FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

ROZMIESTŇOVANIE GEOMETRICKÝCH ÚTVAROV

PLACEMENTS OF GEOMETRICAL SHAPES

MILOŠ BOŽEK

ABSTRAKT. *V príspevku popisujeme riešenie jedného špecifického problému, ktorého matematický základ je v teórii hustých dvojrozmerných geometrických útvarov na báze posunutí.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *mnohouholník, optimalizácia.*

ABSTRACT. *This paper deals with a solution of specific optimization problem which mathematical basis is in the theory of dense placement of two-dimensional geometric figures on displacement.*

KEY WORDS: *polygon, optimalization.*

CLASSIFICATION: *G55, M55*

1. Úvod

V mnohých oblastiach výroby, napr. v odevníctve, obuvníctve, strojárstve, nábytkárstve, ... sa stretávame s úlohou vytvoriť tzv. nástrihový plán, teda rozmiestniť vystrihované (vysekávané, vyrezávané, ...) časti výrobkov na dvojrozmerný materiál (látka, koža, plech, doska, ...) s dodržaním technologických požiadaviek a zásady maximalizácie využitia materiálu [7]. Pri práci s anizoropnými materiálmi, ako sú napr. tkaniny, kože a prírodné drevo, sa výstrižky nesmú otáčať, povolené sú iba posunutia. Základom odpovedajúceho matematického optimalizačného problému je teória hustých rozmiestnení dvojrozmerných geometrických útvarov na báze posunutí, ktorej stručný opis predkladáme.

Pôvodne bola teória založená najmä na analytickej geometrii [12], neskôr získala adekvátnejšiu topologickú podobu; pozri [1] a pre viac podrobností dizertácie [13], [8], [16]. Tam možno nájsť v tejto práci vynechané dôkazy a ilustrácie.

Prezentovanú teóriu možno bez problémov zovšeobecniť v dvoch smeroch – pripustiť euklidovský priestor ľubovoľnej dimenzie a/alebo všeobecnejšie pohyby, teda nielen posunutia. Je zaujímavé, že pri rozšírení škály povolených pohybov v rovine sa základné výsledky teórie zachovajú; pozri [4], [9].

2. Geometrické útvary a ich vzájomné polohy

Z hľadiska aplikácií by sme sa určite mohli venovať iba rozmiestňovaniu mnohouholníkov. Ukazuje sa však, že základné pojmy treba vyjadrovať v jazyku topológie, preto pripustíme omnoho širšiu triedu objektov.

Pod *geometrickým útvarom* (skrátene hovoríme iba *útvar*) rozumieme podmnožinu M euklidovskej roviny E^2, ktorá je časťou uzáveru svojho vnútra

$$M \subseteq \mathrm{cl}\,(\mathrm{int} M) \tag{2.1}$$

Základným príkladom geometrického útvaru je mnohouholník, teda súvislá a v metrickom zmysle ohraničená časť roviny, ktorej hranicou je jednoduchá uzavretá lomená čiara. Všeobecnejšie, geometrickým útvarom je každá rovinná oblasť ohraničená jednoduchou uzavretou krivkou, napríklad kruh. Krivka geometrickým útvarom nie je. Kvôli prehľadnosti budeme geometrické útvary spravidla označovať písmenami M, N, P, ľubovoľné podmnožiny roviny písmenami $A, B, C, \ldots$.

Nasledujúce dve jednoduché tvrdenia vyjadrujú základné topologické vlastnosti geometrických útvarov.

Tvrdenie 2.1 a) Každá otvorená množina roviny je geometrický útvar.
b) Uzáver a vnútro geometrického útvaru sú geometrické útvary.
c) Zjednotenie ľubovoľného (konečného alebo nekonečného) počtu geometrických útvarov je geometrický útvar. □

Tvrdenie 2.2 Uzáver resp. hranica geometrického útvaru M je uzáver resp. hranica jeho vnútra

$$\mathrm{cl}M = \mathrm{cl}(\mathrm{int}M), \quad \mathrm{bd}M = \mathrm{bd}(\mathrm{int}M) \tag{2.2}$$

Na množine všetkých geometrických útvarov zavedieme niekoľko binárnych relácií, ktoré chápeme ako vzájomné polohy dvoch útvarov:

Dva útvary $M, N \subseteq E^2$

- *sa pretínajú*, ak majú neprázdny prienik: $M \cap N \neq \emptyset$,
- *sa prekrývajú*, ak ich vnútra majú neprázdny prienik: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N \neq \emptyset$,
- *sa stýkajú*, alebo sú husto rozmiestnené, ak sa neprekrývajú, ale ich hranice sa pretínajú: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$ a $\mathrm{bd}M \cap \mathrm{bd}N \neq \emptyset$,
- *sú (korektne) rozmiestnené*, ak sa neprekrývajú: $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$.

Útvar M je rozmiestnený v útvare N, ak jeho vnútro leží v N: $\mathrm{int}M \subseteq N$.

Poznámky 2.1 a) Dva husto rozmiestnené útvary sú korektne rozmiestnené.
b) Ak je doplnok geometrického útvaru N útvar, tak útvar M je rozmiestnený v N práve vtedy, keď je korektne rozmiestnený s doplnkom útvaru, teda keď $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}(E^2 \setminus N) = \emptyset$. Takto sa umiestnenie útvaru do útvaru redukuje na korektné rozmiestnenie útvaru s iným útvarom.

Nasledujúca veta vyjadruje jednu z dvoch podmienok hustého rozmiestnenia dvoch útvarov síce menej názornejším, ale technicky výhodnejším spôsobom ako definícia. Za ňou idúca veta hovorí, že pri skúmaní hustého rozmiestnenia útvarov sa možno obmedziť na otvorené útvary alebo na uzavreté útvary. Nie je to však nutné ani výhodné.

Veta 2.1 Geometrické útvary $M, N \subseteq E^2$ sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sa pretínajú ich uzávery ale nie ich vnútra, t.j. keď $\mathrm{cl}M \cap \mathrm{cl}N \neq \emptyset$ a $\mathrm{int}M \cap \mathrm{int}N = \emptyset$. □

Veta 2.2 a) Geometrické útvary sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sú husto rozmiestnené ich vnútra.
b) Geometrické útvary sú husto rozmiestnené práve vtedy, keď sú husto rozmiestnené ich uzávery. □

Husté rozmiestnenie dvoch útvarov rozšírime ďalej na rozmiestnenie s kladnou medzerou a na rozmiestnenie viacerých útvarov. Kvôli prvému rozšíreniu pre každú množinu $A \subseteq E^2$ definujme jej otvorené resp. uzavreté okolie s polomerom $r > 0$ predpisom

$$O(A, r) = \{x \in E^2;\ d(x, A) < r\}, \quad B(A,r) = \{x \in E^2;\ d(x, A) \leq r\} \tag{2.3}$$

Zrejme

$$O(A, r) = \cup\{O(x, r);\ x \in A\}, \quad B(A, r) = \cup\{B(x, r);\ x \in \mathrm{cl}A\} \tag{2.4}$$

Množiny $A, B \subset E^2$ sú rozmiestnené s medzerou $\delta > 0$, ak sú husto rozmiestnené „zväčšené“ množiny A, B, t.j. ich okolia $O(A, \delta/2)$ a $O(B, \delta/2)$.

Veta 2.3 Nech $\delta > 0$. Potom
a) Ak sú množiny A a B rozmiestnené s medzerou δ, tak ich vzdialenosť je δ.
b) Ak $d(A, B) = \delta$ a jedna z množín A, B je ohraničená, tak množiny A, B sú rozmiestnené s medzerou δ. □

Príklad 2.1 Nech $\delta = 2$, $M = \{p = (x, y);\ x > 0, y \geq 1/x\}$, $N_\delta = \{p = (x, y);\ y \leq -\delta\}$. Pretože $B(M, \delta/2) \cap B(N_\delta, \delta/2) = \emptyset$, útvary M, N_δ nie sú husto rozmiestnené s medzerou δ, hoci ich vzdialenosť je δ. □

Konečná alebo spočítateľná množina geometrických útvarov M_i je husto rozmiestnená (resp. *rozmiestnená s medzerou* $\delta > 0$), ak sa dané množiny dajú tak očíslovať prirodzenými číslami 1,2,3,..., že každý útvar M_i, $i \geq 2$, je husto rozmiestnený (resp. husto rozmiestnený s medzerou δ) so zjednotením predchádzajúcich útvarov, teda s útvarom $\cup\{M_j;\ j<i\}$.

3. Husté rozmiestnenia útvarov a posunutia

Uvažujme dva útvary v rovine, prvý považujeme za pohyblivý, druhý za pevný. Základným objektom nášho záujmu je množina všetkých takých posunutí pohyblivého útvaru, že obraz pohyblivého útvaru je husto rozmiestnený s pevným. Najprv túto množinu posunutí stotožníme s istou množinou bodov roviny. Vychádzame zo štandardnej reprezentácie posunutí vektormi.

Pevne zvolený bod $o \in E^2$ nazveme pól roviny. Považujem ho tiež za *referenčný bod* každého geometrického útvaru. Ak je v rovine zadaná sústava súradníc, pólom je implicitne jej začiatok. Pól roviny umožňuje reprezentovať bod x jeho polohovým vektorom $\mathbf{x} = x - o$ a naopak, každý vektor $\mathbf{x}$ roviny reprezentovať odpovedajúcim bodom $x = o + \mathbf{x}$. Symbolom $A(x)$ budeme označovať *umiestnenie množiny A do bodu x*, čo je obraz množiny A v posunutí o vektor $x - o$:

$$A(x) = A(x) + (x - o) = \{a + (x - o);\ a \in A\} \tag{3.1}$$

Pretože posunutie je homeomorfizmus, platí

$$\mathrm{int}(A(x)) = (\mathrm{int}A)(x), \quad \mathrm{bd}(A(x)) = (\mathrm{bd}A)(x) \quad \text{a} \quad \mathrm{cl}(A(x)) = (\mathrm{cl}A)(x)$$

preto píšeme jednoducho $\mathrm{int}A(x)$, $\mathrm{bd}A(x)$ a $\mathrm{cl}A(x)$. Zrejme množina $A(x)$ je otvorená resp. uzavretá práve vtedy, keď je otvorená resp. uzavretá množina A.

Množina hustých rozmiestnení pohyblivého útvaru M a pevného útvaru N (vzhľadom na referenčný bod o) je množina bodov

$$D(M, N)_o = \{x \in E^2;\ M(x), N \text{ sú husto rozmiestnené}\} \tag{3.2}$$

Písmeno D je odvodené od anglického „densely placed“. Index o bežne vynechávame, pretože referenčný bod útvaru sa spravidla nemení, porovnaj s (3.5).

Z technického hľadiska je dôležitá *množina pretínaní pohyblivého útvaru M s pevným útvarom N (vzhľadom na referenčný bod o)*

$$I(M, N)_o = \{x \in E^2;\ M(x), N \text{ sa pretínajú}\} \tag{3.3}$$

Lebo veta 2.1 umožňuje jednoduchú redukciu hustých rozmiestnení na pretínania

$$D(M, N) = I(\mathrm{bd}M, \mathrm{bd}N) \setminus I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) \tag{3.4}$$

Nasledujúce tvrdenie je kľúčové pre dokazovanie vlastností hustých rozmiestnení.

Tvrdenie 3.1 [1] Pre všetky útvary M, N platí

$$I(M, N)_o = o + (N - M) = \{o + (n - m);\ m \in M, n \in N\}\ ^1.$$

Dôkaz Zrejme platí:

$$x \in I(M, N)_o \Leftrightarrow \exists n \in M(x) \cap N \Leftrightarrow \exists m \in M\ \exists n \in N\colon m + (x - o) = n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in M\ \exists n \in N\colon\ x = o + (n - m). \qquad \square$$

Pre body o, p a útvary M, N teda z tvrdenia 3.1 vyplýva $I(M, N)_p = I((M, N)_o + (p - o)$. V dôsledku toho

$$D(M, N)_p = D(M, N)_o + (p - o) \tag{3.5}$$

To znamená, že tvar množiny hustých rozmiestnení nezávisí od voľby referenčného bodu pohyblivého útvaru. Iným jednoduchým dôsledkom tvrdenia 3.1 a redukcie (3.4) je vzťah vyjadrujúci vzájomnú zámenu pohyblivého a pevného útvaru:

$$D(N, M)_o = s_o(D(M, N)o) \tag{3.6}$$

kde s_o: $E^2 \to E^2$ je súmernosť podľa stredu o.

Ďalším takým dôsledkom tvrdenia 3.1 je vyjadrenie množiny pretínaní pohyblivého útvaru s pevným v tvare zjednotenia útvarov:

$$I(M, N)_o = \bigcup_{n \in N} [s_o(M)](n) \tag{3.7}$$

Príklady 3.1 a) Nech M je uzavretý kruh $B(o,1)$ so stredom o a s polomerom 1, N nech je uzavretý kruh $B(o,2)$. Vtedy $I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N)$ je uzavretý kruh $B(o,3)$, $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je otvorený kruh $O(o,3)$ a $D(M, N)$ je kružnica $S(o,3)$.
b) Pre otvorené a uzavreté zväčšenia ľubovoľnej množiny A z (2.4) platí

$$O(A, r) = I(O(o,r), A), \quad B(A, r) = I(B(o,r), \mathrm{cl}A)$$

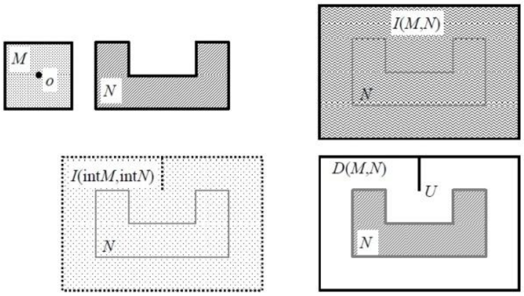
c) Nech M, N_0 sú útvary z príkladu 2.1 pre $\delta = 0$. Vtedy $I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) = I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je otvorená polrovina daná nerovnosťou $y < 0$, preto $D(M, N)$ je prázdna množina.
d) Nech $M = \{p = (x, y);\ y \geq x^2/(1 - x^2),\ |x| < 1\}$, $N = \{p = (x, y);\ y \leq 0 \text{ alebo } |x| \geq 1\}$, $o = (0, 0)$. Vtedy

$$I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) = I(M, N) = \{p = (x, y);\ y \leq 0 \text{ alebo } x \neq 0\}$$
$$I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) = \{p = (x, y);\ y < 0 \text{ alebo } x \neq 0\}$$

preto $D(M, N)$ je jednoprvková množina $\{o\}$.
e) Nech M je štvorec s vrcholmi $(\pm1,\pm1)$ a N mnohouholník tvaru „U" s vrcholmi $(-2,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$, $(-2,2)$. Ako obvykle, nech $o = (0,0)$. Vtedy

1 Množina vektorov $N - M$ resp. množina bodov $o + (N - M)$ sa v literatúre často nazýva Minkowského rozdiel útvarov M a N resp. Minkowského súčet útvarov $N \oplus (-M)$, kde $-M$ je obraz útvaru M v súmernosti podľa pólu o.

$I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) = I(M, N)$ je obdĺžnik s vrcholmi $(-3,-1)$, $(3,-1)$, $(3,3)$, $(-3,3)$ a $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je vnútro obdĺžnika $I(M, N)$ s vynechanou úsečkou U s krajnými bodmi $(0,3)$, $(0,2)$. Množina $D(M, N)$ je hranica obdĺžnika $I(M, N)$ spolu s úsečkou U. (Obr. 1)



Obr. 1. Pohyblivý štvorec M s referenčným bodom o a pevný mnohouholník N. Množina $D(M, N)$ je hranica otvorenej množiny $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$. $D(M, N)$ je zjednotením hranice obdĺžnika $I(M, N)$ s úsečkou U.

Nasledujúca veta je uhlovým kameňom teórie hustých rozmiestnení.

Veta 3.1 [1] Ak je jeden z geometrických útvarov M, N ohraničený, tak množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranicou otvorenej množiny $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$, ktorá vyjadruje všetky prekrytia pohyblivého útvaru M s pevným útvarom N:

$$D(M, N) = \mathrm{bd}I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$$

Dôkaz iba naznačíme. Podstatné je ukázať, že pre ľubovoľné množiny A, B platí

$$A \text{ je otvorená} \;\Rightarrow\; I(A, B) \text{ je otvorená} \tag{3.8}$$

$$A \text{ alebo } B \text{ je ohraničená} \;\Rightarrow\; I(\mathrm{cl}A, \mathrm{cl}B) = \mathrm{cl}I(A, B) \tag{3.9}$$

Potom už máme

$$\begin{aligned}\mathrm{bd}I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) &= \mathrm{cl}I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) \setminus \mathrm{int}I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) = \\ &= (\mathrm{cl}(\mathrm{int}M), \mathrm{cl}(\mathrm{int}N)) \setminus I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) = I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N) \setminus I(\mathrm{int}M, intN) = \\ &= \mathrm{cl}I(M, N) \setminus I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N) = D(M, N).\end{aligned}$$

Druhá rovnosť vyplýva z (3.9) a z (3.8), tretia z (2.2) a posledná z (3.4). ☐

Poznámka 3.1 Príklady 3.1 c, d ukazujú, že vo vete 3.1 nemožno vynechať predpoklad o ohraničenosti útvarov. Bez neho platí iba inklúzia $D(M, N) \subseteq \mathrm{bd}I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$.

Poznámka 3.2 Príklad 3.1 e ukazuje, že vo vete 3.1 nemožno nahradiť množinu $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ ani množinou $I(M, N)$, ani $I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N)$. Vo všeobecnosti teda platí

$$D(M, N) \neq \mathrm{bd}I(M, N) \quad \text{a} \quad D(M, N) \neq \mathrm{bd}I(\mathrm{cl}M, \mathrm{cl}N)$$

Napriek tomu sa v literatúre možno bežne stretnúť s rovnosťou $D(M, N) = \mathrm{bd}I(M, N)$; pozri napr. [10], [11]. Tvrdí sa tam, že tzv. non-fit polygon, čo je tamojší ekvivalent množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov, je hranica ich Minkowského rozdielu resp. súčtu $N \oplus (-M)$, čo je spôsob vyjadrenia množiny $I(M, N)$. Vidno teda, že pri opise množiny hustých rozmiestnení treba postupovať opatrne.

Poznámka 3.3 Veta 3.1 v súčinnosti so vzorcom (3.7) umožňuje preformulovať výsledok príkladu 3.1b takto: Hranicou geometrického útvaru N zväčšeného o hodnotu $r > 0$, teda hranicou okolia $O(N, r)$ útvaru N, je množina $D(M, N)$, kde M je otvorený kruh $O(o,r)$.

Poznámka 3.3 má široké uplatnenie v aplikáciách: Pri tvorbe nástrihového plánu sa výkrojky rozmiestňujú so stanovenou medzerou; pozri text za vetou 2.2. Vtedy sa husto rozmiestňujú výkrojky zväčšené o polovicu medzery. Teda aj hranice zväčšených výkrojkov môžeme získať pomocou teórie hustých rozmiestnení.

4. Husté rozmiestnenia mnohouholníkov

Začneme prípadom dvoch konvexných mnohouholníkov. Vieme o nich, že sú konvexnými obalmi svojich vrcholov. Na základe tvrdenia 3.1 možno bez ťažkostí dokázať, že pre konvexné obaly cA, cB ľubovoľných množín A, B platí

$$I(\mathrm{c}A, \mathrm{c}B) = \mathrm{c}I(A, B) \tag{4.1}$$

Veta 4.1 [2] Nech M, N sú konvexné mnohouholníky. Potom platí
a) Množina $I(M, N)$ je konvexný mnohouholník.
b) $\mathrm{int}I(M, N) = I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$.
c) Množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranica vnútra konvexného mnohouholníka $I(M, N)$.
d) Množina hustých rozmiestnení $D(M, N)$ je hranica konvexného mnohouholníka $I(M, N)$, čiže $D(M, N) = \mathrm{bd}I(M, N)$.

Dôkaz opäť iba naznačíme.
a) Nech A, B sú množiny vrcholov uvažovaných konvexných mnohouholníkov. Podľa (4.1) platí $I(M, N) = I(\mathrm{c}A, \mathrm{c}B) = \mathrm{c}I(A, B)$. Rovnosť (3.7) dáva, že $I(A, B)$ je konečná nekolineárna množina, preto jej konvexný obal, teda $I(M, N)$, je konvexný mnohouholník.
b) Z inklúzií $\mathrm{int}M \subseteq M$ a $\mathrm{int}N \subseteq N$ prostredníctvom tvrdenia 3.1dostaneme, že

$$I(M, N) \supseteq I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N).$$

Z výroku (3.8) preto vyplýva $\mathrm{int}I(M, N) \supseteq I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$. Táto inklúzia platí pre ľubovoľné množiny. Dôkaz obrátenej inklúzie vyžaduje využiť špecifické vlastnosti konvexných množín.
c) Tvrdenie vyplýva z vety 3.1 a z časti b).
d) Dá sa ukázať, že inklúzia $D(M, N) \supseteq \mathrm{bd}I(M, N)$ platí vo všeobecnosti, obrátenia inklúzia znova vyžaduje využiť špecifické vlastnosti konvexných množín. ☐

Je známe, že každý mnohouholník M možno vyjadriť ako zjednotenie vzájomne sa neprekrývajúcich konvexných mnohouholníkov $M_1, \ldots, M_k$, pričom každý z nich sa pretína so zjednotením predchádzajúcich. (Ide vlastne o predčasne ukončený proces triangulácie mnohouholníka postupným vkladaním vnútorných uhlopriečok.) Stručne hovoríme, že mnohouholník M je geometricky rozložený na nadväzujúce konvexné mnohouholníky.

Tvrdenie 4.1 Nech M, N sú ľubovoľné mnohouholníky a nech $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$ sú ich geometrické rozklady na nadväzujúce konvexné mnohouholníky. Potom množina $I(\mathrm{int}M, \mathrm{int}N)$ je zjednotením vnútier konvexných mnohouholníkov $I(M_i, N_j)$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,l$, ktoré na seba nadväzujú v lexikografickom usporiadaní. ☐

Pripomeňme známy spôsob vyjadrenia hranice zjednotenia dvoch otvorených množín A, B

$$\mathrm{bd}(A \cup B) = (\mathrm{bd}A \setminus B) \cup (\mathrm{bd}B \setminus A)$$

Tvrdenie 4.1 spolu s vetou 4.1 teraz dávajú návod na konštrukciu množiny hustých rozmiestnení $D(M, N)$ pre mnohouholníky ľubovoľného tvaru:

Algoritmus 4.1 [2]

1. Vytvoriť geometrické rozklady $M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$, $N = N_1 \cup \ldots \cup N_l$ na nadväzujúce konvexné mnohouholníky.
2. Skonštruovať konvexné mnohouholníky $I(M_1, N_1), \ldots, I(M_k, N_l)$ a zoradiť ich podľa lexikografického poradia dvojíc indexov.
3. $D(M, N) := \varnothing$
4. $P := \varnothing$
5. for $(i,j) = (1,1),\ldots,(k,l)$ begin

   $D(M, N) := (D(M, N) \setminus \mathrm{int}I(M_i, N_j)) \cup (\mathrm{bd}I(M_i, N_j) \setminus P)$

   $P := P \cup \mathrm{int}I(M_i, N_j)$

   end for

Poznámka. P je zjednotenie vnútier už spracovaných konvexných mnohouholníkov $I(M_i, N_j)$.

Najcitlivejším miestom algoritmu 4.1 je v cykle prebiehajúca obnova množiny $D(M, N)$. Spôsobuje, že množina $D(M, N)$ hustých rozmiestnení mnohouholníkov ľubovoľného tvaru má pomerne komplikovanú štruktúru. Môžu v nej vystupovať jednoduché uzavreté aj neuzavreté lomené čiary, prípadne aj konečný počet bodov. Navyše, opísaný výpočet niektorých častí množiny $D(M, N)$ môže byť kvôli neúplnej strojovej aritmetike značne nestabilný.

Veta 4.2 o štruktúre množiny $D(M, N)$ pre mnohouholníky, [2]:
Pre ľubovoľné mnohouholníky M, N existujú také celé čísla k, l, m, $0 \le k \le l \le m$, že množina $D(M, N)$ skladá z navzájom rôznych jednoduchých uzavretých lomených čiar $L_0,\ldots, L_k$, z navzájom rôznych jednoduchých neuzavretých lomených čiar $L_{k+1},\ldots, L_l$ a z navzájom rôznych bodov $p_{l+1}, \ldots, p_m$:

$$D(M, N) = L_0 \cup (L_1 \cup \ldots \cup L_k) \cup (L_{k+1} \cup \ldots \cup L_l) \cup \{ p_{l+1}, \ldots, p_m\} \qquad (4.2)$$

Pritom platí

(i) Každé dve rôzne lomené čiary L_i *a* L_j, $0 \le i, j \le l$, majú spoločný najviac jeden bod.

(ii) Všetky lomené čiary $L_1, \ldots, L_l$ ležia v mnohouholníku K_0 určenom lomenou čiarou L_0 a ani jedna z lomených čiar $L_{k+1}, \ldots, L_l$ nepretína vnútro žiadneho z mnohouholníkov $K_1, \ldots, K_k$ určených lomenými čiarami $L_1, \ldots, L_k$.

(iii) Všetky body $p_{l+1},\ldots, p_m$ ležia vnútri mnohouholníka K_0 a žiadny z nich neleží v niektorom mnohouholníku $K_1, \ldots, K_k$ ani na niektorej lomenej čiare $L_{k+1}, \ldots, L_l$. ☐

Príklad 4.1 V príklade 3.1e (obr. 1) je $k = 0$, $l = m = 1$, teda $D(M, N) = L_0 \cup L_1$. Uzavretá lomená čiara L_0 je hranica obdĺžnika $K_0 = I(M, N)$ a neuzavretá lomená čiara L_1 je úsečka U. Izolované body množina $D(M, N)$ neobsahuje.

Poznámka 4.2 a) Lomené čiary $L_1, \ldots, L_k$ resp. $L_{k+1}, \ldots, L_l$ resp. body $p_{l+1},\ldots, p_m$ nemusia vždy existovať. Stane sa tak pre $k = 0$ resp. pre $l = k$ resp. pre $m = l$. Naproti tomu, jednoduchá uzavretá lomená čiara L_0 existuje vždy. Určuje mnohouholník, v ktorom je obsiahnutá celá množina $D(M, N)$.
b) Lomenú čiaru L_0 možno skonštruovať kinematickým spôsobom, pri ktorom sa pohyblivý mnohouholník M „kĺže“ pozdĺž pevného mnohouholníka N a lomená čiara L_0 vzniká ako dráha referenčného bodu o; pozri [2].

c) Je teda prirodzená otázka, pre ktoré mnohouholníky *M, N* platí $D(M, N) = L_0$. Vtedy algoritmus z časti a) vyprodukuje celú množinu *D(M, N)*. Jednoduchá odpoveď je: Keď sú oba mnohouholníky konvexné. Žiaľ, v reálnych aplikáciách je tento prípad pomerne zriedkavý. Našťastie, podmienke vyhovujú aj hviezdicovité a monotónne mnohouholníky.
d) Pre konštrukciu celej množiny *D(M, N)* odkazujeme na algoritmus 4.1 alebo na dizertačnú prácu [13].

Pripomeňme, že mnohouholník je *hviezdicovitý vzhľadom na bod s*, ak s každým svojim bodom obsahuje úsečku, ktorá ho spája s bodom *s*. Ak sú všetky vnútorné body každej takej úsečky vnútornými bodmi mnohouholníka, hovoríme o *ostrej hviezdicovitosti*. Mnohouholník je *hviezdicovitý* resp. *ostro hviezdicovitý*, ak je hviezdicovitý resp. ostro hviezdicovitý vzhľadom na niektorý svoj bod.

Je zrejmé, že každý mnohouholník je konvexný práve vtedy, keď je hviezdicovitý vzhľadom na každý svoj bod.

Veta 4.3 [5] Nech *M, N* sú hviezdicovité mnohouholníky, pričom jeden nich je ostro hviezdicovitý. Potom *I(M, N)* je ostro hviezdicovitý mnohouholník a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

Lomená čiara je *monotónna vzhľadom na smer priamky H*, ak kolmé priemety jej vrcholov tvoria monotónnu postupnosť bodov na priamke. Smer priamky *H* považujeme za *horizontálny*, smer naň kolmý za *vertikálny*. Mnohouholník je *monotónny vzhľadom na smer priamky H*, ak sa jeho hraničná lomená čiara skladá z dvoch monotónnych lomených čiar.

Veta 4.4 [3], [6] Nech *M, N* sú monotónne mnohouholníky vzhľadom na smer priamky *H*. Potom *I(M, N)* je mnohouholník monotónny vzhľadom na smer priamky *H* a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

Priamka resp. úsečka kolmá na priamku *H* je *vertikálna priamka resp. úsečka*. Dá sa dokázať, že mnohouholník je monotónny práve vtedy, keď každá vertikálna priamka pretína jeho hranicu v najviac dvoch bodoch.

Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu v ďalšom už nebudeme zdôrazňovať smer monotónnosti.

Žiaľ, nie každý konvexný mnohouholník je monotónny. Monotónny je iba vtedy, keď žiadna jeho strana nie je vertikálna. To nás vedie k slabšej podmienke monotónnosti [15], [6]:

Mnohouholník je *vertikálovo monotónny*, ak každá priamka obsahujúca jeho vnútorný bod pretína hranicu mnohouholníka v najviac dvoch (a teda v práve dvoch) bodoch.

Hranica vertikálovo monotónneho mnohouholníka pozostáva z dvoch monotónnych lomených čiar a z najviac dvoch vertikálnych úsečiek. Je zrejmé, že mnohouholník je konvexný práve vtedy, keď je vertikálovo monotónny vzhľadom na každý smer.

Vetu 4.4 možno vysloviť v trochu silnejšej podobe.

Veta 4.5 Nech *M, N* sú vertikálovo monotónne mnohouholníky vzhľadom na smer priamky *H*. Potom aj *I(M, N)* je vertikálovo monotónny mnohouholník vzhľadom na smer priamky *H* a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. ☐

Poznámka 4.3 Podstatnou časťou tvrdení viet tejto kapitoly je, že vo všetkých štyroch prípadoch je množina *I(M, N)* mnohouholník a množina hustých rozmiestnení *D(M, N)* je jeho hranica. To znamená, že *D(M, N)* je jednoduchá lomená čiara L_0, a teda kinematický algoritmus konštrukcie čiary L_0 z poznámky 4.2b vyprodukuje celú množinu *D(M, N)*.

Konvexnosť, hviezdicovitosť či monotónnosť množiny *I(M, N)* je z tohto hľadiska druhoradá.

Literatúra

[1] Božek, M. (1992). On dense placements of plane figures. In Proceedings of the 8th Spring School on Computer Graphics and its Applications. UK Bratislava 1992, 13-20.

[2] Božek, M. (1994). On dense placements of polygons. In Proceedings of the 10th Spring School on Computer Graphics and its Applications. UK Bratislava 1994, 233-239.

[3] Božek, M. (2005). Dense Placements of Monotone Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2005 (Vol. 14). ISBN 80-227-2278-2. Slovak University of Technology, Bratislava 2005, 9-14.

[4] Božek, M.(2008). On Dense Placements Based on Arbitrary Rigid Motions in the Plane. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2008 (Vol. 17). ISBN 978-80-227-2952-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2008, 12-17.

[5] Božek, M. (2009). On Dense Placements of Star-shaped Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2009 (Vol. 18). ISBN 978-80-227-3141-6. Slovak University of Technology, Bratislava 2009, 27-32.

[6] Božek, M. (2010). Testing Vertical Monotony of Polygons. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 17-22.

[7] Božek, M., Vranková, E. (2004). Geometria pomáha technológiám. In G Slovenský časopis pre geometriu a grafiku. Ročník 1 (2004) číslo 1. ISSN 1336-524X. str. 17-34.

[8] Hosťovecký, A. (2007). Niektoré vlastnosti periodických rozmiestnení. Dizertácia FMFI UK Bratislava 2007.

[9] Karahuta, J. (2010). Visualizations of Dense Placements Based on Arbitrary Rigid. Motions. In: Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 51-56.

[10] LI, Z., Milenkovic, V. J. (1995). Compaction and Separation Algorithms for Nonconvex Polygons and Their Applications. In European Journal of Operations Research, Vol 84, (1995), 539-561.

[11] MILENKOVIC, V., DANIELS, K., LI, Z. Placement and Compaction of Nonconvex Polygons for Clothing Manufacture. In Proc. of the Fourth Canadian Conference on Computational Geometry, St. John's, Newfoundland, August 1992.

[12] Stoyan, Yu., G., Gilj, N., I. Methods and Algorithms of Placements of Planar Geometrical Figures (in Russian). Naukova Dumka, Kiyev, 1976.

[13] Vranková, E. Konštrukcia množiny hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov využitím stredovej súmernosti metódou zjednotenia. Dizertácia MFF UK Bratislava 2000.

[14] Zahradník, P. Pathwise Monotone Geometric Bodies in the Plane and their Placements. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2009 (Vol. 18). ISBN 978-80-227-3141-6. Slovak University of Technology, Bratislava 2009, 120-127.

[15] Zahradník, P. Three Types of Monotone Bodies in the Plane and their Placements and their Mutual Relations. In Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG 2010 (Vol. 19). ISBN 978-80-227-3364-9. Slovak University of Technology, Bratislava 2010, 99-104.

[16] Zahradník, P. Monotónne množiny v En a ich rozniestňovanie. Dizertácia MFF UK Bratislava 2010.

Článok prijatý dňa 28. júna 2012.

Adresa autorov - Adresses

doc. RNDr. Miloš Božek, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Mlynská dolina
SK - 842 48 Bratislava
e-mail: milos.bozek@fmph.uniba.sk