

MOTIVACE NADANÝCH STUDENTŮ PROSTŘEDNICTVÍM MARKOVOVÝCH ŘETĚZŮ

MOTIVATION OF GIFTED STUDENTS USING THE CHAINS OF MARKOF

JIŘINA NOVOTNÁ

ABSTRAKT. *Prezentujeme příklad z genetiky, jeho tři matematické modely a řešení užitím Markovových řetězů. Matematické prostředky řešení jsou zvoleny tak, aby je byli schopni akceptovat matematicky nadaní studenti středních škol v rámci rozšiřování učiva s využitím mezipředmětových vztahů.*

KLÍČOVÉ SLOVÁ: *nadaní studenti, motivace, Markovovy řetězy, matematické modely*

ABSTRACT. *Three mathematical models of a genetic problem and its solving by the chains of Markof are presented as an example of special education of gifted students. In the compliance with it mathematics is chosen to be easy to understand for such gifted students of secondary schools in framework of the curriculum development by using of interdisciplinary relations.*

KEY WORDS: *gifted students, motivation, chains of Markof, mathematical models*

CLASSIFICATION: D55.

Úvod – matematika a nadaní žáci

Matematika (z řec. μαθηματικός (*mathematikós*) znamená milující poznání; μάθημα (*máthema*) značí vědu, vědění, poznání), matematika je tedy věda, zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Dle Olejáre [4] se bez matematiky neobejde žádná vědecká disciplína, matematické poznatky, zvláště pak logika, tvoří pozadí každé vědy.

Zákony matematické statistiky, aplikované na soubory s velkým počtem prvků, jsou neúprosné: měřené veličiny jsou zpravidla symetricky rozloženy kolem jisté střední hodnoty, charakteristické pro největší počet prvků, jedná se o Gaussovo či normální rozložení pravděpodobnosti. Nejinak je tomu i v případě našeho zájmu o nadání populace žáků např. v celé ČR. Kromě žáků zaostávajících (na jednom konci spektra) se zde vyskytují i žáci nadprůměrně nadaní na opačném konci spektra. Zdá se, že pro matematické, přírodovědné a technické nadání symetrie neplatí a že je mnohem více žáků, pro které jsou tyto obory velmi obtížné než těch, kteří mají pro ně nadání. Ve skutečnosti však víc jak polovina těchto talentů zůstane neodhalena. Navíc podle posledních výzkumů se dokonce stává, že i když se talent dítěte pro matematiku projeví, tak se s ním dál nepracuje! Nelze tvrdit, že nadprůměrným studentům je poskytováno speciální vzdělání, které by rozvíjelo jejich vrozený potenciál a tak dochází ke ztrátě talentů a následně k nevyčíslitelným škodám ve vědě, technice, umění, apod.

Při analýze současných teorií nadání [1] zjistíme, že téměř vždy se v nich nachází silný motivační prvek. Nadaný jedinec je silně vnitřně motivován, nejčastěji v podobě zájmu o danou oblast. Tento zájem je těsně spjat s nadáním, má však svoji historii. Zájem musí být v člověku podnícen a rozvíjen a zde je právě nezastupitelná role nejen učitelů, ale i rodičů.

V následující kapitole prezentujeme motivační úlohu pro nadané studenty středních škol, jde o rozšiřující přístup, o mezioborovou integraci, na rozdíl od akceleračního přístupu k nadaným jedincům. Struktury – stromové diagramy, se kterými se při řešení úlohy pracuje, jsou vlastně polosvazy a zde by byla další možnost rozšíření matematických poznatků směrem k teorii matematických struktur.

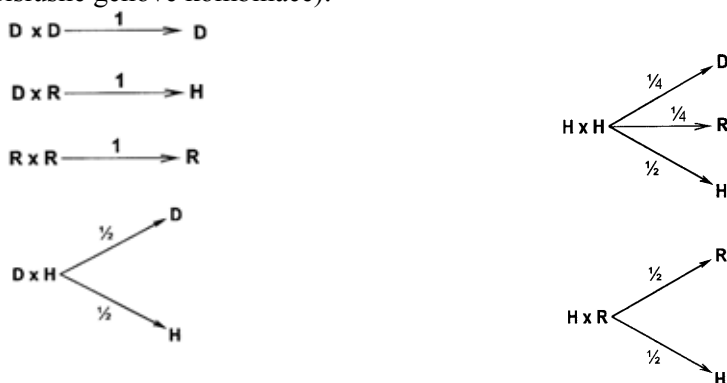
Před řešením úlohy doporučujeme krátkou zmínku o G. J. Mendelovi (1822-1884), světoznámém zakladateli genetiky. Kdyby si býval G. J. Mendel nezapsal navíc v době svých univerzitních studií přednášky z matematiky, ačkoliv studoval fyziku a přírodopis, těžko by se setkal se spisem Ettingshausenovým: *Die combinatorische Analysis*, v němž našel matematické modely pro svoji práci. Na základě vlastních předběžných pokusů a kombinatorických úvah dospěl Mendel k této domněnce: Zjistí-li se počet různých forem, které se vyskytují v potomstvu kříženců a stanoví-li se numerické vztahy mezi nimi, pak bude možno porozumět procesům spojeným s přenosem znaků z rodičů na potomky.

Křížení fazolí – řešená úloha

Křížíme fazole s červenými a bílými květy. Charakteristický znak barvy květů je určován dvojicí genů, z nichž každý může být jednoho ze dvou typů, které označíme písmeny G – červenokvětost a g – bílokvětost. U jedince se mohou vyskytovat tyto dva typy genů v tomto uspořádání – GG; (Gg; gG); které jsou geneticky totožné; a gg. Kombinace GG a Gg jsou navenek barevně nerozpoznatelné. Tomuto případu říkáme, že gen G dominuje nad genem g.

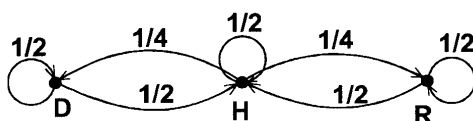
Každý potomek zdědí po jednom genu od jednoho rodiče. Existují tedy tři typy potomků: **Dominantní D** s geny GG, **hybridní H** s geny Gg a **recesivní R** s geny gg. Otázkou je, s jakou pravděpodobností dostaneme potomka dominantního, hybridního či recesivního po mnohokrát opakovaném křížení s různými jedinci nezávisle na genetickém charakteru původního jedince.

Při křížení jedinců nastávají tyto případy (číslo nad šipkou udává pravděpodobnost příslušné genové kombinace):



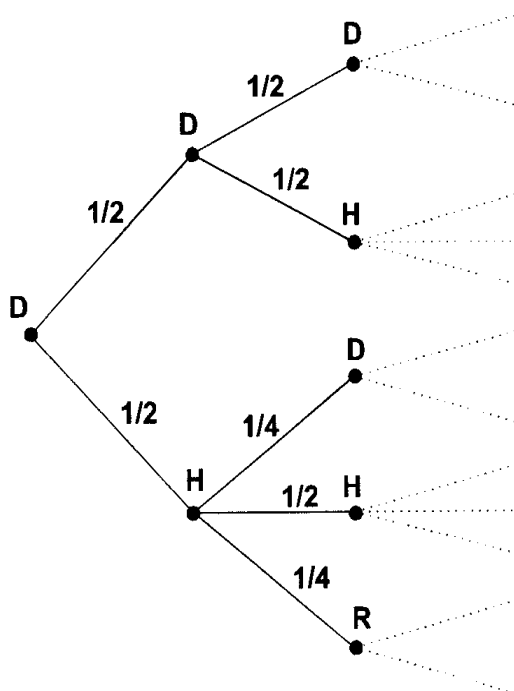
1. Probíhá proces postupného křížení, kde začneme s jedincem neznámého genetického charakteru a zkřížíme ho s **hybridem**. Jejich potomka dále s hybridem, atd.

Diagram přechodu:



$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D \\ H \\ R \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ H \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Strom, jehož kořenem je dominantní jedinec, vypadá takto:



Výpočet pravděpodobnostního vektoru po n -tém křížení: $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$, kde $\mathbf{p}_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Součin $\mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$ aproximujeme pevným vektorem $\mathbf{w}=(x, y, z)$ matice $\mathbf{P}$.

Platí:

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Získáme soustavu tří rovnic o třech neznámých a k této soustavě přidáme následující rovnici: $x+y+z = 1$. Po vyřešení obdržíme vektor: $w = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Budeme-li opakovaně křížit fazole nezávisle na genetickém charakteru původního jedince, získáme s pravděpodobností $P(D) = \frac{1}{4}$ potomka dominantního, potomka hybridního s pravděpodobností $P(H) = \frac{1}{2}$ a potomka recesivního s pravděpodobností $P(R) = \frac{1}{4}$.

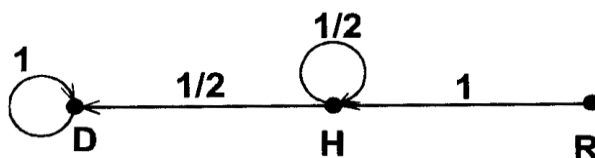
2. Když jedince neznámého genetického charakteru zkřížíme s jedincem dominantním či recesivním, půjde opět o Markovův řetězec, ale matice přechodu bude mít jiný tvar.

A) Křížení s jedincem dominantním.

Matice přechodu:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & H & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ H \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Přechodový diagram má tvar:



Strom odpovídající této matici by se sestrojil obdobně jako v předchozím případě.

Platí:

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ze soustavy rovnic:

$$x = x + \frac{1}{2}y$$

$$y = \frac{1}{2}y + z$$

$$z = 0$$

$$1 = x + y + z$$

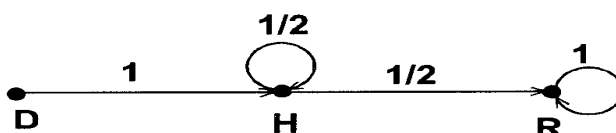
získáme vektor $\mathbf{w} = (1,0,0)$. Po opakovaném křížení nějakého jedince s jedincem dominantním bude potomek s pravděpodobností $P(D) = 1$ dominantní jedinec. Jedná se o absorbující Markovův řetězec.

B) Křížením jedincem **recesivním**.

Přechodová matice:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & H & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ H \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Přechodový diagram:



Platí rovnost:

$$(x, y, z) = (x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po vyřešení příslušné soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých obdržíme vektor $\mathbf{w} = (0,0,1)$. Opět jde o absorbující Markovův řetězec. Pravděpodobnost toho, že potomci budou recesivního typu, je $P(R) = 1$.

Závěr/diskuse

Domníváme se, že matematické modely použité při řešení předchozí úlohy jsou přiměřené myšlenkovému potenciálu nadaných žáků. Stromové diagramy sice nejsou v naší republice zařazené do povinného matematického učiva, ale z výzkumů uveďme např. J. Příhonskou [5] vyplývá, že jsou je schopni pochopit i žáci na 1. stupni základní školy. Násobení matic je sice obtížnější algebraická operace, ale na středních ekonomických školách byla běžně probírána. Z vlastní zkušenosti z práce s nadanými žáky vím, že jsou nejen schopni prakticky zvládnout algoritmus násobení matic, ale dokonce ho i naprogramovat v Pascalu. Poznoteček, že součin $\mathbf{p}_0 \mathbf{P}^n$ lze aproximovat pevným vektorem $\mathbf{w}$ příslušné stochastické matice $\mathbf{P}$, sice studenti musí přijmout bez důkazu, ale možná, že je vyprovokuje k hledání odpovědi na otázku: *Proč a za jakých podmínek je tato aproximace možná?*

Řešení úlohy bylo vyzkoušeno v rámci matematického semináře na gymnáziu Slovanské náměstí v Brně. Vyučující překvapil velký motivační náboj historické zmínky o J. G. Mendelovi, dvě studentky navrhly, že si připraví o něm projekt. Úloha podnítila zájem studentů nejen o matematiku, ale i o genetiku. Při řešení úlohy si studenti dobře uvědomili, že bez matematiky nelze řešit problémy z mnoha oblastí lidské činnosti a že matematika má účinné prostředky nejen při řešení, ale i při formulaci problémů. Mohli také porovnávat efektivitu a výpovědní hodnotu tří prezentovaných modelů. Máme

připravenou sérii pěti úloh, jejichž řešení vede na Markovovy řetězy, vzhledem k rozsahu článku ji prezentujeme jednou z úloh.

Bylo by dobré, kdyby si nejen studenti, ale i tvůrci školských vzdělávacích dokumentů uvědomili, že bez matematiky by nikdy nebyla možná např. elektrifikace, rádiové a televizní přenosy, nikdy by nevznikly počítače, lodě, rakety a kosmické lodě, v lékařství by neexistovaly moderní vyšetřovací metody jako RTG, EKG, EEG, počítačová tomografie, atd. Vždyť význam matematiky si uvědomoval i J. A. Komenský, který téměř před čtyřmi stoletími prohlásil: „*Bez matematiky nemůže člověk nic dělati, ani díla Boží studovati, ani díla tvořiti*“.

Literatura

- [1] Davis, G. A., Rimmová, S. B., Education of the Gifted and Talented. (1998). Needham Hights: Allyn a Bacon, 1998. ISBN 0-205-2700-X.
- [2] Kemeny, J., G., Snell, J., L., Thompson, G., L.. (1971). Úvod do finitní matematiky. Praha, SNTL, 1971. 470 s.
- [3] Novotná, J. Matematika v Mendelových objevech. (2003) In Matem. a didaktika matem., Sborník prací, č.171, Brno, Katedra matematiky, Pedag. fak. MU v Brně, 2003. 6s. ISBN 80-210-331-8.
- [4] Olejár, M. a kol. Úvod do viedy. (2011). Bratislava: Young Scientist. 2011. 86 s. ISBN 80-88792-33-9.
- [5] Příhonská, J.: The “Sets of generated problems” with a view to use the graph coding close to solving of given problems. (2003). In: Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Folia 16, Studia mathematica III. Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Krakow 2003, s. 207-215. ISSN 1643-6555

Článok prijatý dňa 11. júla 2012

Adresa autorů

PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D.

Katedra matematiky

Fakulta pedagogická

Univerzita Masarykova

Poříčí č. 31

ČR – 603 00 Brno

e-mail: novotna@ped.muni.cz

Pod'akovanie - Acknowledgement

Článek je výsledkem výzkumu v oblasti matematiky a speciální pedagogiky a vznikl v rámci řešení výzkumného záměru VZ MSM 00211622443 Speciální potřeby žáků v kontextu RVP pro základní vzdělávání, jehož řešitelkou je prof. PhDr. Marie Vítková, CSc.