FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

AKO NA L'HOSPITALA

HOW TO MISUSE L'HÔPITAL'S RULE

MICHAL ZÁKOPČAN

ABSTRAKT. *Hlavnou motiváciou na napísanie tohto článku bola práca [1]. V článku sa venujeme vytváraniu takých limít typu "0/0" alebo "∞/∞", ktoré nie sú riešiteľné l'Hospitalovým pravidlom, čím poskytujeme motiváciu pre študentov matematickej analýzy učiť sa elementárne postupy.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *l'Hospitalovo pravidlo, limita funkcie, diferenciálna rovnica*

ABSTRACT. *The main motivation of this article is the work [1]. In the article we create such limits of types "0/0" or "∞/∞", which are not solvable by L'Hôpital's rule, as a motivation for students of Mathematical analysis to learn elementary techniques.*

KEY WORDS: *L'Hôpital's rule, limit of a function, differential equation*

CLASSIFICATION: *D55, I*

Úvod

Tento článok je inšpirovaný prácou [1]. Cieľom autora tejto práce je poukázať na to, že hoci je l'Hospitalovo pravidlo nepochybne silným nástrojom na výpočet mnohých typov limít, nie vždy sa jeho použitím dopracujeme k výsledku, čo demonštruje na viacerých príkladoch. Takýmto spôsobom zároveň zdôvodňuje potrebu ovládania elementárnych postupov výpočtu limít, ktoré sa na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy môžu niektorým študentom javiť ako nepotrebné zručnosti.

Cieľom tohto článku je rozšíriť množinu typov limít, pre ktoré vzniká zacyklenie postupu riešenia použitím l'Hospitalovho pravidla, ako i nájsť ďalšie postupy na nájdenie takýchto typov. Rozšírenie sa bude týkať aj takých limít, v ktorých je možné a vhodné použiť l'Hospitalovo pravidlo v prvom kroku, aby sa vzápätí ukázalo, že ďalšie derivovanie nikam nevedie. Tým sa chce zdôrazniť najmä to, že niekedy je lepšie sa pri výpočte zastaviť, "poobzerať sa" a zistiť, či by sme sa k výsledku nedopracovali ľahšie elementárnymi postupmi. To je veľmi žiaduce pre formovanie strategického myslenia u študentov.

Ako oklamať l'Hospitala

Vráťme sa k článku [1]. Autor v ňom na nájdenie vhodných limít $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ využíva trik spočívajúci v tom, že požaduje, aby platilo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{g(x)}{f(x)}. \tag{1}$$

Ďalej postupuje nasledujúcim spôsobom. Zo vzťahu (1) odvodzuje diferenciálnu rovnicu $f(x)f'(x)\,dx=g(x)g'(x)\,dx$.

Potom pre ľubovoľnú funkciu f spĺňajúcu predpoklady l'Hospitalovho tvrdenia volí funkciu g tak, aby platilo:

$$g(x) = \pm\sqrt{f^2(x) + c}, \tag{2}$$

kde c je vhodná reálna konštanta. Ďalej stačí pracovať s $g(x) = \sqrt{f^2(x) + c}$.

Za predchádzajúcim odvodením vzťahu (2) nasleduje v práci [1] časť venovaná príkladom, v ktorých je možné tento vzťah využiť.

Tu vidíme priestor na ďalšie rozšírenie týchto typov úloh napríklad o nasledujúce úlohy:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^2 x + \frac{\pi^2}{4} - \pi \operatorname{arccotg} x}}, \text{resp.} \lim_{x\to 0+} \frac{\arcsin x}{\sqrt{\arccos^2 x + \frac{\pi^2}{4} - \pi \arccos x}},$$

v ktorých sa dajú využiť vzťahy $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, resp. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre každé $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Usudzujeme, že autor v práci [1] mal pri $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}}$ v skutočnosti na mysli $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}}$, pretože uvedená limita v nule neexistuje (limita sprava sa nerovná limite zľava). Podobné závery platia aj pre limitu $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$.

Zovšeobecnenie

Postup vedúci na vzťah (2), ktorý je prezentovaný v [1], možno zovšeobecniť nasledujúcim spôsobom. Počítajme $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde funkcie f, g, definované na nejakom okolí bodu a, spĺňajú predpoklady l'Hospitalovho tvrdenia. Ide teda o limitu typu "$0/0$" alebo "∞/∞". Predpokladajme, že platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{g^m(x)}{f^n(x)}, \tag{3}$$

kde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom dvakrát aplikujúc l'Hospitalovo pravidlo dostávame:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g^m(x)}{f^n(x)} = \lim_{x\to a} \frac{m g^{m-1}(x) g'(x)}{n f^{n-1}(x) f'(x)} = \frac{m}{n} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Vidíme, že sme sa dostali opäť k pôvodnej limite a nastalo zacyklenie.

Z (3) ďalej dostávame $f^n(x) f'(x)\, dx = g^m(x) g'(x)\, dx$. Pre ľubovoľné f je riešením tejto diferenciálnej rovnice funkcia $g(x) = \left(\frac{m+1}{n+1} f^{n+1}(x) + c\right)^{\frac{1}{m+1}}$, kde konštantu c volíme tak, aby daná limita bola typu "$0/0$" alebo "∞/∞".

Na rozdiel od počítania $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(\frac{m+1}{n+1}f^{n+1}(x)+c\right)^{\frac{1}{m+1}}}$ l'Hospitalovým pravidlom vedú elementárne postupy rýchlo k výsledku. Stačí preniesť čitateľa do menovateľa menovateľa a vojsť pod odmocninu.

$\boldsymbol{n}$-násobný l'Hospital

Táto kapitola článku sa týka úvahy o zacyklení postupu riešenia limity typu "$0/0$" alebo "∞/∞", ak použijeme l'Hospitalovo pravidlo n-krát za sebou. (Od funkcií v čitateli i menovateli žiadame, aby boli aspoň n-krát diferencovateľné.) Hľadáme teda limity $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ také, že $f^{(n)}(x)=f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=g(x)$, alebo $f^{(n)}(x)=-f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=-g(x)$, kde pod označením $f^{(n)}$ sa myslí n-tá derivácia funkcie f. Táto úvaha vedie na dobre známu limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,. \tag{4}$$

Čitateľ aj menovateľ v nej vystupujúci sú riešeniami diferenciálnej rovnice $f''(x)=f(x)$ a preto použitie l'Hospitalovho pravidla dvakrát za sebou vedie k zacykleniu.

Riešenia diferenciálnych rovníc:

$$f^{(n)}(x)=\pm f(x), \tag{5}$$

kde $n\geq 2$, sú lineárnou kombináciou výrazov e^x, e^{-x}, $e^{-qx}(k\cos px+l\sin px)$, kde k,l,p,q sú vhodné reálne konštanty

Napríklad riešením rovnice $f''(x)=-f(x)$ je $f(x)=k\cos x+l sin\,x$. Ak však chceme počítať limitu:

$$\lim_{x\to a}\frac{k\cos x+l sin\,x}{\tilde{k}\cos x+\tilde{l} sin\,x}\,, \tag{6}$$

l'Hospitalovým pravidlom, musíme voliť a a konštanty k a l tak, aby bolo súčasne splnené $\lim\limits_{x\to a}(k\cos x+l\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}(-k\sin x+l\cos x)=0$. Resp. $\tilde{k},\tilde{l}$ volíme tak, aby $\lim\limits_{x\to a}\left(\tilde{k}\cos x+\tilde{l}\sin x\right)=0$ a súčasne $\lim\limits_{x\to a}\left(-\tilde{k}\sin x+\tilde{l}\cos x\right)=0$. To je ale možné len vtedy, keď $k=l=\tilde{k}=\tilde{l}=0$. S podobnými problémami sa stretávame aj pri riešeniach rovníc (5) pre $n\geq 3$.

Táto nepríjemnosť sa dá obísť tak, že budeme hľadať limitu, v ktorej vystupujú tieto riešenia, pre $x\to\pm\infty$. V prípade limity (6) to síce nepomôže, lebo limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos x$ neexistujú, ale už pre $n=3$ a rovnicu $f'''(x)=f(x)$ dostávame:

Príklad 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}, \tag{7}$$

kde $m\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ a $\tilde{m}\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sú riešenia $f'''(x)=f(x)$ a v nich vystupujúce $k,l,m,\tilde{k},\tilde{l},\tilde{m}$ sú nejaké reálne konštanty.

Použijúc potom l'Hospitalovo pravidlo na hľadanie limity (7), kde napr. $m\neq 0,\ \tilde{m}\neq 0$, sa dostaneme do zacyklenia, nehovoriac o tom, že viackrát po sebe derivovať bez pomýlenia je v tomto prípade neľahká úloha. Pritom vypočítať (7) použitím elementárnych postupov je veľmi jednoduché:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{m\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{m\mathrm{e}^{x}\left[1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}}{m}\left(k\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}{\tilde{m}\mathrm{e}^{x}\left[1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}}{\tilde{m}}(\tilde{k}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\tilde{l}\ \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\ )\right]}=\frac{m}{\tilde{m}}.$$

V niektorých prípadoch môžeme rovnako postupovať pri riešení rovníc (5) pre $n\geq 4$. Napríklad pre $n=4$ a rovnicu $f^{(4)}(x)=f(x)$ dostaneme limitu:

Príklad 2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^{x}+re^{-x}+k\cos x+l sin\, x}{\tilde{m}e^{x}+\tilde{r}e^{-x}+\tilde{k}\cos x+\tilde{l} sin\, x}.$$

Z pedagogického hľadiska však nemá zmysel venovať sa počítaniu limít, v ktorých vystupujú riešenia rovníc (5) pre $n\geq 5$, a to kvôli ich zložitosti.

Ešte poznamenajme, že pri hľadaní limít typu "$0/0$" alebo "∞/∞" nevhodných na použitie l'Hospitalovho pravidla sa rovnice (5) dajú zovšeobecniť na tvar:

$$f^{(n)}(x)=\alpha f(x), \tag{8}$$

kde α je nejaká nenulová reálna konštanta. Predchádzajúce úvahy viažuce sa na rovnice (5) nájdu uplatnenie aj v tomto prípade. Jediná zmena totiž nastane v tom, že riešenia rovnice (8) budú lineárnou kombináciou výrazov $e^{rx},\ e^{-qx}(k\cos px+l\sin px)$. Rovnice (5) sú špeciálnym prípadom (8) pre $\alpha=1$, resp. $\alpha=-1$.

Oveľa zaujímavejšie je hľadať limity $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ také, že $f^{(n)}(x)=\alpha f(x)$ a súčasne $g^{(n)}(x)=\beta g(x)$, kde $\alpha\neq\beta$ sú nenulové konštanty.

Uvažujme napríklad $n=2,\alpha=1,\beta=4$. Dostaneme:

Príklad 3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{me^{x}+re^{-x}}{\tilde{m}e^{2x}+\tilde{r}e^{-2x}}, \tag{9}$$

kde čitateľ je riešením diferenciálnej rovnice $f''(x)=f(x)$ a menovateľ riešením diferenciálnej rovnice $f''(x)=4f(x)$. Uvažujúc napr. $m\neq 0,\ \tilde{m}\neq 0$ sa ľahko ukáže, že limita (9) sa rovná 0. Pritom použitie l'Hospitalovho pravidla vedie k zacykleniu. Navyše pri voľbe parametrov α, β sa nemusíme pre $n = 2$ obmedziť len na príklad (9). Stačí, ak budú oba parametre kladné. Pre jednoduchosť výpočtu je však dobré voliť α, β ako druhé mocniny prirodzených čísel.

Rovnako nule sa rovná nasledujúca limita:

Príklad 4:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{m\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(k \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + l \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\tilde{m}\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}\left(\tilde{k} \cos\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \tilde{l} \sin\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right)},$$

kde $k, l, m, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m}$ sú nejaké reálne konštanty, pričom $m \neq 0$, $\tilde{m} \neq 0$. V tejto limite je čitateľ riešením rovnice $f'''(x) = -f(x)$ a menovateľ riešením rovnice $f'''(x) = -27f(x)$. Použitie l'Hospitalovho pravidla aj tu vedie k zacykleniu.

S vymýšľaním príkladov sa dá pokračovať ďalej aj pre $n \geq 4$, avšak pre $n \geq 5$ je to pre zložitosť takýchto limít zbytočné a z hľadiska pedagogického procesu bezúčelné.

O krok späť

Nakoniec sa ešte oboznámme s úlohami na výpočet limít typu "$0/0$" alebo "∞/∞", v ktorých použitie l'Hospitalovho pravidla má oprávnenie v prvom kroku, ale ďalej si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Uvádzame niekoľko príkladov.

Príklad 5:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-1 + x)e^{x} + (1 + x)e^{-x}}{(-1 + x)e^{x} - (1 + x)e^{-x}}.$$

Po použití l'Hospitalovho pravidla dostaneme:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-1 + x)e^{x} + (1 + x)e^{-x}}{(-1 + x)e^{x} - (1 + x)e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(e^{x} - e^{-x})}{x(e^{x} + e^{-x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}},$$

čo je limita (4).

Pri výpočte limity však môžeme postupovať aj tak, že najprv spravíme jednoduchú úpravu:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(-1 + x)e^{x} + (1 + x)e^{-x}}{(-1 + x)e^{x} - (1 + x)e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(-1 + x)e^{2x} + x + 1}{(-1 + x)e^{2x} - x - 1}$$

a potom môžeme dopočítať limitu použitím l'Hospitalovho pravidla.

Vhodnou voľbou koeficientov pred každou mocninou x vieme zvýšiť stupeň polynómov vystupujúcich v súčine s e^{x}, resp. s e^{-x}. Nasleduje príklad aj s úpravou.

Príklad 6:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1 - 2x + x^{2})e^{x} + (1 + 2x + x^{2})e^{-x}}{(1 - 2x + x^{2})e^{x} - (1 + 2x + x^{2})e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^{2} - 1)(e^{x} - e^{-x})}{(x^{2} - 1)(e^{x} + e^{-x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

Veľmi vďačná na použitie metódy jednokrokového návratu späť je nasledujúca limita:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+c}}, \tag{10}$$

kde c je ľubovoľná kladná reálna konštanta. Limita (10) je uvedená aj v práci [1]. Integrovaním čitateľa aj menovateľa v tejto limite dostaneme:

Príklad 7:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{c}\left(x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right)\right)+\sqrt{e^{2x}+c}}. \tag{11}$$

Na jej výpočet môžu potom študenti raz použiť l'Hospitalovo pravidlo, ale ďalej musia postupovať len elementárnymi úpravami. Limita (11) je veľmi zaujímavá aj z toho hľadiska, že na to, aby mohli študenti použiť l'Hospitalovo pravidlo, musia ukázať, že limita menovateľa je naozaj ∞. Na to stačí ukázať, že výraz $x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right)\to 0$ pre $x\to\infty$. Overme to:

$$\lim_{x\to\infty} x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{e^x}{\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}} = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{1}{\frac{\sqrt{c}}{e^x}+\sqrt{1+\frac{c}{e^{2x}}}} = 0.$$

Vidíme, že už v tomto prvom kroku sa študenti stretávajú s riešením limity (10) v mierne "zakamuflovanej" podobe.

Záver

L'Hospitalovo pravidlo patrí k silným nástrojom na výpočet veľkého počtu rôznych typov limít. Hlavným cieľom tohto článku, podobne ako v [1], bolo nájsť také typy limít, v ktorých je síce možné l'Hospitalovo pravidlo použiť, no k výsledku sa s jeho pomocou nedopracujeme. Tým sa dá zdôvodniť študentom na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy nevyhnutnosť ovládania elementárnych postupov na výpočet limít. Za týmto účelom sme vypracovali zovšeobecnenie výsledkov z práce [1], hľadali v riešeniach diferenciálnych rovníc $f^{(n)}(x)=\alpha f(x)$, či vypracovali limity, v ktorých je použitie l'Hospitalovho pravidla možné a oprávnené v prvom kroku, ale v ďalších sa bez elementárnych postupov zaobísť nedá.

Literatúra

[1] Varga, M.: Ako oklamať l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 12, UKF, Nitra, 2009. Strany 275-278. ISBN 80-8094-614-2

Článok prijatý dňa 20. júna 2012

Adresa autora

Mgr. Michal Zákopčan, PhD.
Oddelenie matematiky Ústavu informatiky a matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Slovenská technická univerzita
Ilkovičova 3
SK – 812 19 Bratislava
e-mail: michal.zakopcan@stuba.sk