

ROZVÍJANIE PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI PROSTREDNÍCTVOM MANIPULÁCIE S ARCHIMEDOVSKÝMI TELESAMI

DEVELOPMENT OF SPATIAL IMAGINATION BY USING MANIPULATIVES WITH ARCHIMEDEAN SOLIDS

EVA BARČÍKOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku poukazujeme na použitie archimedovských telies vo vyučovaní stereometrie ako aj planimetrie. Zaoberáme sa princípom priestorovej manipulácie a virtuálnej vizualizácie ako dôležitej vyučovacej metódy zameranej na rozvoj priestorovej predstavivosti. Prezentujeme jeden z možných postupov skladania modelov týchto telies s použitím stavebnice Polydron. Prostredníctvom navrhnutých manipulačných aktivít chceme sústrediť pozornosť na tri spôsoby získania archimedovských telies z platónskych mnohostenov.*

KEÚČOVÉ SLOVÁ: *archimedovské telesá, stavebnica Polydron, manipulačné aktivity v geometrii.*

ABSTRACT. *In the article we pointed on using Archimedean solids in teaching of space geometry as well as in plane geometry. The contribution deals with the principle of spatial manipulation and virtual visualization, as an important teaching method aimed at promoting development of spatial imagination. We present one possible guidelines of how to build models of these solids by using the construction set, Polydron. Through these manipulating activities we want to focus on three possible ways of obtaining archimedean solids.*

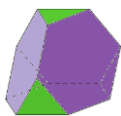
KEY WORDS: *Archimedean solids, construction set Polydron, manipulating geometry activities*

CLASSIFICATION: *D45, G45*

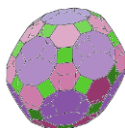
Archimedovské telesá

Vo všeobecnosti za archimedovské teleso považujeme taký konvexný mnohosten, ktorého steny sú pravidelné mnohouholníky rôznych typov, ktorých hrany majú rovnakú dĺžku. pričom každý vrchol inciduje s pravidelnými mnohouholníkmi všetkých typov a tie sú "usporiadané" okolo každého vrcholu rovnakým spôsobom.

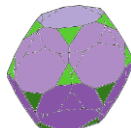
Medzi archimedovské radíme tieto telesá:



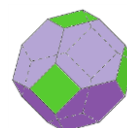
zrezaný
štvorsten



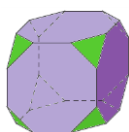
veľký
rombokosahedron



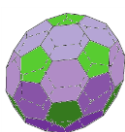
zrezaný dodekahedron



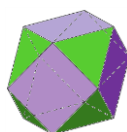
zrezaný oktahedron



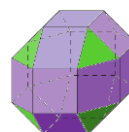
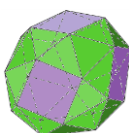
zrezaná kocka



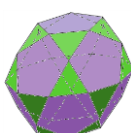
zrezaný ikosahedron



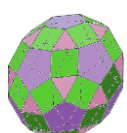
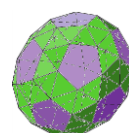
kubooktahedron

malý
rombokubooktahedron

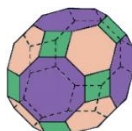
otupená kocka



ikosadodekahedron

malý
romboikosahedron

otupený dodekahedron



veľký rombikoboktahedron

Pomenované sú podľa Archimeda (287 – 212 pred n. l.), ktorý ich študoval a popísal 13. Predpokladá sa, že ich zostrojil z piatich pravidelných mnohostenov. O Archimedovej práci sa však dozvedáme sprostredkované z diela iného matematika – Alexandrijského encyklopedistu Pappa *Mathematikai synagogai*. V období renesancie boli „znovuobjavené“ a venovali sa im tak matematici, ako aj umelci (napr. dielo Luca Pacioliho ilustrované Leonardom Da Vincim, Albrecht Dürrer.). Teóriu poloprávidelných mnohostenov rozvíjal okrem iných aj Johannes Kepler (1571 - 1630), ktorý pomenoval 13 archimedovských telies a určil vzorce pre výpočet ich obsahov a objemov. Definoval tiež prisms a antiprisms. Vo svojom diele *Harmonices mundi* Kepler popisuje zostrojenie archimedovských telies osekaním platónsky telies a uvádza tiež dôkaz existencie práve 13 poloprávidelných mnohostenov. Až v 20. storočí bol objavený tzv. archimedovsko-aškiezeovský mnohosten, ktorý sa často označuje ako 14. archimedovské teleso. Vo svojich prácach sa im venovali okrem iných aj Coxeter H. S. M.[4] Cromwell P. R.[2] a iní. Z domácich autorov napríklad Jucovič E. [3], v ktorého diele možno nájsť odvodenie rovníc vrcholových postupností poloprávidelných konvexných mnohostenov. Podrobnejšie odvodenie týchto rovníc uvádza M. Konrádová v článku *Archimedovské mnohosteny veselo i vážne* [12].

Konštrukcia archimedovských telies

Podľa Heróna vznikli Archimedovské telesá jedným z týchto 4 spôsobov, ktoré spolu označujeme ako **orezanie** :

1. vrcholy pravidelných mnohostenov zrezal rovinami rozpoľujúcimi všetky hrany vedúce k jednotlivým vrcholom

2. reznými rovinami odťal z hrán menšie časti ako polovice tak, aby vznikli pravidelné mnohouholníky
3. odsekol hrany platónskeho telesa rovinou rovnobežnou s hranou, odtínajúcou na ostatných hranách rovnaké časti
4. do steny pravidelného mnohostena umiestnil sústredný pravidelný mnohouholník, podobný pôvodnému a pootočený o určitý uhol k hranám pôvodnej steny – vrcholy týchto mnohouholníkov pospájal a zvyšné časti odstránil.

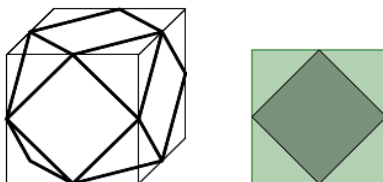
Ďalšie možné spôsoby vzniku archimedovských telies sú tzv. **rozšírenie** a **otupenie** platónskych, resp. archimedovských telies. Pri týchto postupoch z pôvodného telesa neodstraňujeme žiadne časti, ale pridávame ďalšie steny.

Práca so študentmi

Konstruktívnu prácu archimedovských telies spomenutými tromi spôsobmi (orezaním, rozšírením a otupením) sme demonštrovali na kocke s využitím stavebnice Polydron na workshope pre študentov a doktorandov. Workshop sa uskutočnil v rámci letnej školy doktorandov a zúčastnilo sa ho 14 doktorandov a 7 študentov. Úlohy nasledovali za sebou tak aby študenti v jednoduchšej následnosti sami pochopili jednotlivé spôsoby vzniku archimedovských telies. Keďže išlo o budúcich učiteľov matematiky boli úlohy volené ako inšpirácia pre vyučovanie geometrie. Samostatnej práci študentov predchádzalo uvedenie niekoľkých základných pojmov ako vrcholová postupnosť a zadefinovanie konvexného polopravidelného mnohostena. Taktiež sme uviedli dôkaz, že počet stien incidujúcich s jedným vrcholom môže byť 3, 4 alebo 5. Po stručnom úvode do problematiky dostali študenti postupne tri úlohy, ktoré riešili v skupinkách (väčšinou po 3). Úlohy riešili skladaním stavebnice Polydron, pričom mali k dispozícii len niektoré diely stavebnice – malé štvorce, pravouhlé a rovnostranné trojuholníky. Zároveň mohli celý čas využívať dynamickú vizualizáciu modelu telesa prostredníctvom softvéru Poly 1.12.

Prvá úloha bola pre študentov najťažšia, avšak zároveň najlepšie preverila ich geometrické poznatky a priestorovú predstavivosť. Pri tejto úlohe mali možnosť si uvedomiť rozdiely v použití didaktickej stavebnice a softvéru, význam ich použitia na vyučovaní ako aj význam zaradenia archimedovských telies do vyučovania matematiky.

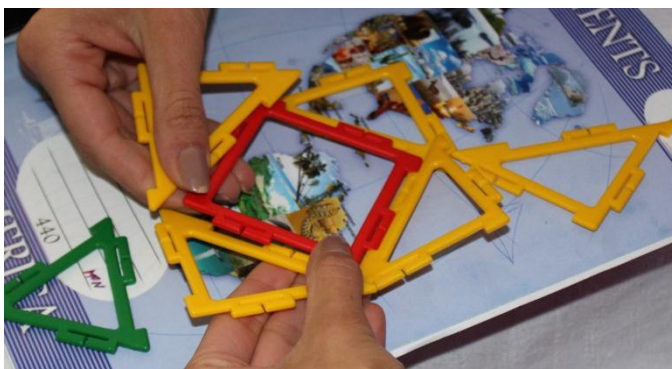
Úloha: Navrhните ako vytvoriť kocku z Polydronu tak, aby ju bolo možné orezaním⁷ vrcholov previesť na kuboóktahedron.



Obrázok 1: Znáznorenie kuboóktahedronu a rezu na jednej stene kocky

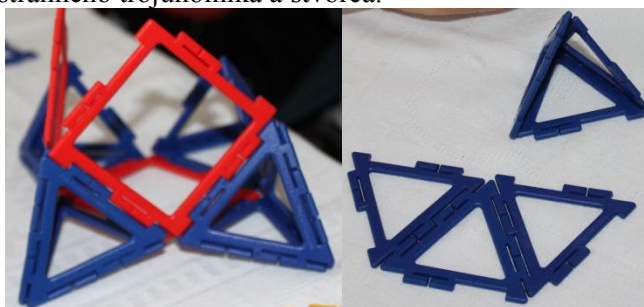
Úloha sa zdá byť jednoduchá avšak prepona pravouhlého trojuholníka má rôznu dĺžku ako strana štvorca, čiže tieto dva diely pri riešení nemohli spolu použiť.

⁷ Jednotlivé diely stavebnice museli zostať zachované.



Obrázok 2

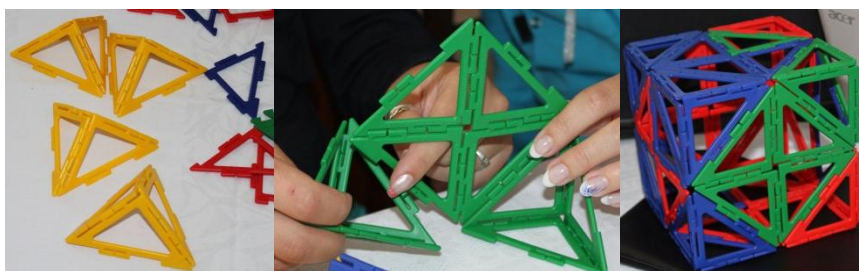
Po tomto zistení pokračovali v skladaní väčšinou spojením štvorca s rovnostranným trojuholníkom. Časť študentov si svoj omyl uvedomila až v momente, keď zložili celé teleso, ktoré však nebolo kockou. Následne sa niektorí snažili poskladať štvorec z rovnostranných trojuholníkov. Vhodnými otázkami boli vedení k zamysleniu sa nad vlastnosťami rovnostranného trojuholníka a štvorca.



Obrázok 3

Študenti, ktorí si uvedomili, že majú použiť pravouhlé trojuholníky pokračovali jedným z nasledovných postupov:

- v prvom kroku vytvorili „roh“ kocky z troch pravouhlých trojuholníkov, ktoré budú orezávať a následne hľadali štvorcovú stenu prislúchajúcu kubo-oktahedronu.
- Snažili sa poskladať štvorec z pravouhlých trojuholníkov s vpísaným menším štvorcom tak ako znázorňuje obrázok rezu jednej steny kocky.



Obrázok 4

V tomto bode väčšinou dospeli k ďalšej prekážke, keď sa snažili menší štvorec zložiť z dvoch pravouhlých trojuholníkov. Takto zložený štvorec má stranu rovnako dlhú ako

odvesna použitého trojuholníka a teda k nemu nemohli pripojiť ďalšie pravouhlé trojuholníky (spájali by odvesnu s preponou). Študenti si tak pri manipulácii so stavebnicou zopakovali aj vedomosti o pravouhlom trojuholníku.

Potom, ako prekonalí tieto problémy podarilo sa im vyhovujúci model kocky poskladať.

Ďalšie úlohy boli zostrojiť kubo-oktahedron z kocky bez toho, aby z nej čokoľvek odstránili. Riešením bolo nahradenie hrán kocky rovnostrannými trojuholníkmi. Pri riešení danej úlohy bolo dôležité uviesť si, že steny archimedovských telies sú pravidelné mnohouholníky.

Následne boli študenti vyzvaní, aby skúmali pridávaním modelov štvorcov a trojuholníkov rôzne možnosti zostrojenia archimedovského telesa. Vďaka týmto úlohám pochopili proces rozšírenia a otupenia.

Keďže mali k dispozícii vizualizáciu telesa prostredníctvom Poly 1.12., s úlohami už študenti nemali problémy. Rozšírenie a otupenie považovali za jednoduchší spôsob vzniku archimedovského telesa ako procesu orezávania vrcholov. Na záver workshopu mohli študenti vyjadriť svoj názor na aktivity ako aj samotné použitie archimedovských telies na hodinách matematiky.

Z názorov študentov vyplýva, že tieto aktivity rozvíjajú :

- priestorovú predstavivosť,
- kreativitu,
- „predstavu o plášti telesa“,
- schopnosť predstaviť si teleso z rôznych strán“,
- logické myslenie a jemnú motoriku.

Skladanie archimedovských telies má podľa nich význam pri opakovaní učiva geometrie.

Ďalší postreh z priebehu workshopu je , že konštrukcia modelov archimedovských telies použitím manipulácie so stavebnicou Polydron má u študentov väčší ohlas ako vizualizácia prostredníctvom programu Poly 1.12.

Záver

Hoci archimedovské telesá nie sú bežne zavádzané do vyučovania matematiky, práca so študentmi ukázala ich široké uplatnenie. Pri skladaní modelov a riešení úloh o archimedovských telesách s použitím rôznych didaktických stavebníc, či modelov sa u žiakov rozvíjajú kognitívne a motorické schopnosti. Žiaci si zároveň zopakujú poznatky o platónskych telesách, ale aj rovinných útvaroch (trojuholník, štvorec, pravidelné mnohouholníky). Študenti si počas workshopu mali možnosť vyskúšať manipulačné aktivity ako žiaci a zhodnotiť ich ako budúci učitelia. Vďaka týmto rôznym uhlom pohľadu sa domnievame, že si lepšie uvedomia význam didaktických pomôcok a manipulačných aktivít na hodinách geometrie.

Literatúra

- [1] Vallo, D. – Šedivý, O. (2010). Mnohosteny 1. Cesta k rozvoju geometrických predstáv. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2010, ISBN 978-80-8094-7354, s. 108
- [2] Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra. New York: Cambridge University Press, ISBN 9-521-55432-2

- [3] Jucovic, E. (1981). Konvexné mnohosteny, Bratislava, Veda vydavateľstvo SAV
- [4] Coxeter, H. S. M. (1940). Regular and Semi-Regular Polytopes I. Math. Z. 46, 380-407
- [5] Pavlíková, I. (2011). Polopráviedelné mnohostěny. Bakalářská práce. Brno: Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
- [6] Židek O. (1998). Konvexné polopráviedelné mnohosteny. Zborník Pdf TU Trnava
- [7] Žilková K. (2009). Metóda virtuálnej priestorovej manipulácie vo vyučovaní matematiky. In: Journal of Technology and Information Education, Roč. 2, č. 1 (2009), s. 33-39
- [8] Vallo D. a kol. (2012) Geometria telies ...všeobecne a pútavo. Nitra: FPV UKF v Nitre, Edícia Prírodovedec č. 505. ISBN 978-80-558-0106-3
- [9] Vidermanová, K. (2008). Manipulatívna geometria In: Mladí vedci 2008 : vedecké práce doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov / Zdenka Rózová a kol. - Nitra : UKF, ISBN 978-80-8094-285-4, S. 703-707.
- [10] Pavlovičová, G., Rumanová, L. (2008). Geometrický softvér vo vyučovaní matematiky In: Nové trendy v matematickom inžinierskom vzdelávaní 2008 : zborník vedeckých prác z medzinárodného vedeckého seminára. - Nitra : SPU, ISBN 978-80-552-0038-5, S. 115-120.
- [11] Kavitha d/o Krishan. Polyhedra. [online], dostupný na <http://www.math.nus.edu.sg/~urops/Projects/Polyhedra.pdf> [cit. 20. 2. 2012]
- [12] Konrádová, M.: Archimedovské mnohosteny veselo i vážne [online], dostupný na [www http://www.p-mat.sk/pythagoras/zbornik2004/052_konradova.pdf](http://www.p-mat.sk/pythagoras/zbornik2004/052_konradova.pdf) [cit. 12. 1. 2012]

Článok prijatý dňa 8. júla 2012

Adresa autorov

*PaedDr. Eva Barčíková
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
SK – 949 74, Nitra
e-mail: eva.barcikova@ukf.sk*

PodĎakovanie

Príspevok je publikovaný s podporou projektu KEGA: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh