FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

ANALÝZA ŽIACKYCH RIEŠENÍ ÚLOHY Z MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

THE ANALYSIS OF PUPILS' SOLUTIONS OF THE TASK FROM MATHEMATICAL OLYMPIAD

MIROSLAVA SOVIČOVÁ, SOŇA ČERETKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku sa zaoberáme analýzou písomných riešení žiakov, ktorí sa zúčastnili krajského kola kategórie C Matematickej olympiády v roku 2012. Žiacke riešenia vybranej úlohy analyzujeme na základe a priori analýzy možných riešení tejto úlohy. Úloha patrí do kategórie izolovaných problémov. Je vhodné podobné problémy predstaviť aj žiakom, ktorí nie sú riešiteľmi Matematickej olympiády. V príspevku uvedieme vybrané podobné problémy.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *a priori analýza, žiacke riešenia, izolované problémy, Matematická olympiáda*

ABSTRACT. *In the contribution, we deal with the analysis of written solutions of pupils who attended the county round of C category in Mathematics Olympiad in 2012. We analyse pupils' solutions of a chosen task on the basis of a priori analysis of its possible solutions. The task belongs to the category of isolated problems. It is suitable to introduce similar problems also to pupils who do not attend Mathematical Olympiad. We offer more problems from this category in the contribution.*

KEY WORDS: *a priori analysis, pupils' solutions, isolated problems, Mathematical Olympiad*

CLASSIFICATION: *D54*

Úvod

Matematická olympiáda je súťaž žiakov základných a stredných škôl, ktorú vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov a Slovenskou komisiou Matematickej olympiády. V školskom roku 2011/2012 bol zorganizovaný už 61. ročník Matematickej olympiády. Súťaž má viacero kategórií, v príspevku sa orientujeme na krajské kolo kategórie C. Táto kategória je určená pre žiakov stredných škôl, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky, t.j. pre prvákov štvorročných gymnázií a kvintánov z osemročných gymnázií.

Krajské kolo Matematickej olympiády kategórie C sa konalo v utorok, 17. apríla 2012. V Nitrianskom kraji sa krajského kola kategórie C zúčastnilo spolu 42 žiakov zo 16 stredných škôl. Zadanie obsahovalo štyri úlohy, každá z týchto úloh patrí do kategórie izolovaných problémov. V našom príspevku sa zameriavame na analýzu žiackych riešení jednej z úloh.

Teoretické východiská

Izolovaný problém je taká úloha na určitom stupni vzdelávania v matematike, ktorá je pre žiaka netradičnou úlohou svojim zadaním, ale najmä postupom riešenia, jeho riešenie si vyžaduje matematické skúmanie. Počiatočná situácia je v zadaní izolovaného problému presne popísaná, cesta k cieľu nie je známa (t.j. je otvorená) a ani cieľ, ktorý má žiak dosiahnuť, nie je presne daný alebo nie je daný vôbec (t.j. cieľ je otvorený) [1]. Pojmom izolovaný problém zvyčajne označujeme úlohu, ktorej riešenie nie je na prvý pohľad, resp.

po prvom prečítaní, z dovtedy získaných vedomostí v matematike zrejmé. Žiak sa predtým s podobnou alebo analogickou úlohou nestretol. Nedokáže okamžite nájsť postup riešenia. Dokáže však problém analyzovať, načrtnúť riešenie čiastkových úloh, ktoré si riešenie izolovaného problému vyžaduje a neskôr, „vyskladať" riešenie izolovaného problému ako celku. Typickými príkladmi izolovaných problémov sú úlohy matematických súťaží, najmä úlohy Matematickej olympiády [2].

Metódy

Na analýzu riešiteľského postupu žiakov, ktorí sa zúčastnili krajského kola kategórie C Matematickej olympiády v Nitre, sme zo zadania vybrali úlohu č.1:
Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť $x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2$.

V rámci prípravy na analýzu žiackych riešení úlohy z Matematickej olympiády sme ešte pred samotnou analýzou a nahliadnutím do žiackych riešení urobili a priori analýzu predpokladaného postupu riešenia úlohy žiakmi a určili premenné a priori analýzy (Tab. 1) [3].

	Premenné analýzy predpokladaného postupu riešenia úlohy
P.1	Žiak overil nerovnosť pre konkrétne trojice čísel.
P.2	Žiak ovláda vzorec pre druhú mocninu trojčlena.
P.3	Žiak upravil pravú stranu roznásobením.
P.4	Žiak správne použil ekvivalentné úpravy pre nerovnosti.
P.5	Žiak správne použil vynímanie pred zátvorku.
P.6	Žiak dokázal rozhodnúť, či rozdiel dvoch premenných bude kladné alebo záporné číslo.
P.7	Žiak vedel rozhodnúť, či súčin dvoch výrazov v zátvorkách bude kladné alebo záporné číslo.
P.8	Žiak dokázal posúdiť, či pravá, resp. ľavá strana upravená na súčin spĺňa predpoklad.
P.9	Žiak dokázal pôvodnú nerovnosť tak, že dokázal nerovnosť s ňou ekvivalentnú.
P.10	Žiak uviedol v riešení, že ak dokáže ekvivalentnú nerovnosť, dokáže aj nerovnosť pôvodnú.

Tabuľka 1: Premenné a priori analýzy.

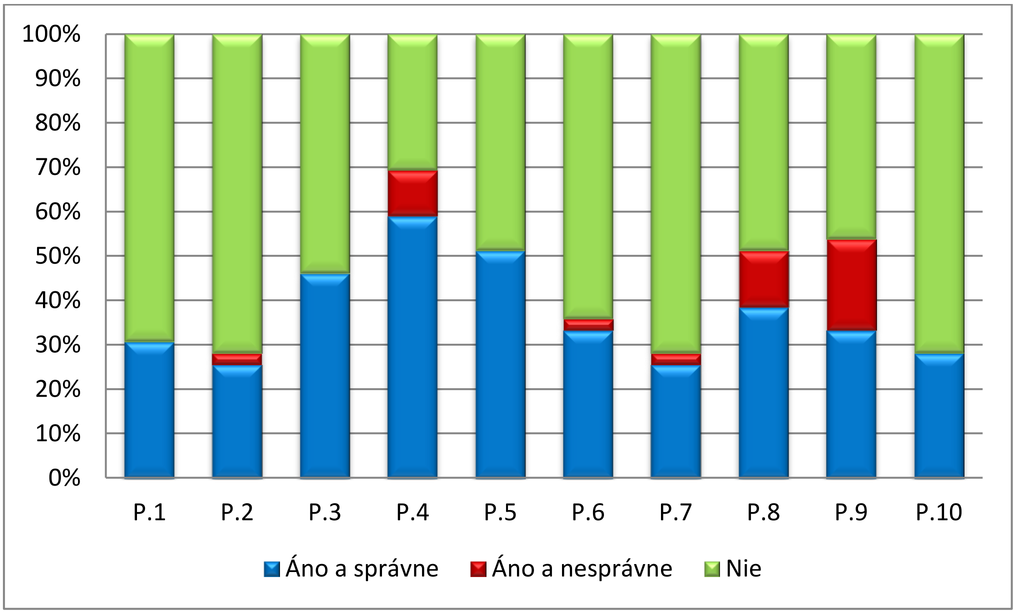
Podľa týchto premenných predpokladaného postupu riešenia boli následne analyzované riešenia žiakov.

Diskusia

Zo 42 žiakov, ktorí sa krajského kola kategórie C zúčastnili, úlohu č.1 aspoň začalo riešiť 39 žiakov. Maximálny počet bodov, ktorí mohli žiaci za riešenie úlohy získať, bolo 6 bodov. Body žiaci získavajú nielen za správne riešenie, ale tiež za postup pri riešení a dôvodenie. Viac ako polovica bodov bola za riešenie úlohy udelená štrnástim žiakom, z toho trinásť žiakov získalo za riešenie úlohy plný počet bodov, a teda úlohu správne vyriešili až do konca.

Pri riešení si väčšina žiakov zvolila rovnaký postup, aký sme predpokladali v a priori analýze riešenia danej úlohy. Iný postup riešenia si zvolilo dvanásť žiakov, ale len v troch prípadoch bol tento postup správny a žiak platnosť nerovnosti dokázal. V ostatných deviatich prípadoch žiaci nesprávne upravili výraz na pravej strane nerovnosti, resp. použili pri svojom riešení neekvivalentné úpravy, a teda nerovnosť, ktorú na konci riešenia dostali a ktorej platnosť mala potvrdiť platnosť pôvodnej nerovnosti, nebola s pôvodnou nerovnosťou zo zadania úlohy ekvivalentná.

Nasledujúci graf (Graf 1) znázorňuje zastúpenie premenných vyplývajúcich z písomných riešení žiakov. Ak sa v žiackom riešení nachádzal údaj charakterizovaný jednotlivými premennými a jeho použitie bolo správne, premennú sme pri konkrétnom riešení označili „Áno a správne“. Ak sa síce údaj v riešení nachádzal, ale jeho použitie bolo nesprávne, premennú sme označili „Áno a nesprávne“. Ak premenná v riešení zastúpená nebola, označili sme ju ako „Nie“.



Graf 1: Zastúpenie premenných a priori analýzy v písomných riešeniach žiakov.

Z grafu (Graf 1) je zrejmé, že dvanásť žiakov v riešení úlohy overilo platnosť nerovnosti pre konkrétne zvolené usporiadané trojice čísel, ostatní žiaci sa pokúsili nerovnosť dokázať hneď pre všeobecne zvolené usporiadané trojice reálnych čísel x, y, z. Z analýzy žiackych riešení tiež vyplynulo, že osem žiakov bolo schopných riešiť túto úlohu len numericky, a teda po overení platnosti nerovnosti len pre niektoré vybrané usporiadané trojice čísel x, y, z ďalej v riešení nepokračovali.

V prvom kroku všeobecného dôkazu nerovnosti (premenné P.2 a P.3) žiaci výraz na pravej strane nerovnosti častejšie upravovali jeho rozpísaním na dve zátvorky a následným roznásobením (osemnásť žiakov) ako použitím vzorca pre druhú mocninu trojčlena (desať žiakov, z toho jeden žiak použil vzorec nesprávne). Dôvodom mohlo byť napríklad to, že vzorec pre druhú mocninu trojčlena nepoznajú, resp. mali obavy, že sa pri úprave spamäti podľa vzorca môžu pomýliť.

Z údajov ďalej vyplýva, že väčšina žiakov, ktorí vo svojom riešení upravovali obe strany nerovnosti použitím ekvivalentných úprav (premenná P.4), vybrané ekvivalentné úpravy použila správne. Žiaden zo žiakov, ktorí pri úprave nerovnosti použili vynímanie pred zátvorku (premenná P.5), pri úprave neurobil chybu.

V časti riešenia, keď žiaci upravili nerovnosť do tvaru, v ktorom na jednej strane nerovnosti mali číslo 0 a na druhej strane výraz upravený na súčin, bolo dôležitým krokom vedieť rozhodnúť, či rozdiel dvoch premenných, resp. súčin dvoch výrazov v zátvorkách bude kladné alebo záporné číslo (premenné P.6 a P.7). Tento krok bol problémový len pre jedného žiaka, ostatní žiaci (trinásti pri premennej P.6, desiati pri premennej P.7) s rozhodnutím, či pôjde o kladné alebo záporné číslo, problém nemali.

V záverečnej fáze riešenia mali žiaci posúdiť, či pravá, resp. ľavá strana nerovnosti upravená na súčin spĺňa predpoklad zo zadania úlohy (premenná P.8). Piatim z dvadsiatich žiakov robilo toto rozhodnutie problém, čo mohlo byť u niektorých z nich spôsobené aj tým, že nesprávnymi úpravami dostali nerovnosť v tvare, ktorá nebola ekvivalentná s pôvodnou nerovnosťou zo zadania.

Ako sme už uviedli, správny dôkaz nerovnosti uviedlo trinásť žiakov, ktorí platnosť pôvodnej nerovnosti dokázali tak, že dokázali platnosť nerovnosti s ňou ekvivalentnej (premenná P.9). Iba jedenásť žiakov túto skutočnosť vo svojom riešení aj slovne opísalo (premenná P.10). Vzhľadom na to, že ide o krajské kolo matematickej súťaže, ktorého sa zúčastňujú vybraní žiaci, víťazi školských a obvodných kôl Matematickej olympiády, môžeme tento výsledok považovať len za uspokojivý.

Podobné izolované problémy

Úloha z krajského kola kategórie C Matematickej olympiády nie je vo svojej podstate zložitá. Zahŕňa jednoduché ekvivalentné úpravy, úpravu na súčin a menej náročné myšlienkové operácie. Žiakom pri jej riešení však nestačí mechanicky ovládať úpravu výrazov a ekvivalentné úpravy nerovností. Úloha si vyžaduje matematické skúmanie a dôvodenie, ktoré je nutné rozvíjať u všetkých žiakov, nielen u tých, ktorí sú riešiteľmi Matematickej olympiády.

Z toho dôvodu ponúkame ďalšie izolované problémy, ktoré sú svojou povahou podobné úlohe z Matematickej olympiády.

Problém 1: *Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $xy + yz + zx = 1$. Ukážte, že platí nerovnosť:*

$$x + y + z \geq \sqrt{3}\ .$$

Problém 2: *Dokážte, že pre reálne čísla x, y, z platí nerovnosť*

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Kedy nastane rovnosť?

Problém 3: *Nech x, y, z sú kladné reálne čísla vyhovujúce rovnici $x + y + z = 1$. Dokážte, že*

$$xy(x + y)^2 + yz(y + z)^2 + zx(z + x)^2 \geq 4xyz.$$

Každý z týchto problémov má aspoň tri metódy riešenia [2], preto je vhodné používať ich počas vyučovacích hodín matematiky pre všetkých žiakov na rozvoj ich logického myslenia, tvorivosti, predstavivosti, kritického myslenia a dôvodenia. Sú však veľmi nápomocné aj počas seminárov a cvičení z matematiky, alebo v rámci prípravy na Matematickú olympiádu, a to najmä kvôli možnosti predstaviť žiakom heuristické stratégie a rôzne nerovnosti, ktoré sú bežným nástrojom pri riešení izolovaných problémov, ako napríklad Cauchyho nerovnosť, Jensenova nerovnosť, či vzťah aritmetického a geometrického priemeru.

Záver

Na dosahovanie výnimočných výsledkov nielen vo vyučovaní, ale aj v rôznych matematických súťažiach, ani zďaleka nepostačujú kvalitné učebnice a pasívny prístup žiakov k vyučovaniu. Žiaci potrebujú samostatne budovať svoje poznatky, a to skúmaním problému, jeho analýzou, kladením otázok, analýzou svojich zistení a diskusiou o nich so svojimi spolužiakmi a s učiteľom. Žiaci musia budovať svoje poznatky aktívnym prístupom k učeniu sa a neustálym dopĺňaním svojich vedomostí a zručností o rôzne nové matematické metódy, stratégie, techniky a nástroje na riešenie problémov. Tie sú pre žiakov nevyhnutné nielen počas vyučovacích hodín matematiky, ale aj v reálnom živote. Žiaci tiež musia vedieť svoje riešenia prezentovať, a to jasne a zrozumiteľne, podložiť ich logickými argumentmi a vhodne reagovať na kritické poznámky spolužiakov či učiteľa. Preto sa domnievame, že je vhodné zaraďovať izolované problémy do vyučovania matematiky.

Zaraďovanie izolovaných problémov a následná analýza žiackych riešení týchto problémov je pre učiteľa dôležitou informáciou o úrovni poznatkov žiakov aj o ich schopnosti komplexne zhodnotiť a vyriešiť zadaný problém. Analýza žiackych riešení úloh z Matematickej olympiády či iných matematických súťaží môže tiež významne prispieť k hodnoteniu úrovne vzdelania v oblasti matematiky v danom regióne či na celom Slovensku.

Literatúra

[1] Čeretková, S. – Šedivý, O. (2005). Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky. Nitra : FPV UKF v Nitre, 2005. 144 s. ISBN 80-8050-923-9

[2] Sovičová, M. (2012). Vybrané metódy riešenia matematických problémov [Rigorózna práca]. Nitra : FPV UKF v Nitre, 2012. 113 s.

[3] Ulovec, A. et al. (2009) Motivating and Exciting Methods in Mathematics and Science – Prípadové štúdie. Olomouc : Palackého Univerzita v Olomouci, 2009. 137 s. ISBN 978-80-244-2347-0

Článok prijatý dňa 3. júla 2012.

Adresa autorov

PaedDr. Miroslava Sovičová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: miroslava.sovicova@ukf.sk

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

Poďakovanie

Príspevok je publikovaný v rámci projektu UGA -> VI/24/2012 - Využitie izolovaných problémov vo vyučovaní matematiky SŠ.