FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 15

STRUKTURÁLNÍ VLASTNOSTI JISTÝCH GRUP PROSTORŮ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH HOMOGENNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC TŘETÍHO ŘÁDU

STRUCTURAL PROPERTIES OF CERTAIN GROUPS OF SOLUTION SPACES OF THIRD ORDER LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA

ABSTRAKT. *V teorii lineárních diferenciálních rovnic je užitečný postup při zobecnění výsledků pro rovnice druhého řádu na případ rovnic n-tého řádu založen na vyřešení problému pro rovnice třetího řádu. Užitím jedno-jednoznačné korespodence mezi homogenními diferenciálními rovnicemi a jejich prostory řešení jsou získány informace o grupách prostorů řešení, konkrétně je zodpovězena otázka řešitelnosti grupy prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic a přiblíženy některé její další vlastnosti.*

KLÍČOVÁ SLOVA: *Diferenciální rovnice, prostory řešení homogenních diferenciálních rovnic, řešitelná grupa.*

ABSTRACT. *In the theory of linear differential equations there is the useful method for the generalization of the results for the second-order equations to the case of the n-th order equations, which is based on the solution of the problem for the third-order equations. Using a one-to-one correspondence between homogeneous differential equations and their solution spaces there is obtained the information about the solution spaces groups, specifically there is answered the question of solvability of solution spaces group of linear homogeneous differential equations, and there are expounded some of their other properties.*

KEY WORDS: *Differential equation, solution spaces of homogeneous differential equations, solvable group.*

CLASSIFICATION: *20G07, 20F16, 47E05, I75, H45.*

Důležitým úkolem současného matematického vzdělávání na vysokých školách je orientovat studenty na vzájemné vztahy různých matematických teorií za účelem hlubšího pochopení souvislostí mezi nimi. Tento příspěvek je zaměřen na vztah látky z oblasti matematické analýzy a teorie algebraických struktur, konkrétně vztah obyčejných diferenciálních rovnic třetího řádu a jejich prostorů řešení s teorií grup. Poznamenejme, že vztahy odvozené při studiu prostorů řešení diferenciálních rovnic třetího řádu jsou nesmírně užitečné při odvozování analogických vztahů pro prostory řešení diferenciálních rovnic řádu *n*-tého. Dále je nutno zdůraznit, že příspěvek úzce navazuje na problematiku studovanou v článcích [2 - 7]. V úvodu článku [5] je uvedena motivace a zasazení této problematiky, která svými kořeny sahá až ke Galoisově teorii řešitelnosti algebraických rovnic a moderní teorii rozšiřování těles, do obecnějšího teoretického rámce.

Prezentovaný příspěvek obsahuje důkaz řešitelnosti (v Galoisově smyslu) jisté grupy prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu. Je podstatně využit hlavní výsledek článku [6], který, v návaznosti na teorii řad grup, poskytuje důkaz řešitelnosti jisté grupy lineárních diferenciálních operátorů tvořících levé strany lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu.

Připomeňme standardně používané označení: Je-li H normální podgrupa grupy G (nazývaná také invariantní podgrupa nebo normální dělitel), píšeme $H \lhd G$. Dále, posloupnost podgrup H_i $(i = 0, 1, ..., n)$ grupy G taková, že

$$\mathbf{1} = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G \qquad (\mathcal{S})$$

(symbol $\mathbf{1}$ označuje jednotkovou podgrupu grupy G), se nazývá subnormální řada grupy G a příslušné podílové grupy H_i / H_{i-1} $(i = 1, 2, ..., n)$ se nazývají faktory dané řady. Jsou-li všechny faktory řady ($\mathcal{S}$) komutativní, nazývá se tato řada řešitelná. Grupa se nazývá řešitelná, jestliže má alespoň jednu řešitelnou subnormální řadu (viz např. [8, 9, 11]). Při praktickém ověřování řešitelnosti je v některých případech cesta k důkazu řešitelnosti základní grupy rychlejší ověřením stabilizace řetězce komutantů (na úrovni triviální podgrupy) než prostřednictvím pracného ověřování komutativity faktorů existující subnormální řady podgrup, o níž se dokazuje, že je řešitelná.

Připomeňme, že podgrupa G' grupy G generovaná množinou komutátorů $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ všech dvojic prvků $[a, b] \in G \times G$ se nazývá komutant grupy G. Komutant G'' grupy G' se nazývá druhý komutant grupy G. Obvyklé označení je také $G' = G^{(1)}$, $G'' = G^{(2)}$, atd. Obecně $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Komutant $G^{(n)}$ se také nazývá n-tá derivace grupy G a řetězec komutantů grupy G

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset ...$$

je také nazýván derivovaný řetězec grupy G.

Tvrzení: ([15, Věta 10.31, s.172]). *Buď G grupa. Tyto podmínky jsou ekvivalentní:*
(i) Grupa G je řešitelná.
(ii) Existuje celé kladné číslo n s vlastností $G^{(n)} = \mathbf{1}$.
(iii) Existuje řešitelná subnormální řada grupy G.

V poměrně rozsáhlé literatuře lze nalézt množství klasických výsledků o řešitelných grupách. Připomeňme alespoň známou větu Feita-Thompsona nazývanou také věta o lichém řádu, která říká, že každá konečná grupa lichého řádu je řešitelná.

Použitý pojmový aparát je převzat z monografií [1, 8, 9, 10, 11, 12, 15] a prací [3 – 7]. Množinu všech reálných čísel budeme značit $\mathbf{R}$; pod označením $\mathbf{C}(J)$ budeme rozumět komutativní okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí (nevylučujeme případ $J = \mathbf{R}$). Okruh všech spojitých reálných funkcí na otevřeném intervalu J, které mají ve všech bodech $x \in J$ všechny (spojité) derivace až do řádu n včetně pro nějaké přirozené číslo n, budeme označovat $\mathbf{C}^n(J)$.

Nechť je dána množina diferenciálních rovnic třetího řádu

$$y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0\,,\; y \in \mathbf{C}^3(J). \qquad (1)$$

Množinu všech diferenciálních rovnic (1), v nichž $p_0, p_1, p_2 \in \mathbf{C}(J)$, $p_0(x) \neq 0$, $x \in J$, označíme v souladu s [12 - 14] $\mathbf{A}_3(J)$. Dále označíme I_d identický operátor na $\mathbf{C}^3(J)$, tj. $I_d\, y = y$ pro každou funkci $y \in \mathbf{C}^3(J)$, a položíme $D = \dfrac{d}{dx}$, tedy $Dy(x) = y'(x)$ pro každou funkci $y \in \mathbf{C}^3(J)$. Nechť pro trojici funkcí $p_i \in \mathbf{C}(J)$, $i = 1, 2, 3$, označuje $L(p_0,p_1,p_2)$ diferenciální operátor

$$L(p_0,p_1,p_2) = D^3 + p_2(x)\, D^2 + p_1(x)D + p_0(x)\, I_d\ .$$

V tomto označení má rovnice (1) tvar $L(p_0, p_1, p_2)\, y = 0$.

Věnujme nyní pozornost analýze soustavy $\boldsymbol{VA}_3(J)_2$ všech třírozměrných lineárních prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu

$$y'''(x)+\sum_{k=0}^{2} p_k(x)y^{(k)}(x) = 0,\ y \in \boldsymbol{C}^3(J).$$

Levou stranu rovnice lze označit užitím lineárního diferenciálního operátoru $L(p_0(x), p_1(x), p_2(x))$ jako obraz funkce $y \in \boldsymbol{C}^3(J)$ symbolem

$$L(p_0(x), p_1(x), p_2(x))\, y(x).$$

Užijeme-li vektorové funkce $\vec{p}\,(x) = (p_0(x), p_1(x), p_2(x))$, $\vec{D}y(x) = (y(x), y'(x), y''(x))$, při označení $L(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = L(\vec{p}\,(x))$, lze zapsat výše uvedenou diferenciální rovnici (užitím skalárního součinu vektorových funkcí) ve tvaru

$$L(\vec{p}\,(x))\, y(x) = y'''(x)+(\vec{p}(x),\vec{D}y(x)),\quad y \in \boldsymbol{C}^3(J).$$

Tyto operátory mají již dostatečně obecný tvar pro řešení výše zmíněného problému (tj. řešitelnosti grupy lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu a následně grupy prostorů řešení příslušných rovnic) v plné obecnosti.

V návaznosti na [3 - 7] nyní uvažujme množinu diferenciálních operátorů

$$\boldsymbol{LA}_3(J)_2 = \{L(p_0(x), p_1(x), p_2(x));\ p_k \in \boldsymbol{C}(J),\ p_2(x) \neq 0,\ x \in J\}.$$

Definujeme-li binární operaci $\circ_2 : \boldsymbol{LA}_3(J)_2 \times \boldsymbol{LA}_3(J)_2 \to \boldsymbol{LA}_3(J)_2$ předpisem

$$L(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) \circ_2 L(q_0(x), q_1(x), q_2(x)) =$$

$$= L(p_2(x)q_0(x) + p_0(x),\ p_2(x)q_1(x) + p_1(x),\ p_2(x)q_2(x)),\quad x \in J.$$

obdržíme - [7], a také jako důsledek dříve publikovaných úvah, že $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ je nekomutativní grupa s neutrálním prvkem $L(0, 0, 1)$,
(zde obraz $L(0;0;1)\, y(x) = y'''(x)+ y''(x)$ pro každou funkci $y \in \boldsymbol{C}^3(J)$).
Inverzní prvek k operátoru $L(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = L(\vec{p}\,(x))$ je operátor

$$L^{-1}(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = L\left(-\frac{p_0(x)}{p_2(x)}, -\frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \frac{1}{p_2(x)}\right).$$

Vskutku

$$L(\vec{p}\,(x)) \circ_2 L^{-1}(\vec{p}\,(x)) = L(\vec{p}\,(x)) \circ_2 L\left(-\frac{p_0(x)}{p_2(x)}, -\frac{p_1(x)}{p_2(x)}, \frac{1}{p_2(x)}\right) =$$

$$= L\left(-\frac{p_2(x)p_0(x)}{p_2(x)} + p_0(x), -\frac{p_2(x)p_1(x)}{p_2(x)} + p_1(x), \frac{p_2(x)}{p_2(x)}\right) = L(0;0;1).$$

Podobně obdržíme neutrální prvek ze součinu uvažovaných operátorů v opačném pořadí.

V dalším textu budeme stručně psát p_k místo $p_k(x)$. Platí ovšem $p_k \in \boldsymbol{C}(J)$, pro $k = 0,1,2$, $p_2 \neq 0$ na celém intervalu J. Označme

$$\boldsymbol{L}_{2C}\boldsymbol{A}_3(J)_2 = \{L(p_0, p_1, r);\ p_0, p_1 \in \boldsymbol{C}(J)\},\ r \in \boldsymbol{R},\ r \neq 0\},$$

$$\boldsymbol{L_1 A_3}(J)_2 = \{L(p_0, p_1, 1);\ p_0, p_1 \in \boldsymbol{C}(J)\}.$$

Z obecné teorie lineárních diferenciálních rovnic a jejich transformací (monografie F. Neumana a další práce tohoto autora) je známa existence jedno-jednoznačné korespodence mezi množinou $\boldsymbol{LA_3}(J)$ všech lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu a systémem $\boldsymbol{VA_3}(J)$ všech prostorů řešení příslušných lineárních homogenních diferenciálních rovnic vytvářených těmito operátory. Tuto bijekci označíme – jako již v dřívějších pojednáních - $\Phi\colon \boldsymbol{LA_3}(J) \to \boldsymbol{VA_3}(J)$. K definici jedno-jednoznačného zobrazení Φ podrobněji uveďme: Pro každý diferenciální operátor $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{LA_3}(J)$ vybereme libovolně bázi $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ prostoru V všech řešení diferenciální rovnice $L(p_0, p_1, p_2)y = 0$. Tento prostor označíme $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$. Označíme-li dále $\mathscr{B}$ systém všech takto vybraných – pevně zvolených – bází prostorů řešení rovnic

$$y'''(x) + \sum_{k=0}^{2} p_k(x) y^{(k)}(x) = 0\,,$$

tj. $L(p_0, p_1, p_2)y = 0$, a pro každý operátor $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{LA_3}(J)$ položíme $\Phi\,(L(p_0, p_1, p_2)) = V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\} \in \mathscr{B}$, obdržíme jedno-jednoznačné zobrazení $\Phi\colon \boldsymbol{LA_3}(J) \to \boldsymbol{VA_3}(J)$. Uvažujeme pouze výše uvedené omezení, spočívající v požadavku různosti od nuly koeficientů u druhých derivací na celém intervalu J. Zde požadavek $p_2(x) \neq 0$ pro $x \in J$ je ekvivalentní s podmínkou

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1'''(x) & \varphi_2'''(x) & \varphi_3'''(x) \end{pmatrix} \neq 0\,,\ x \in J,$$

neboť tento determinant vydělený Wronskiánem báze $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ tvoří koeficient (až na znaménko) u druhé derivace funkce $y(x)$ v příslušné diferenciální rovnici. Nechť $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in \boldsymbol{VA_3}(J)$ jsou libovolně zvolené prostory řešení lineárních diferenciálních rovnic

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & y' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' & y'' \\ \varphi_1''' & \varphi_2''' & \varphi_3''' & y''' \end{pmatrix} = 0\,,\quad det\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & y \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' & y' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' & y'' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' & y''' \end{pmatrix} = 0\,,$$

tedy rovnic $L(p_0, p_1, p_2)\,y = 0$, $L(q_0, q_1, q_2)\,y = 0$.

Pak $L(p_0, p_1, p_2) = \Phi^{-1}(V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$, $L(q_0, q_1, q_2) = \Phi^{-1}(V(\psi_1,\psi_2,\psi_3))$. Nyní pro zvolenou libovolnou dvojici prostorů $V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) \in \boldsymbol{VA_3}(J)$ položíme

$$V(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \cdot V(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = V(\omega_1,\omega_2,\omega_3),$$

kde $V(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \Phi\,(L(p_0, p_1, p_2) \circ_2 L(q_0, q_1, q_2))$.

V článku [3] je pro obecný případ rovnic n–tého řádu a tedy n-rozměrných prostorů řešení dokázána věta, která říká, že grupoid $\boldsymbol{VA}_3(J)$ výše definovaný je nekomutativní grupa.

V práci [7] je dokázána věta 4, která říká, že pro libovolný otevřený interval $J \subset \boldsymbol{R}$ grupa $(\boldsymbol{LA}_3(J), \circ_2)$ lineárních diferenciálních operátorů třetího řádu je řešitelná, tj. $\{L(0, 0,1)\} = G'' \subset G' \subset G^{(0)} = \boldsymbol{LA}_3(J)$ je řetězec komutantů grupy $\boldsymbol{LA}_3(J)$, přesněji G', G'' jsou první a druhá derivace grupy $\boldsymbol{LA}_3(J)$. Odtud a z výše provedené úvahy pak bezprostředně vyplývá tato věta:

Věta 1: Buď $J \subset \mathbf{R}$ otevřený interval, $\mathbf{VA}_3(J) = \Phi(\mathbf{LA}_3(J))$. Grupa $(\mathbf{VA}_3(J), \cdot)$ prostorů řešení lineárních diferenciálních rovnic třetího řádu je řešitelná.

Nyní se zaměřme na prostory řešení diferenciálních rovnic, které obdržíme konkrétní volbou některých koeficientů – funkcí v obecní diferenciální rovnici třetího řádu. Konkrétně, uvažujme o diferenciálních rovnicích třetího řádu

$$y''' + y'' + q(x)y' + p(x)y = 0\,,\ \ y''' + y'' + p(x)y' = 0\,,$$

$$y''' + y'' + p(x)y = 0\,,\ p, q \in \boldsymbol{C}(J),\ \text{dále pak}\ p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv 1.$$

Označme množiny příslušných diferenciálních operátorů třetího řádu takto:

$$\boldsymbol{L_1 A}_3(J)_2 = \{L(p, q, 1);\ p, q \in \boldsymbol{C}(J)\},\ q \neq 0\},$$

$$\boldsymbol{G_0}(J) = \{L(0, p, 1);\ p \in \boldsymbol{C}(J)\},\ \boldsymbol{G_1}(J) = \{L(p, 0, 1);\ p \in \boldsymbol{C}(J)\}.$$

Uvažujeme-li na těchto množinách restrikci výše definované binární operace na $\boldsymbol{LA}_3(J)_2$, obdržíme vztahy popsané v níže uvedené větě. Poznamenejme ještě, že jedničkou grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ -a všech jejích podgrup - je operátor $L(0, 0, 1)$ a Φ-obrazem tohoto operátoru je prostor všech řešení diferenciální rovnice $y''' + y'' = 0$, tedy

$$\boldsymbol{V}(1, x, e^{-x}) = \{ f;\ f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x};\ c_1, c_2, c_3 \in \boldsymbol{R} \} = \Phi(L(0, 0, 1)).$$

Označme $\boldsymbol{G_{01}}(J)$, $\boldsymbol{G_{11}}(J)$ nekonečné cyklické grupy $\{L(0, m,1);\ m \in \boldsymbol{Z}\}$, $\{L(k, 0, 1);\ k \in \boldsymbol{Z}\}$ v daném pořadí. O některých vztazích zmíněných podgrup grupy $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ vypovídá následující věta:

Věta 2: *Nechť* $J \subset \boldsymbol{R}$ *je otevřený interval. Grupoidy* $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2)$ *jsou komutativní podgrupy grupy* $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$, *pro které platí:*

1^0 $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2) \cong (\boldsymbol{C}(J),+) \times (\boldsymbol{C}(J),+) = (\boldsymbol{C}(J) \times \boldsymbol{C}(J),+)$,

$(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2) \cong (\boldsymbol{Z},+) \cong (\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2)$.

2^0 $(\boldsymbol{G_{01}}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2) \lhd (\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$,

$(\boldsymbol{G_{11}}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2) \lhd (\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$.

3^0 *Podgrupa* $(\boldsymbol{L_1A}_3(J)_2, \circ_2)$ *grupy* $(\boldsymbol{LA}_3(J)_2, \circ_2)$ *je direktním součinem grup* $(\boldsymbol{G_0}(J), \circ_2)$, $(\boldsymbol{G_1}(J), \circ_2)$.

Důkaz: 1^0 Pro libovolnou dvojici operátorů $L(p_0, p_1, 1), L(q_0, q_1, 1) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$ platí

$L(p_0, p_1, 1) \circ_2 L(q_0, q_1, 1) = L(q_0 + p_0, q_1 + p_1, 1) = L(p_0 + q_0, p_1 + q_1, 1) =$

$L(q_0, q_1, 1) \circ_2 L(p_0, p_1, 1)$, tedy $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2) \cong (\boldsymbol{C}(J),+) \times (\boldsymbol{C}(J),+) = (\boldsymbol{C}(J)\times \boldsymbol{C}(J),+)$.

Speciální volbou koeficientů $p_0(x) \equiv 0, p_1(x) \equiv 1, q_0(x) \equiv 1, q_1(x) \equiv 0$ pak obdržíme druhé tvrzení, neboť

$$L(0, m, 1) \circ_2 L(0, n, 1) = L(0, m + n, 1),$$

$$L(m, 0, 1) \circ_2 L(n, 0, 1) = L(m + n, 0, 1), \text{ kde } m, n \in \boldsymbol{Z}.$$

2^0 Nechť $L(p_0, p_1, p_2) \in \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_3(J)_2$ je libovolný operátor, $L(q_0, q_1, 1) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$. Potom

$$L^{-1}(p_0, p_1, p_2) \circ_2 L(q_0, q_1, 1) \circ_2 L(p_0, p_1, p_2) = L\left(-\frac{p_0}{p_2}, -\frac{p_1}{p_2}, \frac{1}{p_2}\right) \circ_2 L(p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2)$$

$$= L\left(\frac{-p_0 + p_0 + q_0}{p_2}, \frac{-p_1 + p_1 + q_1}{p_2}, 1\right) = L\left(\frac{q_0}{p_2}, \frac{q_1}{p_2}, 1\right) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \text{ tedy}$$

$L^{-1}(p_0, p_1, p_2) \circ_2 \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2 \circ_2 L(p_0, p_1, p_2) \subset \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$, takže $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$ je normální (tj. invariantní) podgrupa grupy $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$. Jelikož další podgrupy uvedené ve formulaci tvrzení 2^0 jsou komutativní, vztahy uvedené ve 2^0 jsou platné.

3^0 Platí $\boldsymbol{G_0}(J) \cap \boldsymbol{G_1}(J) = \{L(0, 0, 1)\}$. Dále pro libovolné operátory $L(0, p, 1) \in \boldsymbol{G_0}(J)$, $L(q, 0, 1) \in \boldsymbol{G_1}(J)$ platí $L(0, p, 1) \circ_2 L(q, 0, 1) = L(q, p, 1) = L(q, 0, 1) \circ_2 L(0, p, 1)$. Tedy $\boldsymbol{G_0}(J) \circ_2 \boldsymbol{G_1}(J) = \boldsymbol{G_1}(J) \circ_2 \boldsymbol{G_0}(J) = \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2$, takže grupa $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$ je direktním součinem podgrup $\boldsymbol{G_0}(J), \boldsymbol{G_1}(J)$ grupy $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2)$. □

Dále označíme $\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2 = \Phi(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2)$, $\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_0}(J))$, $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_1}(J))$, $\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_{01}}(J))$, $\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J) = \Phi(\boldsymbol{G_{11}}(J))$. Vzhledem k existenci izomorfismu

$$\Phi: (\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_3(J)_2, \circ_2) \to (\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}_3(J)_2, \cdot)$$

obdržíme větu:

Věta 3: *Nechť $J \subset \boldsymbol{R}$ je otevřený interval. Grupy $(\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$ mají tyto vlastnosti:*

1^0 $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \cong (\boldsymbol{C}(J)\times\boldsymbol{C}(J),+)$,
$(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \cong (\boldsymbol{Z},+) \cong (\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$.

2^0 $(\boldsymbol{W}_{01}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$,
$(\boldsymbol{W}_{11}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot) \lhd (\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J)_2, \cdot)$.

3^0 Podgrupa $(\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$ grupy $(\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$ je direktním součinem grup $(\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$, $(\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{A}_3(J), \cdot)$.

V teorii obyčejných lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu při zobecňování výsledků získaných pro rovnice druhého řádu na rovnice n-tého řádu někdy dochází k situaci, že přímé zobecnění některých tvrzení o rovnicích druhého řádu na případ rovnic *n*-tého řádu není zcela jasné a názorné. Užitečným mezikrokem se pak ukazuje přístup přes rovnice třetího řádu, který vyjasňuje možnost zobecnění tvrzení pro rovnice *n*-tého řádu. Tento postup tedy není samoúčelný, nýbrž užitečný pro lepší názornost; v tom – mimo jiné – také spočívá motivace a význam tohoto příspěvku.

Na závěr připomeňme – jak již bylo učiněno v příspěvku [5], že rozsáhlá literatura je věnována algebraické teorii lineárních diferenciálních rovnic (jejíž podstatná část se nazývá Galoisova teorie lineárních diferenciálních rovnic) – připomínáme alespoň tituly publikací [16, 17, 18], v nichž lze nalézt odkazy na další bohatou literaturu. Mimo jiné, s využitím diferenciálních okruhů a těles nulové charakteristiky jsou konstruovány algoritmy poskytující Liouvillova řešení lineárních diferenciálních rovnic (tj. řešení vytvářená z racionálních funkcí algebraickými operacemi s užitím exponenciální funkce a integrace). Moderní algoritmy pro výpočet Liouvillových řešení jsou založeny na diferenciální Galoisově teorii. V tomto příspěvku prezentované výsledky jsou zaměřeny poněkud jiným směrem a tudíž nejsou obsaženy mezi konkrétními důsledky zmíněné algebraické teorie diferenciálních rovnic. Podstatný přínos k současnosti algebraické teorie diferenciálních rovnic náleží profesoru Michaelu Singerovi a jeho vědecké škole, srv. [16, 17, 18].

Literatura

[1] Beran, Ladislav. Grupy a svazy. 1. vyd. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1974. 358 s. Matematický seminář SNTL.

[2] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. O nekomutativní grupě lineárních prostorů hladkých funkcí dimenze dvě. In: Acta Mathematica 11, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2008. s. 11-16. ISBN 978-80-8094-396-7

[3] Beránek, Jaroslav - Chvalina, Jan. Algebraické struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu. In Acta Mathematica 12. Fakulta prírodných vied UKF, Nitra, 2009, s. 25-32. ISBN 978-80-8094-614-2.

[4] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu. In: Acta Mathematica 13, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2010, s. 43-47. ISBN 978-80-8094-781-1.

[5] Beránek, Jaroslav, Chvalina, Jan. Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu. In Acta Mathematica 14, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2011, s. 51-57. ISBN 978-80-8094-958-7.

[6] Chvalina Jan, Chvalinová Ľudmila. Solvability of certain groups of second-order linear differential operators. 10th Internat. Conference APLIMAT, February 2011. Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2011, 113-119. ISBN 978-80-89313-51-8.

[7] Chvalina Jan, Chvalinová Ľudmila, Moučka, Jiří. Solvability of a Certain Group of the Third-Order Linear Differential Operators. Proc. of XXX. International Colloquium, University of Defence, Brno 2012, 10 s., ISBN 978-80-7231-865-0.

[8] Drápal, Aleš. Teorie grup - základní aspekty. Praha : Karolinum, 2009. 208 s. ISBN 80-246-0162-1.

[9] Hall, Marshall, J. The Theory of Groups. The Macmillan Company, New York 1959. (Ruský překlad : Tĕorija grupp – překl. N.V. Djumin, Z. P. Žilinskaja, red. L.A. Kalužnin – Izd. innostrannoj lit., Moskva 1962).

[10] Kalas, Josef, Ráb, Miloš. Obyčejné diferenciální rovnice. 2. vyd., Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[11] Kuroš, Aleksandr Gennadijevič. Teorija grupp. 3. vyd. Nauka Moskva 1967. 648 s.

[12] Neuman, František. Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991)

[13] Neuman, František. A survey of global investigations of lineary differential equations. Proc. of XXVIII. International Colloquium, Brno, University of Defence, Brno 2010, 7 s., ISBN 978-80-7231-722-6.

[14] Neuman, František. On a representation of linear differential equation. In: Mathematical and Computer Modelling 52 (2010), s. 355-360, ISSN 0895-7177.

[15] Procházka, Ladislav, Bican, Ladislav, Kepka, Tomáš, Němec, Petr. Algebra. Academia Praha 1990.

[16] Singer, Michael, F. Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations. arXiv:712.4124v2 [math.CA] 10 jan 2008, s. 1-83.

[17] Singer, Michael, F. Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations, in Algebraic Theory of Differential Equations. M. A. H. macCallum and A. V. Mikhalov, eds., London Math. Soc. Lecture Note Series (no. 357), Cambridge Univ. Press, 2009, 1-82.

[18] van der Put Marius, Singer, Michael. F. Galois Theory of Linear Differential Equations. Grundlehrer der math. Wissenschaften, Vol. 328, Springer-Verlag, Berlin – New York – Heidelberg 2003.

Článok prijatý dňa 3. júla 2012

Adresa autorov

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta pedagogická
Masarykova Univerzita
Poříčí 7
ČR - 603 00 Brno
e-mail: beranek@ped.muni.cz

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Ústav matematiky
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
Vysoké učení technické
Technická 8
616 00 Brno
e-mail:chvalina@feec.vutbr.cz