

O INTEGRÁLOCH IRACIONÁLNYCH FUNKCIÍ

ABOUT THE INTEGRALS OF IRRATIONAL FUNCTIONS

MICHAELA KLEPANCOVÁ – MAREK VARGA

ABSTRAKT. Eulerove substitúcie predstavujú najvšeobecnejšiu metódu, umožňujúcu transformovať integrály iracionálnych funkcií na integrály racionálnych funkcií, ktoré vo väčšine prípadov vieme vypočítať aplikáciou známych postupov. V príspevku poukážeme na možnosť geometrickej interpretácie uvažovanej situácie, na základe ktorej odvodíme aj tvar jednotlivých Eulerových substitúcií.

KEÚČOVÉ SLOVÁ: Integrály iracionálnych funkcií, kuželosečky, Eulerove substitúcie.

ABSTRACT. Euler's substitutions represent a general method allowing to transform the integrals of irrational functions to the integrals of rational function which we can solve in many cases by using known techniques. In the contribution we point at the possibility of a geometric interpretation of the situation under consideration and based on that we derive the form of Euler's substitutions.

KEY WORDS: Integral of irrational functions, the curves, Euler's substitutions.

CLASSIFICATION: I 15

Úvod

V úvode do integrálneho počtu sa dozvedáme, že ak pre všetky $x \in (a; b)$ platí $F'(x) = f(x)$, potom funkciu F nazývame primitívnou funkciou k funkcii f na intervale $(a; b)$. Ďalej vieme, že pre ľubovoľnú konštantu c platí $(c)' = 0$. Preto ak je F primitívnou funkciou, potom určite aj funkcia $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je primitívnou funkciou k funkcii f na intervale $(a; b)$. Množinu všetkých primitívnych funkcií potom nazývame neurčitý integrál a označujeme $\int f(x) dx$.

Otázka integrovania je neporovnateľne náročnejšia ako derivovanie funkcií. Na výpočet neurčitých integrálov existujú najrôznejšie postupy. K základným však radíme metódu úpravy integrandu, substitučnú metódu a metódu per partes. Samotný postup v jednotlivých prípadoch, či vhodný tvar substitúcie potom závisí od toho, či sa venujeme problematike výpočtu neurčitých integrálov racionálnych, iracionálnych, goniometrických, transcendentných funkcií, či trebárs binomickým integrálom.

Vzhľadom na to, že existujú rôzne metódy (rozklad na parciálne zlomky, dopĺňanie na štvorec atď.), ktorými je možné vypočítať neurčitý integrál mnohých racionálnych funkcií, snažíme sa aj integrály iracionálnych, goniometrických či transcendentných funkcií vhodnou substitúciou pretransformovať na integrály racionálnych funkcií.

Eulerove substitúcie

V ďalších riadkoch sa budeme venovať postupom pri výpočte integrálov iracionálnych funkcií, konkrétne integrálom tvaru $\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, kde $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$,

$\mathfrak{R}$ je racionálna funkcia premenných x a y , pričom $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Za univerzálnu metódu pri výpočte integrálov iracionálnych funkcií tvaru $\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ považujeme Eulerove substitúcie. Rozlišujeme pri tom tri prípady:

(E1) ak $a > 0$, použijeme substitúciu $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax}$;

(E2) ak $c > 0$, položíme $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$;

(E3) ak $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ (t.j. existujú dva rôzne reálne korene), potom $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \alpha)$ resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \beta)$.*

Ak sa pozrieme trebárs na prvú z uvedených substitúcií (E1), po umocnení by z rovnosti vypadli na oboch stranách kvadratické členy ax^2 a zo zostávajúcich sčítancov, kde sa x nachádza už len lineárne, premennú x ľahko vyjadríme.

Číže substitúcie sú zvolené tak, aby bolo možné pomerne jednoducho vyjadriť premennú x ako racionálnu funkciu premennej t , (t.j. $x = r(t)$, kde r je nejaká racionálna funkcia. Konkrétne vyjadrením premennej x z rovností (E1), (E2), (E3) v danom poradí dostávame $x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$, $x = \frac{b - 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$, $x = \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$.

Pomocou substitúcie $x = r(t)$ následne vyjadríme aj samotnú druhú odmocninu kvadratického trojčlena $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, ako i diferenciál dx . Pôvodný integrál $\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ tak po substitúcii prejde na integrál racionálnej funkcie premennej t , ktorý dokážeme vyriešiť pomocou známych postupov.

Ako však dospieť k jednotlivým tvarom uvedených Eulerových substitúcií?

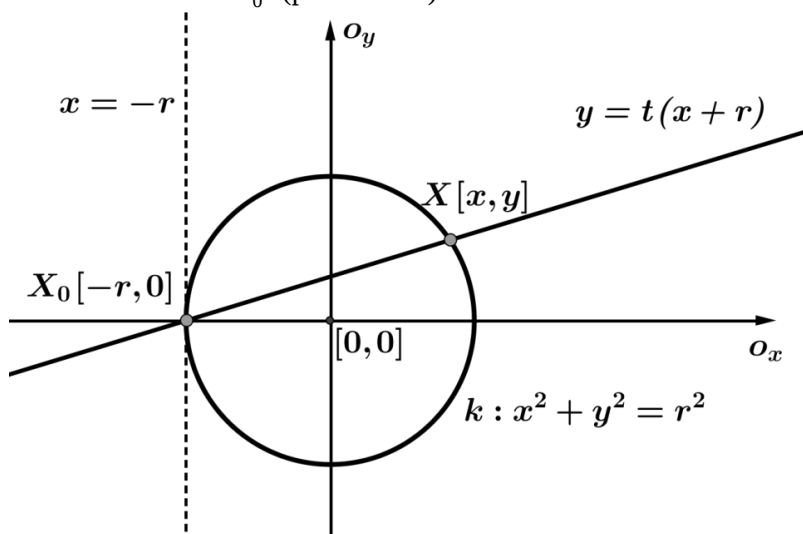
Parametrizácia krivky

Všimnime si, že ak $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, rovnicou $y^2 = ax^2 + bx + c$ (resp. $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$) je určená kužeľosečka so stredom $S[m, 0]$, $m = -\frac{b}{2a}$ (prípadne jej časť). Vzhľadom na to, že $a \neq 0$, uvažovanou kužeľosečkou je kružnica, elipsa, či hyperbola. No kužeľosečky ako krivky druhého stupňa môžu byť parametrizované racionálnymi funkciami. To znamená, že súradnice bodov $K[x, y]$ uvažovaných

* Konkrétna voľba kombinácie znamienok „+“ resp. „-“ je vo všetkých prípadoch ľubovoľná.

kužeľosečiek môžeme vyjadriť v tvare $x=r_1(t)$, $y=r_2(t)$, kde $t \in J$ a funkcie $r_1(t)$, $r_2(t)$ sú racionálne funkcie premennej t .

Nájst' parametrické vyjadrenia kužeľosečiek, a tak sa presvedčiť o pravdivosti predchádzajúceho tvrdenia, je možné rôznymi spôsobmi. Pre jednoduchosť uvažujme najskôr kužeľosečky so stredom v bode $S[0,0]$, či ešte lepšie – zoberme najskôr kružnicu $k: x^2 + y^2 = r^2$. Pri jej parametrizácii môžeme postupovať takto: zvoľme jeden z priesečníkov kružnice k s osou o_x , napríklad bod $X_0[-r,0]$. Priamka $x=-r$ je dotyčnicou kružnice k v bode X_0 (pozri obr. 1).



Obrázok 1: Parametrizácia kružnice.

Každá ďalšia priamka p prechádzajúca bodom X_0 má rovnicu $y=t(x+r)$, kde parameter t je smernicou tejto priamky. Priamka p je už samozrejme sečnicou kružnice k a pretne kružnicu k v ešte jednom bode $X[x,y]$, pre ktorého súradnice platí $x^2 + [t(x+r)]^2 = r^2$. Riešením tejto kvadratickej rovnice s neznámou x a parametrom t ,

ako sa ľahko presvedčíme, sú čísla $x_1 = -r$ a $x_2 = -\frac{t^2-1}{t^2+1}r$. Pre príslušné y -ové súradnice priesečníkov dostávame $y_1 = 0$ resp. $y_2 = -\frac{2t}{t^2+1}r$. Vzhľadom na popísanú

situáciu pre súradnice bodu X zrejme platí $X\left[-\frac{t^2-1}{t^2+1}r; \frac{2t}{t^2+1}r\right]$. Navyše, ak parameter

t bude nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$, bod X opíše celú kružnicu k ; pochopiteľne s výnimkou bodu X_0 , ktorý nezodpovedá žiadnej hodnote parametra t .

Zopakujeme, že veľký význam pre nás má fakt, že obe súradnice bodu X získané parametrizáciou krivky sú dané racionálnymi funkciami (premennej t). Úplne podobný proces by sme mohli zopakovať či už s elipsou alebo hyperbolou. v ďalších riadkoch však využijeme už zovšeobecnené úvahy.

Uvedeným spôsobom môžeme teda nájsť parametrické vyjadrenie ľubovoľnej kužeľosečky určenej rovnicou $y^2 = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$. Zvoľme na nej ľubovoľný bod $X_0[x_0, y_0]$, pre ktorého súradnice zrejme platí $y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c$ (*). Bodom X_0 zostrojíme sečnicu p danej krivky, ktorej rovnica má tvar $y - y_0 = t(x - x_0)$, kde t je smernica priamky p . Uvedená sečnica samozrejme pretína našu krivku v ešte jednom bode $X[x, y]$, pričom musí platiť $[t(x - x_0) + y_0]^2 = ax^2 + bx + c$. Využívajúc vzťah (*) dostávame $2y_0t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)$, odkiaľ po úprave máme $2y_0t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b$.

To znamená, že súradnica x (a teda aj y) sa dá vyjadriť ako racionálna funkcia premennej t . Navyše zmenou hodnôt parametra t možno opísať celú uvažovanú krivku.

Odtiaľ je už potom zrejmé, že rovnosť $ax^2 + bx + c = [t(x - x_0) + y_0]^2$ resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) + y_0$ určuje tú substitúciu, ktorá umožňuje racionalizovať integrand v integráloch tvaru $\int \Re(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Zápis

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) + y_0$ resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = t(x - x_0)$ teda predstavuje všeobecný tvar Eulerových substitúcií. Ako sa dostaneme k jednotlivým Eulerovým substitúciám potom závisí už len od špeciálnej voľby súradníc bodu $X_0[x_0, y_0]$ vo vyššie uvedenom vzťahu.

Eulerove substitúcie geometricky

V ďalšom musíme začať úvahami o definičnom obore funkcie $f: y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Predovšetkým, podmienkou $b^2 - 4ac \neq 0$ sme vylúčili prípad dvojnásobného koreňa polynómu $ax^2 + bx + c$. Potom, aby bola funkcia f vôbec niekde definovaná, musí nastať jeden z prípadov:

(I) $a < 0$ a súčasne $c > 0$; **

(II) $a > 0$.

Začnime prípadom (I). Ak sú splnené uvedené podmienky, z úvah v poznámke pod čiarou vyplýva, že náš kvadratický trojčlen má dva rôzne reálne korene, t.j. $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V tomto prípade je funkciou

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ určená časť elipsy alebo kružnice so stredom v bode $S[m, 0]$, $m = -\frac{b}{2a}$.

** Ak by $a < 0$, a kvadratický trojčlen by nemal žiadny reálny koreň, t.j. $b^2 - 4ac < 0$, tak by muselo platiť aj $c < 0$. Avšak potom by celá parabola ležala pod osou o_x , z čoho by vyplývalo $D(f) = \emptyset$.

Ak pri uvedenom spôsobe parametrizácie tejto krivky, t.j. v rovnosti $\sqrt{ax^2 + bx + c} - y_0 = \pm t(x - x_0)$, zvolíme za bod $X_0[x_0, y_0]$ niektorý z jej priesečníkov s osou o_x , t.j. $\bar{X}_0[\alpha, 0]$ resp. $\bar{\bar{X}}_0[\beta, 0]$, dostávame $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \alpha)$, resp. $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \beta)$, čo je tvar tretej Eulerovej substitúcie (E3).

Zostaňme uvažovať situáciu (I), sústreďme sa však na kladnú hodnotu koeficientu c . Naša krivka totiž pretína v dvoch bodoch i os o_y , konkrétne v priesečníkoch $\bar{Y}_0[0, \sqrt{c}]$ resp. $\bar{\bar{Y}}_0[0, -\sqrt{c}]$. Ak teda pri parametrizácii krivky určenej rovnicou $y^2 = ax^2 + bx + c$ zvolíme za bod $X_0[x_0, y_0]$ niektorý z uvedených priesečníkov s osou o_y , dostávame $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, čiže tvar Eulerovej substitúcie (E2).

Na prípad (II), ktorý by si zaslúžil podrobnejší popis, sa pozrieme len v krátkosti. Je zrejmé, že asymptotami hyperboly $y^2 = ax^2 + bx + c$, pričom $a > 0$, sú priamky $y = \pm \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. Potom každá priamka, rovnobežná s niektorou z asymptôt, t.j. $y = \pm \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + z$, kde $z \neq 0$, pretne uvažovanú hyperbolu práve v jednom bode $X[x, y]$. Ak z bude postupne nadobúdať všetky nenulové hodnoty, bod $X[x, y]$ opíše celú krivku. Po roznásobení a oreznáčení hodnoty $t = \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} + z$ môžeme rovnicu

priamky $y = \pm \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + z$ napísať v tvare $y = \pm \sqrt{a}x \pm t$. To však znamená, že

substitúcia $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x \pm t$ umožňuje racionalizovať integrand v integráloch tvaru $\int \Re\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ pričom $a > 0$. Podarilo sa nám teda odvodiť aj prvú Eulerovu substitúciu (E1).

Príklad. Aspoň jedno použitie Eulerových substitúcií si môžeme ukázať na výpočte konkrétného integrálu, napr. vypočítajme $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}} dx$.

Zrejme $a = 1 > 0$, asymptotami hyperboly $y^2 - x^2 = c$ sú priamky $y = \pm x$, priamky s nimi rovnobežné majú rovnice $y = \pm x \pm t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Pre substitúciu zvolíme verziu

$\sqrt{x^2 + c} = -x + t$. Potom dostávame $x = \frac{t^2 - c}{2t}$, $dx = \frac{c}{2t^2} dt$, a napokon $\sqrt{x^2 + c} = \frac{c}{2t}$.

Využitím týchto faktov máme

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + c}} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t + c| = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + c}\right| + c; \text{ kde } c \in \mathbb{R}.$$

Záver

Najvšeobecnejšou metódou na výpočet integrálov iracionálnych funkcií sú Eulerove substitúcie. Na samotné hľadanie primitívnych funkcií nám postačí poznať ich tvar, prípadne si ich algebraicky odvodíme, ak vieme, čo nimi sledujeme. V článku sa zameriavame na geometrické vysvetlenie týchto formúl väčšinou známych len z matematickej analýzy.

Literatúra

- [1] Fichtengol'c, G. M. (1951). Kurs differencial'nogo i integral'nogo iscislenija II. Gosudarstvennoje izdatel'stvo techniko – teoretičeskoj literatury, Moskva, 1951; 863 s.

Článok prijatý dňa 30. júna 2012

Adresa autorov

Mgr. Michaela Klepancová

KM FPV UKF

Tr. A. Hlinku 1

SK – 94974 Nitra

michaela.klepancova@ukf.sk

PaedDr. Marek Varga, PhD.

KM FPV UKF

Tr. A. Hlinku 1

SK – 94974 Nitra

mvarga@ukf.sk