a graphical method for calculating of the percentage. This graphical solution can be accepted as possible alternative to the current situation where method of teaching in primary school is based on numerical calculations.

It is trivial knowledge that percent means *per hundred* and the formula for percentage is the following

$$\frac{part}{base} = \frac{\%}{100}. \qquad (1)$$

On the other side is non- trivial fact that this formula can be represented geometrically by diagram

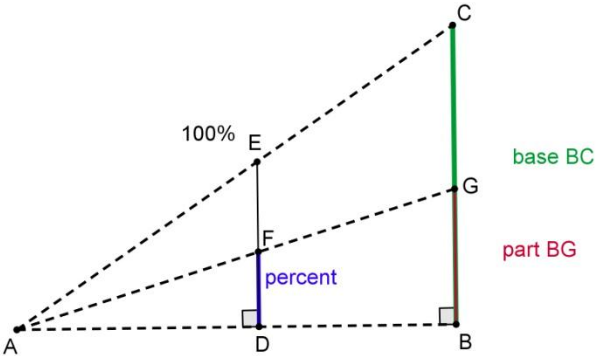



Figure 1: Diagram – percent in graphic

The proof is simple.

We apply the trigonometric function *tan* to triangles *ADF*, *ABG* and we obtain

$$\tan(\angle FAD) = \frac{|DF|}{|AD|} = \frac{|BG|}{|AB|}.$$

Similarly we derive that $$\tan(\angle EAD) = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

It is easy to obtain the equality $$\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|BG|}{|BC|}. \qquad (2)$$

In a notation described in formula $(1)$ we derive $$\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{percent}{100\%} = \frac{part}{base} = \frac{|BG|}{|BC|}. \ \square$$

Remark. The denominators $|AD|, |AB|$ in diagram don't play any role in $(2)$. This fact allows us to put the lengths of these segments arbitrary.

How to calculate the percent with the diagram on Fig. 1 we present in examples by using Geogebra aplets.

**Example 1**

*There are 300 cats in the village and 75 of them is black. What is the percentage of black cats in that village?*

Comment. We put the diagram in Cartesian coordinate system. If the length of the segment $AB$ is *300*, the length of *BG* is *75*, the segment *AG* intersect the "scale" segment *DE* in a point *F*. The length of segment *DF* represents the percent.

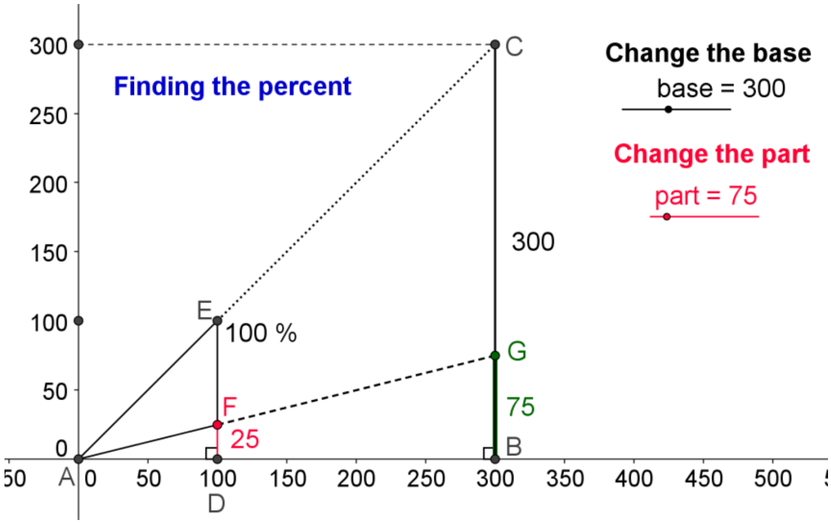



Figure 2: Graphic solution of the Example 1 by using GeoGebra aplet

**Example 2**

*A golf shop pays its wholesaler $40 for a certain club, and then sells it to golfer for $75. What is the markup rate?*

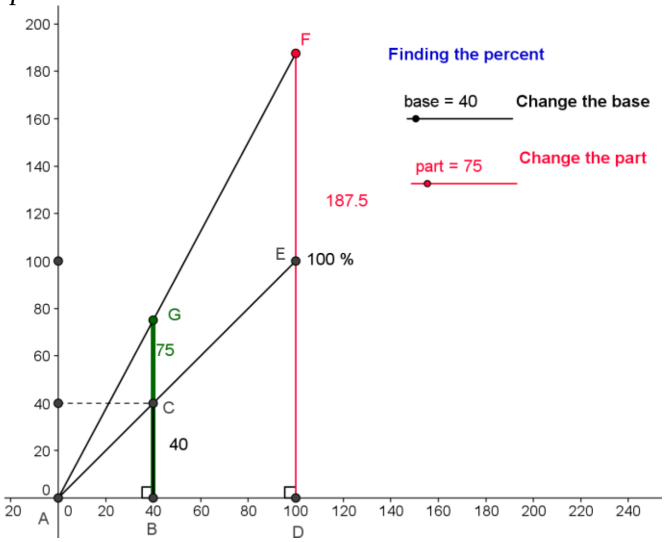



Figure 3: Graphic solution of the Example 2 by using GeoGebra applet

Comment. We again put the diagram in Cartesian coordinate system. If the length of the segments $AB$, $BC$ is *40*. On the halfline $BC$ lays the point $G$ and holds $|BG| = 75$. The scale we localize on the halfline $DE$ with the length *100* which is equal to the length of segment $AD$. The line $AG$ intersects the halfline $DE$ in the point $F$ and holds $|BF| = 187.5$ The markup rate is $187.5 - 100 = 87.5\%$.

**Example 3**

*The snowboard is on sale for 20% off the regular price of $250. Find the sale price of the snowboard.*

Comment. We put the diagram in Cartesian coordinate system by analogy. If the segment $DF$ represents the percentage than holds $|DF| = 80$. The lengths of the segments $AB, BC$ we put equal to 250. A halfline $AF$ intersects the segment $BC$ in a point $G$. Holds that the length $|BG| = 200$ represent the part and the sale price of the snowboard, too.

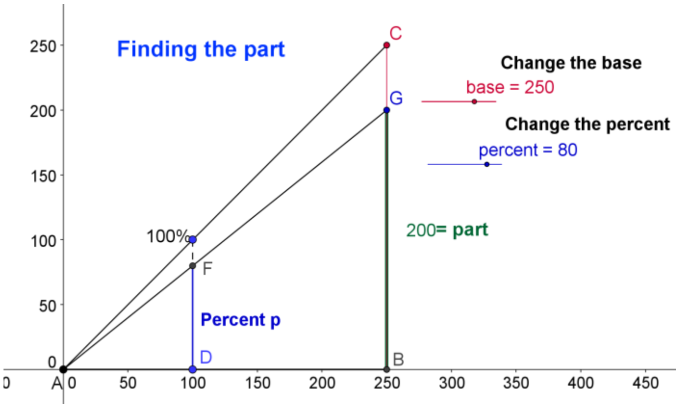



Figure 4: Graphic solution of the Example 3 by using GeoGebra aplet

The more complicated examples can be also solved geometrically. In one diagram we input all numerical values.

**Example 4**

*The price of an item changed from $150 to $120. Then later the price decreased again from $120 to $90. Which of the two decreases was larger in percentage term?*

Comment. We put two diagrams in Cartesian coordinate system by analogy to Example 1.

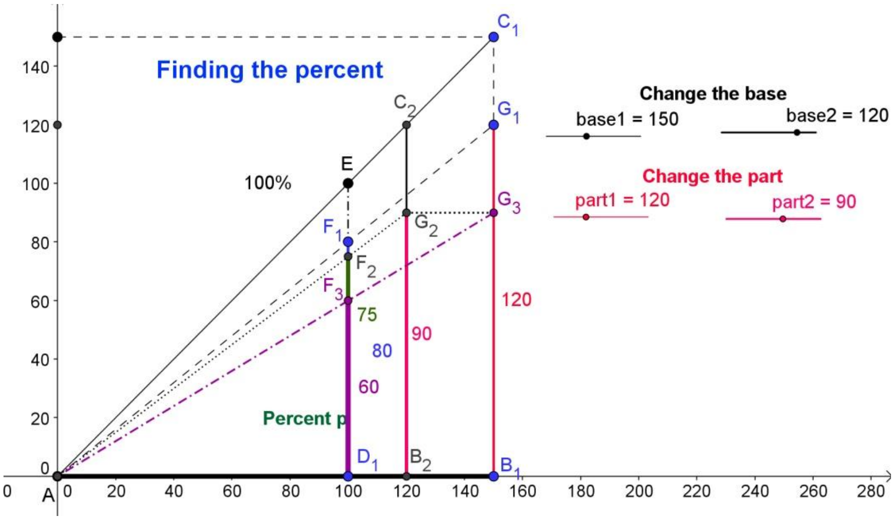



Figure 5: Graphic solution of the Example 4 by using GeoGebra aplet

Both decreases are represented by the lengths of the segments $D_1F_1, D_1F_2$. In the first case is the decrease in percent 20% and in the second decrease it is 25%. In common the decrease form \$150 to \$90 is in percent 40%. Inserting data in one diagram gives to a student unique possibility to compare the values and their significance.

**Discussion**

In this paper we have introduced some graphic method in percent calculation. We have demonstrated the solutions of the concrete examples by use interactive applets, programs created in software GeoGebra. We hope this contribution will be an inspiring incentive for math teachers.

**References**


[1] Kuřina, F. (1989). Umění vidět v matematice. Praha:, SPN Praha, 1989. 249. ISBN 80-04-23753-3

[2] Švecová, V. – Pavlovičová, G. – Rumanová, L. (2011) The Usage of GPS in Math Education. In. Procedia Computer Science. Available: www.elsevier.com/locate/procedia. 5 p. ISSN 1877-0509

[3] Šedivý, O. (2006) Názornosť vo vyučovaní geometrie priestoru. Nitra. In. Názornosť vo vyučovaní matematiky- zborník príspevkov z vedeckého seminára. Nitra, FPV UKF v Nitra, Ed. Prírodovedec č. 214, 3-14, ISBN: 80-8094-024-X

[4] Casselman, B. (2000). Pictures and Proofs. In. Notices of AMS, November 2000, Volume 47, No. 10, p. 1257-1266

[5] Vasková, V. (2006) Názornosť pri zadávaní úlohy. Nitra. In. Názornosť vo vyučovaní matematiky- zborník príspevkov z vedeckého seminára. Nitra, FPV UKF v Nitra, Ed. Prírodovedec č. 214, 147-150, ISBN: 80-8094-024-X

[6] Mesároš, M. (2012). Vizualizácia vo vyučovaní matematiky. Olomouc.: In: Matematika 5: Elementary Mathematics Education 2012, sborník příspěvků z konference konané v Olomouci 25. - 27. 4. 2012, 2012. 152-156. ISBN 978-80-244-3048-5

[7] Fulier, J. (2006). Informačné technológie a aspekt vizualizácie vo vzdelávaní v matematike. Nitra. In. Acta Mathematica 9, FPV UKF v Nitre, Ed. Prírodovedec N. 220, p. 51-66, ISBN: 80-8094-036-3

[8] Pavlovičová, G. (2012). Obrázok ako prostriedok k tvorbe matematických úloh. Olomouc.: In: Matematika 5: Elementary Mathematics Education 2012, sborník příspěvků z konference konané v Olomouci 25. - 27. 4. 2012, 2012. 197-201. ISBN 978-80-244-3048-5

[9] Kmeťová, M. (2006) Názornosť alebo zviditeľňovanie súvislostí. Nitra. In. Názornosť vo vyučovaní matematiky- zborník príspevkov z vedeckého seminára. Nitra, FPV UKF v Nitra, Ed. Prírodovedec č. 214, 41-46, ISBN: 80-8094-024-X

[10] Vidermanová, K. (2006) Geometria v našom meste. Nitra. In. Názornosť vo vyučovaní matematiky- zborník príspevkov z vedeckého seminára. Nitra, FPV UKF v Nitra, Ed. Prírodovedec č. 214, 151-154, ISBN: 80-8094-024-X

[11] Koreňová, L. – Dillingerová, M. –Vankúš, P. – Židová, D. (2009): Experience with solving real-life math problems in DQME II project, In: Models in Developing Mathematics Education, Dresden University of Applied Sciences, Dresden, ISBN 83-919465-8-4, s. 333-335

[12] Kohanová I. – Regecová M. (2010) Softvér GeoGebra ako nástroj dynamickej matematiky pre sekundárne vzdelávanie, Symposium on Computer Geometry SCG '2010: Proceedings, Vol. 19, Bratislava: Slovenská technická univerzita, 2010, p. 66-78

[13] Kohanová I. (2010) Metóda problem-solving v príprave budúcich učiteľov matematiky, Acta Mathematica, Vol. 13, Nitra: FPV UKF v Nitre, 2010, p. 127-132. ISBN: 978-80-8094-781-1

[14] Žilková, K. (2010). Problémy tvorby didaktických materiálov na vyučovanie matematiky v IKT prostredí. Bratislava. In. II. potenciál prostredia IKT v školskej matematike. UK v Bratislave, 2010. 111 – 127. ISBN: 978-80-223-2911-8

[15] http://www.amathsdictionaryforkids.com/dictionary.html (June 8, 2012)

[16] http://www.purplemath.com/modules/percntof2.htm (June 8, 2012)

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Percentage (June 8, 2012)

[18] http://www.analyzemath.com/percent/percent_math_problems.html (June 8, 2012)

[19] http://www.basic-mathematics.com/formula-for-percentage.html (June 8, 2012)

*Received July 5, 2012*

## Address

*RNDr. Dušan Vallo, PhD. , RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 01 Nitra*
e-mail: dvallo@ukf.sk, vduris@ukf.sk

## Acknowledgement

This paper was supported by KEGA titled *Solid Geometry in Arrangement of Math Teachers with Accent of Factor Handling Activity and Application Tasks*.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# ANALÝZA ŽIACKYCH CHÝB PRI KONŠTRUKCII REZOV TELIES A MOŽNOSTI ICH ODSTRÁNENIA VYUŽITÍM PROGRAMU CABRI 3D

# ANALYSIS OF STUDENTS´ MISTAKES IN SOLUTION OF THE SECTIONS OF SOLIDS AND USING OF CABRI 3D FOR THEIR REMOVING

KITTI VIDERMANOVÁ, ALENA VIZIOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ

**ABSTRAKT.** *V našom príspevku popisujeme výskyt učiva stereometrie v štátnom vzdelávacom programe pre druhý stupeň základných škôl – ISCED 2 a pre gymnáziá – ISCED 3A. Analyzujeme chyby, ktorých sa dopúšťajú žiaci gymnázia pri konštrukcii rezov telies. Skúmame a zároveň navrhujeme, ako sa tieto chyby dajú odstrániť použitím programu Cabri 3D.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ***: stereometria, rezy telies, Cabri 3D.*

**ABSTRACT.** *In this paper we describe the occurrence of the content of solid geometry in the State education program for the lower secondary education – ISCED 2 and for the higher secondary education – ISCED 3A. We analyse the students´ mistakes whose were done in the solution of the sections of solids at higher secondary schools. We examine and suggest how we can remove these mistakes using Cabri 3D.*

**KEY WORDS:** *solid geometry, sections of solids, Cabri 3D.*

**CLASSIFICATION:** *D74, G44.*

## Úvod

Na úspešné riešenie stereometrických úloh potrebuje študent:

- vedomosti o telesách,
- vedomosti o vzájomných polohových vlastnostiach priamok a rovín,
- poznatky o princípoch premietania,
- priestorovú predstavivosť na dostatočnej úrovni.

Vedomosti a poznatky získavajú žiaci počas vyučovacieho procesu, avšak priestorová predstavivosť sa naučiť nedá. Buď má žiak danosť vidieť „to“ alebo nemá. Ak žiak nemá dostatočne rozvinutú priestorovú predstavivosť, v prípade riešenia polohových konštrukčných úloh nevie uplatniť ani naučené vedomosti a poznatky. Je preto potrebné hľadať rôzne možnosti, ako napomáhať žiakom a študentom pri riešení týchto náročných úloh. Jednou z možností je použiť program Cabri 3D.

Tento program umožňuje vytvárať geometrické konštrukcie jednoducho a prehľadne. Umožňuje otáčať zobrazené telesá a teda vidieť teleso z rôznych pohľadov, čo je pri klasickom rysovaní na papier a tabuľu nemožné. Ako uvádza aj Vallo (2006): „Domnievame sa, že ide o veľmi efektívny nástroj, ktorého zaradenie do výučby matematiky, nielen na stredných školách, môže výrazne prospieť rozvoju priestorovej predstavivosti, schopnosti abstrakcie a myšlienkových operácií s priestorovým usporiadaním objektov“.

**Stereometria v ISCED 2**

Obsah vzdelávania v predmete matematika je v nižšom sekundárnom vzdelávaní spracovaný na kompetenčnom základe. Z hľadiska rozvoja priestorovej predstavivosti sú významné najmä kompetencie používať matematické modely logického a priestorového myslenia a prezentácie (vzorce, modely, štatistika, diagramy, grafy, tabuľky), pričom pri budovaní a rozvoji priestorovej predstavivosti je dôležitou aj kompetencia využívať IKT pri vzdelávaní. Ďalšími dôležitými kompetenciami pre rozvoj priestorovej predstavivosti, ktoré má žiak v nižšom sekundárnom vzdelávaní získať, sú:

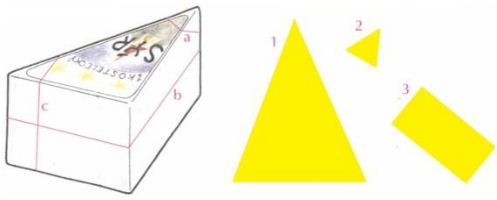
- rozozná, pomenuje a opíše jednotlivé základné priestorové geometrické tvary, nachádza v realite ich reprezentáciu; dokáže špecifikovať ich jednotlivé prvky (telesová uhlopriečka, vzťah hrán),
- používa k argumentácii a pri výpočtoch vety o zhodnosti a podobnosti trojuholníkov,
- vie vykonať v praxi potrebné najdôležitejšie merania a výpočty obvodu, obsahu, povrchu a objemu geometrických útvarov,
- pozná meracie prostriedky a ich jednotky, vie ich samostatne používať aj pri praktických meraniach,
- analyzuje a rieši aplikačné geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

Priestorové myslenie a priestorová predstavivosť sa tvorí a rozvíja predovšetkým vzdelávaním v tematickom okruhu Geometria a meranie, v ktorom sa žiaci zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Odhadom, meraním a výpočtom sa učia zisťovať veľkosť uhlov, dĺžok, povrchov a objemov. Učia sa riešiť polohové a metrické úlohy z bežnej reality a rozvíja sa ich priestorová predstavivosť. Cieľom vyučovania matematiky je aj rozvoj schopnosti žiakov orientovať sa v rovine a priestore.

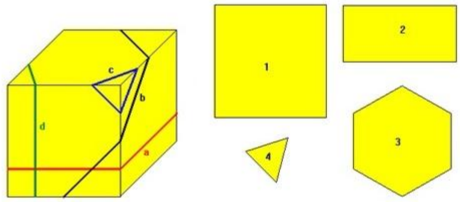
V obsahu vzdelávania sú z hľadiska rozvoja priestorovej predstavivosti v jednotlivých ročníkoch dôležité najmä tieto témy:

- Rovnobežky, kolmice v bežnom živote.
- Kocka, kváder, ich sieť, výpočet povrchu a objemu, jednotky povrchu a objemu a ich premena.
- Stavba telies zo stavebnicových kociek.
- Stavba telies na základe stanovených podmienok (podľa plánu).
- Niektoré spôsoby zobrazovania priestoru (voľné rovnobežné premietanie, perspektíva).
- Obrazy kvádra a kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní, viditeľnosť hrán.
- Telesá zložené z kvádrov a kociek, ich znázorňovanie, nárys, pôdorys, a bokorys, úlohy na rozvoj priestorovej predstavivosti (aj príklady jednoduchých a zložených telies v reálnom živote).
- Hranol, jeho znázornenie a sieť, objem a povrch, použitie vzorcov na výpočet objemu a povrchu (aj v slovných úlohách z praxe).
- Valec, ihlan, kužeľ a ich siete, objem a povrch.
- Guľa a rez guľou. Objem a povrch gule.
- Použitie vzorcov na výpočet objemu a povrchu valca, ihlana, kužeľa a gule (aj v slovných úlohách z praxe).
- Použitie Pytagorovej vety pri riešení praktických úloh.
- Použitie podobnosti pri meraní výšok a vzdialeností, topografické práce v reálnych situáciách.

Uvedený obsahový štandard je minimálny predpísaný štandard. Je plne v právomoci školy v rámci školského vzdelávacieho programu niektoré učivá rozšíriť, resp. doplniť. Učiteľom základných škôl a osemročných gymnázií navrhujeme zaradiť úlohy, ktoré môžeme považovať za propedeutiku konštrukcie rezov telies. Tento typ úloh sa nachádza napr. v českých učebniciach a pracovných zošitoch. Na ukážku vyberáme dve úlohy, ktorých zadanie je na Obr. 1 a Obr. 2.




Obr. 1: Priraď rezy na syre
(zdroj Mikulenková, Molnár, 1997)




Obr. 2: Priraďte rovinné rezy k rezom na škatuli daných tvarov
(zdroj: Pavlovičová, Rumanová, 2007)

Zaradením podobných úloh do vyučovania matematiky rozvíjame priestorovú predstavivosť žiakov a pripravujeme ich zároveň na náročnú oblasť stredoškolskej stereometrie – polohové konštrukčné úlohy.

**Stereometria v ISCED 3A**

Štátny vzdelávací program pre vyššie sekundárne vzdelávanie v tematickom okruhu Geometria a meranie uvádza: žiaci skúmajú a objavujú rovinné a priestorové útvary a ich vlastnosti, odhadom, meraním i výpočtom určujú obsahy, povrchy a objemy telies, riešia polohové a metrické úlohy z bežnej reality, dôležité miesto má rozvoj priestorovej predstavivosti. V obsahu nachádzame časti týkajúce sa stereometrie. Žiak (ako sa uvádza vo výkonovom štandarde):

- vie v rovnobežnom premietaní načrtnúť kváder alebo jednoduché teleso zložené z malého počtu kvádrov,
- vie nakresliť bokorys a pôdorys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov,
- pozná príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice alebo lineárna perspektíva),
- vie používať spôsoby dvojrozmernej reprezentácie priestoru pri riešení jednoduchých úloh,
- vie vypočítať povrch a objem telies pomocou daných vzorcov vrátane jednoduchých prípadov, keď je potrebné niektoré údaje dopočítať z ostatných údajov,
- vie v jednoduchých prípadoch zobraziť rez telesa rovinou,
- pozná súvislosti rezu guľou so súradnicovým systémom,
- vie riešiť jednoduché úlohy vyžadujúce priestorovú predstavivosť.

Lepší obraz o obsahu, ktorému je venovaná pozornosť vo vyučovaní geometrie vo vyššom sekundárnom vzdelávaní nadobudneme, ak si priblížime požiadavky na vedomosti a zručnosti k maturitnej skúške z pohľadu rozvoja priestorovej predstavivosti:

Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov,
- špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra,

- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej dvoma bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa,
- na zobrazených telesách označiť úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov a uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov,
- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

V oboch prípadoch, vo výkonovom štandarde a aj v požiadavkách na vedomosti a zručnosti k maturitnej skúške, vidíme že žiak musí vedieť zostrojiť a zobraziť rez kocky a kvádra. V školskom roku 2011/12 vyučovala túto časť stereometrie spoluautorka príspevku, a tak sme mali možnosť nahliadnuť do písomných prác žiakov Gymnázia na Golianovej ulici v Nitre a videli sme, aké chyby sa najčastejšie opakujú pri riešení týchto úloh. Preto sme sa rozhodli preskúmať, ako by sa dali tieto chyby odstrániť práve použitím programu Cabri 3D.

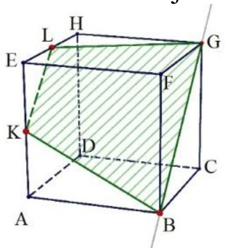
## 1 Analýza študentských riešení konštrukcie rezov telies

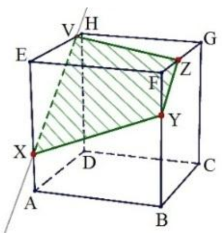
V tejto časti príspevku sa venujeme analýze chýb, ktoré sa vyskytli pri riešení polohových konštrukčných úloh. Skúmali sme písomné práce (jedna kontrolná práca a prvá štvrťročná písomná práca v triedach Septima A a B, tretia štvrťročná písomná práca v triedach II. A, II. B. a II. C) študentov druhého ročníka štvorročného (triedy 2.A - 30 študentov, 2.B – 30 študentov, 2.C - 28 študentov) a siedmeho ročníka osemročného (triedy Septima A – 31 študentov a Septima B-31 študentov) gymnázia na Golianovej ulici v Nitre.

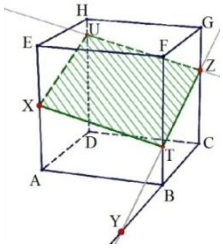
Celkovo sme spracovali výsledky 12 úloh, konkrétne 248 študentských riešení. Študenti mali k dispozícii vytlačený obraz kocky a na nej vyznačené dané body. Niektorí študenti sa pomýlili v predtlačenom zadaní, a tak sa mohlo stať, že pri prekresľovaní zadania mierne zmenili polohu daných bodov. Napriek tomu, že narysovaný rez sa odlišoval od riešenia pôvodného zadania, ale postup konštrukcie bol správny, sme riešenie uznali ako správne. V rámci študentských riešení sa môže nachádzať iné pomenovanie bodov ako vo vzorovom riešení, a tak sa môže stať, že na naskenovanom riešení vidí čitateľ iné označenie bodu, z dôvodu zovšeobecnenia (napr. niektorá trieda mala dané body *K, L, M,* v inej triede to boli body *M, N, Q*).

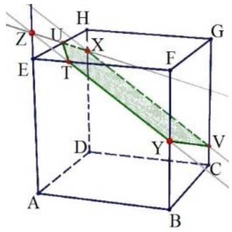
Na začiatok uvedieme úlohy, pri ktorých postačilo využiť iba vlastnosť rovnobežnosti protiľahlých stien kocky.

**Zadanie**: Zostrojte rez rovinou, ktorá je daná troma bodmi.




Úloha 1: Body K, L, B. Úloha 2: Body X, Y, Z. Úloha 3: Body X, Y, Z. Úloha 4: Body X, Y, Z.

**Vyhodnotenie**

V tabuľke 1 uvádzame počty študentov, ktorí riešili dané úlohy, počet správnych riešení týchto úloh a počet študentov, ktorí danú úlohu neriešili vôbec, alebo zostrojili iba úsečky z daných bodov, ktoré ležali v jednej stene.

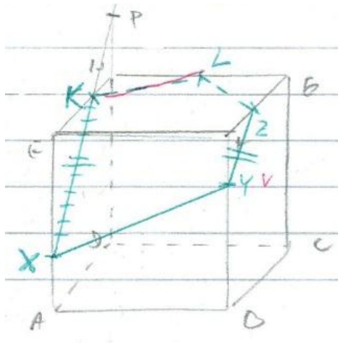
| | Počet študentov | Správne riešenie | Neriešili |
|---|---|---|---|
| Úloha 1 | 15 | 1 | 0 |
| Úloha 2 | 13 | 6 | 2 |
| Úloha 3 | 15 | 8 | 2 |
| Úloha 4 | 14 | 7 | 2 |

Tab. 1: Vyhodnotenie úloh 1 až 4

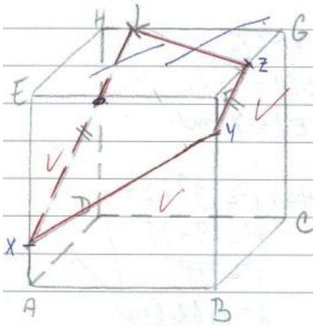
14 nesprávnych riešení úlohy 1 pripisujeme veľmi nepresnému rysovaniu, keďže daný bod *K* je stred hrany *EH* a bod *L* je stred hrany *AE*. Úlohu bolo možné riešiť aj logickou úvahou. Poloha bodu *G* ako bodu rezu je zrejmá.

Najzávažnejšie chyby v riešení týchto štyroch úloh:

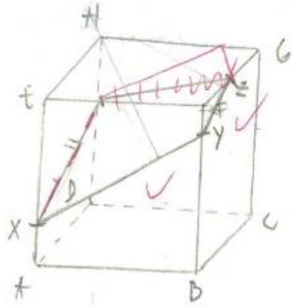
- Úvahu riešenia mali správnu, avšak nakoniec navyše zostrojili v jednej stene kocky viac ako jednu stranu mnohouholníka, ktorý mal byť rezom kocky (Obr. 3a).
- Študenti zostrojili neexistujúce body ako „priesečníky“ mimobežných priamok (Ukážka takéhoto bodu je na hrane *GH* na Obr. 3b, kde študent zostrojil rovnobežku s úsečkou *YZ* cez bod *X* a jej priesečník s hranou *GH*).
- Študenti vyznačili ako stranu rezu úsečku *VZ* vo vnútri kocky (Obr. 3c).
- Študenti nesprávne zostrojili rovnobežky (Ukážka na obr. 3d - polpriamka *ZB* v zadnej stene je rovnobežná s úsečkou *XY* na Obr. 3d)
- Študenti v úlohe 4 rysovali tak neprehľadne, že sa dve z ich riešení ani nepodarilo analyzovať.



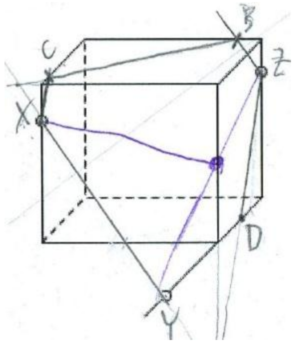

Obr. 3a



Obr. 3b

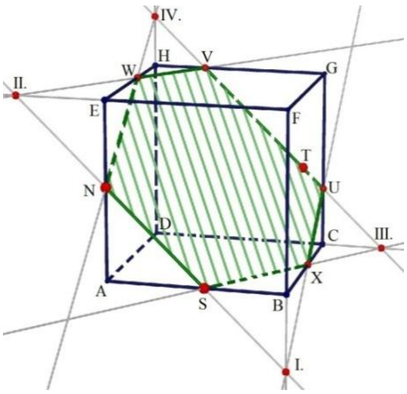


Obr. 3c

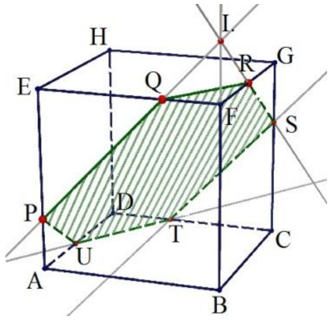


Obr. 3d

V ďalších úlohách už pri riešení museli študenti použiť oba postupy riešenia rezov telies – rovnobežnosť protiľahlých stien a aj spoločný bod troch rovín (rovina rezu a dve roviny susedných stien kocky). V úlohách 11 a 12 mali študenti zostrojiť rez kvádra. V úlohe 5 bolo nutné začať rovnobežkou, v úlohe 12 spoločným bodom troch rovín.

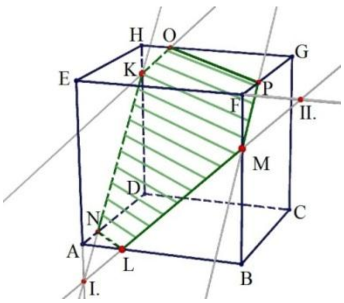



Úloha 5: Body N, S, T
(T je bod zadnej steny).

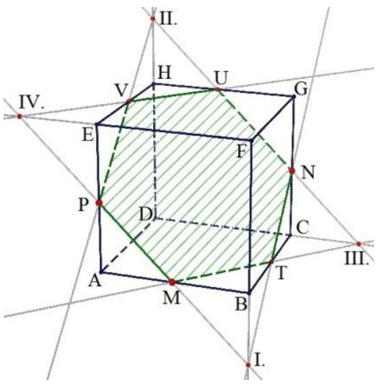



Úloha 6: Body P, Q, R.

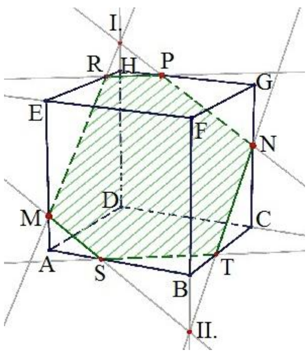
V ďalších úlohách 7 až 12 boli dané tri body vždy umiestnené tak, že dva z nich ležali v jednej stene a tretí bod patril protiľahlej stene.



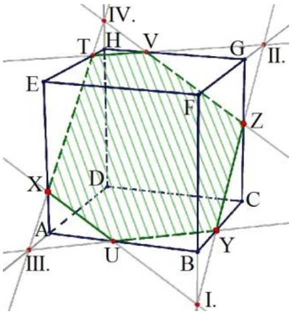

Úloha 7: Body N, S, T



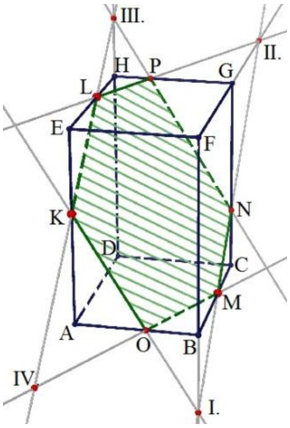

Úloha 8: Body N, S, T



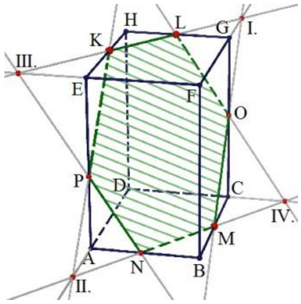

Úloha 9: Body N, S, T




Úloha 10: Body N, S, T




Úloha 11: Body N, S, T



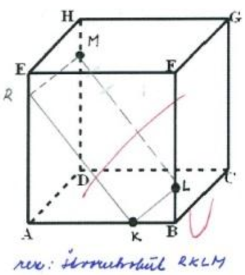

Úloha 12: Body N, S, T

V tabuľke 2 uvádzame počty študentov, ktorí riešili úlohy 5 až 12, počet správnych riešení týchto úloh a počet študentov, ktorí danú úlohu neriešili vôbec, alebo zostrojili iba úsečky z daných bodov, ktoré ležali v jednej stene.

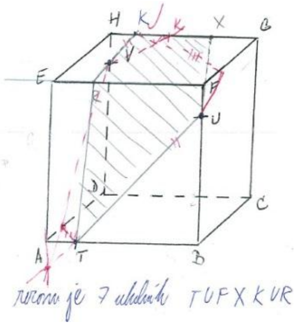
| | Počet študentov | Správne riešenie | Neriešili |
|---|---|---|---|
| Úloha 5 | 12 | 8 | 0 |
| Úloha 6 | 40 | 9 | 4 |
| Úloha 7 | 58 | 31 | 1 |
| Úloha 8 | 10 | 9 | 1 |
| Úloha 9 | 14 | 12 | 1 |
| Úloha 10 | 29 | 27 | 0 |
| Úloha 11 | 13 | 11 | 0 |
| Úloha 12 | 11 | 10 | 0 |

Tab. 2: Vyhodnotenie úloh 5 až 12

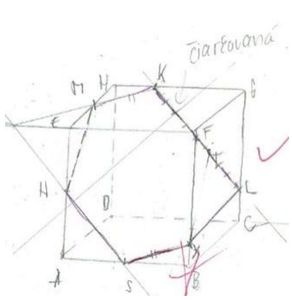
Celkovo sa vyskytli tie isté chyby, ako pri prvých štyroch úlohách.




Obr. 4a



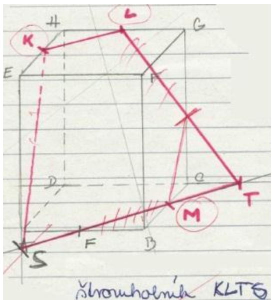

Obr. 4b



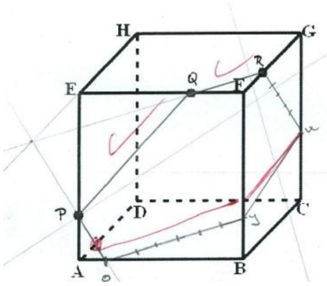

Obr. 4c

Ďalej pribudli chyby vzhľadom na spoločný bod troch rovín:

- študenti predĺžili nesprávnu hranu a tak opäť vyznačili „priesečník“ mimobežných rovín (Obr. 5a, bod S leží na AE namiesto AD);
- pri správne zostrojenom spoločnom bode troch rovín označili bod rezu na nesprávnej hrane – opäť neexistujúci bod (Obr. 5b, bod na hrane AB nesprávne, mal byť zostrojený na AD – vyznačený pri oprave).



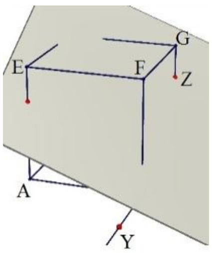
Obr. 5a



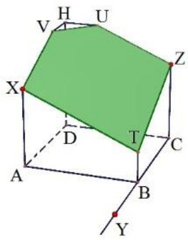

Obr. 5b

**Návrh na odstránenie nedostatkov v konštrukciách rezov telies použitím programu Cabri 3D**

Myslíme si, že študenti, ktorí zostrojili dve aj tri úsečky rezu v jednej stene, nepochopili podstatu preberanej problematiky a ich priestorová predstavivosť je na takej nízkej úrovni, že si nevedia rezanie kocky rovinou ani predstaviť. Výhodou programu Cabri 3D je, že vieme študentom ukázať v programe pomocou funkcie `Zrezať mnohosten` riešenie, t.j. čo znamená zostrojiť rez telesa (na obr. 6a, 6b vidíme ukážku z programu pre úlohu 3; najskôr vyznačíme rovinu rezu, ktorá je daná troma bodmi, a potom pomocou funkcie zostrojíme zrezané teleso touto rovinou, a nakoniec môžeme zvýrazniť mnohouholník = rez telesa), t.j. čo znamená zostrojiť rez telesa. Nemusíme sa obávať, že študenti využijú iba túto možnosť pri riešení úloh. Program nám dovoľuje krok po kroku sledovať študentov postup riešenia.

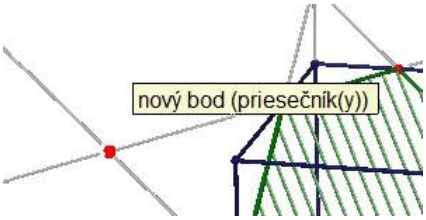



Obr. 6a

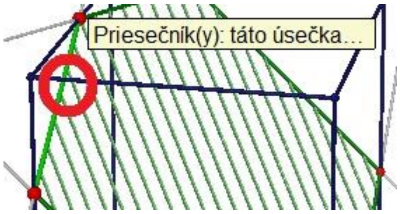



Obr. 6b

Ako sme si mohli všimnúť, študenti často pri rysovaní označia „priesečník“ priamok, ktoré sú mimobežné, teda neexistujúce body. Program nezostrojí spoločný bod dvoch mimobežných priamok. Ak prejdeme kurzorom ponad priesečník dvoch pretínajúcich sa priamok, program nám ponúkne možnosť zostrojenia nového bodu ako priesečníka týchto priamok (Obr. 7a). Ak prejdeme kurzorom ponad mimobežné priamky (Obr. 7b), program nám túto možnosť neponúkne, označí jednu z priamok alebo úsečiek a nedovolí po kliknutí myšou označiť priamku s ňou mimobežnú.

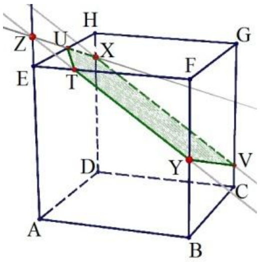



Obr. 7a

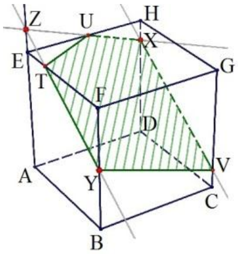



Obr. 7b

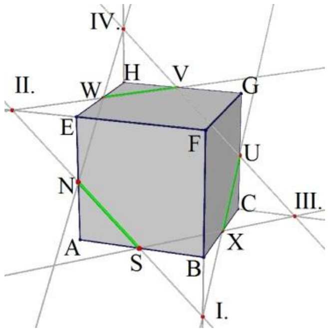
Ďalšou veľkou výhodou programu je, že daným telesom môžeme otáčať. Napomáha najmä pri úlohách, v ktorých sú dané body tak, že pri konštrukcii rezu sa náš obrázok stáva neprehľadný a riešením je iba „spleť" čiar. Na obr. 8a sa nachádza riešenie úlohy 4 a na obr. 8b je jeho riešenie otočené v programe tak, aby bolo prehľadnejšie.




Obr. 8a




Obr. 8b




Obr. 9

Aby študenti nezostrojovali úsečky vo vnútri kocky ako strany rezu, môžeme rezy telies konštruovať na telesách, ktorých steny (povrch) necháme plne zafarbený (Obr. 9). Takto žiakov vedieme k tomu, aby konštruovali strany rezu len v rámci stien kocky.

V neposlednom rade musíme samozrejme podotknúť, že spomínaný program má aj svoje nevýhody. Sú určité ťažkosti pri označovaní vrcholov a bodov, pri vyznačení viditeľnosti hrán, atď. Avšak tieto problémy sú zanedbateľné, pretože nijako neznižujú efektívnosť daného programu. Rysovanie pomocou programu je rýchlejšie a presné. Na hodinách sa stihne prériešiť viac úloh, aj zložitejšie, pretože žiaci môžu skúmať a skúšať rôzne prístupy pri riešení, a ak sa pomýlia, nesprávne zostrojené objekty jednoducho odstránia a pokračujú vo svojom riešení ďalej.

## Záver

Aj v súčasnosti má rysovanie s využitím manuálnych rysovacích pomôcok vo vyučovaní geometrie svoj význam. Ich používaním sa rozvíjajú manuálne zručnosti a zároveň aj priestorová predstavivosť. Zároveň si žiak cibrí zmysel pre presnosť a precíznosť svojej práce.

Naša spoločnosť sa však z technologického hľadiska veľmi rýchlo rozvíja a počítače prenikli do každej oblasti života. Nie je tomu inak ani v školskom prostredí. Preto veľký význam nadobúda spojenie používania manuálnych rysovacích pomôcok a IKT (geometrický softvér). Žiak najprv vyrieši menšie množstvo úloh manuálnou konštrukciou a na precvičenie učiva, doplnenie vedomostí a názorné zobrazenie konštrukcií použije v primeranom rozsahu vhodný geometrický program.

V našom príspevku sme poukázali na problémy žiakov vyššieho sekundárneho vzdelávania v riešení úloh na konštrukcie rezov telies danou rovinou a možnosť, ako im pomôcť tieto nedostatky odstrániť použitím geometrického softvéru Cabri 3D. Táto oblasť školskej matematiky je veľmi dôležitá aj z hľadiska rozvíjania priestorovej predstavivosti žiakov. Dobré priestorové videnie potrebujú študenti rôznych odborných škôl (napr. pri technickom kreslení) a aj pracovníci v rôznych priemyselných odvetviach. Jej rozvíjanie je jednou z hlavných funkcií školskej matematiky a preto nesmieme vynechať žiadnu príležitosť pre jej rozvoj.

## Literatúra

[1] Mikulenková, H. - Molnár, J. (1997). Zajímavá matematika pro 4. Ročník. Olomouc: Prodos, 1997. XX s. ISBN 80-85806-36-3

[2] Pavlovičová, G. – Rumanová, L. (2007). Rozvoj priestorovej predstavivosti s využitím Cabri 3D. In: E-matik 2007: e-learning v matematike, matematika v e-learningu. Bratislava: UK, 2007. S. 116-121.

[3] Drábeková, J. – Rumanová, L.: Využitie didaktických softvérov v niektorých častiach matematiky, Nitra, In: Medzinárodné vedecké dni 2008 - zborník recenzovaných príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie. SPU Nitra 2008, s. 1231-1235. ISBN 978-80-552-0061-3

[4] Štátny pedagogický ústav: Štátny vzdelávací program MATEMATIKA - príloha ISCED 2, 2011. Citované 24. Júna 2012. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program-pre-2-stupen-zakladnych-skol-ISCED-2/Profil-absolventa.alej

[5] Štátny pedagogický ústav: Štátny vzdelávací program MATEMATIKA - príloha ISCED 3A, 2011. Citované 24. Jpna 2012. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

[6] Štátny pedagogický ústav: Štátny vzdelávací program pre gymnázia v SR ISCED 3A – Vyššie sekundárne vzdelávanie, 2011. Citované 24. Júna 2012. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/isced3_spu_uprava.pdf

[7] Vallo, D. (2006) Riešenie stereometrických úloh v programe Cabri 3D. In: Matematika v škole dnes a zajtra: zborník príspevkov zo VI. Konferencie. Ružomberok: PF KU, 2006. S. 278 – 280. ISBN 80-8050-813-5.

[8] Viziová, A. (2008) Výučba planimetrie a stereometrie pomocou dynamických geometrických systémov (Cabri Geometri II, Cabri 3D v2) na strednej škole. Citované 28. Júna 2012. Dostupné na: http://www.cenast.sk/sk/Kniznica-prac/2008/Vyucba-planimetrie-a-stereometrie-pomocou-dynamickych-geometrickych-systemov-Cabri-Geometry-II-.st

*Článok prijatý dňa 1. Júla 2012.*

**Adresa autorov**

*RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.*
*PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: kvidermanova@ukf.sk
jzahorska@ukf.sk

*PaedDr. Alena Viziová, PhD.*
*Gymnázium*
*Golianova 68*
*SK – 949 07 Nitra*
e-mail: alena.viziova@gmail.com

**Poďakovanie**

Tento príspevok je realizovaný s finančnou podporou projektov KEGA 035UKF-4/2012 Program rozvoja priestorovej predstavivosti žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania a KEGA 038UKF-4/2011 Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# VZŤAHY JEDNOTIACICH PRINCÍPOV V REÁLNEJ ANALÝZE

# RELATIONS OF UNIFYING PRINCIPLES IN REAL ANALYSIS

PETER VRÁBEL

**ABSTRAKT.** *V príspevku sú prezentované dve novšie unifikujúce metódy dôkazov viet zo základov matematickej analýzy a ich vzťah k princípu indukcie v kontinuu* $\mathbb{R}$. *Tieto metódy sú založené na pojmoch lokálny aditívny systém a plné pokrytie intervalu. Výhody týchto metód sú ilustrované na dôkazoch viet, ktoré sú prevedené tromi spôsobmi.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *lokálny a aditívny systém, úplné pokrytie intervalu, princíp indukcie v kontinuu*

**ABSTRACT**. *Two untraditional unifying methods of proofs theorems from basis mathematical analysis are presented in the contribution. Their relations to principle of induction in continuum are analyzed. Advantages of these methods are illustrated on proofs of theorems, which are realized by three approaches.*

**KEY WORDS:** *local and additive system, full covering of interval, principle of induction in continuum*

**CLASSIFICATION:** *26A99, 97I99, I25*

## Úvod

V základoch reálnej analýzy sa podstatnou mierou využíva spojité usporiadanie množiny reálnych čísel. V posledných štyroch desaťročiach sa vyvinulo niekoľko nových špeciálnych jednotiacich metód dokazovania základných viet reálnej analýzy. Podstatné pojmy a myšlienky týchto metód možno nájsť v prácach [2], [3], [4], [5], [7]. Zmyslom tohto snaženia je podať komplexnejší pohľad na základy matematickej analýzy i poskytnúť prostriedky na jednoduchšie dôkazy jej viet. Treba poznamenať, že tieto metódy nepoužívajú ani jeden z viacerých známych princípov, ktoré sú ekvivalentné so spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$, ako napríklad: každá ohraničená monotónna postupnosť reálnych čísel má v $\mathbb{R}$ limitu; princíp indukcie v kontinuu $\mathbb{R}$ atď.

## Základné pojmy metód príbuzných s princípom indukcie v kontinuu

Budeme sa zaoberať dvomi metódami dôkazovej techniky , ich vzájomným vzťahom i vzťahom k princípu indukcie v kontinuu. Prvá využíva pojem *plného pokrytia uzavretého intervalu* a druhá pojem *lokálneho a aditívneho systému intervalov* .

**Definícia 1.** Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Systém $\mathcal{S}$ uzavretých intervalov $I$, $I \subseteq [a, b]$, sa nazýva plné pokrytie intervalu $[a, b]$, ak ku každému $x \in [a, b]$ existuje také číslo $\delta(x) > 0$, že každý uzavretý podinterval intervalu $[a, b]$ s dĺžkou neprevyšujúcou $\delta(x)$ a obsahujúci bod $x$ patrí do $\mathcal{S}$.

**Príklad 2.** (a) Nech $\delta$ je ľubovoľné kladné číslo neprevyšujúce dĺžku $b - a$ intervalu $[a, b]$. Označme dĺžku ľubovoľného uzavretého intervalu $I$ symbolom $|I|$ a systém

všetkých uzavretých podintervalov intervalu $[a,b]$ symbolom $\mathcal{P}(a,b)$. Potom $\mathcal{S}$, kde $\mathcal{S} = \{I \in \mathcal{P}(a,b); |I| \leq \delta\}$ je jednoduchý príklad plného pokrytia intervalu $[a,b]$ .
(b) Nech funkcia $f$ je spojitá na intervale $[a,b]$. Funkcia $f$ má v každom bode $x \in [a,b]$ vlastnú limitu, teda existuje uzavretý interval $O(x), x \in O(x) \subseteq [a,b]$, v ktorom je funkcia $f$ ohraničená. Priraďme každému $x \in [a,b]$ takýto uzavretý interval $O(x)$. Potom $\mathcal{S}$, kde

$$\mathcal{S} = \{I \in \mathcal{P}(a,b);\ \exists x \in [a,b]\ (x \in I \wedge I \subseteq O(x))\}$$

je plné pokrytie intervalu $[a,b]$.

Pri dôkazoch viet o plnom pokrytí resp. lokálnom a aditívnom systéme intervalov budeme využívať rozšírenú metódu indukcie (dôkaz pozri napr. v [1], [6]).

**Veta 3.** Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ a $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na $M$. Označme $M_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon] \cap M$ pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Nech $\varphi$ spĺňa tieto predpoklady:

(a) existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, $M_\alpha \neq \emptyset$ a pre každé $x \in M_\alpha$ platí $\varphi(x)$,

(b) ak pre každé $x \in M_\beta$ platí $\varphi(x)$, tak existuje $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > \beta$, že pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\varphi(x)$.

Potom pre každé $x \in M$ platí $\varphi(x)$.

**Veta 4.** Nech $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a,b]$. Potom existuje také delenie intervalu $[a,b]$ určené deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, že každý interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\dots,n$, patrí do $\mathcal{S}$.

*Dôkaz.* Nech $M = (a,b]$ a pre každé $x \in M$ $\varphi(x)$ znamená výrok: „existuje delenie intervalu $[a,x]$, ktorého každý čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$“. Dokážeme, že množina $M$ a výroková funkcia $\varphi$ spĺňajú predpoklady vety 3. K číslu $a$ existuje $\delta(a) > 0$, že každý interval $[a,x]$, $a < x \leq a + \delta(a)$, patrí do $\mathcal{S}$. Za $\alpha$ v (a) vety 3 stačí zvoliť číslo $a + \delta(a)$. Nech pre každé $x \in M_\beta = (-\infty, \beta] \cap M$ platí $\varphi(x)$. Stačí uvažovať $\beta \in (a,b]$. Ak $\beta < b$, tak existuje $c \in (a,b)$, že $[\beta, c] \in \mathcal{S}$. Keďže platí $\varphi(\beta)$, tak existuje delenie intervalu $[a,\beta]$, že každý jeho čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$. Ak pridáme k týmto intervalom interval $[\beta, d]$, $\beta < d \leq c$, dostaneme delenie intervalu $[a,d]$, že každý jeho čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$. Teda stačí v (b) vety 3 položiť za $\gamma$ bod $c$. Ak $\beta = b$, za $\gamma$ môžeme zobrať ľubovoľné číslo väčšie ako $\beta$. Z vety 3 potom vyplýva, že platí aj $\varphi(b)$, čo je tvrdenie dokazovanej vety.

**Definícia 5.** Systém $\mathcal{G}$ uzavretých podintervalov intervalu $[a,b]$ sa nazýva lokálny aditívny systém, ak platí:

($a_1$) každý bod $x \in (a,b)$ je vnútorným bodom nejakého intervalu $I(x)$ patriaceho do $\mathcal{G}$;

($a_2$) existujú také body $c, d \in (a,b)$, že intervaly $[a,c]$, $[d,b]$ patria do $\mathcal{G}$;

(b) ak $I_1, I_2 \in \mathcal{G}$ a $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, tak $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{G}$.

Podmienky ($a_1$), ($a_2$) charakterizujú lokálnosť systému $\mathcal{G}$ a podmienka (b) charakterizuje aditívnosť systému $\mathcal{G}$.

**Príklad 6.** Nasledujúce množiny $\mathcal{G}$ sú lokálne aditívne systémy intervalu $[a,b]$:

(1) $\mathcal{G} = \{[x,y];\ [x,y] \subseteq [a,b]\}$,

(2) $\mathcal{G} = \{[a,b_1], [a,b_2], \dots,\ [a,b_n]\}$, kde $a < b_1 < \cdots < b_n = b$,

(3) $\mathcal{G} = \{[x_i, x_j]; i,j \in \{0,1,\dots,n\}, i < j\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

**Veta 7.** Pre každý lokálny aditívny systém $\mathcal{G}$ uzavretých podintervalov intervalu $[a,b]$ platí, že $[a,b] \in \mathcal{G}$.

*Dôkaz.* Nech $M = (a,b]$ a pre každé $x \in (a,b]$ znamená $\varphi(x)$ výrok: „existuje $z \in (a,b]$, že $x \in [a,z] \in \mathcal{S}$. Množina $M$ a výroková funkcia $\varphi$ spĺňajú predpoklady vety 3. Existuje $\alpha \in (a,b)$, že $[a,\alpha] \in \mathcal{S}$, teda $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in (a,\alpha]$. Nech pre každé $x \in (a,\beta]$ platí $\varphi(x)$, špeciálne $\beta \in [a,z_1] \in \mathcal{S}$. Ak $\beta < b$, tak existuje interval $[c,d] \in \mathcal{S}$, že $\beta$ je jeho vnútorným bodom. Potom $[a,z_1] \cup [c,d] = [a,d] \in \mathcal{S}$ a teda $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in (a,d]$, $\beta < d = \gamma$. Zrejme (b) z vety 3 platí aj v prípade $\beta = b$. Z vety 3 potom vyplýva, že platí aj $\varphi(b)$, teda $[a,b] \in \mathcal{S}$.

Lokálny aditívny systém intervalu $[a,b]$ nemusí byť jeho plným pokrytím a taktiež plné pokrytie intervalu $[a,b]$ nemusí byť jeho lokálnym aditívnym systémom. Tak napríklad plné pokrytie (a) z príkladu 2 ($\delta < b-a$) nie je lokálny aditívny systém a lokálne aditívne systémy (1), (2) z príkladu 6 nie sú plné pokrytia intervalu $[a,b]$. Ak $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a,b]$, tak

$$\mathcal{S}_1 = \{[x,y];\ [x,y] = \cup_{i=1}^{n} [x_i,y_i], [x_i,y_i] \in \mathcal{S}, i = 1,2,\dots,n, n \in \mathbb{N}\}$$

je lokálny aditívny systém intervalu $[a,b]$.

### Aplikácie plných pokrytí a lokálnych aditívnych systémov intervalu $[a,b]$

Teraz uvedieme priame použitie vety 4 , vety 7 a vety 3 pri dôkazoch viet zo základov matematickej analýzy. Každú vetu dokážeme tromi metódami: použitím plného pokrytia (PK); použitím lokálneho aditívneho systému (LAS) a nakoniec použitím indukcie v kontinuu (IK). V nasledujúcich úvahách budeme využívať fakt, že ak nejaká reálna funkcia reálnej premennej je ohraničená na množinách $M_1, M_2, \dots, M_n$, $n \in \mathbb{N}$, tak je ohraničená aj na množine $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$.

**Veta A.** Ak funkcia $f$ má v každom vnútornom bode intervalu $[a,b]$ vlastnú limitu zľava i sprava a v bode $a(b)$ má vlastnú limitu sprava (zľava), tak je na intervale $[a,b]$ ohraničená.

*Dôkaz (PK).* Z predpokladu vlastných jednostranných limít v každom bode intervalu $(a,b)$ vyplýva, že k číslu 1 a ku každému $x \in (a,b)$ existujú kladné čísla $\delta_1(x), \delta_2(x)$ s vlastnosťou:

$$\forall z \in (x-\delta_1(x), x)\ \ L_1(x) - 1 < f(z) < L_1(x) + 1,$$

$$\forall z \in \big(x, x+\delta_2(x)\big)\ \ L_2(x) - 1 < f(z) < L_2(x) + 1,$$

kde $\lim_{z\to x^-} f(z) = L_1(x)$ a $\lim_{z\to x^+} f(z) = L_2(x)$. Nech $\delta(x) = \min\left\{\frac{\delta_1(x)}{2}, \ \frac{\delta_2(x)}{2}\right\}$ a

$$L(x) = \min\{L_1(x) - 1, L_2(x) - 1, f(x)\},$$

$$K(x) = \max\{L_1(x) + 1, L_2(x) + 1, f(x)\}.$$

Potom pre každý uzavretý podinterval $I$ intervalu $[a,b]$ s dĺžkou nepresahujúcou číslo $\delta(x)$ a obsahujúcom bod $x$ platí:

$$\forall z \in I\ \ L(x) \le f(z) \le K(x),$$

teda $f$ je ohraničená na intervale $I$. Podobne môžeme postupovať v prípade bodov $a$, $b$.

Z uvedeného vyplýva, že systém $\mathcal{S}$, kde

$$\mathcal{S} = \{[c,d] \in \mathcal{P}(a,b); f \text{ je na } [c,d] \text{ ohraničená}\},$$

je plné pokrytie intervalu $[a,b]$. Z vety 4 vyplýva existencia takej postupnosti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, že $f$ je ohraničená na intervaloch $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\dots,n$. Potom je ohraničená aj na intervale $[a,b]$, pretože $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n}[x_{k-1}, x_k]$.

*Dôkaz (LAS).* Uvažujme systém $\mathcal{S}$ z dôkazu (PK). Tento systém je zrejme aditívny. Jeho lokálnosť vyplýva tiež z tohto dôkazu. Totiž pre každé $z \in (x - \delta_1(x), x + \delta_2(x))$ platí $L(x) \le f(z) \le K(x)$ a teda pre každé $x \in (a,b)$ existuje uzavretý interval $I(x) \in \mathcal{S}$ (napr. $\left[x - \frac{\delta_1(x)}{2}, x + \frac{\delta_2(x)}{2}\right] \cap [a,b]$), že $x$ je jeho vnútorným bodom. Keďže funkcia $f$ má v bode $a(b)$ vlastnú limitu sprava (zľava), tak existujú intervaly $[a,c], [d,b]$, ktoré patria do systému $\mathcal{S}$. Z vety 7 potom vyplýva, že $[a,b] \in \mathcal{S}$ a teda $f$ je ohraničená na $[a,b]$.

*Dôkaz (IK).* Nech $M = (a,b]$ a $\varphi$ je výroková funkcia definovaná na $M$ takto: pre každé $x \in (a,b]$ $\varphi(x)$ označuje výrok „funkcia $f$ je ohraničená na intervale $[a,x]$“. Ukážeme, že množina $M$ a výroková funkcia $\varphi$ spĺňa predpoklady vety 3. Z existencie vlastnej limity funkcie $f$ v bode $a$ sprava vyplýva, že existuje $\alpha \in (a,b]$ s vlastnosťou: $f$ je ohraničená na $[a,x]$ pre každé $x \in (a,\alpha]$. Nech $f$ je ohraničená na intervale $[a,\beta] \subseteq [a,b]$. Potom zrejme platí $\varphi(x)$ pre každé $x \in (a,\beta]$. Na overenie predpokladu (b) vety 3 stačí predpokladať, že $\beta < b$. Z existencie vlastnej limity funkcie $f$ v bode $\beta$ sprava vyplýva existencia intervalu $[\beta, c] \subseteq [a,b]$, na ktorom je funkcia $f$ ohraničená. Potom je zrejme funkcia $f$ ohraničená na každom intervale $[a,x]$, kde $x \in (a,c]$. Stačí teda za $\gamma$ vo vete 3 položiť bod $c$. Z vety 3 potom vyplýva, že $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$ a teda aj pre bod $b$. To ale znamená, že funkcia $f$ je ohraničená na intervale $[a,b]$.

**Veta B.** Ak interval $[a,b]$ je pokrytý systémom $\mathcal{T}$ otvorených intervalov, tak existuje konečný podsystém systému $\mathcal{T}$, ktorý pokrýva $[a,b]$.

*Dôkaz (PK).* Nech $\mathcal{S} = \{[x,y] \in \mathcal{P}(a,b);$ existuje konečný počet intervalov z $\mathcal{T}$ pokrývajúcich interval $[x,y]\}$. Nech $x \in [a,b]$. Potom existuje otvorený interval $(c_x, d_x) \in \mathcal{T}$, že $x \in (c_x, d_x)$. Nech $\delta(x) = \min\left\{\frac{x - c_x}{2}, \frac{d_x - x}{2}\right\}$. Potom každý uzavretý podinterval intervalu $[a,b]$, ktorý obsahuje bod $x$ a jeho dĺžka nepresahuje číslo $\delta(x)$ patrí do $\mathcal{S}$. Teda $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a,b]$. Z vety 4 vyplýva existencia postupnosti bodov $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, že každý interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\dots,n$, sa dá pokryť konečným počtom intervalov z $\mathcal{T}$. Odtiaľ už vyplýva, že aj interval $[a,b]$ má takúto vlastnosť.

*Dôkaz (LAS).* Nech $\mathcal{S}$ je rovnaký systém ako v predchádzajúcom dôkaze. Je zrejmé, že je aditívny. K bodom $a$, $b$ existujú intervaly $(c_a, d_a), (c_b, d_b) \in \mathcal{T}$, že $a \in (c_a, d_a)$, $b \in (c_b, d_b)$. Potom intervaly $\left[a, \frac{a + d_a}{2}\right] \cap [a,b]$, $\left[\frac{c_b + b}{2}, b\right] \cap [a,b]$ patria do $\mathcal{S}$. Nech $x \in (a,b)$. Potom ľubovoľný uzavretý podinterval intervalu $[a,b]$, pričom $x$ je jeho vnútorný bod a jeho dĺžka nepresahuje číslo $\delta(x)$ z prechádzajúceho dôkazu, patrí do $\mathcal{S}$. Ukázali sme, že $\mathcal{S}$ je lokálny aditívny systém intervalu $[a,b]$. Potom $[a,b] \in \mathcal{S}$ a tým je tvrdenie vety B dokázané.

*Dôkaz (IK).* Nech $M = (a, b]$ a $\varphi$ je výroková funkcia definovaná na $M$ takto: pre každé $x \in (a, b]$ $\varphi(x)$ označuje výrok „interval $[a, x]$ možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$“. Opäť dokážeme, že množina $M$ a výroková funkcia $\varphi$ spĺňa predpoklady vety 3. Existuje interval $(c, d) \in \mathcal{T}$, že $a \in (c, d)$. Potom pre každé $x \in \left(a, \frac{a+d}{2}\right] \cap M$ platí $\varphi(x)$. Nech pre každé $x \in (a, \beta]$ platí $\varphi(x)$, teda aj interval $[a, \beta]$ možno pokryť konečným počtom intervalov z $\mathcal{T}$. Stačí uvažovať $\beta \in (a, b)$. Existuje interval $I_\beta = (c_1, d_1) \in \mathcal{T}$, že $\beta \in I_\beta$. Potom každý interval $[a, x]$, kde $x \in \left(a, \frac{\beta+d_1}{2}\right] \cap M$, možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$ a teda pre každé takéto $x$ platí $\varphi(x)$. Z vety 3 potom vyplýva, že $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$ a teda aj pre bod $b$. To ale znamená, že interval $[a, b]$ možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$.

## Záver

Vety 3, 4 a 7 poskytujú jednotiace metódy dokazovania mnohých viet základov matematickej analýzy. Okrem uvedených ukážok možno pomocou nich dokázať napríklad tieto známe tvrdenia:

(1) Každá funkcia spojitá na uzavretom intervale nadobúda najmenšiu i najväčšiu hodnotu.

(2) Každá funkcia spojitá na uzavretom intervale je na ňom aj rovnomerne spojitá.

(3) Nech funkcia *f* je spojitá na intervale $[a, b]$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f(c) = 0$.

(4) Každá ohraničená monotónna postupnosť reálnych čísel má vlastnú limitu.

(5) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel konverguje práve vtedy, keď $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n > n_0\ |a_m - a_n| < \varepsilon$.

(6) Každá nekonečná ohraničená množina reálnych čísel má v $\mathbb{R}$ aspoň jeden hromadný bod.

(7) Ak funkcia *f* je spojitá na $[a, b]$, tak je tomto intervale riemannovsky integrovateľná.

Samozrejme uvedený zoznam tvrdení nie je úplný. Používanie uvedených stratégií v matematickej analýze prispieva k hlbšiemu pochopeniu jej základných pojmov, objasňujú sa tým jej teórie z rôznych strán. Takto sa aj osvojujú určité prvky matematických metód, upevňujú sa vedomosti a trénujú matematické zručnosti.

## Literatúra

[1] Chinčin, A.: Prostejšij linejnyj kontinuum. Moskva, Uspechy mat. nauk 4(1949), 180-197.

[2] Leinfelder, H.: A unifying principle in real analysis. Real Anal. Exchange 8(1982-83), 511-518.

[3] Šalát, T.: Remarks on unifying principles in real analysis. Real Anal. Exchange (1984-85), 341-348.

[4] Šalát, T.: Seminár z matematiky. Bratislava, MFF UK (1990), 132 s., ISBN 80-223-0312-7.

[5] Thomson, B.S.: On full covering properties. Real Anal. Exchange 6(1980-81), 77-91.

[6] Vrábel, P.: O dôkazovej technike v elementárnej analýze využívajúcej princíp indukcie v kontinuu. Nitra, FPV UKF Acta Math. 5(2002), 91-97, ISBN 80-8050-562-4.

[7] Vrábel, P.: O jednej metóde dôkazov v elementárnej analýze využívajúcej lokálny a aditívny systém intervalov. KU Ružomberok, Disputationes Scientificae 4(2004), ISSN 1335-9185.

*Článok prijatý dňa 22. jún 2012*

**Adresa autora**

*Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.*
*Katedra matematiky*
*Fakulta prírodných vied*
*Univerzita Konštantína Filozofa*
*Tr. A. Hlinku 1*
*SK – 949 74 Nitra*
e-mail: pvrabel@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# AKO NA L'HOSPITALA

# HOW TO MISUSE L'HÔPITAL'S RULE

MICHAL ZÁKOPČAN

**ABSTRAKT.** *Hlavnou motiváciou na napísanie tohto článku bola práca [1]. V článku sa venujeme vytváraniu takých limít typu "0/0" alebo "∞/∞", ktoré nie sú riešiteľné l'Hospitalovým pravidlom, čím poskytujeme motiváciu pre študentov matematickej analýzy učiť sa elementárne postupy.*

**KĽÚČOVÉ SLOVÁ**: *l'Hospitalovo pravidlo, limita funkcie, diferenciálna rovnica*

**ABSTRACT.** *The main motivation of this article is the work [1]. In the article we create such limits of types "0/0" or "∞/∞", which are not solvable by L'Hôpital's rule, as a motivation for students of Mathematical analysis to learn elementary techniques.*

**KEY WORDS:** *L'Hôpital's rule, limit of a function, differential equation*

**CLASSIFICATION:** *D55, I*

## Úvod

Tento článok je inšpirovaný prácou [1]. Cieľom autora tejto práce je poukázať na to, že hoci je l'Hospitalovo pravidlo nepochybne silným nástrojom na výpočet mnohých typov limít, nie vždy sa jeho použitím dopracujeme k výsledku, čo demonštruje na viacerých príkladoch. Takýmto spôsobom zároveň zdôvodňuje potrebu ovládania elementárnych postupov výpočtu limít, ktoré sa na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy môžu niektorým študentom javiť ako nepotrebné zručnosti.

Cieľom tohto článku je rozšíriť množinu typov limít, pre ktoré vzniká zacyklenie postupu riešenia použitím l'Hospitalovho pravidla, ako i nájsť ďalšie postupy na nájdenie takýchto typov. Rozšírenie sa bude týkať aj takých limít, v ktorých je možné a vhodné použiť l'Hospitalovo pravidlo v prvom kroku, aby sa vzápätí ukázalo, že ďalšie derivovanie nikam nevedie. Tým sa chce zdôrazniť najmä to, že niekedy je lepšie sa pri výpočte zastaviť, "poobzerať sa" a zistiť, či by sme sa k výsledku nedopracovali ľahšie elementárnymi postupmi. To je veľmi žiaduce pre formovanie strategického myslenia u študentov.

## Ako oklamať l'Hospitala

Vráťme sa k článku [1]. Autor v ňom na nájdenie vhodných limít $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ využíva trik spočívajúci v tom, že požaduje, aby platilo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{g(x)}{f(x)}\,. \tag{1}$$

Ďalej postupuje nasledujúcim spôsobom. Zo vzťahu (1) odvodzuje diferenciálnu rovnicu $f(x)f'(x)\,dx=g(x)g'(x)\,dx$.

Potom pre ľubovoľnú funkciu $f$ spĺňajúcu predpoklady l'Hospitalovho tvrdenia volí funkciu $g$ tak, aby platilo:

$$g(x) = \pm\sqrt{f^2(x) + c}, \tag{2}$$

kde $c$ je vhodná reálna konštanta. Ďalej stačí pracovať s $g(x) = \sqrt{f^2(x) + c}$.

Za predchádzajúcim odvodením vzťahu (2) nasleduje v práci [1] časť venovaná príkladom, v ktorých je možné tento vzťah využiť.

Tu vidíme priestor na ďalšie rozšírenie týchto typov úloh napríklad o nasledujúce úlohy:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^2 x + \frac{\pi^2}{4} - \pi \operatorname{arccotg} x}}, \text{resp.} \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin x}{\sqrt{\arccos^2 x + \frac{\pi^2}{4} - \pi \arccos x}},$$

v ktorých sa dajú využiť vzťahy $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, resp. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre každé $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Usudzujeme, že autor v práci [1] mal pri $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}}$ v skutočnosti na mysli $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}}$, pretože uvedená limita v nule neexistuje (limita sprava sa nerovná limite zľava). Podobné závery platia aj pre limitu $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$.

**Zovšeobecnenie**

Postup vedúci na vzťah (2), ktorý je prezentovaný v [1], možno zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom. Počítajme $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde funkcie $f, g$, definované na nejakom okolí bodu $a$, spĺňajú predpoklady l'Hospitalovho tvrdenia. Ide teda o limitu typu "$0/0$" alebo "$\infty/\infty$". Predpokladajme, že platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{g^m(x)}{f^n(x)}, \tag{3}$$

kde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom dvakrát aplikujúc l'Hospitalovo pravidlo dostávame:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g^m(x)}{f^n(x)} = \lim_{x\to a} \frac{m g^{m-1}(x) g'(x)}{n f^{n-1}(x) f'(x)} = \frac{m}{n} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vidíme, že sme sa dostali opäť k pôvodnej limite a nastalo zacyklenie.

Z (3) ďalej dostávame $f^n(x) f'(x)\, dx = g^m(x) g'(x)\, dx$. Pre ľubovoľné $f$ je riešením tejto diferenciálnej rovnice funkcia $g(x) = \left(\frac{m+1}{n+1} f^{n+1}(x) + c\right)^{\frac{1}{m+1}}$, kde konštantu $c$ volíme tak, aby daná limita bola typu "$0/0$" alebo "$\infty/\infty$".

Na rozdiel od počítania $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\left(\frac{m+1}{n+1}f^{n+1}(x)+c\right)^{\frac{1}{m+1}}}$ l'Hospitalovým pravidlom vedú elementárne postupy rýchlo k výsledku. Stačí preniesť čitateľa do menovateľa menovateľa a vojsť pod odmocninu.

### $\boldsymbol{n}$-násobný l'Hospital

Táto kapitola článku sa týka úvahy o zacyklení postupu riešenia limity typu "$0/0$" alebo "$\infty/\infty$", ak použijeme l'Hospitalovo pravidlo $n$-krát za sebou. (Od funkcií v čitateli i menovateli žiadame, aby boli aspoň $n$-krát diferencovateľné.) Hľadáme teda limity $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ také, že $f^{(n)}(x)=f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=g(x)$, alebo $f^{(n)}(x)=-f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=-g(x)$, kde pod označením $f^{(n)}$ sa myslí $n$-tá derivácia funkcie $f$. Táto úvaha vedie na dobre známu limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,. \tag{4}$$

Čitateľ aj menovateľ v nej vystupujúci sú riešeniami diferenciálnej rovnice $f''(x)=f(x)$ a preto použitie l'Hospitalovho pravidla dvakrát za sebou vedie k zacykleniu.

Riešenia diferenciálnych rovníc:

$$f^{(n)}(x)=\pm f(x), \tag{5}$$

kde $n\geq 2$, sú lineárnou kombináciou výrazov $e^x$, $e^{-x}$, $e^{-qx}(k\cos px+l\sin px)$, kde $k,l,p,q$ sú vhodné reálne konštanty

Napríklad riešením rovnice $f''(x)=-f(x)$ je $f(x)=k\cos x+l sin\,x$. Ak však chceme počítať limitu:

$$\lim_{x\to a}\frac{k\cos x+l sin\,x}{\tilde{k}\cos x+\tilde{l} sin\,x}\,, \tag{6}$$

l'Hospitalovým pravidlom, musíme voliť $a$ a konštanty $k$ a $l$ tak, aby bolo súčasne splnené $\lim\limits_{x\to a}(k\cos x+l\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}(-k\sin x+l\cos x)=0$. Resp. $\tilde{k},\tilde{l}$ volíme tak, aby $\lim\limits_{x\to a}\left(\tilde{k}\cos x+\tilde{l}\sin x\right)=0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a}\left(-\tilde{k}\sin x+\tilde{l}\cos x\right)=0$. To je ale možné len vtedy, keď $k=l=\tilde{k}=\tilde{l}=0$. S podobnými problémami sa stretávame aj pri riešeniach rovníc (5) pre $n\geq 3$.

Táto nepríjemnosť sa dá obísť tak, že budeme hľadať limitu, v ktorej vystupujú tieto riešenia, pre $x\to\pm\infty$. V prípade limity (6) to síce nepomôže, lebo limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos x$ neexistujú, ale už pre $n=3$ a rovnicu $f'''(x)=f(x)$ dostávame:

**Príklad 1:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}e^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}, \tag{7}$$

kde $m\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ a $\tilde{m}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sú riešenia $f'''(x)=f(x)$ a v nich vystupujúce $k,l,m,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{m}$ sú nejaké reálne konštanty.

Použijúc potom l'Hospitalovo pravidlo na hľadanie limity (7), kde napr. $m\neq 0$, $\tilde{m}\neq 0$, sa dostaneme do zacyklenia, nehovoriac o tom, že viackrát po sebe derivovať bez pomýlenia je v tomto prípade neľahká úloha. Pritom vypočítať (7) použitím elementárnych postupov je veľmi jednoduché:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{m\mathrm{e}^x\left[1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}}{m}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}{\tilde{m}\mathrm{e}^x\left[1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}}{\tilde{m}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}=\frac{m}{\tilde{m}}.$$

V niektorých prípadoch môžeme rovnako postupovať pri riešení rovníc (5) pre $n\geq 4$. Napríklad pre $n=4$ a rovnicu $f^{(4)}(x)=f(x)$ dostaneme limitu:

**Príklad 2:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^x+re^{-x}+k\cos x+l sin\, x}{\tilde{m}e^x+\tilde{r}e^{-x}+\tilde{k}\cos x+\tilde{l} sin\, x}.$$

Z pedagogického hľadiska však nemá zmysel venovať sa počítaniu limít, v ktorých vystupujú riešenia rovníc (5) pre $n\geq 5$, a to kvôli ich zložitosti.

Ešte poznamenajme, že pri hľadaní limít typu "$0/0$" alebo "$\infty/\infty$" nevhodných na použitie l'Hospitalovho pravidla sa rovnice (5) dajú zovšeobecniť na tvar:

$$f^{(n)}(x)=\alpha f(x), \tag{8}$$

kde $\alpha$ je nejaká nenulová reálna konštanta. Predchádzajúce úvahy viažuce sa na rovnice (5) nájdu uplatnenie aj v tomto prípade. Jediná zmena totiž nastane v tom, že riešenia rovnice (8) budú lineárnou kombináciou výrazov $e^{rx}$, $e^{-qx}(k\cos px+l\sin px)$. Rovnice (5) sú špeciálnym prípadom (8) pre $\alpha=1$, resp. $\alpha=-1$.

Oveľa zaujímavejšie je hľadať limity $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ také, že $f^{(n)}(x)=\alpha f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=\beta g(x)$, kde $\alpha\neq\beta$ sú nenulové konštanty.

Uvažujme napríklad $n=2,\alpha=1,\beta=4$. Dostaneme:

**Príklad 3:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^x+re^{-x}}{\tilde{m}e^{2x}+\tilde{r}e^{-2x}}, \tag{9}$$

kde čitateľ je riešením diferenciálnej rovnice $f''(x)=f(x)$ a menovateľ riešením diferenciálnej rovnice $f''(x)=4f(x)$. Uvažujúc napr. $m\neq 0$, $\tilde{m}\neq 0$ sa ľahko ukáže, že limita (9) sa rovná 0. Pritom použitie l'Hospitalovho pravidla vedie k zacykleniu. Navyše pri voľbe parametrov $\alpha, \beta$ sa nemusíme pre $n = 2$ obmedziť len na príklad (9). Stačí, ak budú oba parametre kladné. Pre jednoduchosť výpočtu je však dobré voliť $\alpha, \beta$ ako druhé mocniny prirodzených čísel.

Rovnako nule sa rovná nasledujúca limita:

**Príklad 4:**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{m\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \tilde{l}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)},$$

kde $k, l, m, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m}$ sú nejaké reálne konštanty, pričom $m \neq 0$, $\tilde{m} \neq 0$. V tejto limite je čitateľ riešením rovnice $f'''(x) = -f(x)$ a menovateľ riešením rovnice $f'''(x) = -27f(x)$. Použitie l'Hospitalovho pravidla aj tu vedie k zacykleniu.

S vymýšľaním príkladov sa dá pokračovať ďalej aj pre $n \geq 4$, avšak pre $n \geq 5$ je to pre zložitosť takýchto limít zbytočné a z hľadiska pedagogického procesu bezúčelné.

## O krok späť

Nakoniec sa ešte oboznámme s úlohami na výpočet limít typu "$0/0$" alebo "$\infty/\infty$", v ktorých použitie l'Hospitalovho pravidla má oprávnenie v prvom kroku, ale ďalej si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Uvádzame niekoľko príkladov.

**Príklad 5:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-1+x)e^{x} + (1+x)e^{-x}}{(-1+x)e^{x} - (1+x)e^{-x}}.$$

Po použití l'Hospitalovho pravidla dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-1+x)e^{x} + (1+x)e^{-x}}{(-1+x)e^{x} - (1+x)e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(e^{x} - e^{-x})}{x(e^{x} + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}},$$

čo je limita (4).

Pri výpočte limity však môžeme postupovať aj tak, že najprv spravíme jednoduchú úpravu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(-1+x)e^{x} + (1+x)e^{-x}}{(-1+x)e^{x} - (1+x)e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-1+x)e^{2x} + x + 1}{(-1+x)e^{2x} - x - 1}$$

a potom môžeme dopočítať limitu použitím l'Hospitalovho pravidla.

Vhodnou voľbou koeficientov pred každou mocninou $x$ vieme zvýšiť stupeň polynómov vystupujúcich v súčine s $e^{x}$, resp. s $e^{-x}$. Nasleduje príklad aj s úpravou.

**Príklad 6:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-2x+x^2)e^{x} + (1+2x+x^2)e^{-x}}{(1-2x+x^2)e^{x} - (1+2x+x^2)e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-1)(e^{x} - e^{-x})}{(x^2-1)(e^{x} + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

Veľmi vďačná na použitie metódy jednokrokového návratu späť je nasledujúca limita:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+c}}, \tag{10}$$

kde $c$ je ľubovoľná kladná reálna konštanta. Limita (10) je uvedená aj v práci [1]. Integrovaním čitateľa aj menovateľa v tejto limite dostaneme:

**Príklad 7:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{c}\left(x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right)\right)+\sqrt{e^{2x}+c}}. \tag{11}$$

Na jej výpočet môžu potom študenti raz použiť l'Hospitalovo pravidlo, ale ďalej musia postupovať len elementárnymi úpravami. Limita (11) je veľmi zaujímavá aj z toho hľadiska, že na to, aby mohli študenti použiť l'Hospitalovo pravidlo, musia ukázať, že limita menovateľa je naozaj $\infty$. Na to stačí ukázať, že výraz $x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right)\to 0$ pre $x\to\infty$. Overme to:

$$\lim_{x\to\infty} x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{e^x}{\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}} = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{1}{\frac{\sqrt{c}}{e^x}+\sqrt{1+\frac{c}{e^{2x}}}} = 0.$$

Vidíme, že už v tomto prvom kroku sa študenti stretávajú s riešením limity (10) v mierne "zakamuflovanej" podobe.

## Záver

L'Hospitalovo pravidlo patrí k silným nástrojom na výpočet veľkého počtu rôznych typov limít. Hlavným cieľom tohto článku, podobne ako v [1], bolo nájsť také typy limít, v ktorých je síce možné l'Hospitalovo pravidlo použiť, no k výsledku sa s jeho pomocou nedopracujeme. Tým sa dá zdôvodniť študentom na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy nevyhnutnosť ovládania elementárnych postupov na výpočet limít. Za týmto účelom sme vypracovali zovšeobecnenie výsledkov z práce [1], hľadali v riešeniach diferenciálnych rovníc $f^{(n)}(x)=\alpha f(x)$, či vypracovali limity, v ktorých je použitie l'Hospitalovho pravidla možné a oprávnené v prvom kroku, ale v ďalších sa bez elementárnych postupov zaobísť nedá.

## Literatúra

[1] Varga, M.: Ako oklamať l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 12, UKF, Nitra, 2009. Strany 275-278. ISBN 80-8094-614-2

*Článok prijatý dňa 20. júna 2012*

## Adresa autora

*Mgr. Michal Zákopčan, PhD.*
*Oddelenie matematiky Ústavu informatiky a matematiky*
*Fakulta elektrotechniky a informatiky*
*Slovenská technická univerzita*
*Ilkovičova 3*
*SK – 812 19 Bratislava*
e-mail: michal.zakopcan@stuba.sk

# POSTEROVÁ SEKCIA

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

# FAIRY TALE WORLD AS AN ENVIRONMENT FOR DEVELOPMENT OF PUPIL'S THINKING

JANA PŘÍHONSKÁ

**ABSTRACT**. *We will illustrate some of elaborated topics of students of primary school education. Students have solved problems in the Fairy tale world. We focus on motivation, diversity of problems, correctness, feasibility and currency of data and solving methods*

**KEY WORDS:** *fairy tale world, problem solving, motivation*

**CLASSIFICATION: A80, B50, D40**

## Motivating Environments for Solving Real Problems

In didactical subjects at Faculty of Science, Humanities and Education in Liberec, which are focused on task solving methods, we try to use different means to motivate the pupils – we create different model environments for the application mathematical knowledge to solve real-life problems. E.G. the following environments: garden, sports, building, hobbies, pets, shopping, transport, culture, nature, ZOO, cooking, travelling, mail, etc. Within the given environments, problems, which are thematically connected and supposed to put the pupils in a real situation, are being solved. We focus on motivation, diversity of problems, correctness, feasibility and currency of data, solving methods, overall elaboration and own topics. The goal is application of gained knowledge of mathematics in real life, cross-curricular link and increasing pupil's interest in solving mathematical problems. If we take the *Fairy tale world* (as a natural environment for kids of younger school age) into account, we can connect some of the mentioned themes with typical fairy tale characters and their stories. To solve and assign a specific problem, we can use the individual tales that the pupils have seen. Then we can discuss the problems, which the pupils can meet in real life. Thus we give some space for the development of a divergent thinking. In this contribution we will illustrate some of elaborated topics of students of primary school education. First of them deals with Building topic (connected with characters of PAT and MAT), second one with Postal (mail) service topic (connected with characters Postman PAT and his friend ALEX) and the third one with stories of Russian fairy tale "Just Wait Hare".

## Contact

*doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.*
*Katedra matematiky a didaktiky matematiky*
*Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická*
*Technická univerzita v Liberci*
*Studentská 2*
*ČR – 468 17 Liberec*
e-mail: jana.prihonska@tul.cz

# OBSAH

## POSTEROVÁ SEKCIA

| | |
|---|---|
| Názov: | Acta mathematica 15 |
| Vydavateľ: | Fakulta prírodných vied UKF v Nitre |
| Zostavovatelia: | prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. |
| | RNDr. Dušan Vallo, PhD. |
| | RNDr. Kitti Vidermanová, PhD. |
| Technická spolupráca: | PaedDr. Katarína Zverková |
| Rok vydania: | 2012 |
| Poradie vydania: | prvé |
| Počet strán: | 210 strán |
| Počet výtlačkov: | 100 ks |

Kategória publikačnej činnosti: AFD Publikované príspevky na domácich vedeckých konferenciách



ISBN : 978-80-558-0135-3

9 788055 801353