

VZŤAHY JEDNOTIACICH PRINCÍPOV V REÁLNEJ ANALÝZE

RELATIONS OF UNIFYING PRINCIPLES IN REAL ANALYSIS

PETER VRÁBEL

ABSTRAKT. *V príspevku sú prezentované dve novšie unifikujúce metódy dôkazov viet zo základov matematickej analýzy a ich vzťah k princípu indukcie v kontinuu $\mathbb{R}$. Tieto metódy sú založené na pojmoch lokálny aditívny systém a plné pokrytie intervalu. Výhody týchto metód sú ilustrované na dôkazoch viet, ktoré sú prevedené tromi spôsobmi.*

KLÚČOVÉ SLOVÁ: *lokálny a aditívny systém, úplné pokrytie intervalu, princíp indukcie v kontinuu*

ABSTRACT. *Two untraditional unifying methods of proofs theorems from basis mathematical analysis are presented in the contribution. Their relations to principle of induction in continuum are analyzed. Advantages of these methods are illustrated on proofs of theorems, which are realized by three approaches.*

KEY WORDS: *local and additive system, full covering of interval, principle of induction in continuum*

CLASSIFICATION: 26A99, 97I99, I25

Úvod

V základoch reálnej analýzy sa podstatnou mierou využíva spojité usporiadanie množiny reálnych čísel. V posledných štyroch desaťročiach sa vyvinulo niekoľko nových špeciálnych jednotiacich metód dokazovania základných viet reálnej analýzy. Podstatné pojmy a myšlienky týchto metód možno nájsť v prácach [2], [3], [4], [5], [7]. Zmyslom tohto snaženia je podať komplexnejší pohľad na základy matematickej analýzy i poskytnúť prostriedky na jednoduchšie dôkazy jej viet. Treba poznamenať, že tieto metódy nepoužívajú ani jeden z viacerých známych princípov, ktoré sú ekvivalentné so spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$, ako napríklad: každá ohraničená monotónna postupnosť reálnych čísel má v $\mathbb{R}$ limitu; princíp indukcie v kontinuu $\mathbb{R}$ atď.

Základné pojmy metód príbuzných s princípom indukcie v kontinuu

Budeme sa zaoberať dvomi metódami dôkazovej techniky, ich vzájomným vzťahom i vzťahom k princípu indukcie v kontinuu. Prvá využíva pojem *plného pokrytia uzavretého intervalu* a druhá pojem *lokálneho a aditívneho systému intervalov*.

Definícia 1. Nech $a, b \in \mathbb{R}$. Systém $\mathcal{S}$ uzavretých intervalov I , $I \subseteq [a, b]$, sa nazýva plné pokrytie intervalu $[a, b]$, ak ku každému $x \in [a, b]$ existuje také číslo $\delta(x) > 0$, že každý uzavretý podinterval intervalu $[a, b]$ s dĺžkou neprevyšujúcou $\delta(x)$ a obsahujúci bod x patrí do $\mathcal{S}$.

Príklad 2. (a) Nech δ je ľubovoľné kladné číslo neprevyšujúce dĺžku $b - a$ intervalu $[a, b]$. Označme dĺžku ľubovoľného uzavretého intervalu I symbolom $|I|$ a systém

všetkých uzavretých podintervalov intervalu $[a, b]$ symbolom $\mathcal{P}(a, b)$. Potom $\mathcal{S}$, kde $\mathcal{S} = \{I \in \mathcal{P}(a, b); |I| \leq \delta\}$ je jednoduchý príklad plného pokrytia intervalu $[a, b]$.

(b) Nech funkcia f je spojitá na intervale $[a, b]$. Funkcia f má v každom bode $x \in [a, b]$ vlastnú limitu, teda existuje uzavretý interval $O(x), x \in O(x) \subseteq [a, b]$, v ktorom je funkcia f ohraňovaná. Priradíme každému $x \in [a, b]$ takýto uzavretý interval $O(x)$. Potom $\mathcal{S}$, kde

$$\mathcal{S} = \{I \in \mathcal{P}(a, b); \exists x \in [a, b] (x \in I \wedge I \subseteq O(x))\}$$

je plné pokrytie intervalu $[a, b]$.

Pri dôkazoch viet o plnom pokrytí resp. lokálnom a aditívnom systéme intervalov budeme využívať rozšírenú metódu indukcie (dôkaz pozri napr. v [1], [6]).

Veta 3. Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ a $\varphi(x)$ je výroková funkcia definovaná na M . Označme $M_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon] \cap M$ pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Nech φ spĺňa tieto predpoklady:

- (a) existuje $\alpha \in \mathbb{R}, M_\alpha \neq \emptyset$ a pre každé $x \in M_\alpha$ platí $\varphi(x)$,
- (b) ak pre každé $x \in M_\beta$ platí $\varphi(x)$, tak existuje $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > \beta$, že pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\varphi(x)$.

Potom pre každé $x \in M$ platí $\varphi(x)$.

Veta 4. Nech $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a, b]$. Potom existuje také delenie intervalu $[a, b]$ určené deliacimi bodmi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, že každý interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, patrí do $\mathcal{S}$.

Dôkaz. Nech $M = (a, b]$ a pre každé $x \in M$ $\varphi(x)$ znamená výrok: „existuje delenie intervalu $[a, x]$, ktorého každý čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$ “. Dokážeme, že množina M a výroková funkcia φ spĺňajú predpoklady vety 3. K číslu a existuje $\delta(a) > 0$, že každý interval $[a, x]$, $a < x \leq a + \delta(a)$, patrí do $\mathcal{S}$. Za a v (a) vety 3 stačí zvoliť číslo $a + \delta(a)$. Nech pre každé $x \in M_\beta = (-\infty, \beta] \cap M$ platí $\varphi(x)$. Stačí uvažovať $\beta \in (a, b]$. Ak $\beta < b$, tak existuje $c \in (a, b)$, že $[\beta, c] \in \mathcal{S}$. Keďže platí $\varphi(\beta)$, tak existuje delenie intervalu $[a, \beta]$, že každý jeho čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$. Ak pridáme k týmto intervalom interval $[\beta, d]$, $\beta < d \leq c$, dostaneme delenie intervalu $[a, d]$, že každý jeho čiastkový interval patrí do $\mathcal{S}$. Teda stačí v (b) vety 3 položiť za γ bod c . Ak $\beta = b$, za γ môžeme zobrať ľubovoľné číslo väčšie ako β . Z vety 3 potom vyplýva, že platí aj $\varphi(b)$, čo je tvrdenie dokazovanej vety.

Definícia 5. Systém $\mathcal{G}$ uzavretých podintervalov intervalu $[a, b]$ sa nazýva lokálny aditívny systém, ak platí:

- (a₁) každý bod $x \in (a, b)$ je vnútorným bodom nejakého intervalu $I(x)$ patriaceho do $\mathcal{G}$;
- (a₂) existujú také body $c, d \in (a, b)$, že intervaly $[a, c]$, $[d, b]$ patria do $\mathcal{G}$;
- (b) ak $I_1, I_2 \in \mathcal{G}$ a $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, tak $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{G}$.

Podmienky (a₁), (a₂) charakterizujú lokálnosť systému $\mathcal{G}$ a podmienka (b) charakterizuje aditívnosť systému $\mathcal{G}$.

Príklad 6. Nasledujúce množiny $\mathcal{G}$ sú lokálne aditívne systémy intervalu $[a, b]$:

- (1) $\mathcal{G} = \{[x, y]; [x, y] \subseteq [a, b]\}$,
- (2) $\mathcal{G} = \{[a, b_1], [a, b_2], \dots, [a, b_n]\}$, kde $a < b_1 < \dots < b_n = b$,
- (3) $\mathcal{G} = \{[x_i, x_j]; i, j \in \{0, 1, \dots, n\}, i < j\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Veta 7. Pre každý lokálny aditívny systém $\mathcal{G}$ uzavretých podintervalov intervalu $[a, b]$ platí, že $[a, b] \in \mathcal{G}$.

Dôkaz. Nech $M = (a, b]$ a pre každé $x \in (a, b]$ znamená $\varphi(x)$ výrok: „existuje $z \in (a, b]$, že $x \in [a, z] \in \mathcal{S}$. Množina M a výroková funkcia φ spĺňajú predpoklady vety 3. Existuje $\alpha \in (a, b)$, že $[a, \alpha] \in \mathcal{S}$, teda $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in (a, \alpha]$. Nech pre každé $x \in (a, \beta]$ platí $\varphi(x)$, špeciálne $\beta \in [a, z_1] \in \mathcal{S}$. Ak $\beta < b$, tak existuje interval $[c, d] \in \mathcal{S}$, že β je jeho vnútorným bodom. Potom $[a, z_1] \cup [c, d] = [a, d] \in \mathcal{S}$ a teda $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in (a, d]$, $\beta < d = \gamma$. Zrejme (b) z vety 3 platí aj v prípade $\beta = b$. Z vety 3 potom vyplýva, že platí aj $\varphi(b)$, teda $[a, b] \in \mathcal{S}$.

Lokálny aditívny systém intervalu $[a, b]$ nemusí byť jeho plným pokrytím a taktiež plné pokrytie intervalu $[a, b]$ nemusí byť jeho lokálnym aditívnym systémom. Tak napríklad plné pokrytie (a) z príkladu 2 ($\delta < b - a$) nie je lokálny aditívny systém a lokálne aditívne systémy (1), (2) z príkladu 6 nie sú plné pokrytia intervalu $[a, b]$. Ak $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a, b]$, tak

$$\mathcal{S}_1 = \{[x, y]; [x, y] = \bigcup_{i=1}^n [x_i, y_i], [x_i, y_i] \in \mathcal{S}, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

je lokálny aditívny systém intervalu $[a, b]$.

Aplikácie plných pokrytí a lokálnych aditívnych systémov intervalu $[a, b]$

Teraz uvedieme priame použitie vety 4, vety 7 a vety 3 pri dôkazoch viet zo základov matematickej analýzy. Každú vetu dokážeme tromi metódami: použitím plného pokrytia (PK); použitím lokálneho aditívneho systému (LAS) a nakoniec použitím indukcie v kontinuu (IK). V nasledujúcich úvahách budeme využívať fakt, že ak nejaká reálna funkcia reálnej premennej je ohraničená na množinách $M_1, M_2, \dots, M_n$, $n \in \mathbb{N}$, tak je ohraničená aj na množine $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$.

Veta A. Ak funkcia f má v každom vnútornom bode intervalu $[a, b]$ vlastnú limitu zľava i sprava a v bode $a(b)$ má vlastnú limitu sprava (zľava), tak je na intervale $[a, b]$ ohraničená.

Dôkaz (PK). Z predpokladu vlastných jednostranných limit v každom bode intervalu (a, b) vyplýva, že k číslu 1 a ku každému $x \in (a, b)$ existujú kladné čísla $\delta_1(x), \delta_2(x)$ s vlastnosťou:

$$\forall z \in (x - \delta_1(x), x) \quad L_1(x) - 1 < f(z) < L_1(x) + 1,$$

$$\forall z \in (x, x + \delta_2(x)) \quad L_2(x) - 1 < f(z) < L_2(x) + 1,$$

kde $\lim_{z \rightarrow x^-} f(z) = L_1(x)$ a $\lim_{z \rightarrow x^+} f(z) = L_2(x)$. Nech $\delta(x) = \min\left\{\frac{\delta_1(x)}{2}, \frac{\delta_2(x)}{2}\right\}$ a

$$L(x) = \min\{L_1(x) - 1, L_2(x) - 1, f(x)\},$$

$$K(x) = \max\{L_1(x) + 1, L_2(x) + 1, f(x)\}.$$

Potom pre každý uzavretý podinterval I intervalu $[a, b]$ s dĺžkou nepresahujúcou číslo $\delta(x)$ a obsahujúcim bod x platí:

$$\forall z \in I \quad L(x) \leq f(z) \leq K(x),$$

teda f je ohraničená na intervale I . Podobne môžeme postupovať v prípade bodov a, b .

Z uvedeného vyplýva, že systém $\mathcal{S}$, kde

$$\mathcal{S} = \{[c, d] \in \mathcal{P}(a, b); f \text{ je na } [c, d] \text{ ohraničená}\},$$

je plné pokrytie intervalu $[a, b]$. Z vety 4 vyplýva existencia takej postupnosti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, že f je ohraničená na intervaloch $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Potom je ohraničená aj na intervale $[a, b]$, pretože $[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [x_{k-1}, x_k]$.

Dôkaz (LAS). Uvažujme systém $\mathcal{S}$ z dôkazu (PK). Tento systém je zrejme aditívny. Jeho lokálnosť vyplýva tiež z tohto dôkazu. Totiž pre každé $z \in (x - \delta_1(x), x + \delta_2(x))$ platí $L(x) \leq f(z) \leq K(x)$ a teda pre každé $x \in (a, b)$ existuje uzavretý interval $I(x) \in \mathcal{S}$ (napr. $\left[x - \frac{\delta_1(x)}{2}, x + \frac{\delta_2(x)}{2}\right] \cap [a, b]$), že x je jeho vnútorným bodom. Keďže funkcia f má v bode $a(b)$ vlastnú limitu sprava (zľava), tak existujú intervaly $[a, c], [d, b]$, ktoré patria do systému $\mathcal{S}$. Z vety 7 potom vyplýva, že $[a, b] \in \mathcal{S}$ a teda f je ohraničená na $[a, b]$.

Dôkaz (IK). Nech $M = (a, b)$ a φ je výroková funkcia definovaná na M takto: pre každé $x \in (a, b)$ $\varphi(x)$ označuje výrok „funkcia f je ohraničená na intervale $[a, x]$ “. Ukážeme, že množina M a výroková funkcia φ spĺňa predpoklady vety 3. Z existencie vlastnej limity funkcie f v bode a sprava vyplýva, že existuje $\alpha \in (a, b)$ s vlastnosťou: f je ohraničená na $[a, \alpha]$ pre každé $x \in (a, \alpha)$. Nech f je ohraničená na intervale $[a, \beta] \subseteq [a, b]$. Potom zrejme platí $\varphi(x)$ pre každé $x \in (a, \beta)$. Na overenie predpokladu (b) vety 3 stačí predpokladať, že $\beta < b$. Z existencie vlastnej limity funkcie f v bode β sprava vyplýva existencia intervalu $[\beta, c] \subseteq [a, b]$, na ktorom je funkcia f ohraničená. Potom je zrejme funkcia f ohraničená na každom intervale $[a, x]$, kde $x \in (a, c]$. Stačí teda za γ vo vete 3 položiť bod c . Z vety 3 potom vyplýva, že $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$ a teda aj pre bod b . To ale znamená, že funkcia f je ohraničená na intervale $[a, b]$.

Veta B. Ak interval $[a, b]$ je pokrytý systémom $\mathcal{T}$ otvorených intervalov, tak existuje konečný podsystem $\mathcal{T}$, ktorý pokrýva $[a, b]$.

Dôkaz (PK). Nech $\mathcal{S} = \{[x, y] \in \mathcal{P}(a, b); \text{existuje konečný počet intervalov z } \mathcal{T} \text{ pokrývajúcich interval } [x, y]\}$. Nech $x \in [a, b]$. Potom existuje otvorený interval $(c_x, d_x) \in \mathcal{T}$, že $x \in (c_x, d_x)$. Nech $\delta(x) = \min\left\{\frac{x-c_x}{2}, \frac{d_x-x}{2}\right\}$. Potom každý uzavretý podinterval intervalu $[a, b]$, ktorý obsahuje bod x a jeho dĺžka nepresahuje číslo $\delta(x)$ patrí do $\mathcal{S}$. Teda $\mathcal{S}$ je plné pokrytie intervalu $[a, b]$. Z vety 4 vyplýva existencia postupnosti bodov $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, že každý interval $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, sa dá pokryť konečným počtom intervalov z $\mathcal{T}$. Odtiaľ už vyplýva, že aj interval $[a, b]$ má takúto vlastnosť.

Dôkaz (LAS). Nech $\mathcal{S}$ je rovnaký systém ako v predchádzajúcom dôkaze. Je zřejmé, že je aditívny. K bodom a, b existujú intervaly $(c_a, d_a), (c_b, d_b) \in \mathcal{T}$, že $a \in (c_a, d_a)$, $b \in (c_b, d_b)$. Potom intervaly $\left[a, \frac{a+d_a}{2}\right] \cap [a, b]$, $\left[\frac{c_b+b}{2}, b\right] \cap [a, b]$ patria do $\mathcal{S}$. Nech $x \in (a, b)$. Potom ľubovoľný uzavretý podinterval intervalu $[a, b]$, pričom x je jeho vnútorný bod a jeho dĺžka nepresahuje číslo $\delta(x)$ z prechádzajúceho dôkazu, patrí do $\mathcal{S}$. Ukázali sme, že $\mathcal{S}$ je lokálny aditívny systém intervalu $[a, b]$. Potom $[a, b] \in \mathcal{S}$ a tým je tvrdenie vety B dokázané.

Dôkaz (IK). Nech $M = (a, b]$ a φ je výroková funkcia definovaná na M takto: pre každé $x \in (a, b]$ $\varphi(x)$ označuje výrok „interval $[a, x]$ možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$ “. Opäť dokážeme, že množina M a výroková funkcia φ spĺňa predpoklady vety 3. Existuje interval $(c, d) \in \mathcal{T}$, že $a \in (c, d)$. Potom pre každé $x \in (a, \frac{a+d}{2}] \cap M$ platí $\varphi(x)$. Nech pre každé $x \in (a, \beta]$ platí $\varphi(x)$, teda aj interval $[a, \beta]$ možno pokryť konečným počtom intervalov z $\mathcal{T}$. Stačí uvažovať $\beta \in (a, b)$. Existuje interval $I_\beta = (c_1, d_1) \in \mathcal{T}$, že $\beta \in I_\beta$. Potom každý interval $[a, x]$, kde $x \in (a, \frac{\beta+d_1}{2}] \cap M$, možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$ a teda pre každé takéto x platí $\varphi(x)$. Z vety 3 potom vyplýva, že $\varphi(x)$ platí pre každé $x \in M$ a teda aj pre bod b . To ale znamená, že interval $[a, b]$ možno pokryť konečným počtom intervalov zo systému $\mathcal{T}$.

Záver

Vety 3, 4 a 7 poskytujú jednotiace metódy dokazovania mnohých viet základov matematickej analýzy. Okrem uvedených ukážok možno pomocou nich dokázať napríklad tieto známe tvrdenia:

- (1) Každá funkcia spojitá na uzavretom intervale nadobúda najmenšiu i najväčšiu hodnotu.
- (2) Každá funkcia spojitá na uzavretom intervale je na ňom aj rovnomerne spojitá.
- (3) Nech funkcia f je spojitá na intervale $[a, b]$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f(c) = 0$.
- (4) Každá ohraničená monotónna postupnosť reálnych čísel má vlastnú limitu.
- (5) Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálnych čísel konverguje práve vtedy, keď $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n > n_0 |a_m - a_n| < \varepsilon$.
- (6) Každá nekonečná ohraničená množina reálnych čísel má v $\mathbb{R}$ aspoň jeden hromadný bod.
- (7) Ak funkcia f je spojitá na $[a, b]$, tak je tomto intervale riemannovsky integrovateľná.

Samozrejme uvedený zoznam tvrdení nie je úplný. Používanie uvedených stratégií v matematickej analýze prispieva k hlbšiemu pochopeniu jej základných pojmov, objasňujú sa tým jej teórie z rôznych strán. Takto sa aj osvojujú určité prvky matematických metód, upevňujú sa vedomosti a trénujú matematické zručnosti.

Literatúra

- [1] Chinčín, A.: Prostejšij linejnij kontinuum. Moskva, Uspechy mat. nauk 4(1949), 180-197.
- [2] Leinfelder, H.: A unifying principle in real analysis. Real Anal. Exchange 8(1982-83), 511-518.
- [3] Šalát, T.: Remarks on unifying principles in real analysis. Real Anal. Exchange (1984-85), 341-348.
- [4] Šalát, T.: Seminár z matematiky. Bratislava, MFF UK (1990), 132 s., ISBN 80-223-0312-7.
- [5] Thomson, B.S.: On full covering properties. Real Anal. Exchange 6(1980-81), 77-91.

- [6] Vrábel, P.: O dôkazovej technike v elementárnej analýze využívajúcej princíp indukcie v kontinuu. Nitra, FPV UKF Acta Math. 5(2002), 91-97, ISBN 80-8050-562-4.
- [7] Vrábel, P.: O jednej metóde dôkazov v elementárnej analýze využívajúcej lokálny a aditívny systém intervalov. KU Ružomberok, Disputationes Scientificae 4(2004), ISSN 1335-9185.

Článok prijatý dňa 22. jún 2012

Adresa autora

Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: pvrabel@ukf.sk