

APLIKÁCIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC NA RIEŠENIE ÚLOH V DYNAMIKE STAVEBNÝCH KONŠTRUKCIÍ

APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOLVING PROBLEMS OF STRUCTURAL DYNAMICS

DARINA STACHOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok sa venuje riešeniu problémov výpočtov vlastných hodnôt výpočtových modelov vozidla. Vlastné frekvencie a vlastné hodnoty sú považované za základné číselné charakteristiky definujúce dynamickú individualitu každého dynamického systému. Keď poznáme tieto charakteristiky, môžeme predpovedať správanie sa dynamického systému pri rozličnom budení. Vlastné hodnoty sa zvyčajne určujú bez ohľadu na tlmenie systému. V tomto prípade sú vlastné hodnoty reálne čísla. V prípade, že berieme do úvahy tlmenie, vlastné hodnoty sú komplexné čísla a výpočty sú komplikovanejšie.*

KEÚČOVÉ SLOVÁ: *aplikácie, dynamický systém, vlastné hodnoty dynamického systému*

ABSTRACT. *This paper is dedicated to the solution of the problems of calculation of natural values of some computing model of vehicle. Natural frequencies and natural modes are the basic dynamical characteristics defining the dynamical individuality of a dynamical system. When we know these characteristics we can prognosticate the behaviour of the dynamical system under various excitation. Natural values are usually calculated without consideration the damping of the system. In this case the natural values are real numbers. In the case when the damping is taken into consideration the natural values are complex numbers and calculation is more complicated.*

KEY WORDS: *applications, dynamical system, natural values of a dynamical system*

CLASSIFICATION: *M55*

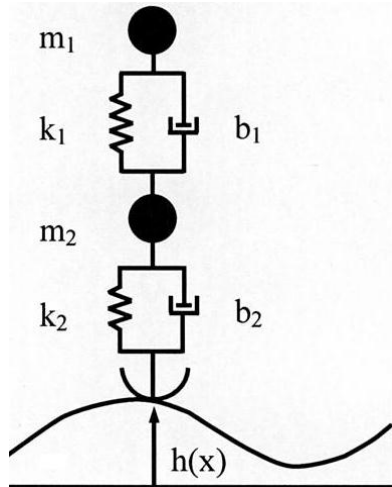
1 Úvod

Vlastné hodnoty – vlastné frekvencie a tvary vlastného kmitania sú považované za základné číselné charakteristiky definujúce dynamickú individualitu každého dynamického systému [1], [2]. Ich výpočet je nedeliteľnou súčasťou každej komplexnej dynamickej analýzy. Útlm veľkej väčšiny stavebných a dopravných konštrukcií je relatívne malý (podkritický útlm), preto celá súčasná teória kmitania takýchto systémov bola budovaná tak, aby sa pri analýze kmitania mohlo pracovať s vlastnými hodnotami získanými za predpokladu, že tlmenie je malé a môžeme ho zanedbať. Skutočnosť, že pri výpočte vlastných hodnôt dynamického systému sa vo veľkej väčšine prípadov tlmenie neberie do úvahy má aj inú príčinu – matematické problémy spojené s ich analýzou. Pri analýze vlastných hodnôt netlmeného systému sú tieto hodnoty reálne čísla. Ich výpočet a grafické zobrazenie nepredstavuje dnes žiadny problém. Vlastné hodnoty tlmeného systému sú komplexné čísla. Ich výpočet z matematického hľadiska je zložitejší a nastáva tiež problém s grafickou interpretáciou získaných výsledkov. Prekladaný príspevok na konkrétnom príklade výpočtového modelu vozidla dokumentuje výpočet vlastných hodnôt za predpokladu, že tlmenie sa zanedbáva i za predpokladu, že tlmenie sa berie do úvahy v skutočných hodnotách. Poukazuje na matematické stránky obidvoch riešení a na možnosti grafickej interpretácie. Porovnávajú sa navzájom získané výsledky a potvrdzuje

sa oprávnenosť zanedbania tlmenia pri analýze vlastných hodnôt takéhoto dynamického systému.

2 Použitý výpočtový model vozidla

Predmetom analýzy je tzv. štvrtinový model vozidla, zobrazený na obrázku 1. Tento výpočtový model reprezentuje polovicu jednej nápravy vozidla.



Obrázok 1: Výpočtový model vozidla

Ak práca sily nezávisí na trajektórii, ale len na počiatočnom a koncovom bode trajektórie, nazývame túto silu konzervatívnou. Príkladom konzervatívnych síl sú sila ťažová a sila gravitačná. V prípade, že práca sily závisí na trajektórii, hovoríme o silách nekonzervatívnych resp. disipatívnych. Príkladom disipatívnych síl je sila trenia a sila odporu prostredia. Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva, že súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu je rovnaký v každom mieste konzervatívneho silového poľa. Je zrejmé, že práca nekonzervatívnych síl po uzavretej trajektórii je na rozdiel od práce konzervatívnych síl rôzna od nuly. Zákon zachovania mechanickej energie je špeciálnym prípadom *zákona zachovania energie*, ktorý sa vzťahuje na všetky druhy energie. V prípade disipatívnych síl akými sú napr. trecie sily, časť mechanickej energie sa mení na tepelnú energiu, avšak celková energia sa zachováva.

Takže rovnica disipatívnych tlmiacich síl je

$$\{\dot{F}_d\} = -[b]\{\dot{v}\} = -2\omega_b[m]_D\{\dot{v}\} \quad (1)$$

Po aplikácii Bettiho vety získame pohybové rovnice tvaru:

$$[m]_D\{\ddot{v}\} + [b]\{\dot{v}\} + [k]\{v\} = \{0\} \quad (2)$$

t. j. dostaneme systém rovníc:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{v}_1 + b_1(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + k_1(v_1 - v_2) &= 0 \\ m_2\ddot{v}_2 - b_1(\dot{v}_1 - \dot{v}_2) + b_2\dot{v}_2 - k_1(v_1 - v_2) + k_2v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ako modelový príklad použijeme číselné charakteristiky zodpovedajúce nákladnému automobilu Tatra T148.

$$m_1 = 25141379 \text{ kg}$$

$$m_2 = 440 \text{ kg}$$

$$k_1 = 197965 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = 1200000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$b_1 = 114236 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$b_2 = 13734 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

3 Vlastné hodnoty tlmeného systému

Riešenie systému (3) hľadáme v tvare $\{v\} = \{v_{d(j)}^0\} e^{\lambda t}$, kde $\{v_{d(j)}^0\}$ je vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu λ . Charakteristická rovnica má tvar:

$$(m_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + k_1)(m_2 \lambda^2 + (b_1 + b_2) \lambda + k_1 + k_2) - (b_1 \lambda + k_1)^2 = 0, \quad (4)$$

ktorú úpravami prevedieme na rovnicu:

$$\lambda^4 + \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) \lambda^3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) \lambda^2 + \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2} \right) \lambda + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \quad (5)$$

Táto charakteristická bikvadratická rovnica má štyri komplexné korene a na ich určenie sme použili niekoľko substitúcií a rad úprav, pomocou ktorých sme mohli riešenia rovnice vyjadriť v tvare:

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4} \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right)^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) + y} \mp \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) y - 2 \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{b_2 k_1}{m_1 m_2} \right)}{\sqrt{4 \left(\frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right)^2 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \right) + y}}, \quad (6)$$

kde y je reálne riešenie kubickej rezolventy.

Vyjadrenie koreňov λ charakteristickej rovnice (4) je už aj tak v tvare (6) značne objemné, preto pre zjednodušenie zápisu y zjednodušene zapíšeme aj rovnicu (5) v tvare:

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (7)$$

Potom rezolventa vystupujúca pri hľadaní riešenia (4) je v tvare

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_0) y + (4a_2 a_0 - a_1^2 - a_3^2 a_0) = 0 \quad (8)$$

Jej reálne riešenie má tvar (9):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_2(a_1a_3 - 4a_0)}{3} + 4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0\right) + \sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_2(a_1a_3 - 4a_0)}{3} + 4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0\right)\right]^2 + \left(\frac{a_1a_3 - 4a_0 - \frac{1}{3}a_2^2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_2(a_1a_3 - 4a_0)}{3} + 4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0\right) - \sqrt{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_2(a_1a_3 - 4a_0)}{3} + 4a_2a_0 - a_1^2 - a_3^2a_0\right)\right]^2 + \left(\frac{a_1a_3 - 4a_0 - \frac{1}{3}a_2^2}{3}\right)^3}}$$

Metódami známymi z riešení systémov diferenciálnych rovníc následne určíme fundamentálny systém riešení a vytvoríme všeobecné riešenie systému (3). V modelovom príklade dosadíme do (4) resp. do (5) uvedené číselné charakteristiky $m_{1,2}$, $b_{1,2}$ a $k_{1,2}$.

Z uvedeného je zrejmé, že riešiteľ takejto úlohy nevystačí tak povediac s perom a papierom. Ďalej je možné pokračovať s použitím výpočtovej techniky. Program Maple síce problém vyrieši vo všeobecnom tvare, ale je pre bežné použitie nepraktický, pretože má dĺžku 579 strán po 26 riadkov.

Numerické riešenia charakteristickej rovnice je možné získať aj s použitím programu MATHEMATICA®:

$$\lambda_{1,2} = -1,70156 \pm 8,150i \text{ a } \lambda_{3,4} = -15,1124 \pm 53,5682i \quad (10)$$

Ak výsledky (10) aplikujeme ďalej na systém (3), dospejeme ku konečným riešeniam, t. j. k vyjadreniu tlmených kmitov v tvare:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{Bmatrix} e^{\lambda t} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

kde v_i^0 sú súradnice vlastného vektora prislúchajúceho ku koreňu λ charakteristickej rovnice (4). Ku koreňu $\lambda_{1,2} = -1,70156 \pm 8,150i$ je priradený vlastný vektor

$$\begin{Bmatrix} v_{1(1)}^0 \\ v_{2(1)}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1785270592 + 9310348236i \\ 188068361 + 2337193607i \end{Bmatrix} \quad (12)$$

a ku koreňu $\lambda_{3,4} = -15,1124 \pm 53,5682i$ patrí vlastný vektor

$$\begin{Bmatrix} v_{1(2)}^0 \\ v_{2(2)}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 253269874 + 6119416895i \\ -6614932116 - 3458669145i \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Takže riešenie systému (3) má tvar:

$$v_1 = e^{-16,8139t} c_3 (0,99126 e^{15,1124t} \cos 8,150t + 0,008734 e^{1,70156t} \cos 53,5682t + 0,28486 e^{15,1124t} \sin 8,150t - 0,00938 e^{1,70156t} \sin 53,5682t) + e^{-16,8139t} c_2 (0,001302 e^{15,1124t} \cos 8,150t - 0,001302 e^{1,70156t} \cos 53,5682t + 0,00301 e^{15,1124t} \sin 8,150t - 0,000785 e^{1,70156t} \sin 53,5682t) + e^{-16,8139t} c_1 (-0,000624 e^{15,1124t} \cos 8,150t + 0,000624 e^{1,70156t} \cos 53,5682t +$$

$$\begin{aligned}
 & + 0,125992e^{15,1124} \sin 8,150t - 0,000345e^{1,70156} \sin 53,5682t) + \\
 & + e^{-16,8139} c_4 (0,06307e^{15,1124} \cos 8,150t - 0,06307e^{1,70156} \cos 53,5682t - \\
 & - 0,50049e^{15,1124} \sin 8,150t + 0,060357e^{1,70156} \sin 53,5682t), \\
 v_2 = & e^{-16,8139} c_3 (0,15231e^{15,1124} \cos 8,150t - 0,15231e^{1,70156} \cos 53,5682t - \\
 & - 0,020327e^{15,1124} \sin 8,150t - 0,035040e^{1,70156} \sin 53,5682t) + \\
 & + e^{-16,8139} c_1 (0,007440e^{15,1124} \cos 8,150t - 0,007440e^{1,70156} \cos 53,5682t + \\
 & + 0,017234e^{15,1124} \sin 8,150t - 0,004484e^{1,70156} \sin 53,5682t) + \\
 & + e^{-16,8139} c_2 (0,000357e^{15,1124} \cos 8,150t - 0,000357e^{1,70156} \cos 53,5682t + \\
 & + 0,000333e^{15,1124} \sin 8,150t + 0,018527e^{1,70156} \sin 53,5682t) + \\
 & + e^{-16,8139} c_4 (-0,021286e^{15,1124} \cos 8,150t + 1,02129e^{1,70156} \cos 53,5682t - \\
 & - 0,072082e^{15,1124} \sin 8,150t + 0,29841e^{1,70156} \sin 53,5682t).
 \end{aligned}$$

4 Vlastné hodnoty tlmeného systému

Výpočet vlastných hodnôt netlmeného systému sa dá zapísať v maticovom tvare a transformovať na problém vlastných čísel matic

$$[m]_D \cdot \{\ddot{r}(t)\} + [k] \cdot \{r(t)\} = \{0\}. \quad (14)$$

Frekvenčná rovnica v tvare (15) sa násobením zľava inverznou maticou $[m]_D^{-1}$ upraví na špeciálny problém vlastných čísel

$$([k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D) \cdot \{r_{(j)}^0\} = \{0\} \quad (15)$$

$$([m]_D^{-1} \cdot [k] - \omega_{(j)}^2 \cdot [m]_D^{-1} \cdot [m]_D) \cdot \{r_{(j)}^0\} = \{0\}, \quad (16)$$

$$([D]^{-1} - \omega_{(j)}^2 \cdot [E]_D) \cdot \{r_{(j)}^0\} = \{0\}. \quad (17)$$

Vlastné frekvencie sa vypočítajú ako vlastné čísla matice $[D]^{-1}$ a tvary vlastného kmitania sú vlastné vektory tejto matice. Pre analyzovaný dynamický systém sú číselné výsledky nasledovné:

$$\omega_{(1)} = 8,20663 \text{ rad/s} \Rightarrow \begin{cases} r_{1(1)} \\ r_{2(1)} \end{cases} = \begin{cases} 9,89695878 \\ 1,43185434 \end{cases}$$

$$\omega_{(2)} = 56,46755 \text{ rad/s} \Rightarrow \begin{cases} r_{1(2)} \\ r_{2(2)} \end{cases} = \begin{cases} +0,25311709 \\ -9,99679607 \end{cases}.$$

Záver

Vlastné hodnoty sú dôležité číselné charakteristiky definujúce dynamické vlastnosti každého dynamického systému. Z praktických dôvodov sa vyčísľujú pre netlmený dynamický systém. Výpočet vlastných hodnôt tlmeného systému je z matematického hľadiska náročný už aj pre systém s 2^0 voľnosťami, ako je možné vidieť z hore uvedeného textu. Problém je aj s grafickou interpretáciou výsledkov. Horeuvedené výsledky

umožňujú pre konkrétny príklad urobiť vzájomné porovnanie vlastných frekvencií tlmeného a netlmeného systému. Netlmený systém má hodnoty vlastných frekvencií

$$\omega_{(1)} = 8,20663 \text{ rad/s}, \quad \omega_{(2)} = 56,46755 \text{ rad/s}.$$

Pre tlmený systém dostávame výsledky v tvare

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{(1)} = -1,70156 \pm 8,1501i \text{ a modul } |\lambda_{(1)}| = 8,3285$$

$$\lambda_{3,4} = \lambda_{(2)} = -15,1124 \pm 53,5682i \text{ a modul } |\lambda_{(2)}| = 55,6591.$$

Tlmenie znižuje hodnoty vlastných frekvencií

$$\omega_{d(1)} = \lambda_{(1)} \cdot i = 8,1501 \text{ rad/s}, \quad \omega_{d(2)} = \lambda_{(2)} \cdot i = 53,5682 \text{ rad/s}.$$

V prvom vlastnom tvare kmitajú hmoty netlmeného systému vo fáze, pričom výchylka hornej hmoty je väčšia ako výchylka dolnej hmoty. V druhom vlastnom tvare kmitajú hmoty v protifáze, pričom výchylka dolnej hmoty je väčšia ako výchylka hornej hmoty. Zobraziť tvary kmitania pre tlmený systém v komplexnom tvare sa javí ako problém.

Literatúra

- [1] Kluvánek, I., Mišík, L., Švec, M. (1961). Matematika II. Bratislava, Alfa, 1961.SBN 63-001-70,
- [2] Kuchárová, D., Melcer, J. (2000).: Dynamika stavebných konštrukcií, Skriptá, Žilina, EDIS, 2000, ISBN 80-71000-779-X,
- [3] Melcer, J., Lajčáková, G. (2011). Aplikácie programového systému MATLAB pri riešení úloh dynamiky stavebných konštrukcií, Skriptá, Žilina, EDIS, 2011, ISBN 978-80-554-0308-3,
- [4] Melcer, J., Kuchárová, D. (2004). Dynamika stavebných konštrukcií – príklady, Skriptá, Žilina, EDIS, 2004, ISBN 80-8070-326-4.

Článok prijatý dňa 10. júna 2012

Adresa autorov

RNDr. Darina Stachová, PhD.

Katedra matematiky

Fakulta humanitných vied

Žilinská univerzita v Žiline

Univerzitná 1

SK – 010 26 Žilina

e-mail: darina.stachova@fhv.uniza.sk

PodĎakovanie

Tento príspevok bol vypracovaný v rámci výskumnej činnosti podporovanej vedeckou grantovou agentúrou SR VEGA č. 1/0259/12.