

NIEKTORÉ SÚČTOVÉ VZORCE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

SOME SUM FORMULAS IN MATHEMATICAL EDUCATION

LUKÁŠ LEDNICKÝ

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa zaoberáme niektorými súčtovými vzorcami, ich odvodením, ako aj dôkazom s využitím geometrickej interpretácie daného súčtu. Uvádzame štyri úlohy spolu s riešením, ktoré by mali pomôcť žiakom vytvoriť si ucelenejšie poznatky z matematiky.*

KEÚČOVÉ SLOVÁ: *Súčtové vzorce, geometrická interpretácia, matematická indukcia.*

ABSTRACT. *In this paper we deal with some sum formulas, their derivation and proof, using geometric interpretation of the sum. Here are four tasks and their procedure of solutions that would help students develop a more comprehensive knowledge of mathematics.*

KEY WORDS: *Sum formulas, geometric interpretation, mathematical induction.*

CLASSIFICATION: D14

Úvod

So súčtami členov postupností sa žiaci stretávajú pri učive o postupnostiach na gymnáziu. Špeciálne sa venujú aritmetickej a geometrickej postupnosti. S niektorými súčtami členov postupností prirodzených čísel sa však môžu stretnúť aj pri učive o matematickej indukcií. Tam sú im predložené vzorce na súčet všetkých prirodzených čísel od 1 po n , alebo súčet prvých n štvorcov. Tieto majú následne dokázať pomocou matematickej indukcie. V tomto príspevku chceme ukázať, ako je možné tieto vzťahy odvodiť a aj dokázať bez použitia matematickej indukcie. Takto chceme žiakom objavným spôsobom ukázať, ako sa dajú tieto a ďalšie podobné vzťahy odvodiť a dokázať. Úlohou žiakov bude skúmať jednotlivé súčty, vytvoriť ich vizualizáciu, vytvoriť hypotézu, ktorú budú musieť následne dokázať. Pri dôkaze sa budeme snažiť využívať geometricкую interpretáciu daných súčtov.

Niektoré súčtové vzorce a ich odvodenie

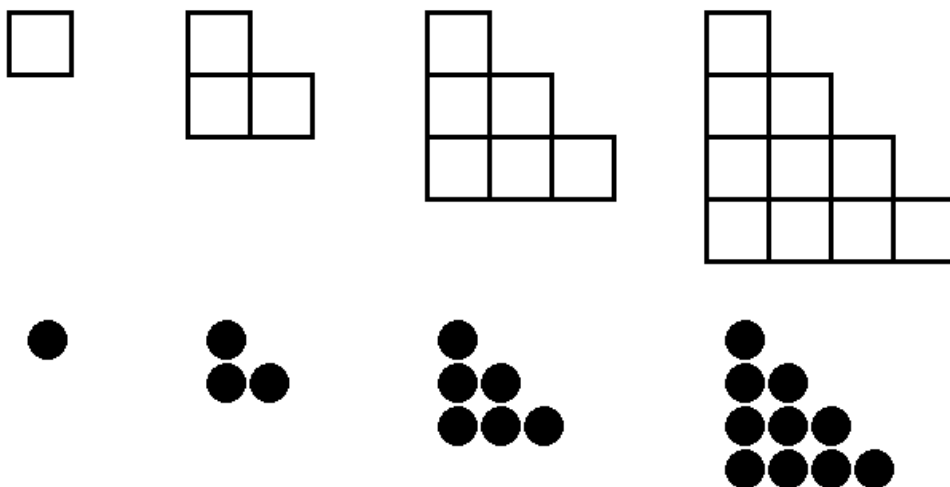
V dnešnej dobe je často kritizované, že sa žiakom predkladajú hotové poznatky miesto toho, aby si ich svojou vlastnou aktivitou vytvorili. V učive o matematickej indukcií žiaci dokazujú súčtové vzorce, o ktorých nevedia často takmer nič navyše ako napríklad spôsob ako ich odvodiť alebo historické pozadie odvodenia daných súčtov. Podľa nášho názoru je pre žiakov obohacujúce, ak dostanú možnosť na hodine získať takéto poznatky.

Teraz uvedieme niekoľko úloh aj s postupom ich riešenia, ktoré vedú k odvodeniu a dokázaniu niektorých súčtových vzorcov objavným spôsobom.

Úloha 1: *Nájdite vzorec na výpočet súčtu prvých n prirodzených čísel.*

Na úvod môžeme žiakom pre názornosť predviesť jeden konkrétny súčet pre zvolené n . Potom ich vyzveme, aby navrhli postup, ako nájsť nejaký vzorec na výpočet tohto súčtu pre ľubovoľné n . Najvhodnejšie sú návrhy, ktoré vedú k postupnému určovaniu hodnôt tohto súčtu pre rôzne hodnoty n , na základe ktorých môžeme vytvoriť hypotézu. Súčasne

od žiakov žiadame, aby navrhli vhodnú reprezentáciu tohto súčtu obrázkom. Existuje niekoľko možností, ktoré žiaci môžu navrhnúť (úsečky s dĺžkami 1 cm, 2 cm, ... vytvoria jednu úsečku; rovnaké geometrické objekty usporiadať do vhodného tvaru; a pod.). Tu môžeme žiakom položiť otázku, ktorý návrh je najvhodnejšie použiť? Geometrická interpretácia prostredníctvom úsečiek je analógiou k postupnému pripočítavaniu čísel. Lepšie je použiť usporiadanie nejakých geometrických útvarov (kruhy, štvorce, a iné) do vhodných zoskupení alebo tvarov, napríklad do trojuholníka (viď obrázok 1).



Obrázok 1

Každý z týchto trojuholníkov je možné doplniť rovnakým trojuholníkom na obdĺžnik. Túto skutočnosť musia žiaci objaviť, aby mohli sformulovať potrebnú hypotézu. Správna hypotéza je

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Tento postup je istou obmenou postupu, ktorý objavil Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) pri hľadaní súčtu čísel od 1 do 100. Sčítaním prvého a posledného čísla, druhého a predposledného čísla, atď. získame vždy rovnaký súčet $n+1$. Týchto dvojíc je však polovica z celkového počtu sčítavaných čísel. Celkový súčet je potom rovný $\frac{n}{2}(n+1)$. Pre nepárne n je potrebné uvážiť, že prostredné číslo nebude možné sčítať s ďalším číslom. V takomto prípade je možno ešte vhodnejším postupom pripočítavať k danému súčtu rovnaký súčet, ale v opačnom poradí. Takto vytvoríme dvojice, ktorých súčet je $n+1$ a ich počet je n . Potom hľadaný súčet je rovný polovici zo súčinu $n(n+1)$. Tento postup môžeme zapísať takto:

$$\begin{aligned} 2s &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1) = \\ &= (1 + n) + (2 + n-1) + (3 + n-2) + \dots + (n+1) = n(n+1). \end{aligned}$$

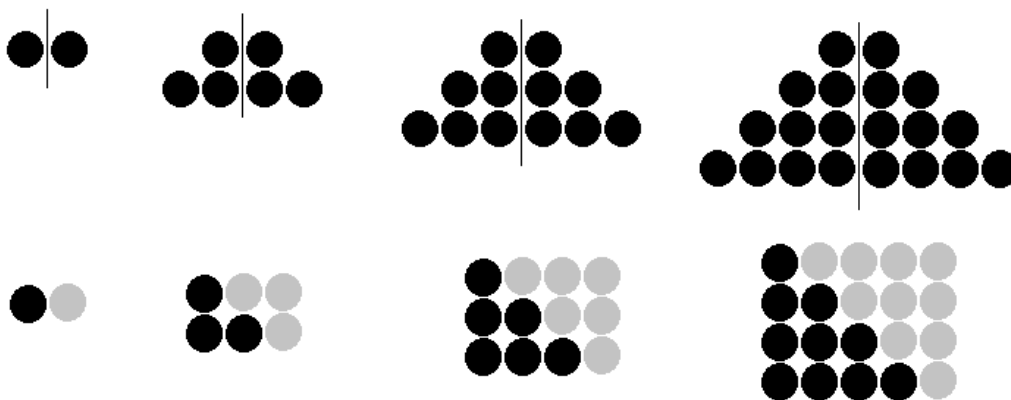
Okrem spomínanej hypotézy je možné, že žiaci navrhnu aj niektoré iné. Ak interpretujú daný súčet ako obsah pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžky n , tak vytvoria hypotézu

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2}.$$

Použitím zvolenej geometrickej interpretácie hypotézu aj dokážeme.

Úloha 2: *Nájdite súčet prvých n párnych prirodzených čísel.*

Použijeme analogický postup ako v predchádzajúcej úlohe. Rozdiel nastane až pri geometrickej interpretácii daných súčtov. Ak zvolíme podobnú interpretáciu ako v predchádzajúcej úlohe, tak vznikne pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny tvorí n a $2n$ zvolených objektov. Znova je možné každý z týchto trojuholníkov doplniť rovnakým trojuholníkom na obdĺžnik so stranami n a $2n+2$. Iný spôsob usporiadania môžeme vidieť na obrázku 2. Každý lichobežník na obrázku je možné rozdeliť na 2 zhodné trojuholníky, ktoré spolu vytvárajú obdĺžnik so stranami n a $n+1$.



Obrázok 2

Obidva postupy vedú k správnej hypotéze

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1).$$

Platnosť tejto hypotézy dokážeme opäť prostredníctvom úvahy a zvolenej geometrickej interpretácie.

Úloha 3: *Nájdite súčet prvých n nepárnych prirodzených čísel.*

V tejto úlohe bude opäť postup analogický s postupmi v oboch predchádzajúcich úlohách. Rozdiel znova nastáva pri zvolení vhodnej geometrickej interpretácie. Geometrické interpretácie z oboch predchádzajúcich úloh sa dajú použiť aj tu. Okrem nich je možné použiť ešte názornejší spôsob. Po vypočítaní niekoľkých súčtov pre zvolené hodnoty n zistíme, že výsledkom je vždy druhá mocnina počtu sčítavaných čísel. Jednotlivé nepárne čísla, reprezentované daným počtom zvolených geometrických objektov, skúsime rozmiestniť tak, aby tvorili štvorec. Na obrázku vidíme toto usporiadanie. Potom už ľahko vytvoríme hypotézu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

ktorú následne dokážeme.



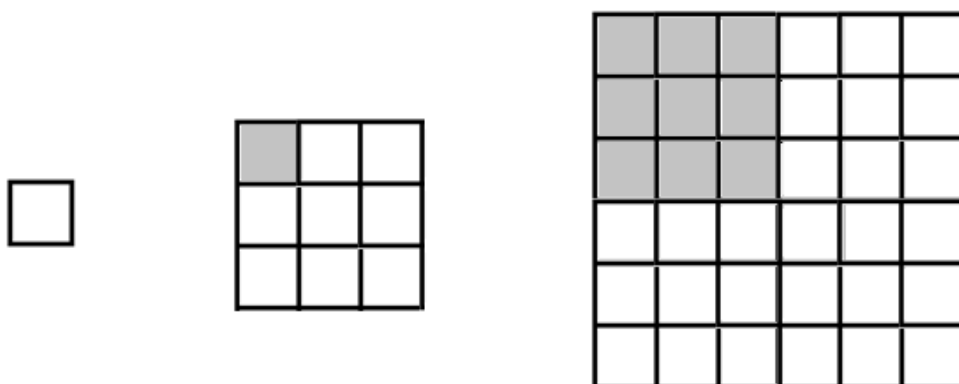
Obrázok 3

Úloha 4: *Nájdite súčet tretích mocnín prvých n prirodzených čísel.*

Začnime znova vypočítaním niekoľkých súčtov. Žiaci z výsledkov by mali zistiť, že súčet je vždy druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla. Na zistenie, ako toto prirodzené číslo závisí od zvoleného počtu sčítavaných tretích mocnín použijeme vhodné usporiadanie zvolených objektov. Môžeme použiť štvorčeky papiera alebo môžu žiaci priamo kresliť na papier. Musia potrebný počet štvorčekov usporiadať do tvaru štvorca. Dĺžka strana tohto štvorca sa rovná súčtu prvých n prirodzených čísel. S využitím tohto faktu a poznatku z prvej úlohy žiaci vytvoria hypotézu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Dôkaz hypotézy vykonáme úvahou s využitím opísanej geometrickej interpretácie.



Obrázok 4

Poznámka 1:

Vo vyššie uvedených postupoch sa hovorí o usporiadaní geometrických objektov do tvaru trojuholníka, lichobežníka, obdĺžnika a štvorca. V prípade ak n je rovné 1, tieto tvary nemusia vzniknúť. Tento prípad môžeme chápať napríklad ako pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 1.

Poznámka 2:

Vo vyššie uvedených postupoch sme uviedli, že dôkaz vykonáme úvahou s využitím zvolenej geometrickej interpretácie. Mnohí matematici takýto spôsob „dôkazu“ neuznávajú. Na druhej strane sú však matematici, ktorí ho akceptujú. Podľa nášho názoru je tento spôsob dokazovania pre potreby školskej praxe prijateľný.

Záver

Vyššie uvedené úlohy a postupy ich riešenia by mali podporiť implementáciu objavného vyučovania na hodinách matematiky. Pri riešení týchto úloh žiaci musia uplatniť rôzne procesy objavného vyučovania, ako napríklad vizualizáciu, tvorbu hypotéz, experimentovanie. Tieto úlohy je možné zaradiť do učiva o matematickej indukcií, ktorá však už nie je povinným učivom predmetu matematika na gymnáziách. Predložené postupy sa môžu využiť na odvodenie daných súčtových vzorcov a ich dôkaz sa môže vykonať matematickou indukciou. Takto môžu žiaci získať ucelenejší obraz o tvorbe matematických poznatkov a ich dokazovaní.

Literatúra

- [1] Fulier, J., Šedivý, O. (2001). Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky. Nitra, Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa, 2001. ISBN 80-8050-445-8.
- [2] Nelsen R. (1993). Proofs without words. The mathematical Association of America, 1993. ISBN 0-883857006.
- [3] Nelsen R. (2000). Proofs without words II. The Mathematical Association of America, 2000. ISBN 0-88385-721-9.

Článok prijatý dňa 3. júla 2012

Adresa autorov

*Mgr. Lukáš Lednický
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: lukas.lednický@ukf.sk*