

OVEROVANIE A DOKAZOVANIE PLANIMETRICKÝCH VIET

VERIFICATION AND PROVING PLANE GEOMETRY THEOREMS

MARTIN BILICH

ABSTRAKT. *Overovanie, dokazovanie a objavovanie matematických viet má svoje miesto v procese moderného matematického vzdelávania na všetkých typoch škôl. V príspevku sa zaoberáme možnosťou aplikácie metódy obsahu v overovaní a dokazovaní konštrukčných geometrických viet. Základné princípy tejto metódy budú prezentované na niekoľkých príkladoch elementárnej geometrie.*

KEÚČOVÉ SLOVÁ: *dokazovanie viet, metóda obsahu, geometrické konštrukcie*

ABSTRACT. *The process of verification, proving, and discovering theorems is important in modern mathematics education at schools of all types and levels. In this paper, possible approach how to use the area method in verification and proving some constructive geometric statements is discussed. The basic principles of this method will be illustrated through examples from elementary geometry.*

KEY WORDS: *theorem proving, area method, geometric constructions*

CLASSIFICATION: *E50, G40*

1. Úvod

Predpokladať, že dokazovanie v matematike patrí medzi obľúbené činnosti na našich školách, je dozaista odvážne a pre mnohých nepredstaviteľné. Treba však pripomenúť, že bez pochopenia pojmu dôkaz a základných princípov matematického dokazovania sú študenti ukrátení o významný atribút matematiky, ktorý odlišuje matematiku od ostatných vedných odborov [6]. Z formálneho hľadiska, pod pojmom dôkaz rozumieme proces overovania platnosti istého tvrdenia v tvare konečnej postupnosti formúl, na základe logických zákonov, pomocou definícií, axióm a už známych a dokázaných viet. Vzhľadom na to, že dôležitosť systematického budovania matematickej logiky, resp. logiky všeobecne, sa vo vzdelávacom procese už na stredných školách častokrát podceňuje, netreba zabúdať na dôležitosť výberu vhodných spôsobov, metód a foriem práce, ktoré môžu prispieť k rozvíjaniu žiakovho logického myslenia, schopnosti komunikovať a argumentovať pri riešení rôznych matematických problémov. Dôkaz v matematike je v tomto smere nositeľom istej presnosti, ktorej úroveň rozvíjania determinuje prístup učiteľa a jeho primeraný dôraz ako na formálnu, tak i na vecnú stránku dôkazov.

V tomto príspevku uvidíme základné princípy *metódy obsahu*, ako jednej zo syntetických metód na dokazovanie istej skupiny geometrických viet. Konkrétne sa zameriame na tzv. konštrukčné geometrické tvrdenia (viď [5]). Dôkazy tvrdení tohto typu možno považovať za „zrozumiteľné“ v tom zmysle, že každý ich krok má jasnú geometrickú interpretáciu. Nami uvedené príklady dôkazov geometrických viet z elementárnej geometrie prezentujú jednoduchý algoritmus, ktorý sa stal v poslednom období základom pre prácu viacerých systémov automatického dokazovania matematických viet.

2. Základné pojmy metódy obsahu

Hlavnou myšlienkou metódy obsahu, založenej na princípoch priameho dôkazu, je vyjadrenie predpokladov dokazovaného tvrdenia pomocou základnej množiny daných bodov a množiny konštrukcií, ktorých výsledkom sú „nové“ body - závislé geometrické útvary [5]. Dokazovanú vlastnosť zapíšeme v tvare rovnosti dvoch výrazov, ktoré obsahujú vopred definované geometrické veličiny (bez viazanosti na súradnicový systém). Ďalej nasleduje postupná eliminácia skôr zostrojených bodov, pričom postupujeme v opačnom poradí, ako boli tieto body zostrojené. Na elimináciu premenných parametrov, ktoré obsahujú závislé geometrické útvary, používame všeobecne platné pomocné tvrdenia, tzv. *eliminačné lemy*. Výsledkom takéhoto algoritmu je vzťah (rovnosť) dvoch výrazov zahŕňajúcich iba voľné body (resp. geometrické útvary). Ak sa výrazy na oboch stranách rovnajú, tak dokazovaná vlastnosť platí. V opačnom prípade je tvrdenie nepravdivé a nemožno ho považovať za matematickú vetu.

Základné pojmy (geometrické veličiny) metódy obsahu sú: *pomer orientovaných vzdialeností, obsah orientovaného trojuholníka a pytagorejský rozdiel* [5].

Definícia 1. Pre štvoricu kolineárnych bodov A, B, C, D ($C \neq D$) je *pomer orientovaných úsečiek* AB, CD reálne číslo $\frac{\|AB\|}{\|CD\|}$, kde $\|AB\|$ je (podľa [6]) *orientovaná vzdialenosť* bodov A, B , t.j. platí: $\|AB\| = -\|BA\|$.

Definícia 2. *Obsah orientovaného trojuholníka* ABC je obsah daného trojuholníka, ktorý je kladný alebo záporný, v závislosti od jeho orientácie v rovine, t.j. je kladný, ak postupujeme od vrcholu A do B a C v kladnom smere (proti smeru hodinových ručičiek); v opačnom prípade je tento obsah záporný. Označenie podľa [6] je $\|ABC\|$.

Poznámka. Predchádzajúci pojem možno rozšíriť aj na degenerovaný trojuholník, ktorého vrcholy sú navzájom kolineárne body a jeho obsah je rovný 0.

Definícia 3. Nech sú dané tri body A, B, C . *Pytagorejským rozdielom* trojice bodov A, B a C nazveme reálne číslo

$$P_{ABC} = \|AB\|^2 + \|CB\|^2 - \|AC\|^2.$$

V tabuľke 1 uvádzame aspoň niektoré vzťahy medzi geometrickými útvarmi a k nim zodpovedajúce vyjadrenia pomocou vyššie definovaných geometrických veličín.

Vzťah medzi útvarmi	Formalizácia
Body A a B sú totožné	$P_{ABA} = 0$
Body A, B a C sú kolineárne	$\ ABC\ = 0$
AB je rovnobežné s CD	$\ ACD\ = \ BCD\ $
AB je kolmé na CD	$P_{ACD} = P_{BCD}$
Úsečky AB a CD sú zhodné	$P_{ABA} = P_{CDC}$

Tabuľka 1.

Z definície pomeru orientovaných vzdialeností a obsahu orientovaného trojuholníka vyplývajú nasledujúce vlastnosti:

(V1) Pre trojicu kolineárnych bodov A, B, C ($A \neq B$) platí:

$$(i) \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = -\frac{\|CA\|}{\|AB\|} = \frac{\|CA\|}{\|BA\|} = -\frac{\|AC\|}{\|BA\|} \quad (ii) \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = 0 \Leftrightarrow A = C$$

(V2) Pre dva navzájom rôzne body A, B a reálne číslo r existuje jediný bod P , že body A, B, P sú kolineárne a platí:

$$(i) \frac{\|AP\|}{\|AB\|} = r \quad (ii) \frac{\|AP\|}{\|AB\|} + \frac{\|PB\|}{\|AB\|} = 1$$

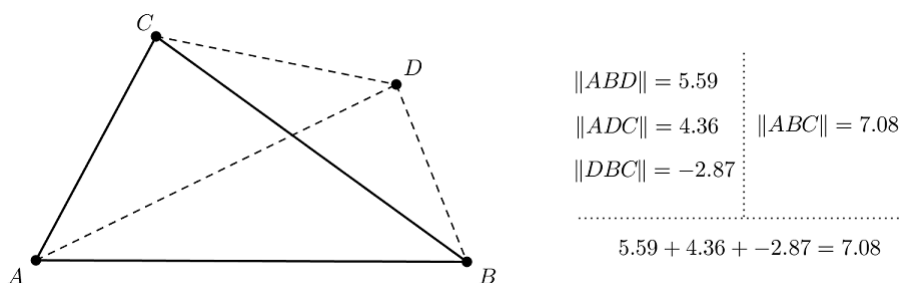
(V3) $\|ABC\| = \|CAB\| = \|BCA\| = -\|BAC\| = -\|CBA\| = -\|ACB\|$. Ak A, B, C sú nekolineárne body, tak $\|ABC\| \neq 0$.

(V4) Pre každú štvoricu bodov A, B, C, D roviny platí:

$$\|ABC\| = \|ABD\| + \|ADC\| + \|DBC\|.$$

(V5) Nech A, B, C sú kolineárne body, pričom $\|AB\| = r\|AC\|$ ($r \in \mathbb{R}$). Potom pre každý bod P platí: $\|PAB\| = r\|PAC\|$.

Tieto vlastnosti možno overiť aj v prostredí programu GeoGebra vytvorením nových nástrojov „*pomer orientovaných vzdialeností*“ a „*obsah orientovaného trojuholníka*“. Na obrázku 1 je načrtnutá jedna z možných konfigurácií bodov A, B, C, D a príslušne obsahy orientovaných trojuholníkov (a ich súčet), z ktorých vyplýva vlastnosť (V4). Ak by sme pri formulácii tejto vlastnosti nepoužili pojem obsahu orientovaného trojuholníka, museli by sme vo všeobecnosti skúmať sedem možných vzájomných polôh bodu D vzhľadom na trojicu bodov A, B, C , ktoré sú (nie nutne) vrcholmi trojuholníka.



Obrázok 1: Overenie $\|ABC\| = \|ABD\| + \|ADC\| + \|DBC\|$ v programe GeoGebra.

V nadväznosti na vymedzenie predchádzajúcich základných pojmov možno definovať aj obsah orientovaného štvoruholníka $ABCD$, ako aj pytagorejský rozdiel štvorice bodov A, B, C, D nasledovne [5]:

$$(a) \|ABCD\| = \|ABC\| + \|ACD\|$$

$$(b) P_{ABCD} = P_{ABD} - P_{CBD} = \|AB\|^2 + \|CD\|^2 - \|BC\|^2 - \|DA\|^2.$$

Medzi základné pomocné tvrdenia metódy obsahu, ktoré budeme neskôr potrebovať, patria nasledujúce *eliminačné lemy* (podrobnejšie v [2], [5]).

Lema 1. Nech M je priesečník dvojice navzájom rôznobežných priamok AB a PQ , pričom $M \neq Q$. Potom platí:

$$\frac{\|PM\|}{\|QM\|} = \frac{\|PAB\|}{\|QAB\|}; \quad \frac{\|PM\|}{\|PQ\|} = \frac{\|PAB\|}{\|PAQB\|}; \quad \frac{\|QM\|}{\|PQ\|} = \frac{\|QAB\|}{\|PAQB\|}.$$

Lema 2. Nech M je bod priamky PQ , pričom $\|PM\| = r\|PQ\|$ ($r \in \mathbb{R}$). Potom pre každú dvojicu bodov A, B platí:

$$\|MAB\| = r\|QAB\| + (1 - r)\|PAB\|. \quad (EL1)$$

3. Metóda obsahu v príkladoch

V úvode tejto časti si môžeme na známej vete o strednej priečke trojuholníka ukázať, ako demonštrovať metódu obsahu v dôkazoch niektorých viet elementárnej geometrie. Pre tento účel budeme v dôkazoch používať jazyk typický pre automatické dokazovanie.

Príklad 1. Daný je trojuholník ABC . Nech body A_1 a B_1 sú stredy strán BC a AC v danom poradí. Dokážte, že priamka A_1B_1 je rovnobežná so stranou AB daného trojuholníka.

Dôkaz. Konštrukcia bodov A_1, B_1 vyplýva priamo s vlastnosti (V2) bodu (i) pre $r = \frac{1}{2}$. Tvrdenie vety v tvare $A_1B_1 \parallel AB$ vyjadríme v jazyku metódy obsahu ako

$$\|A_1B_1A\| = \|A_1B_1B\|. \quad (1)$$

Našou úlohou je teraz eliminovať body A_1, B_1 vo vzťahu (1), pričom postupujeme v opačnom poradí, ako boli tieto body zostrojené. Pre elimináciu bodu B_1 podľa lemy 2 ($P = A, Q = C, M = B_1, A = A [B], B = A_1$) dostávame:

$$\|A_1B_1A\| = \|B_1AA_1\| = \frac{1}{2}\|CAA_1\| + \frac{1}{2}\|AAA_1\| = \frac{1}{2}\|CAA_1\|,$$

$$\|A_1B_1B\| = \|B_1BA_1\| = \frac{1}{2}\|CBA_1\| + \frac{1}{2}\|ABA_1\|.$$

Vzťah (1) teraz nadobúda tvar

$$\|CAA_1\| = \|CBA_1\| + \|ABA_1\|.$$

Ďalej nasleduje eliminácia bodu A_1 , keď podľa lemy 2 máme:

$$\|CAA_1\| = \|A_1CA\| = \frac{1}{2}\|CCA\| + \frac{1}{2}\|BCA\| = \frac{1}{2}\|BCA\|,$$

$$\|CBA_1\| = \|A_1CB\| = \frac{1}{2}\|CCB\| + \frac{1}{2}\|BCB\| = 0,$$

$$\|ABA_1\| = \|A_1AB\| = \frac{1}{2}\|CAB\| + \frac{1}{2}\|BAB\| = \frac{1}{2}\|CAB\|,$$

a vzťah (1) má tvar

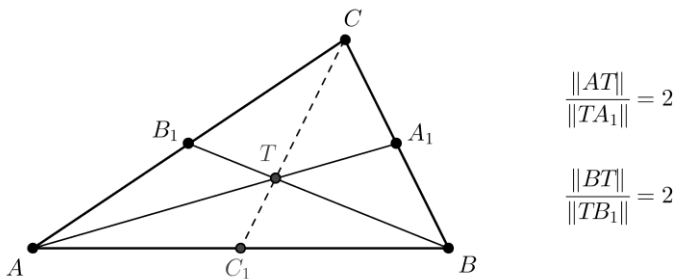
$$\frac{1}{2}\|BCA\| = \frac{1}{2}\|CAB\|.$$

Keďže platí $\|BCA\| = \|CAB\|$, tak tvrdenie vety je dokázané.

Nasledujúca úloha o ťažniciach (resp. ťažisku) ľubovoľného trojuholníka patrí medzi základné dôkazové planimetrické úlohy.

Príklad 2. Dokážte, že ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ktorý delí každú z ťažníc v pomere 2:1.

Konštrukcia. Dané sú tri navzájom rôzne nekolineárne body A, B, C (trojuholník ABC), pomocou ktorých zostrojíme všetky ostatné body, a to stredy A_1, B_1, C_1 strán BC, AC daného trojuholníka a priesečník T jeho ťažníc AA_1 a BB_1 .



Obrázok 2: Ťažisko trojuholníka (v programe GeoGebra)

Našou úlohou je dokázať

$$\frac{\|AT\|}{\|TA_1\|} = 2 \quad (2)$$

Dôkaz. Na elimináciu bodov A_1, B_1 a T na ľavej strane vzťahu (2) použijeme obe pomocné lemy z predchádzajúcej časti. Postupne dostávame:

$$\frac{\|AT\|}{\|TA_1\|} = -\frac{\|AT\|}{\|A_1T\|} = -\frac{\|ABB_1\|}{\|A_1BB_1\|} \quad (\text{eliminácia bodu } T)$$

$$\|ABB_1\| = \|B_1AB\| = \frac{1}{2}\|AAB\| + \frac{1}{2}\|CAB\| = \frac{1}{2}\|CAB\| \quad (\text{eliminácia bodu } B_1)$$

$$\|A_1BB_1\| = -\|B_1BA_1\| = -\left(\frac{1}{2}\|CBA_1\| + \frac{1}{2}\|ABA_1\|\right) \quad (\text{eliminácia bodu } B_1)$$

$$\|CBA_1\| = \|A_1CB\| = \frac{1}{2}\|BCB\| + \frac{1}{2}\|CCB\| = 0 \quad (\text{eliminácia bodu } A_1)$$

$$\|ABA_1\| = \|A_1AB\| = \frac{1}{2}\|CAB\| + \frac{1}{2}\|BAB\| = \frac{1}{2}\|CAB\| \quad (\text{eliminácia bodu } A_1)$$

Vzťah (2) môžeme teraz upraviť na tvar

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{1}{2}\|CAB\|}{-\left(\frac{1}{2}\|CBA_1\| + \frac{1}{2}\|ABA_1\|\right)} &= 2 \\ -\frac{\frac{1}{2}\|CAB\|}{-\left(0 + \frac{1}{2}\|CAB\|\right)} &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali, že bod T delí ťažnicu AA_1 v pomere 2:1. Analogická vlastnosť sa dokáže aj pre ťažnicu BB_1 . Vzhľadom na skutočnosť, že predchádzajúci postup možno uplatniť pre každú dvojicu ťažníc trojuholníka ABC a ich priesečník T , tak dostávame, že bodom T prechádzajú všetky jeho ťažnice, čo bolo treba dokázať.

4. Záver

Metódu obsahu možno považovať za jednu zo zaujímavých metód školskej geometrie, pričom v súčasnosti je úspešná aj v oblasti automatického dokazovania planimetrických viet. Práve rozvoj moderných informačných technológií doviedol dôkaz do štádia, keď jeho správnosť možno overiť aj pomocou počítača. Na tento účel existuje viacero systémov automatického dokazovania, ktoré v sebe zahŕňajú ako analytické, tak aj syntetické metódy. Dokazovanie algebrickými metódami (*Wuova metóda*, *Buchbergerova metóda* [2]) sú považované vo všeobecnosti za veľmi efektívne, avšak nimi získané dôkazy málokedy odrážajú geometrickú podstatu problému. Na druhej strane, počítačové programy založené na syntetických metódach (*metóda obsahu* [3], [5]), umožňujú vytvárať „zrozumiteľné“ dôkazy istej skupiny geometrických viet. Ani v tomto prípade však nemusia byť syntetické dôkazy stručné a prehľadné, čo je nutné zohľadniť pri ich využití vo vyučovaní na rôznych typoch škôl. Aj keď v tomto príspevku sme uviedli iba dva príklady využitia metódy obsahu, pozorný čitateľ si iste uvedomil, že uvedené postupy možno jednoducho uplatniť aj na ďalšie úlohy z elementárnej geometrie.

Literatúra

- [1] CHOU, S., GAO, X. S., ZHANG, J. Z., Machine Proofs in Geometry – Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems. Word Scientific, 1994.
- [2] JANIČIĆ, P., NARBOUX, J., QUARESMA, P., The Area Method: a Recapitulation. Journal of Automated Reasoning, 2010 (to appear).
- [3] NARBOUX, J., A Decision Procedure for Geometry in Coq. In: K. Slind et al. (eds.): TPHOLs 2004, LNCS 3223, Springer-Verlag Heidelberg, 2004, 225 – 240.
- [4] PECH, P., Selected topics in geometry with classical vs. Computer proving. World Scientific Publishing, New Jersey, 2007.
- [5] QUARESMA, P., JANIČIĆ, P., The Area Method, Rigorous Proofs of Lemmas in Hilbert’s Style Axioms Systems. Technical Report TR2006/001, Center for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2009.
- [6] TAKÁČ, Z., O motivovaní žiakov k odôvodňovaniu matematických tvrdení. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie, ročník 54 (2009), č. 3, s. 243 – 251.

Článok prijatý dňa 3. júla 2012.

Adresa

RNDr. Martin Billich, PhD.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita v Ružomberku
Hrabovská cesta 1
SK – 034 01 Ružomberok
e-mail: billich@ku.sk

PodĎakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 001UJS-4/2011.