UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

ACTA MATHEMATICA 16

zborník príspevkov z 11. nitrianskej matematickej konferencie organizovanej Katedrou matematiky FPV UKF v Nitre dňa 27. júna 2013

pod záštitou dekana prof. RNDr. Ľubomíra Zelenického, CSc. pri príležitosti 20. výročia konštituovania Fakulty prírodných vied UKF v Nitre

NITRA 2013

Názov: Acta mathematica 16
Edícia Prírodovedec č. 532

Zostavovatelia:
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD.
RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Vydané v roku 2013 ako účelová publikácia Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre s finančnou podporou grantu KEGA 073UKF – 4/2011: *Didaktické postupy vyučovania matematiky na II. stupni ZŠ a v príprave učiteľov s akcentom na prioritné úlohy matematiky vo vzdelávaní v intenciách Štátneho vzdelávacieho programu* a Akademickým klubom FPV UKF v Nitre.

Schválené vedením FPV dňa 28. mája 2013.

Rukopisy príspevkov prešli odbornou oponentúrou, ale neboli jazykovo upravované.

ISBN 978-80-558-0365-4

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

THEORY OF REAL NUMBERS – FROM EUDOXUS TO DEDEKIND

TEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL – OD EUDOXA K DEDEKINDOVI

JINDŘICH BEČVÁŘ

ABSTRACT. *In the article, the basic ideas of Eudoxus' proportionalities and relationship between quantities are explained and they are compared with the underlying ideas of Dedekind's cuts. Some quotations (excerpts) from Dedekind's and Lipschitz' correspondence show their interest in building an exact theory of real numbers as well as their embarrassment which the comparison of both theory caused.*

KEYWORDS: *Eudoxus' ideas of proportionalities, Dedekind's cuts, real numbers*

ABSTRAKT. *Vyloženy jsou základní myšlenky Eudoxovy teorie proporcí a srovnány s výchozími idejemi Dedekindovy teorie řezů. Úryvky z korespondence Dedekinda a Lipschitze dokládají jejich zájem o exaktní vybudování teorie reálných čísel i určité rozpaky, které komparace obou teorií vyvolala.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Eudoxova teorie proporcí, Dedekindova teorie řezů, reálná čísla*

CLASSIFICATION: *A30*

1. Úvod

V 5. století před Kristem řečtí matematici zjistili, že existují nesouměřitelné úsečky (např. strana a úhlopříčka čtverce, strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku atd.).[1] Tento objev vedl k pádu jejich dřívějších představ, že celou matematiku je možno postavit na přirozených číslech a jejich poměrech. Od aritmetických veličin proto přešli k veličinám geometrickým a v geometrické řeči začali vyjadřovat záležitosti aritmetické, číselně teoretické i algebraické. Zrodila se tzv. řecká geometrická algebra, rozvíjelo se studium iracionalit. Aritmetickou teorii poměrů přirozených čísel nahradila teorie proporcí geometrických veličin. Vytvořil ji Eudoxos z Knidu (asi 408 až 355), matematik, astronom, lékař a geograf, který byl po nějakou dobu žákem Platóna (427–347). Kromě teorie proporcí koncipoval tzv. exhaustivní metodu a teorii homocentrických sfér. Jeho matematické výsledky se objevily na přelomu 4. a 3. století před Kristem v Eukleidových *Základech*. Viz [Be1], [Be2], [Be3] a [He].

2. Eudoxova teorie proporcí

Eudoxova teorie proporcí, teorie poměrů a úměr geometrických veličin (délek, obsahů a objemů), je zpracována v páté knize Eukleidových *Základů*. Eukleidés si byl dobře vědom jejího významu i postavení v tehdejší matematice. Vždyť partie o podobnosti, která předpokládá teorii poměrů a úměr geometrických veličin, je v *Základech* podána v následující knize šesté. V sedmé až deváté knize jsou předmětem zkoumání souměřitelné veličiny (čísla), v obsáhlé desáté knize zejména veličiny nesouměřitelné.

[1] Úsečky a, b se nazývají *souměřitelné,* existuje-li úsečka c (někdy se hovoří o měrné úsečce) a přirozená čísla m, n, pro která je $a = mc$, $b = nc$. V opačném případě se nazývají *nesouměřitelné*.

Pátá kniha *Základů* začíná 18 definicemi, po nichž následuje 25 vět. Nejprve uvedeme prvních sedm definic,[2] které jsou nejdůležitější, a objasníme problematiku v nich obsaženou. Přiblížíme tak duch Eukleidova díla a poznáme styl českého překladu. Současně ukážeme, jaké úsilí vyžaduje porozumění matematice, která je psána jiným stylem a téměř bez užití symboliky, zcela jinak, než jsme zvyklí.[3]

První dvě definice a jejich výklad

1. *Dílem veličiny větší jest veličina menší, když veličinu větší doměřuje.*
2. *Násobkem pak veličiny menší jest větší, když ji menší doměřuje.*

V prvních dvou definicích je zaveden pojem násobku a dílu veličiny: jestliže pro veličiny a, b je $na = b$, kde n je přirozené číslo, pak se veličina b nazývá násobkem veličiny a a veličina a dílem veličiny b.

Znovu připomeňme, že veličinami jsou míněny veličiny geometrické, tj. délky, obsahy a objemy a že násobkem veličiny a přirozeným číslem n rozumíme veličinu na, která vznikne sečtením n exemplářů veličiny a.

Třetí a čtvrtá definice a jejich výklad

3. *Poměrem jest nějaký vztah dvou stejnorodých veličin dle jejich kolikosti.*
4. *Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.*

O poměru dvou veličin je možno hovořit jen tehdy, jsou-li stejnorodé, tj. mají-li v dnešním slova smyslu „stejnou dimenzi“. Můžeme tedy uvažovat poměr dvou délek, poměr dvou obsahů, poměr dvou objemů, ale nikoli poměr délky a obsahu, poměr délky a objemu apod. Tento přístup odpovídá zákonu homogenity („stejnorodosti“), který byl řeckými matematiky zaveden po přechodu od aritmetických veličin k veličinám geometrickým a položen do základů řecké geometrické algebry.[4] Poměr dvou veličin zachycuje vztah jejich velikostí („kolikost“).

Čtvrtá definice navíc říká, že poměr mohou tvořit jen takové veličiny a, b, k nimž existují přirozená čísla m, n, pro něž $na > b$ a $mb > a$; tato důležitá podmínka vylučuje z dalších úvah nekonečně malé veličiny.[5] Uvědomme si, že n-násobkem nekonečně malé veličiny je opět nekonečně malá veličina.

Poznamenejme, že v Eukleidových *Základech* se nekonečně malé veličiny nevyskytují, ačkoliv výchozí axiómy, které jsou uvedeny na počátku první knihy, je a priori z dalších

[2] Využijeme českého překladu *Základů* [Eu], jehož autorem je František Servít (1848–1923). O českých překladech a překladatelích Eukleidových *Základů* viz [B].

[3] O problematice překladů a přepisů starých matematických textů viz například [Be5].

[4] Poznamenejme, že se k zákonu homogenity v 16. století vrátil francouzský matematik François Viète (1540–1603), autor významné knihy *In artem analyticem isagoge* (1591). Ve svém teoretickém počtu zvaném *logistica speciosa* zavedl celou hierarchii skalárů různých „dimenzí“. Zákon homogenity definitivně odstranil René Descartes (1596–1650) ve své slavné knize *La géométrie* (1637). Viz například [Be4].

[5] V řecké matematice neměly místo ani nekonečné (tj. nekonečně velké) veličiny, neboť aktuální nekonečno Řekové neuznávali. Přijetí aktuálního nekonečna naráželo až do 19. století na 8. axióm Eukleidových *Základů*: *A celek větší než díl*. Každá aktuálně nekonečná množina má totiž vlastní podmnožiny, které mají stejnou mohutnost jako ona.

úvah nevylučují. Výjimkou je „úhel sevřený tečnou ke kružnici a kružnicí samou“, který je „menší než jakýkoli ostrý úhel“ (III. kniha, 16. věta).[6]

Podmínka uvedená ve čtvrté definici je známá jako Eudoxův axióm, Archimédův axióm nebo Eudoxův-Archimédův axióm. Archimédés ze Syrákús (287–212)[7] tento požadavek, který připisuje Eudoxovi, formuloval pro délky, obsahy a objemy v práci *O kouli a válci*,[8] pro délky a obsahy ve spise *O spirálách*[9] a pro obsahy v práci *Kvadratura paraboly*.[10] Můžeme jej vyjádřit takto: Větší ze dvou daných veličin, ať jsou to délky, obsahy nebo objemy, přesahuje menší o jistý rozdíl, který, když je dostatečně znásoben, je větší než každá z obou daných veličin.

To znamená, že například délky dvou úseček se nemohou lišit o nekonečně malou veličinu. Tento axióm do jisté míry reaguje na dřívější úvahy řeckých matematiků a filozofů o povaze a charakteru geometrických útvarů: co je úsečka a z čeho se skládá, zda je dělitelná do nekonečna atd. (viz např. [Hj]).

Pátá a šestá definice a jejich výklad

5. *Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší, jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.*
6. *Veličiny mající týž poměr nazýváme úměrou* (*úměrnými*).

Pátá a šestá definice zavádějí rovnost dvou poměrů, neboli úměru geometrických veličin. Pomocí současné matematické řeči a symboliky vyjádříme předchozí dvě definice takto: poměry $a : b$ a $c : d$ se rovnají, tj. tvoří úměru $a : b = c : d$, jestliže pro libovolně zvolená přirozená čísla m, n platí:

$$\begin{aligned} na < mb &\quad \text{právě tehdy, když} \quad nc < md, \\ na > mb &\quad \text{právě tehdy, když} \quad nc > md, \\ na = mb &\quad \text{právě tehdy, když} \quad nc = md. \end{aligned}$$

Pokusme se nyní objasnit definici rovnosti poměrů pro délky, které lze reprezentovat úsečkami (pro obsahy a objemy by byla obdobná představa méně názorná). Představme si, že jsme na jednu polopřímku nanesli n exemplářů úsečky a a m exemplářů úsečky b a získali tak body A, B a na druhou polopřímku nanesli stejným způsobem n exemplářů úsečky c a m exemplářů úsečky d a získali tak body C, D. Jsou-li pro **každou** dvojici

[6] *Kolmice na konci průměru kruhového zřízená padne vně kruhu, a v prostor mezi přímkou* (*kolmicí*) *a obvodem nevejde se přímka jiná, a úhel polokružní větší jest nad jakýkoliv ostrý úhel přímkový, zbývající však jest menší.* ([Eu], str. 43)

[7] Archimédovo dílo máme k dispozici zejména v publikacích [Ar1], [Ar2].

[8] *Further, of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with* [*it and with*] *one another.* ([Ar1], str. 4)

[9] *And here too, as in the books previously published, I assume the following lemma, that, if there be* (*two*) *unequal lines or* (*two*) *unequal areas, the excess by which the greater exceeds the less can, by being* [*continually*] *added to itself, be made to exceed any given magnitude among those which are comparable with* [*it and with*] *one another.* ([Ar1], str. 155)

[10] *... the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of* (*two*) *unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area.* ([Ar1], str. 234)

přirozených čísel m, n koncové body A, B a C, D na obou polopřímkách (vůči počátkům těchto polopřímek) „stejně umístěny“, tvoří dané poměry úměru, tj. $a : b = c : d$.

Rozeberme nyní problematiku úměry podrobněji, uvažujme pevně daný poměr $a : b$. Množina $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ všech dvojic přirozených čísel (m, n) se rozpadne na tři disjunktní podmnožiny: $X = \{(m, n); na < mb\}$, $Y = \{(m, n); na > mb\}$, $Z = \{(m, n); na = mb\}$.

Množiny X, Y, Z jsou uzavřeny na „krácení“ a „rozšiřování“ dvojic, tj. např. dvojice (m, n) leží v množině X právě tehdy, když v této množině leží dvojice (km, kn). Proto můžeme od dvojic přirozených čísel (m, n) přejít ke kladným racionálním číslům $^{m}/_{n}$ a množiny X, Y, Z chápat jako podmnožiny množiny $\mathbf{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel. Množina $\mathbf{Q}^+$ je tedy disjunktním sjednocením množin X, Y, Z. Snadno lze dokázat následující tvrzení:

- množina X obsahuje s každým číslem x všechna racionální čísla, která jsou větší než x,
- množina Y obsahuje s každým číslem y všechna kladná racionální čísla, která jsou menší než y,
- jestliže je z prvkem množiny Z, potom každé racionální číslo, které je větší než z, je obsaženo v množině X a každé kladné racionální číslo, které je menší než z, je obsaženo v množině Y,
- množina Z je nejvýše jednoprvková; jsou-li veličiny a, b nesouměřitelné, je prázdná, jsou-li souměřitelné, je jednoprvková.

Poměr $a : b$ tedy definuje rozklad množiny kladných racionálních čísel $\mathbf{Q}^+$ na disjunktní množiny X, Y, Z, které mají výše uvedené vlastnosti. Poměry $a : b$ a $c : d$ se podle páté (a šesté) definice rovnají, tj. tvoří úměru, právě tehdy, když jim odpovídají (ve výše uvedeném smyslu) stejné rozklady množiny $\mathbf{Q}^+$.

Sedmá definice a její výklad

7. *Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.*

Tato definice umožňuje srovnání poměrů podle velikosti: existují-li přirozená čísla m, n taková, že $na > mb$ a $nc \le md$, pak budeme psát $a : b > c : d$.

Uvažujme opět pevně zvolený poměr $a : b$ a rozlišme dva případy.

Jestliže jsou veličiny a, b souměřitelné, pak pro nějaká přirozená čísla m, n je $a = mc$, $b = nc$, kde c je jejich společná míra. Pak je $na = mb = nmc$, tj. číslo $^{m}/_{n}$ leží v množině Z. Poměr $a : b$ neboli $mc : nc$ je nyní rozumné reprezentovat poměrem $m : n$ dvou přirozených čísel m, n, tj. (v naší řeči) racionálním číslem $^{m}/_{n}$.

Jsou-li veličiny a, b nesouměřitelné, je množina Z prázdná, a proto je $\mathbf{Q}^+$ disjunktním sjednocením množin X a Y. Jestliže je číslo $^{m}/_{n}$ prvkem množiny Y, potom je podle 7. definice $a : b > mc : nc$, neboť $na > mb$ a $nmc = mnc$. Poměr $a : b$ je tedy větší než poměr $mc : nc$, kterému jsme v předchozím odstavci přiřadili racionální číslo $^{m}/_{n}$. Jestliže je číslo $^{m}/_{n}$ prvkem množiny X, potom je podle 7. definice $b : a > nc : mc$, neboť $mb > na$ a $mnc = nmc$. Poměr $b : a$ je tedy větší než poměr $nc : mc$, kterému je přiřazeno racionální číslo $^{n}/_{m}$. Je přirozené usoudit, že poměr $a : b$ je menší než poměr $mc : nc$, kterému jsme přiřadili racionální číslo $^m/_n$. Můžeme tedy říci, že poměr $a : b$ je „sevřen“ množinami X a Y.

Uvědomme si ještě, že nerovnost $a : b > c : d$ platí právě tehdy, když existuje racionální číslo $^m/_n$, pro které je $a : b > {}^m/_n \geq c : d$ (příslušné rozklady množiny $\mathbf{Q}^+$ nejsou pro poměry $a : b,\ c : d$ stejné, liší se alespoň v prvku $^m/_n$).

Objasněme nyní celou záležitost ještě jednou, ale z trochu jiného pohledu. Zvolme jednotku 1 a uvažujme veličiny, které jsou s ní souměřitelné, resp. nesouměřitelné. Násobky jednotky značme přirozenými čísly, pišme tedy jednoduše $m = m \cdot 1$. Je-li veličina a souměřitelná s jednotkou, je $na = m$; veličina a je tedy n-tinou veličiny m, tj. $a = {}^m/_n$. Veličina a je v tomto případě racionální.

Je-li veličina a nesouměřitelná s jednotkou, potom poměr $a : 1$ určuje disjunktní rozklad množiny $\mathbf{Q}^+$ na podmnožiny X a Y. Jestliže $^m/_n$ patří do Y, pak je $na > m$, a tedy $a > {}^m/_n$. Jestliže $^m/_n$ patří do X, pak je $na < m$, a tedy $a < {}^m/_n$. Veličina a je tedy vymezena disjunktními podmnožinami X, Y množiny $\mathbf{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel. Je iracionální.

Připomeňme, že řečtí matematici od nejstarších dob vymezovali iracionální čísla čísly racionálními. Již pýthagorejci znali následující odhad odmocniny ze dvou:

$$^7/_5 < \sqrt{2} < {}^{17}/_{12}.$$

Archimédés v práci *O měření kruhu*[11] využíval při výpočtu horního a dolního odhadu poměru obvodu a průměru kruhu (odhad konstanty, kterou dnes značíme symbolem π) nerovnosti

$$^{265}/_{153} < \sqrt{3} < {}^{1\,351}/_{780}\,.$$

Toto vymezení je mimořádně přesné, jak ukazuje výpočet rozdílu horní a dolní meze:

$$^{1\,351}/_{780} - {}^{265}/_{153} = {}^{1}/_{39\,780}\,.$$

Pro číslo π nalezl Archimédés odhad

$$^{25\,344}/_{8\,069} < \pi < {}^{29\,376}/_{9\,347}\,,$$

který číslo π vymezuje s přesností na dvě desetinná místa, a jeho jednodušší, méně přesnou verzi

$$3\,{}^{10}/_{71} < \pi < 3\,{}^{1}/_{7}\,.$$

Eudoxova myšlenka definice rovnosti poměrů, tj. definice úměry, je velmi zajímavá. Poznamenejme, že pro úsečky a, b, c, d by bylo možno zavést rovnost poměrů $a : b, c : d$ pomocí rovnosti obsahů ad, bc, tj. rovností $ad = bc$.[12] Jsou-li však a, b, c, d obsahy, resp. objemy (tj. veličiny druhé, resp. třetí dimenze), pak součiny ad, bc nemají (ve smyslu řecké geometrické algebry) geometrický význam (mají totiž dimenze větší než 3). Navíc

[11] O tomto spisu pojednává podrobně článek [Be6], o výpočtu odmocnin ve starověku článek [Be7].

[12] Porovnat obsahy dvou obdélníků umíme provést geometricky – můžeme je například nahradit rovnoplochými čtverci a porovnat délky jejich stran.

by toto pojetí nedávalo zjevnou možnost vymezení poměru nesouměřitelných veličin (iracionálního čísla) pomocí poměrů souměřitelných veličin (racionálními čísly).

Další definice

Osmá až osmnáctá definice již žádné závažné myšlenky neobsahují. Navíc jsou v nich obsažena některá jednoduchá tvrzení, která při exaktním přístupu do definic nepatří. Jako příklad uveďme osmou a devátou definici:

8. *Úměra o trojím členství jest nejmenší.*
9. *Když jsou tři veličiny úměrou, pravíme, že se má první ke třetí jako dvojmoc první ke dvojmoci druhé.*

Týkají se úměry $a : b = b : c$, z níž snadno vyplývá úměra $a : c = a^2 : b^2$.

Věty o poměrech a úměrách

Ve větách, které následují, jsou popsány jednoduché vztahy mezi veličinami a jejich násobky, mezi poměry a úměrami. Uveďme pro zajímavost několik těchto výsledků (věty 3, 10, 24 a 25) v Servítově překladu a v dnešní symbolice.

3. *Když první veličina je stejným násobkem druhé jako třetí čtvrté a vezmeme stejný násobek první a třetí, bude též z obdržených po řadě násobků první stejným násobkem druhé jako druhý čtvrté.*
10. *Z veličin k témuž poměr majících ta, jež má větší poměr, jest větší; ke které však totéž má větší poměr; ta jest menší.*
24. *Když první veličina má ke druhé týž poměr jako třetí ke čtvrté a též pátá ke druhé má týž poměr jako šestá ke čtvrté, také součet první s pátou bude míti ke druhé týž poměr jako součet třetí se šestou ke čtvrté.*
25. *Když jsou čtyři veličiny úměrou, největší s nejmenší jest větší než dvě ostatní.*

V současné symbolice tato tvrzení vyjádříme takto:

- Jestliže $a = mb$, $c = md$, potom $na = (nm)b$, $nc = (nm)d$.
- Jestliže $a : c > b : c$, potom $a > b$. Jestliže $c : b > c : a$, potom $a > b$.
- Jestliže $a : b = c : d$, $e : b = f : d$, pak $(a + e) : b = (c + f) : d$.
- Nechť $a : b = c : d$. Jestliže a je největší (a d nejmenší) z veličin a, b, c, d, pak $a + d > b + c$.

V moderní symbolice lze všechna tato tvrzení snadno dokázat. Podrobný komentář a pokus o moderní interpretaci této partie Eukleidových *Základů* je obsažen v práci [Be8].

3. Moderní teorie reálných čísel

S určitou mírou nadsázky můžeme říci, že Eudoxova teorie proporcí zavádí kladná reálná čísla. Její základní myšlenka je obsažena v postupu, který ke konstrukci reálných čísel použil ve druhé polovině 19. století vynikající německý matematik Richard Dedekind (1831–1916). Několika větami nastíníme jeho výchozí myšlenku.

Uvažujme disjunktní rozklad množiny **Q** všech racionálních čísel na podmnožiny X, Y splňující tuto podmínku: pro každé x množiny X a každé y množiny Y je $y < x$. Dvojice (X, Y) se pak nazývá řez. Uvažujme množinu všech takovýchto řezů, její prvky, tj. jednotlivé řezy, nazveme reálná čísla. Existuje-li v množině X nejmenší prvek x, resp.

v množině Y největší prvek y, definuje řez (X, Y) racionální číslo x, resp. y. Pokud nemá množina X nejmenší prvek a množina Y největší prvek, definuje řez (X, Y) iracionální číslo. Takovým je například řez (X, Y), kde $X = \{q\,;\, q^2 > 2\}$ a $Y = \mathbf{Q} \setminus X$, vymezující iracionální číslo $\sqrt{2}$.

Eudoxova teorie proporcí, tj. teorie poměrů a úměr geometrických veličin, představovala tedy jakousi teorii reálných čísel. Z dnešního pohledu nebyla dokonalá a při tehdejším chápání nekonečna ani dokonalá být nemohla. Odmítání aktuálního nekonečna totiž znemožňovalo úvahy o číselném oboru **všech** reálných čísel, o souhrnu, resp. množině **všech** iracionalit apod. Z těchto důvodů nebylo možno postihnout spojitost (resp. úplnost) této číselné struktury. Teprve v 19. století, více než dvě tisíciletí po Eudoxovi a Eukleidovi, dospělo několik matematiků k úvahám o exaktním vybudování číselného oboru reálných čísel.

Devatenácté století je obdobím zpřesňování základů matematické analýzy. V první polovině tohoto století byli hlavními aktéry tohoto procesu Bernard Bolzano (1781–1848), matematik, teolog a filozof italsko-německého původu, který celý život prožil v Čechách, a francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), autor významné knihy *Cours d'analyse* z roku 1821, od něhož pochází pojem cauchyovská posloupnost, který sehrál při pozdějším popisu reálných čísel důležitou roli. O něco později stavěli matematickou analýzu na pevnější základy další tvůrci, mezi nimiž vynikli zejména Bernhard Riemann (1826–1866) a Karl Weierstrass (1815–1897), který přispěl k tzv. aritmetizaci matematiky, tj. k vyjádření základních pojmů diferenciálního a integrálního počtu v řeči epsilon-delta (funkce, limita, spojitost, integrál atd.). Nakonec došlo i k přesnému popisu reálných čísel. O exaktním budování základů matematiky intenzivně přemýšlel již Bolzano, popisu reálných čísel se věnoval s částečným úspěchem v letech 1830 až 1835. Většina jeho úvah však zůstala nepublikována a vývoj matematiky neovlivnila. Teorii reálných čísel budovali nezávisle na sobě francouzský matematik Charles Méray (1835–1911) a německý matematik Heinrich Heine (1821–1881). Weierstrass se těmto otázkám věnoval od roku 1865 ve svých přednáškách na berlínské univerzitě. Z jeho myšlenek se odvozuje reprezentace reálných čísel desetinnými číselnými řadami.

Zcela exaktní teorii reálných čísel vypracoval německý matematik Georg Cantor (1845–1918) v sedmdesátých letech 19. století; postavil ji na své teorii množin. Reálná čísla reprezentoval třídami navzájem ekvivalentních *fundamentálních* (tj. cauchyovských) posloupností racionálních čísel. Ve stejné době prezentoval svou teorii řezů Richard Dedekind. Čtenářům zajímajícím se o vývoj názorů na reálná čísla lze doporučit pěkně koncipovaný článek Jaromíra Šimši [Š].

Richard Dedekind

Když byl roku 1858 Richard Dedekind postaven před povinnost vést na polytechnice v Curychu přednášky z diferenciálního počtu, uvědomil si, že dosud neexistuje exaktní teorie reálných čísel. Intenzivně se tímto problémem začal zabývat a takovouto teorii vytvořil. Její základní myšlenky publikoval roku 1872 v práci *Stetigkeit und irrationale Zahlen* a v jejím úvodu poznamenal, že sepsal své výsledky z podzimu roku 1858. Velmi významná pro rozšíření moderního pojetí analýzy – a matematiky vůbec – byla i jeho další práce *Was sind und was sollen die Zahlen?* z roku 1888. Svoji brožurku *Stetigkeit und irrationale Zahlen* začal Dedekind těmito slovy:

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen. Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschlußfaßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. ...

Dies gelang mir am 24. November 1858, ... ([De2]-III., str. 315–316)

Základní myšlenku popsal Dedekind takto:

Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt. ([De2]-III., str. 322)

Poznamenejme, že Dedekinda problematika číselných oborů velmi zaujala. V knížce *Was sind und was sollen die Zahlen?* nalézáme mimo jiné známé Peanovy axiómy přirozených čísel, k nimž Dedekind dospěl ve stejné době jako italský matematik a logik Giuseppe Peano (1858–1939) – viz například [Gi]. Zdůraznil zde toto:

Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. ([De2]-III., str. 335)

Velmi zajímavé je srovnat předchozí citát se známým výrokem Leopolda Kroneckera (1823–1891), který byl vysloven roku 1886, tj. o dva roky dříve, na schůzi berlínských přírodovědců:[13] *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

Oba zmíněné Dedekindovy texty o povaze reálných čísel byly mnohokrát vydány (viz [De1]), byly zařazeny i do Dedekindových sebraných matematických spisů [De2]. Jeho přednášky z diferenciálního a integrálního počtu ze školního roku 1861/1862 vyšly roku 1985 (viz [De3]).

Rudolf Lipschitz

Německý matematik Rudolf Lipschitz (1832–1903) byl jedním z prvních matematiků, kteří Dedekindovu teorii řezů promýšleli a uvědomovali si její historické souvislosti. Ve

[13] Viz Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2(1893), str. 5–31, citát ze str. 19, viz též Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 33(1925), str. 210–228.

druhé polovině 70. let 19. století připravoval k vydání svou dvoudílnou učebnici *Lehrbuch der Analysis, I. Grundlagen der Analysis, II. Differential- und Integralrechnung* [Li1], která vyšla v Bonnu v letech 1877 a 1880. Je pravděpodobné, že ho otázka exaktního budování oboru reálných čísel zaujala právě v souvislosti s přípravou této učebnice.

Zajímavé úryvky z korespondence Rudolfa Lipschitze a Richarda Dedekinda

Velmi zajímavá je Lipschitzova a Dedekindova vzájemná korespondence, která se týká exaktního budování reálných čísel. Lipschitz se tázal, co vlastně Dedekind udělal nového ve srovnání se starými řeckými matematiky, když jeho teorie řezů má předobraz v Eudoxově teorii proporcí. Dedekind poctivě přiznal, že základní myšlenka je stejná; podotknul však, že podstatným rozdílem je to, že teorie řezů zaručuje spojitost reálné osy.

Dne 8. června 1876 poslal Lipschitz Dedekindovi dopis, kterým navázal na jejich předchozí krátkou výměnu listů.[14] Mimo jiné napsal:

... Ich muss jetzt gestehen, dass ich die Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, dass ich aber der Meinung bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdruckes aber nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich kann nur sagen, dass die von Euclid V,5 aufgestellte Definition, welche ich lateinisch anführe rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare[15]*, und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition. Aus diesem Grunde würde ich wünschen, dass namentlich die Behauptung wegfiele, dass solche Sätze wie* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ *bisher nicht wirklich bewiesen seien.* ([Li2], str. 58)[16]

Dedekind obratem odpověděl. Jeho dlouhý dopis je datován 10. června 1876:

... das System aller Schnitte in dem für sich unstetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit.

... die Euklidischen Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen nicht enthalten ist, unfähig sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Grössen zu begründen ...

Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene Muster eines stetigen Gebietes erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Grössen-Verhältniss durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisiren. ([Li2], str. 65–68)

Lipschitz odpověděl dne 6. července 1876. Ve svém listu připomněl intuitivní představy o spojitosti křivky:

... Was Sie von der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Principien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann. ([Li2], str. 73)

---

[14] Korespondence Lipschitze a Dedekinda je otištěna v knize [Li2] na stranách 47 až 106. Zahrnuje listy napsané v období od 11. března 1876 do 17. ledna 1894.

[15] Text 4. definice v Heibergově latinské edici Eukleidových *Základů* zní takto: *Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quae multiplicatae altera alteram superare possunt*. V Servítově překladu: *Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.* Poznamenejme, že Heibergova kritická verze Eukleidových *Základů* vycházela až v letech 1883 až 1888.

[16] O tomto tématu viz článek [Fo].

Dedekind dne 27. července 1876 napsal:

... Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punct, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, dass bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien. ([Li2], str. 78)

Odborná korespondence obou matematiků pokračovala i v dalších letech. Byla velmi zdvořilá a uctivá. Ve svém dopise z 8. června 1876 se Lipschitz za své pochybnosti o Dedekindově teorii řezů dokonce omlouvá:

Ich kann übrigens diese Bemerkung nicht schliessen, ohne zu sagen, wie schwer es mir wird, Ihnen dieselbe zu schreiben. ([Li2], str. 58)

O vztahu staré Eudoxovy teorie proporcí a moderní Dedekindovy teorie řezů viz např. [Kr], [St] a [Ga].

3. Závěr

Řečtí matematici dospěli v pátém a čtvrtém století před Kristem k pochopení podstaty souměřitelnosti a nesouměřitelnosti geometrických veličin, a tedy k existenci iracionalit. Byli schopni poměr konkrétních geometrických veličin velmi přesně vymezit shora i zdola poměry přirozených čísel. Jednotlivé iracionality tak dokázali „zařadit na správné místo" mezi čísla racionální.

K jasné představě o tom, že naopak **každé** rozdělení množiny kladných racionálních čísel ve výše uvedeném smyslu definuje kladné reálné číslo (racionální nebo iracionální), však řecká matematika nedospěla. Řečtí matematici nemohli při svém pojetí matematiky (odmítání aktuálního nekonečna) uvažovat (v dnešní řeči) množinu **všech** takovýchto rozdělení, nemohli tak získat obor **všech** kladných reálných čísel. Ze stejného důvodu nemohli hovořit (v našem smyslu) o spojitosti.[17]

Dedekind naproti tomu vytvořil v sedmdesátých letech 19. století množinu **všech** reálných čísel jako množinu **všech** řezů oboru racionálních čísel a přesně postihnul její spojitost. Tohoto svého přínosu, kterým kvalitativně překonal Eudoxovu teorii proporcí, si byl dobře vědom, jak vyplývá z jeho korespondence s Lipschitzem.

Představu o tom, kolik vlastně iracionalit je, přinesla až poslední třetina 19. století. Teprve Cantor ukázal, že racionálních čísel je „stejně mnoho" jako čísel přirozených, ale reálných čísel je „více".

Poznamenejme, že tento text vznikl úpravami a výrazným zkrácením článku [Be8].

Literatura

[Ar1] Archimedes (2002) *The Works of Archimedes, Edited by T. L. Heath*. New York: Dover Publications. clxxxvi+326+51 stran.

[17] Navíc je třeba připomenout, že tehdy bylo nutno uvažovat délky, obsahy a objemy odděleně, tj. uvažovat tři různé obory kvalitativně odlišných geometrických veličin.

[Ar2] Archimedes (1914) Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas L. Heath. Deutsch von Dr. Fritz Kliem. Berlin: Verlag von O. Häring. xii+477 stran.

[Eu] Eukleides (1907) *Eukleidovy Základy* (*Elementa*). *Přeložil František Servít*. Praha: Jednota českých mathematiků. vi+314 stran.

[Be1] Bečvář J. (1994) *Hrdinský věk řecké matematiky*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky I, edice Dějiny matematiky, sv. 1. Brno: JČMF. Str. 20–107.

[Be2] Bečvář J. (1997) *Hrdinský věk řecké matematiky II*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky II, edice Dějiny matematiky, sv. 7. Praha: Prometheus. Str. 7–28.

[Be3] Bečvář J. (2007) *Cesta k Eukleidovým Základům*. G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku 4, str. 5–24.

[Be4] Bečvář J. (1999) *Algebra v 16. a 17. století*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, sv. 12. Praha: Prometheus. Str. 161–235.

[Be5] Bečvář J. (2009) *Interpretace matematických výsledků našich předků*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21.–25. 8. 2009. Praha: Matfyzpress. Str. 59–86.

[Be6] Bečvář J. (2012) *Měření kruhu*. In Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla, edice Dějiny matematiky, sv. 54. Praha: Matfyzpress. Str. 45–53.

[Be7] Bečvář J. (2012) *Výpočty odmocnin ve starověku*. In Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla, edice Dějiny matematiky, sv. 54. Praha: Matfyzpress. Str. 111–123.

[Be8] Bečvář J. (2008) *Teorie proporcí* (*od Eudoxa a Eukleida až k Dedekindovi*). In L. Dostálová (ed.): Eukleides: Základy geometrie, Sborník příspěvků ze semináře Katedry filozofie Fakulty filozofické ZČU. Plzeň: ZČU. Str. 63–105.

[B] Bečvářová M. (2002) *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, edice Dějiny matematiky, sv. 20. Praha: Prometheus. 297 stran.

[De1] Dedekind R. (1965) *Was sind und was sollen die Zahlen ? Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. [Jedná se o přetisk 10. vydání prvního textu a 7. vydání druhého textu; 2. vydání: 1969; anglicky: *Essays on the theory of numbers*, 1901, 1924, 1948, 1963, 2006; italsky: 1926.]

[De2] Dedekind R. (1930–1932) *Gesammelte mathematische Werke I., II., III.*, Braunschweig: F. Vieweg & Sohn.

[De3] Dedekind R. (1985) Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62. In einer Mitschrift von Heinrich Bechtold bearb. Von Max-Albert Knus und Winfried Scharlau. Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 1, Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Braunschweig-Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn. xiii+349 stran.

[Fo] Fowler D. (1992) *Dedekind's Theorem:* $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. The American Mathematical Monthly 99, str. 725–733.

[Ga] Gardies J.-L. (1984) *Eudoxe et Dedekind*. Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications 37, str. 111–125.

[Gi] Gillies D. A. (1982) *Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Assen: Van Gorcum. x+106 stran.

[He] Heath T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics I., II.*. Oxford: Clarendon Press. Reprint: New York: Dover Publications, 1981, xv+446, xi+586 stran.

[Hj] Hjelmslev J. (1950) *Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma*. Centaurus 1, str. 2–11.

[Kr] Krull W. (1971) *Zahlen und Grössen – Dedekind und Eudoxos*. Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Giessen 90, str. 29–47.

[Li1] Lipschitz R. (1877, 1880) Lehrbuch der Analysis, I. Grundlagen der Analysis, II. Differential- und Integralrechnung. Bonn: M. Cohen & Sohn. xvi+594, xiv+734 stran.

[Li2] Lipschitz R. (1986) *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*. Bearbeitet von W. Scharlau, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 2, Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Braunschweig-Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn. xviii+253 stran.

[St] Stein H. (1990) Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics. Synthese 84, str. 163–211.

[Š] Šimša J. (1999) *Vývoj představ o reálných číslech*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, sv. 12, Praha: Prometheus. Str. 259–282.

Článok prijatý dňa 12. Apríla 2013.

Adresa autora

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83,
Praha 8, 186 75, e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

GAMES AND PROBABILITIES

GERGELY WINTSCHE

There are many changes in our life. Not only the political situations has changed in the last 30 years but the teaching methods too including the teaching of probability theory and statistics. In the ancient times only the classical knowledge based teaching methods were existing, then came the New Maths waves from America followed by the competency based maths. In parallel with the development of methodology new topics arose from the national curriculums and the school books too. For example the sets, graphs, combinatorics, probability theory and statistics. These changes heavily impacted the Hungarian matriculation system and caused several problems in the life of some 'old-fashioned' school teachers too. When they were young they did not meet any of these topics or just slightly touched them. In this lecture we will deal with the probability and statistics only. However the idea of lifelong learning exists, I am just citing a quote from Henri Poincare:

> *"The very name of the calculus of probabilities is a paradox. Probability as opposed to certainty is what one does not know, and how can we calculate the unknown? Yet many eminent scientists have devoted themselves to this calculus and it cannot be denied that science has drawn therefrom no small advantage."*
>
> *(Science and Hypothesis, Chapter 11: The Calculus of Probabilities)*

Despite the theoretical or philosophical problems we want to calculate the probability of events although we are not so eminent scientists. Let us examine what kind of tools could get this topic closer to us. What can we do to decrease the reluctance of the students and teachers?

The basic idea is playing. There are some math problems which are called mathematical games by the teacher but no student would believe it is a real game. You cannot deceive the students with these games. In almost every classroom there are some students who are really enthusiastic and they really enjoy these talented games but there is no chance to catch the attention of the rest of the group..

For example we always deal with the following problem with my students:

There are three given experiments. The player must choose one of them and repeat it 20 times. He only writes down the results of the experiment. The others have to find out what was the choice of the player.

A: One throws a die and writes 0 if the result was 1 or 2, writes 1 if the result was 3 or 4 and writes 2 if the result was 5 or 6.

B: One throws a die and writes 0 if the result was 1, 2 or 3, writes 1 if the result was 4 or 5 and writes 2 if the result was 6.

C: One throws a die and writes 0 if the result was 1, writes 1 if the result was 2, 3, 4 or 5 and writes 2 if the result was 6.

After the first experiment we could got the series:
2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 0, 0
Here I list some possible tasks and questions:
– Try to find out the player’s choice!
– How could you make a decision?
– Could you make the correct decision after all results?

I will not answer these questions here, but I encourage you to deal with this or similar problem sets. You can find a lot of very similar questions in my colleague Tibor Nemetz’s book.

As I mentioned earlier this or similar problems are really handy, nice and useful, but they are called games only by the teachers.

Every student can see and meet with real games in movies or even in TV series. Like in the Ocean’s Thirteen with a lot of stars in it, the Las Vegas (TV series), The good old film Casino with Robert de Niro and Sharon Stone rated 8.2 by IMDb (Internet Movie Database), or an even newer but worse example is What Happens in Vegas with Ashton Kutcher and Cameron Diaz (it has got only mark 6 on Imdb). Last but not least I would mention the Indecent proposal with Demi Moore and Robert Redford. And I could not complete the list but there are a lot of other films with real games in it and your students are for sure familiar with them. Nowadays poker, roulette, blackjack, or the Craps and slot machines are very popular too.

If I ‘google’ the word “casino games” I get approximately 15 900 000 hits in the browser.

In the next part of the lecture we will deal with the games with two dice called Craps. It is easily understandable and quite easy to calculate the odds of it. But before we would calculate anything we we would watch some scenes from the above listed films. After the movies we can calculate the chances in the classrooms and we can play the real game.

Eventually why do we play craps?
- It is enjoyable.
- There are only a few rules.
- There is a tense while you are playing and you do not have to be a millionaire.

Be careful! I would suggest rather be prepared! There are no fair games in casinos!

We will calculate the probability of some events of Craps like basic bet and other variations of it.

Address

Gergely Wintsche
Faculty of Science, Eötvös Loránd University, Budapest, Hungary, e-mail: wgerg@ludens.elte.hu

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

USING SINGLE MODELS TO CREATE BASIC GEOMETRIC KNOWLEDGE

VYUŽITIE SEPAROVANÝCH MODELOV K VYTVÁRANIU ZÁKLADNÝCH GEOMETRICKÝCH POZNATKOV

EVA BARCÍKOVÁ

ABSTRACT. *In this paper we deal with inclusion of simple manipulative activities in teaching plane geometry. We are focused on increasing student activity in the process of creating their own knowledge through modeling basic geometric relationships. We use inexpensive equipment such as paper. Activities are also demanding in terms of time and preparing.*

KEY WORDS: *manipulative activities, modeling of geometric relationships*

ABSTRAKT. *V článku sa venujeme zaradeniu jednoduchých manipulačných aktivít do vyučovania planimetrie. Zameriavame sa na zvyšovanie aktivity žiaka v procese utvárania vlastného poznania prostredníctvom modelovania základných geometrických vzťahov. Pri jednotlivých aktivitách využívame finančne nenáročné pomôcky ako napríklad papier. Aktivity sú zároveň nenáročné z hľadiska času a prípravy.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *manipulačné aktivity, modelovanie geometrických vzťahov,*

CLASSIFICATION: *3 D40, U60*

Úvod

G. Polya v Mathematical Discovery vo svojich troch základných princípoch učenia matematiky odporúča: „*Motivovať nie vynútením, askézou, ale zaujatím a podaním problému zvnútra.*“ „*Najlepším spôsobom, ako sa niečo naučiť, je objaviť to.*“ Motivácia vo vyučovaní má v dnešnom školstve dôležité, aj keď mnohokrát nedocenené postavenie. V súčasnej reforme a humanizácii školstva je význam motivácie na učebnú činnosť žiakov nezanedbateľný. Učenie nemá byť len nutnosťou a povinnosťou, ale aj radosťou a prirodzenou aktivitou. Každé dieťa má právo objaviť čaro vzdelávania, radosť z objavovania nového a nepoznaného. Je pedagogickým umením učiteľa odovzdať s poznatkami aj túto radosť. O to viac v exaktnej vede, akou je matematika. Ukázať jej krásu a čaro žiakom možno pomocou zaujímavých, zábavných a historických úloh či hlavolamov. Myšlienka „Škola hrou“ nestráca na aktuálnosti ani dnes. Práve geometria svojou podstatou poskytuje vhodnú platformu pre využívanie didaktických hier, ako aj manipulačných činností vo vyučovaní matematiky. P. M. van Hiele píše v časopise *Teaching Children Mathemathics*, že vyučovanie geometrie začína hrou. Pod pojmom hra pritom rozumie rôzne manipulačné aktivity. J. Brincková [4, s. 9] hovorí, že „*učenie je výsledkom činnosti a prostredníctvom činnosti sa vyvíja*“. Medzi činnosti, ktoré napomáhajú rozvíjať priestorovú predstavivosť, zaraďuje aj „*materiálovú činnosť (manipulácia s objektmi, so stavebnicou, kartičkami, plastelínou, vystrihovačkami,...)*“.

Aktívne učenie sa geometrie

Vo vyučovaní (aj geometrie) sa často kladie dôraz na vizuálnu a auditívnu percepciu. Žiak sa často dostáva do roly pasívneho prijímateľa a pozorovateľa. Učivo vníma na základe počúvania vyučujúceho a sledovania obrázkov, či už na tabuli, alebo v učebnici. V rámci modernizácie vyučovania matematiky sa síce využívajú aj virtuálne manipulácie pomocou rôznych edukačných geometrických softvérov, avšak aj v tomto prípade sa žiak často dostáva do pozície pozorovateľa (napríklad z dôvodu nedostatočného materiálneho vybavenia). Pre dieťa je naproti tomu prirodzené poznávať svet prostredníctvom haptických vnemov. Geometria je súčasťou nášho každodenného života. Žijeme v priestore a objekty, s ktorými bežne manipulujeme, sú trojrozmerné. Skúsenosti žiaka sú teda bližšie k stereometrii ako k planimetrii. Tak ako v živote, aj vo vyučovaní platí „radšej raz zažiť ako stokrát počuť“. Vzhľadom na to je nevyhnutné, aby sa do vyučovania zapájal aj hmat. To sa môže diať prostredníctvom manipulačných činností. Podľa Sýkoru sa prostredníctvom „*manipulačných činností dieťa zoznamuje nielen s tvarmi, ale sa tiež učí (hoci intuitívne) pochopiť základné charakteristické sprievodné javy daného objektu a relácie medzi nimi. Tie si potom prenáša do praxe*.“ Manipulačné činnosti sú najčastejšie zaradené v rámci motivačných alebo fixačných vyučovacích metód. Netreba zabúdať na ich použiteľnosť aj v rámci expozičnej časti hodiny. Keďže ich zaradenie do vyučovania geometrie priamo predpokladá vlastnú aktivitu žiaka, budeme ich považovať za aktivizujúce vyučovacie metódy.

Samostatná aktívna činnosť žiaka je nevyhnutná pre úspešné rozvíjanie vedomostí. Môže sa prejaviť vnútorne a navonok. Vnútorná aktivita, ako úmyselná pozornosť, je síce ťažko pozorovateľná, avšak rovnako dôležitá ako vonkajšia aktivita.

Aktivizujúce vyučovacie metódy predpokladajú :

- Určitú vedomostnú úroveň žiakov.
- Potlačenie direktívneho postavenia vyučujúceho.
- Materiálne pomôcky a didaktickú techniku.

Aplikácia aktivizujúcich vyučovacích metód zvyšuje u žiakov pochopenie riešenej problematiky, pozornosť, aplikáciu vyšších myšlienkových pochodov, podporuje rozvoj tvorivosti, podnecuje žiakov vnímať učenie ako činnosť, ktorú realizujú oni sami, a zvyšuje úroveň motivácie.

Prostredníctvom jednoduchých činností k základným poznatkom

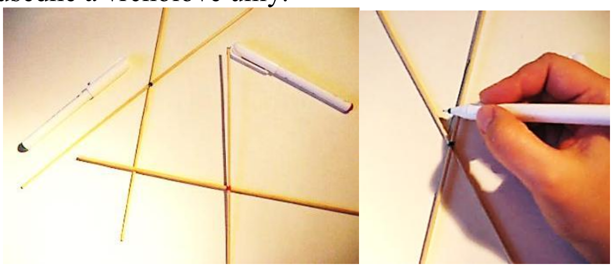
Ako sme spomenuli aktivizujúce vyučovacie metódy predpokladajú materiálne pomôcky a didaktickú techniku. Materiálne pomôcky však nemusia byť vôbec zložité a špecializované. Pri vyučovaní geometrie si vystačíme aj s ľahko dostupným materiálom, ako je papier, nožnice, špajdle, nitky atď. Nasledujúce ukážky popisujú niekoľko časovo a materiálovo nenáročných aktivít. Ich cieľom je prostredníctvom jednoduchých experimentov pomôcť žiakom osvojiť si základné geometrické vzťahy. Pri aktivitách väčšinou vychádzame zo skladania papiera. Pomôcky slúžia ako predmetné modely geometrických útvarov:

- List papiera predstavuje rovinu.
- Hranu, ktorá vznikne po preložení papiera, budeme považovať za priamku (prípadne polpriamku alebo úsečku).
- Bod modelujeme označením bodkou alebo krížikom.
- Dvoma bodmi na papieri možno viesť práve jednu priamku, teda papier možno preložiť len jedným spôsobom, aby vzniknutá hrana prechádzala oboma bodmi.
- Každým bodom papiera možno viesť nekonečne veľa priamok.
- Kolmicu k danej priamke p cez jej bod P zostrojíme preložením papiera tak, že sa obe polpriamky, na ktoré je rozdelená priamka p bodom P, kryjú.

- Rovnobežku k danej priamke q cez bod A zostrojíme ako kolmicu cez bod A ku kolmici na danú priamku q.[1] [6]

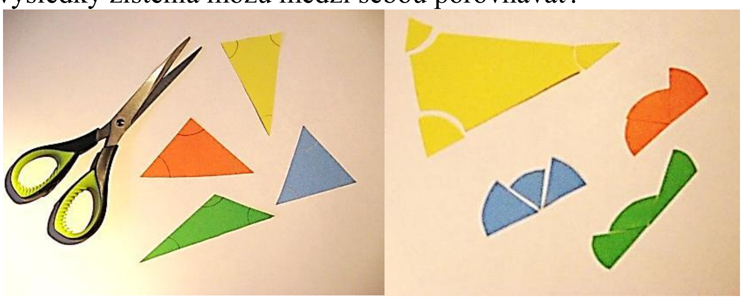
Všetky aktivity predpokladajú usmernenie a plánovanie zo strany učiteľa a každá aktivita by mala byť nasledovaná odborným výkladom a matematickým odôvodnením.

Aktivita „poznávame vrcholové a susedné uhly“
Pomôcky: niekoľko špajdlí (párny počet), farebné nitky, farebné ceruzky
Z dvojice špajdlí vytvoríme písmeno X a zviažeme ich nitkou tak, aby ich vzájomná poloha bola fixná a nehýbali sa. Špajdle reprezentujú dve rôznobežné priamky a dvojice vrcholových uhlov, ktoré určujú. Pomocou obkresľovania na papier skúmame vzťah medzi odpovedajúcimi si uhlami. Vyzveme žiakov, aby najskôr ľubovoľnou farbou obkreslili jeden „uhol“, následne špajdle otočili (o 180^{o}) a následné obkreslili druhý „uhol“ inou farbou. Pri správnom postupe sa farebné obrysy zhodujú. Ani po zmene veľkostí uhlov (použijeme viacero dvojíc rôzne zviazaných špajdlí) sa situácia nezmení. Obdobným spôsobom (obkresľovaním) budeme skúmať dvojice susedných uhlov. Po experimentovaní zavedieme pojem susedné a vrcholové uhly.



Obrázok 1

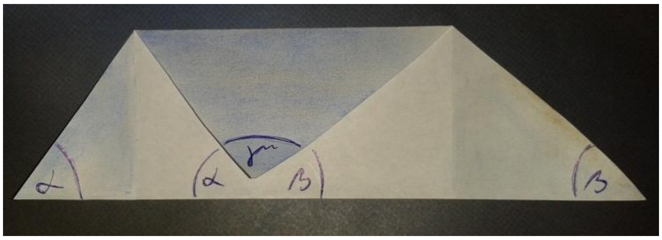
Aktivita „vnútorné uhly trojuholníka“
Pomôcky: farebný papier, nožnice, farebné ceruzky alebo lepidlo
Cieľom tejto aktivity je osvojiť si poznatok o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku. S farebných papierov vystrihneme niekoľko trojuholníkov. Dbáme na to, aby žiaci vystrihovali rôzne typy trojuholníkov (ostrouhlé, tupouhlé, pravouhlé, ...). Požiadame ich, aby na každom trojuholníku poloblúkom vyznačili vnútorný uhol a následne ich odstrihli. Vystrihnuté „rohy trojuholníka“ rovnakej farby ukladáme vedľa seba (obr. 2) a obkreslíme (môžeme ich aj lepiť na papier). Vidíme, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je priamy uhol. Žiaci si výsledky zistenia môžu medzi sebou porovnávať.



Obrázok 2

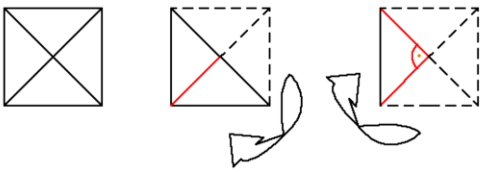
[1] Pre viac „konštrukcií“ pozri [6]

Vlastnosť „*veľkosť vonkajšieho uhla je rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch*“ môžeme ukázať skladaním papierového trojuholníka, ako je na obrázku 3.



Obrázok 3

Aktivita „štvorec“ [4]
Pomôcky: štvorec vystrihnutý z papiera, farebné ceruzky
Cieľom tejto aktivity je pomocou skladania papiera vysvetliť žiakom základné vlastnosti štvorca: *štvorec je pravouhlý rovnobežník, ktorého všetky strany sú zhodné* a *uhlopriečky každého štvorca sú navzájom kolmé, zhodné a rozpoľujú sa.* Žiaci si pripravia rôzne veľké štvorce papiera. Každú vlastnosť overujeme zvlášť vhodným skladaním papiera. Pre ukážku uvádzame vlastnosti uhlopriečok:
Na začiatok si uhlopriečky si určíme pomocou diagonálneho skladania štvorca a následne ich farebne vyznačíme. Vlastnosť, že uhlopriečky štvorca sú navzájom kolmé, ukážeme nasledovne: štvorec prekladáme na polovicu pozdĺž uhlopriečok, až kým sa všetky uhly zvierané uhlopriečkami neprekryjú (obr. 4). Takto ukážeme, že všetky uhly určené dvojicou uhlopriečok sú zhodné[2]. Žiaci si môžu po poskladaní pomôcť priložením vzniknutého trojuholníka k predmetu, ktorý má pravý uhol (napr. list papiera), alebo uhlomerom.



Obrázok 4 zdroj: Omachelová, 2006

To, že sa uhlopriečky navzájom rozpoľujú, ukážeme analogickým postupom. Štvorec preložíme cez priesečník uhlopriečok, aby sme ukázali, že sa prekryjú obe „polovice uhlopriečky“. Zopakujeme to aj pre druhú uhlopriečku. Pri zhodnosti uhlopriečok zložíme štvorec na polovicu tak, aby sa uhlopriečky „prekryli“ (viď obr. 5)

Obrázok 5 zdroj: Omachelová, 2006

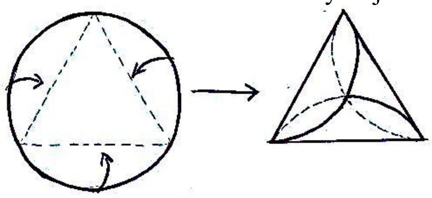
Predošlé aktivity boli vhodné pre expozičnú časť hodiny. Nasledujúca aktivita je vhodná skôr pre fixačnú časť. Jej cieľom je preopakovanie a upevnenie vedomostí o vlastnostiach rovnostranného trojuholníka.

[2]Keďže uhlopriečky určujú štyri zhodné uhly, ktoré rozdeľujú rovinu, musia mať veľkosť 90°.

Aktivita „rovnostranný trojuholník“
Pomôcky: kruh z papiera.

Úlohou žiakov je skladaním papiera vytvoriť z kruhu rovnostranný trojuholník tak, aby využili čo najväčšiu časť kruhu.

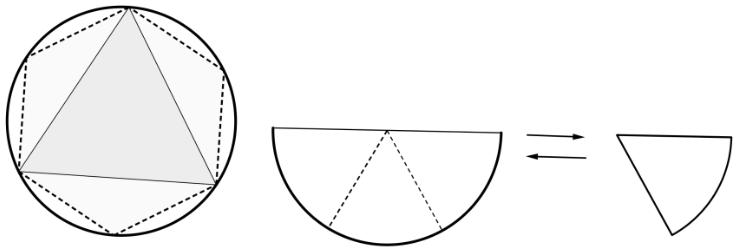
Aby sme využili čo najväčšiu plochu kruhu, využijeme trojuholník vpísaný do kružnice, ktorá ohraničuje daný kruh. Vrcholy hľadaného trojuholníka budú deliť kružnicu na tri rovnaké kružnicové oblúky, ktorých dĺžka bude tretina obvodu kruhu. Zvyšné kruhové odseky zahneme. Takýmto skladaním papierového kruhu vznikne rovnostranný trojuholník (obr. 6).



Obrázok 6

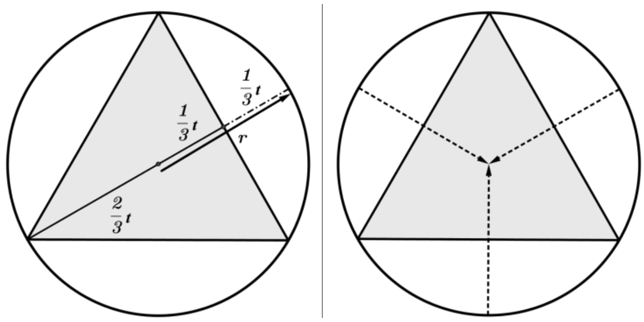
Pri hľadaní vrcholov trojuholníka budeme postupovať nasledovne:

1. Využijeme súvislosť rovnostranného trojuholníka a pravidelného šesťuholníka ako aj vzťah medzi stredovým a prislúchajúcim obvodovým uhlom v kružnici. Kruh zložíme na polovicu a následne na tretiny. Skladanie matematicky zdôvodníme.



Obrázok7

2. Vychádzame z vlastností priečok v rovnostrannom trojuholníku. Ťažnica a os strany prislúchajúce tej istej strane sú totožné. Polomer opísanej kružnice sa teda rovná 2/3 dĺžky ťažnice (obr. 8). Zložením kruhu dvakrát na polovicu určíme stred a následne pokračujeme ako na obr. 6.



Obrázok 8

Záver

Súčasťou školskej matematiky je matematizácia reálneho sveta, a teda aj „geometrizácia" reálneho sveta. Žijeme vo svete obklopení trojrozmernými predmetmi. Manipulácia so separovanými modelmi základných geometrických útvarov je teda dôležitá pre pojmotvorný proces geometrických pojmov a vzťahov. Aktivity uvedené v článku sú v zmysle didaktického konštruktivizmu zamerané na rozvoj tohto pojmotvorného procesu prostredníctvom časovo a materiálovo nenáročných pomôcok. Ide o multisenzorické činnosti podporujúce aktivitu žiaka avšak do popredia sa dostáva haptická percepcia. Prostredníctvom týchto aktivít majú žiaci možnosť konštruovať si vlastné poznanie geometrie, objavovať geometrické vzťahy, modelovať ich a na záver dochádza k ich abstrakcii a vytváraniu poznatku.

Literatúra

[1] Barcíková, E. (2009). Zlatý rez a Fibonacciova postupnosť ako motivačný a aktivizujúci prvok vo vyučovaní matematiky. Rigorózna práca, Nitra: UKF v Nitre, 2009.

[2] Polya, G. (1968). Mathematical Discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, New York: John Wiley & Sons, 1968

[3] Van Hiel, P. M. (1999). Developing geometric thinking throgh activities that begin with play. In: Teaching Children Mathemathics 6, 1999, s. 310-315.

[4] Brincková, J. (2001) Tvorivé dielne 2 zamerané na didaktické hry v geometrii ZŠ. Banská Bystrica: Pedagogická fakulta UMB, 2001.

[5] Omachelová, H. (2006). Možnosti využitia manipulatívnych činností pri výklade geometrických vzťahov. In: Matematika v škole dnes a zajtra. Ružomberok: Katolícka Univerzita v Ružomberku, 2006, s. 349, ISBN 80-8084-066-0

[6] Sýkora, V., Roubíček, F., Přibyl, J. (2006). Geometrické modelování jako příležitost k aktivnímu učení. Praha: JČMF, 2006. s. 135.

[7] M. Hejný, J. Novotná, (2004) Dvacetpět kapitol z didaktiky matematiky, Praha: UK Praha 2004, ISBN 80-7290-189-3

Článok prijatý dňa 18. apríla 2013.

Adresa autorov

PaedDr. Eva Barcíková
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre,
Tr. A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: eva.barcikova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SOLVABILITY OF GROUPS OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS OF THE N-TH ORDER

ŘEŠITELNOST GRUP LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ N-TÉHO ŘÁDU

JAROSLAV BERÁNEK – JAN CHVALINA

ABSTRACT: *In the contribution there is constructed a certain group of linear ordinary differential operators of the n-th order and there is solved the problem of its solvability. In particular, using the stabilization of the commutant chain of that group, we have obtain that the mention group is solvable. Moreover, using the one-to-one correspondence between this group and the system of solution spaces of corresponding homogeneous differential equations of the n-th order we obtain that the isomorphic group of solution spaces is also solvable.*

KEY WORDS: *Differential equation, solution spaces of homogeneous differential equations, solvable group.*

ABSTRAKT: *V příspěvku je zkonstruována jistá grupa obyčejných lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu a je řešen problém její řešitelnosti. Zejména, užitím stabilizace řetězce komutantů této grupy, jsme obdrželi, že zmíněná grupa je řešitelná. Dále, užitím jedno-jednoznačné korespondence mezi touto grupou a systémem prostorů řešení příslušných homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu dostáváme, že izomorfní grupa prostorů řešení je také řešitelná.*

KLÍČOVÁ SLOVA: *Diferenciální rovnice, prostory řešení homogenních diferenciálních rovnic, řešitelná grupa.*

CLASSIFICATION: *20G07, 20F16, 47E05*

V tomto příspěvku, který náleží do série prací ([1], [2], [3], [4]) a na některé z nich podstatně navazuje, se věnujeme řešení konkrétního klasického problému, kterým je otázka řešitelnosti (v Galoisově smyslu) grup jistých lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu – pro libovolné přirozené číslo n ≥ 2. Tyto operátory tvaru

$$L=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k}{dx^k} \ ,$$

kde p_k jsou spojité funkce na nějakém otevřeném intervalu $J \subseteq \boldsymbol{R}$, tvoří-jak známo-levé strany obyčejných lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu.

Uspořádanou grupou rozumíme trojici $(G, . , \leq)$, kde $(G, .)$ je grupa a binární relace $\leq$ je uspořádání na G takové, že pro libovolnou trojici $x, y, z \in G$ plyne z vlastnosti $x \leq y$ také $x . z \leq y . z$, $z . x \leq z . y$. V uspořádané grupě budeme symbolem $[a)_\leq$ označovat hlavní konec generovaný prvkem $a \in G$, definovaný takto: $[a)_\leq = \{x \in G; a \leq x\}$.

Připomeňme standardně používané označení: Je-li H normální podgrupa grupy G (nazývaná také invariantní podgrupa nebo normální dělitel), píšeme $H \triangleleft G$. Dále, posloupnost podgrup H_i $(i = 0, 1, ..., n)$ grupy G taková, že

$$\boldsymbol{1} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G \qquad (\mathcal{S})$$

(symbol $\boldsymbol{1}$ označuje jednotkovou podgrupu grupy G), se nazývá subnormální řada grupy G a příslušné podílové grupy H_i / H_{i-1} $(i = 1, 2, ..., n)$ se nazývají faktory dané řady. Jsou-li všechny faktory řady ($\mathcal{S}$) komutativní, nazývá se tato řada řešitelná. Grupa se nazývá řešitelná, jestliže má alespoň jednu řešitelnou subnormální řadu (viz např. [10], [11],[13], [18]. Při praktickém ověřování řešitelnosti je v některých případech cesta k důkazu řešitelnosti základní grupy rychlejší ověřením stabilizace řetězce komutantů (na úrovni triviální podgrupy) než prostřednictvím pracného ověřování komutativity faktorů existující subnormální řady podgrup, o níž se dokazuje, že je řešitelná.

Připomeňme, že podgrupa G' grupy G generovaná množinou komutátorů $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ všech dvojic prvků $[a, b] \in G \times G$ se nazývá komutant grupy G. Komutant G'' grupy G' se nazývá druhý komutant grupy G. Obvyklé označení je také $G' = G^{(1)}$, $G'' = G^{(2)}$, atd. Obecně $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Komutant $G^{(n)}$ se také nazývá n-tá derivace grupy G a řetězec komutantů grupy G

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots$$

je také nazýván derivovaný řetězec grupy G.

Tvrzení 1: ([18, Věta 10.31, s.172]). *Buď G grupa. Tyto podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Grupa G je řešitelná.

(ii) Existuje celé kladné číslo n s vlastností $G^{(n)} = \mathbf{1}$.

(iii) Existuje řešitelná subnormální řada grupy G.

Množinu všech reálných čísel budeme značit $\mathbf{R}$; pod označením $\mathbf{C}(J)$ (užívá se i označení $\mathbf{C}^0(J)$) budeme rozumět okruh všech spojitých funkcí na intervalu $J \subseteq \mathbf{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí. Analogicky okruh všech spojitých funkcí na intervalu J, které mají všechny derivace až do řádu k pro nějaké přirozené číslo k, budeme označovat $\mathbf{C}^k(J)$. Symbolem $\mathbf{C}_+(J)$ označíme podpolookruh okruhu $\mathbf{C}(J)$, tvořený všemi kladnými spojitými funkcemi, tedy

$$\mathbf{C}_+(J) = \{ f: J \to \mathbf{R};\ f(x) > 0 , x \in J \} .$$

Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ označíme jako $\mathbf{A}_n$ množinu všech lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu následujícího tvaru:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0$$

(viz [1], [8], [15], [16]), kde $p_k \in \mathbf{C}(J)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $p_0(x) > 0$ pro libovolné $x \in J$.

Uvažujme nyní diferenciální operátor n-tého řádu, přiřazený obyčejné homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, ve tvaru

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

kde $D_k = \dfrac{d^k}{dx^k}$, $p_k(x)$ je spojitá funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbf{R}$,

$k = 0, 1, \dots, n-1$, $p_n(x) \equiv 1$, tj. zápis $L_n(y) = 0$ označuje obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x) = 0 .$$

V souladu s články [1], [7], [8] označme $L(p_0, \dots, p_{n-1})(y) : \mathbf{C}^n(J) \to \mathbf{C}^n(J)$ výše definovaný lineární operátor. Platí tedy

$$L(p_0, \dots, p_{n-1})(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y$$

a položme

$$\mathbf{LA}_n(J) = \{L(p_0, \dots, p_{n-1}): p_k \in \mathbf{C}(J),\ k = 0, 1, \dots, n-1\} .$$

Označme dále $\mathbf{N}_0(n)= \{0,1, \ldots,n-1\}$; symbolem δ_{ij} budeme označovat tzv. Kroneckerovo δ, přičemž klademe $\overline{\delta_{ij}} = 1 - \delta_{ij}$. Pro libovolné $m \in \mathbf{N}_0(n)$ označíme jako $\mathbf{LA}_n(J)_m$ množinu všech lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu $L(p_0, \ldots, p_{n-1})$: $\mathbf{C}^n(J) \to \mathbf{C}(J)$, kde $p_k \in \mathbf{C}(J)$ pro libovolné $k \in \mathbf{N}_0(n)$, $p_m \in \mathbf{C}_+(J)$, (tj. $p_m(x) > 0$ pro libovolné $x \in J$). Nyní zavedeme vektorovou funkci $\vec{p}\,(x)$ takto: $\vec{p}\,(x) = (p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x))$, $x \in J$. Potom lze psát $L_n(\vec{p}\,)y = y^{(n)} + (\vec{p}\,(x), (y, y', \ldots, y^{(n-1)}))$, kde v poslední závorce se jedná o skalární součin vektorů.

Nyní definujeme binární operaci „$\circ_m$“ a binární relaci „$\leq_m$“ na množině $\mathbf{LA}_n(J)_m$ takto: Pro libovolnou dvojici $L(\vec{p}\,), L(\vec{q}\,) \in \mathbf{LA}_n(J)_m$, $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$, $\vec{q} = (q_0, \ldots, q_{n-1})$ položíme $L(\vec{p}\,) \circ_m L(\vec{q}\,) = L(\vec{u}\,)$, $\vec{u} = (u_0, \ldots, u_{n-1})$, kde

$$u_k(x) = p_m(x)\, q_k(x) + (1 - \overline{\delta_{mk}}\,)\, p_k(x)\,,\ x \in J$$

a $L(\vec{p}\,) \leq_m L(\vec{q}\,)$, jestliže $p_k(x) \leq q_k(x)$, $k \in \mathbf{N}_0(n)$, $p_m(x) = q_m(x)$, $x \in J$.

Je zřejmé, že $(\mathbf{LA}_n(J)_m, \leq_m)$ je uspořádaná množina. Vlastnosti binární operace $\circ_m$ a vztah této operace k uspořádání $\leq_m$ na množině $\mathbf{LA}_n(J)_m$ uvádí následující tvrzení 1, jehož důkaz lze nalézt např. v [7].

***Tvrzení 2**: Algebraická struktura $(\mathbf{LA}_n(J)_m, \circ_m, \leq_m)$ je nekomutativní uspořádaná grupa.*

Nyní obrátíme svou pozornost k podgrupám grupy $\mathbf{LA}_n(J)_m$. Zavedeme označení $\mathbf{L}_1A_n(J)_m = \{ L(\vec{p}\,);\ \vec{p} = (p_0, \ldots, p_{n-1}),\ p_k \in \mathbf{C}(J),\ k \in \mathbf{N}_0(n),\ p_m(x) \equiv 1\}$. Pomocí tohoto označení lze formulovat tvrzení 2. Také jeho důkaz lze nalézt v publikaci [7].

***Tvrzení 3**: Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n-1$ platí, že grupa $(\mathbf{L}_1A_n(J)_m, \circ_m)$ je invariantní podgrupa grupy $(\mathbf{LA}_n(J)_m, \circ_m)$.*

Označme $\mathbf{L}_C\mathbf{A}_n(J)_m = \{L(p_0, p_1, \ldots, r, \ldots, p_{n-1});\ p_k \in \mathbf{C}(J),\ r \in \mathbf{R},\ r \neq 0\}$.

Z důvodu větší názornosti postupů v důkazech následujících vět rozepišme podrobněji výpočet součinů diferenciálních operátorů $L(\vec{p}\,(x))$, $L(\vec{q}\,(x))$, tedy aplikaci binární operace „$\circ_m$“ na prvky množiny $\mathbf{L\,A}_n(J)_m$:

Nechť $0 \leq m \leq n-1$ a $p_m \in \mathbf{C}(J)$, $p_m(x) \neq 0$, $x \in J$. Pro libovolnou dvojici operátorů $L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$, $L(q_0, \ldots, q_m, q_{n-1})$ z množiny $\mathbf{L\,A}_n(J)_m$ platí:

$$L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1}) \circ_m L(q_0, \ldots, q_m, \ldots, q_{n-1}) = L(u_0, \ldots, u_m, \ldots, u_{n-1}),\ \text{kde}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= p_m(x)q_0(x) + p_0(x),\\ &\vdots\\ u_m(x) &= p_m(x)q_m(x),\\ &\vdots\\ u_{n-1}(x) &= p_m(x)q_{n-1}(x) + p_{n-1}(x),\ x \in J. \end{aligned}$$

Z důvodu stručnosti píšeme místo $p(x)$, $q(x)$ pouze p, q s příslušným indexem.

Poznamenejme, že inverzní operátor $L^{-1}(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$ k operátoru $L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$ (jakožto inverzní prvek k tomuto prvku v grupě $(\mathbf{LA}_n(J)_m, \circ_m)$) je tvaru

$$L^{-1}(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1}) = L\left(-\frac{p_0}{p_m}, \ldots, \frac{1}{p_m}, \ldots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right).$$

***Věta 1:** Grupoidy $(\mathbf{L}_C\,\mathbf{A}_n(J)_m, \circ_m)$, $(\mathbf{L}_1\,\mathbf{A}_n(J)_m, \circ_m)$ jsou podgrupy grupy $(\mathbf{LA}_n(J)_m, \circ_m)$, přitom $(\mathbf{L}_1\,\mathbf{A}_n(J)_m, \circ_m) \lhd (\mathbf{L}_C\,\mathbf{A}_n(J)_m, \circ_m) \lhd (\mathbf{LA}_n(J)_m, \circ_m)$.*

Důkaz: Pro libovolné operátory $L(\vec{p}) \in \boldsymbol{LA}_n(J)_m$, $L(\vec{q}) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ platí–podobně jako výše-$L^{-1}(\vec{p}) \circ_m L(\vec{q}) \circ_m L(\vec{p}) = L^{-1}(\vec{p}) \circ_m L(q_0, q_1, \ldots, r, \ldots, q_{n-1}) \circ_m L(p_0, p_1, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1}) = L\left(-\frac{p_0}{p_m}, -\frac{p_1}{p_m}, \ldots, \frac{1}{p_m}, \ldots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right) \circ_m L(r\,p_0 + q_0, \ldots, r\,p_m, \ldots, r\,p_{n-1} + q_{n-1}) =$

$$L\left(\frac{r\cdot p_0 + q_0}{p_m} - \frac{p_0}{p_m}, \frac{r\cdot p_1 + q_1}{p_m} - \frac{p_1}{p_m}, \ldots, r, \ldots, \frac{r\cdot p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m} - \frac{p_{n-1}}{p_m}\right) =$$

$L\left(\frac{(r-1)\cdot p_0 + q_0}{p_m}, \frac{(r-1)\cdot p_1 + q_1}{p_m}, \ldots, r, \ldots, \frac{(r-1)\cdot p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m}\right) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$. Protože $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je podgrupa grupy $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$ (neboť pro libovolnou dvojici operátorů $L(\vec{p}), L(\vec{q}) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ platí $L(\vec{p}) \circ_m L^{-1}(\vec{q}) = L(p_0, p_1, \ldots, r, \ldots, p_{n-1}) \circ_m L\left(-\frac{q_0}{q_m}, \ldots, \frac{1}{s}, \ldots, -\frac{q_{n-1}}{q_m}\right) = L\left(\frac{p_0}{s} - \frac{q_0}{q_m}, \ldots, \frac{r}{s}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{s} - \frac{q_{n-1}}{q_m}\right) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ a $L(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$), dostáváme, že grupa $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je invariantní podgrupou grupy $(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. Podobně se ověří, že grupoid $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je podgrupa grupy $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$, a to invariantní, tedy normální dělitel. Další fakta vyplývají z výše uvedených tvrzení. □

Věta 2: *Buď $J \subseteq \boldsymbol{R}$ otevřený interval. Grupa $(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je řešitelná.*

Důkaz: Označme $G = (\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. První derivace G' grupy G, tj. první komutant grupy G, je její podgrupa generovaná všemi komutátory tvaru

$$L^{-1}(\vec{p}(x)) \circ_m L^{-1}(\vec{q}(x)) \circ_m L(\vec{p}(x)) \circ_m L(\vec{q}(x)),$$

kde $L(\vec{p}(x)), L(\vec{q}(x)) \in \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m$. Jelikož uvedený komutátor je tvaru

$$L\left(-\frac{p_0}{p_m}, \ldots, \frac{1}{p_m}, \ldots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right) \circ_m L\left(-\frac{q_0}{q_m}, \ldots, \frac{1}{q_m}, \ldots, -\frac{q_{n-1}}{q_m}\right) \circ_m$$

$$L(p_m q_0 + p_0, \ldots, p_m q_m, \ldots, p_m q_{n-1} + p_{n-1}) =$$

$$= L\left(-\frac{q_m p_0 + q_0}{p_m q_m}, \ldots, \frac{1}{p_m q_m}, \ldots, -\frac{q_m p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m q_m}\right) \circ_m$$

$$L(p_m q_0 + p_0, \ldots, p_m q_m, \ldots, p_m q_{n-1} + p_{n-1}) =$$

$$L\left(\frac{(p_m - 1)q_0 + (1 - q_m)p_0}{p_m q_m}, \ldots, 1, \ldots, \frac{(p_m - 1)q_{n-1} + (1 - q_m)p_{n-1}}{p_m q_m}\right) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m,$$

dostáváme, že podgrupa grupy $(\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ generovaná všemi komutátory uvedeného tvaru je právě grupa $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. Vskutku, např. pro každé číslo $k \in \boldsymbol{N}$, $0 \leq k \leq n-1$, $k \neq m$ a pro libovolnou funkci $f \in \boldsymbol{C}(J)$, volbou $p_m(x) \equiv 1$, $q_m(x) = x^2+1$ a $p_k(x) = -\frac{f(x)}{x^2}(x^2+1)$ (za předpokladu $0 \notin J$ – který lze odstranit jinou konkrétní vhodnou volbou dat) obdržíme

$$\frac{1}{p_m(x)q_m(x)}\big((p_m(x)-1)q_k(x) + (1-q_m(x))p_k(x)\big) = \frac{-x^2 p_k(x)}{x^2+1} = f(x),\ x \in J,$$

tedy libovolný spojitý koeficient výše uvedeného operátoru lze vyjádřit v popsaném tvaru. Tedy $G' = (\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$.

Dále, uvažujme libovolnou dvojici diferenciálních operátorů $L(u_0, \ldots, 1, \ldots, u_{n-1})$, $L(v_0, \ldots, 1, \ldots, v_{n-1}) \in \boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{A}_n(J)_m$. Na základě podobné úvahy s výše uvedenou dostáváme
$L^{-1}(u_0, \ldots, 1, \ldots, u_{n-1}) \circ_m L^{-1}(v_0, \ldots, 1, \ldots, v_{n-1}) \circ_m L(u_0, \ldots, 1, \ldots, u_{n-1}) \circ_m L(v_0, \ldots, 1, \ldots, v_{n-1}) =$

$$L(-u_0, \ldots, 1, \ldots, -u_{n-1}) \circ_m L(-v_0, \ldots, 1, \ldots, -v_{n-1}) \circ_m L(u_0 + v_0, \ldots, 1, \ldots, u_{n-1} + v_{n-1}) =$$

$$L(-(u_0 + v_0), \ldots, 1, \ldots, -(u_{n-1} + v_{n-1})) \circ_m L(u_0 + v_0, \ldots, 1, \ldots, u_{n-1} + v_{n-1}) = L(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

tedy G'' je triviální grupa, tvořená pouze neutrálním prvkem. Souhrnem jsme tedy obdrželi

$$\{L(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\} = G'' \subset G' \subset G^{(0)} = G = (\boldsymbol{L} \boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m),$$

tudíž grupa $(\boldsymbol{L} \boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je řešitelná. □

Nyní podáme konstrukci nekomutativní uspořádané grupy lineárních prostorů hladkých funkcí třídy $\boldsymbol{C}^n$ definovaných na intervalu $J \subset \boldsymbol{R}$ (který může být i roven $\boldsymbol{R}$), podle [1]. Nechť $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \boldsymbol{C}^n(J)$ jsou lineárně nezávislé funkce. Přesněji vyjádřeno, funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení některé homogenní diferenciální rovnice, jejíž koeficienty jsou spojité funkce (tzn. Wronského determinant $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ není roven nule v žádném bodě intervalu J). Označme $V(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ lineární prostor dimenze n tvořený všemi funkcemi tvaru

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x),$$

kde $c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R}$, tedy

$$V(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \{c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n;\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \boldsymbol{C}^n(J), c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

Potom $V(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je lineárním prostorem dimenze n všech řešení homogenní diferenciální rovnice řádu n tvaru $L_n(y) = 0$, tedy

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x) = 0,$$

kde
$$p_k(x) = \frac{D_k[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x)}{W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x)}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

$D_k[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ jsou příslušné subdeterminanty determinantu

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix},$$

vystupující v Laplaceově rozvoji uvedeného determinantu podle posledního sloupce.

Označme $F \subset \boldsymbol{C}^n(J) \times \boldsymbol{C}^n(J)$ množinu všech uspořádaných n-tic $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ lineárně nezávislých funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pro které platí $D_{n-1}[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] \neq 0$ na intervalu J, kde

$$D_{n-1}[\varphi_1, \dots, \varphi_n] = det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & . & . & . & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

a dále $p_m(x) = \dfrac{D_m[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)}{W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)} > 0$ pro každé $x \in J$.

Označme dále $\boldsymbol{G}(F)$ soustavu (systém) všech prostorů dimenze n, $V(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, kde $[\varphi_1, \dots, \varphi_n] \in F$. Na soustavě $\boldsymbol{G}(F)$ definujme nyní binární operaci $\cdot$ tímto předpisem:

Z obecné teorie řešení diferenciálních rovnic je známo (srv. též výsledky monografie F. Neumana [16] a další práce tohoto autora), že mezi množinou všech operátorů $\boldsymbol{LA}_n(J)$ a systémem $\boldsymbol{G}(F)$ existuje bijektivní (jednojednoznačné) zobrazení $\Phi : \boldsymbol{LA}_n(J) \to \boldsymbol{G}(F)$. Nechť $V(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$, $V(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$ jsou libovolně zvolené prostory, tzn. prostory řešení lineárních diferenciálních rovnic

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0,$$
$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + q_0(x)y = 0,$$

tj. rovnic

$$det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0,$$

$$det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & . & . & . & \psi_n & y \\ \psi_1' & \psi_2' & . & . & . & \psi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & . & . & . & \psi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0.$$

Pak jsou jednoznačně určeny operátory $L(p_0, \dots, p_n)$, $L(q_0, \dots, q_n)$ s vlastností $L(p_0, \dots, p_n) = \Phi^{-1}(V(\varphi_1, \dots, \varphi_n))$, $L(q_0, \dots, q_n) = \Phi^{-1}(V(\psi_1, \dots, \psi_n))$. Nyní pro zvolenou libovolnou dvojici prostorů $V(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$, $V(\psi_1, \dots, \psi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$ položíme

$$V(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot V(\psi_1, \dots, \psi_n) = V(\omega_1, \dots, \omega_n),$$

kde $V(\omega_1, \dots, \omega_n) = \Phi(L(p_0, \dots, p_n) \circ L(q_0, \dots, q_n))$.

Věta 3: *Buď $J \subset \mathbf{R}$ otevřený interval. Grupoid ($\mathbf{G}(F)$, $\cdot$) je nekomutativní grupa.*
Důkaz: Je uveden v práci [1].

Z věty 2 tohoto příspěvku vzhledem k výše provedené úvaze vyplývá
Věta 4: *Buď $J \subset \mathbf{R}$ otevřený interval. Grupa prostorů ($\mathbf{G}(F)$, $\cdot$) je řešitelná.*

Literatura

[1] BERÁNEK, JAROSLAV - CHVALINA, JAN. *Algebraické struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu*. In Acta Mathematica 12. Fakulta prírodných vied UKF, Nitra, 2009, s. 25-32. ISBN 978-80-8094-614-2.

[2] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu.* In: Acta Mathematica 13, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2010, s. 43-47. ISBN 978-80-8094-781-1.

[3] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu*. In Acta Mathematica 14, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2011, s. 51-57. ISBN 978-80-8094-958-7.

[4] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu*. In Acta Mathematica 15, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2012, s. 43-50. ISBN 978-80-558-0135-3.

[5] BORŮVKA, OTAKAR. *Základy teorie grupoidů a grup*. 1. vyd. Praha : Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 216 s.

[6] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Solvability of certain groups of second-order linear differential operators.* 10th Internat. Conference APLIMAT, February 2011. Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2011, 113-119. ISBN 978-80-89313-51-8.

[7] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Modelling of join spaces by n-th order linear ordinary differential operators.* 4-th Internat. Conference APLIMAT, Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2005, 279-284. ISBN 80-969264-3-8.

[8] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA, MOUČKA, JIŘÍ. *Solvability of a Certain Group of the Third-Order Linear Differential Operators.* Proc. of XXX. International Colloquium, University of Defence, Brno 2012, 10 s., ISBN 978-80-7231-865-0.

[9] DIBLÍK, JOSEF, RŮŽIČKOVÁ, MIROSLAVA. *Obyčajné diferenciálne rovnice.* 1. vyd. Žilina: Edis – vydavatelství ŽU, 2008, 309 s. ISBN 978-80-8070-891-7.

[10] DRÁPAL, ALEŠ. *Teorie grup - základní aspekty*. Praha : Karolinum, 2009. 208 s. ISBN 80-246-0162-1.

[11] HALL, MARSHALL, J. *The Theory of Groups.* The Macmillan Company, New York 1959. (Ruský překlad : *Těorija grupp* – překl. N.V. Djumin, Z. P. Žilinskaja, red. L.A. Kalužnin – Izd. innostrannoj lit., Moskva 1962).

[12] KALAS, JOSEF, RÁB, MILOŠ. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vyd. Brno : Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[13] KUROŠ, ALEKSANDR GENNADIJEVIČ. *Teorija grupp*. 3. vyd. Nauka Moskva 1967. 648 s.

[14] NEUMAN, FRANTIŠEK. From Local to Global Investigations of Linear Differential Equations of the n-th Order. Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1984, s. 55–80.

[15] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Ordinary Differential Equations – a Survey of the Global Theory*. Equadiff 6, Proc. Internat. Conf. Differential Equations and their Appl., Brno 1985, s. 59–70.

[16] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991)

[17] NEUMAN, FRANTIŠEK. *A Survey of algebraic methods in linear differential equations.* Studies of the University of Žilina, Math. Series, Vol. 21/2007, 23–34.

[18] PROCHÁZKA, LADISLAV, BICAN, LADISLAV, KEPKA, TOMÁŠ, NĚMEC, PETR. *Algebra.* Academia Praha 1990.

[19] SINGER, MICHAEL, F. *Introduction to the Galois theory of linear differential equations.* arXiv:712.4124v2 [math.CA] 10 jan 2008, s. 1-83.

Článok prijatý dňa 12.apríla 2013.

Adresa autorů

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc
Katedra matematiky, Fakulta pedagogická, Masarykova Univerzita,
Poříčí 7, 603 00 Brno, Česká republika; e-mail: beranek@ped.muni.cz

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické, Technická 8, 616 00 Brno, Česká republika; e-mail: chvalina@feec.vutbr.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

CONICS IN TANGENCY PROBLEMS SOLVING

KUŽEĽOSEČKY V RIEŠENÍ ÚLOH O DOTYKOCH

MARTIN BILLICH

ABSTRACT. *Problems in which we construct a circle tangent to given elements (point, line, circle) in a plane have an important place in school mathematics. In this paper, possible approach how to use the conics in solving classical construction problems is discussed.*

KEY WORDS: *conics, tangency problems, loci of points of given properties*

ABSTRAKT. *Úlohy, v ktorých hľadáme kružnicu dotýkajúcu sa daných geometrických útvarov (bodu, priamky, kružnice) v rovine majú dôležité miesto v školskej matematike. V príspevku uvedieme možnosti využitia kužeľosečiek v riešení klasických planimetrických úloh o dotykoch.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: kužeľosečky, úlohy o dotykoch, množiny bodov daných vlastností*

CLASSIFICATION: *G44, D44*

1. Úvod

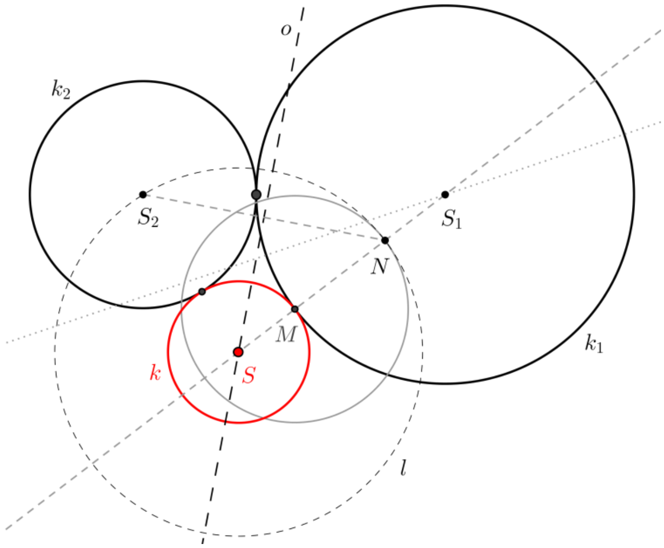
Medzi najpríťažlivejšie partie syntetickej geometrie možno zaradiť úlohy, v ktorých hľadáme kružnicu dotýkajúcu sa daných troch geometrických útvarov z útvarov bod, priamka, kružnica a ktoré sa v literatúre obvykle označujú ako Apolloniove úlohy. Namiesto podmienky dotyku môžeme v týchto úlohách zaviesť aj ďalšie špecifické podmienky, aby hľadaná kružnica mala daný polomer, pretínala danú kružnicu ortogonálne resp. pod daným uhlom. Viac o metódach riešenia týchto úloh možno nájsť v práci [2].

V tomto príspevku najskôr uvedieme konštrukciu regulárnych kužeľosečiek metódou množín bodov daných vlastností a následne metódou analytickej geometrie odvodíme ich rovnice. Využijeme pritom skutočnosť, že kužeľosečky môžeme definovať ako množiny stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú daných dvoch kružníc, resp. danej kružnice a priamky. Na tomto mieste treba poznamenať, že tu uvedené postupy pre stredové kužeľosečky (elipsu a hyperbolu), možno jednoducho aplikovať aj na parabolu (viac v [3]).

Pre lepšiu názornosť je vhodné pri týchto typoch úloh použiť niektorý z dostupných programov dynamickej geometrie. V súčasnosti je veľmi atraktívny softvér GeoGebra, ktorého hlavnou výhodou je, že nám umožňuje meniť vstupné prvky jednotlivých objektov (v algebraickom či geometrickom okne) a sledovať ako tieto zmeny vplývajú na výsledné objekty s nimi zviazanými. V tomto smere sa javí aj náš prístup, s prechodom od syntetických k analytickým metódam riešenia úloh, ako prirodzený.

2. Kužeľosečky ako množiny bodov daných vlastností

Uvažujme dve nezhodné, zvonku (príp. zvnútra) dotýkajúce sa kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, pričom $r_1 > r_2$ a bod M na kružnici k_1. Zostrojme kružnicu k, ktorá sa dotýka daných dvoch kružníc, pričom kružnice k_1 sa dotýka v danom bode M. V nasledujúcom postupe predpokladajme, že kružnice k_1, k_2 a k majú po dvojiciach navzájom vonkajší dotyk. Označme S stred kružnice k. Bod S leží na priamke incidentnej s bodom M a stredom S_1 kružnice k_1, pričom jeho vzdialenosť od bodu M je rovná vzdialenosti od kružnice k_2. Potom stred S kružnice k je súčasne i stredom kružnice l prechádzajúcej stredom S_2 kružnice k_2 a bodom N na úsečke MS_1, kde $|MN| = r_2$. Bod S teda leží na osi o úsečky S_2N, odkiaľ je zrejmá jeho konštrukcia (obr. 1).



Obrázok 1: Konštrukcia dotýkajúcich sa kružníc v programe GeoGebra

Z predchádzajúcej konštrukcie vyplýva, že pre každý bod M kružnice k_1 leží stred S kružnice k na *hyperbole*, pričom platí: $|SS_1| - |SS_2| = r_1 - r_2$. Ohniskami tejto hyperboly sú stredy S_1 a S_2 daných kružníc a dĺžka hlavnej osi je $2a = r_1 - r_2$. Takto dostávame obvyklú definíciu *hyperboly* ako množiny všetkých bodov roviny, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch daných bodov je konštantná.

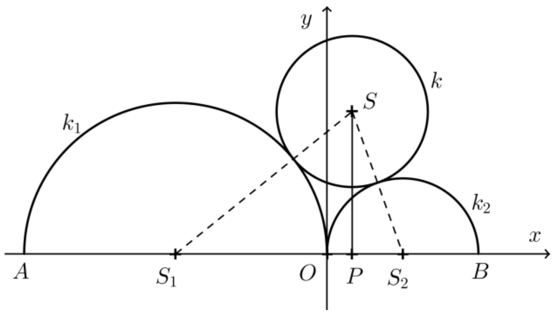
Ak sa dané kružnice k_1, k_2 dotýkajú zvnútra, tak je možné použiť analogický postup, pričom dostávame, že všetky stredy S kružníc k ležia na *elipse* s ohniskami S_1, S_2 a s dĺžkou hlavnej osi $2a = r_1 + r_2$, t. j. *elipsa* je množinou všetkých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od daných dvoch bodov je konštantná (viac v práci [1]).

Analytické vyjadrenie hyperboly. Zvoľme sústavu súradníc s osou o_x incidentnou so stredmi S_1, S_2 daných dvoch zvonka dotýkajúcich sa kružníc k_1 a k_2, pričom začiatok O sústavy súradníc je ich dotykovým bodom. Nech kružnica k požadovaných vlastností (dotýkajúca sa zvonka oboch kružníc k_1, k_2) má stred $S = [x, y]$ a polomer s dĺžkou r. Z pravouhlých trojuholníkov S_1PS a S_2PS (bod P je pätou kolmice vedenej bodom S na os o_x, viď obr. 2) vyplýva, že

$$y^2 = (r + r_1)^2 - (x + r_1)^2 \tag{1}$$
$$y^2 = (r_2 + r)^2 - (r_2 - x)^2 \tag{2}$$

Elimináciou premennej y z týchto rovníc, dostávame pre x-ovú súradnicu stredu S

$$x = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\, r.$$



Obrázok 2

Vyjadrením r z tohto vzťahu a dosadením do jednej z rovníc (1) alebo (2) dostaneme

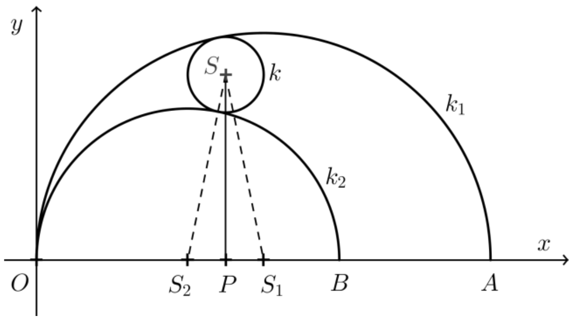
$$y^2 = \frac{4r_1r_2}{r_1 - r_2}\,x + \frac{4r_1r_2}{(r_1 - r_2)^2}\,x^2,$$

čo je vrcholová rovnica *hyperboly*. Týmto sme dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 1. Dané sú dve nezhodné zvonku dotýkajúce sa kružnice. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa zvonku dotýkajú daných kružníc je hyperbola.

Analytické vyjadrenie elipsy. Postupujeme podobne ako v prípade hyperboly, keď zvolíme sústavu súradníc s osou o_x incidentnou so stredmi S_1, S_2 daných dvoch zvnútra dotýkajúcich sa kružníc k_1 a k_2 (začiatok O sústavy je ich dotykovým bodom, obr. 3). Pre stred $S = [x, y]$ kružnice k, ktorá sa dotýka zvnútra kružnice k_1, zvonku kružnice k_2 a ktorej polomer má dĺžku r, platí:

$$y^2 = (r + r_2)^2 - (x - r_2)^2$$
$$y^2 = (r_1 - r)^2 - (r_1 - x)^2$$



Obrázok 3

Postupným riešením tejto sústavy rovníc (elimináciou premenných) dostávame:

$$y^2 = \frac{4r_1r_2}{r_1 + r_2}\,x - \frac{4r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2}\,x^2, \qquad x = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}\,r.$$

Prvá z rovníc je vrcholovou rovnicou *elipsy*, čím sme dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 2. Dané sú dve nezhodné zvnútra dotýkajúce sa kružnice. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú daných dvoch kružníc (jednej zvonku a druhej zvnútra) je elipsa.

Analogický výsledok dostaneme aj pre dvojice navzájom nezhodných, nesústredných a *nedotýkajúcich sa* kružníc, čo možno zhrnúť do nasledujúcej vety (viď v [2]).

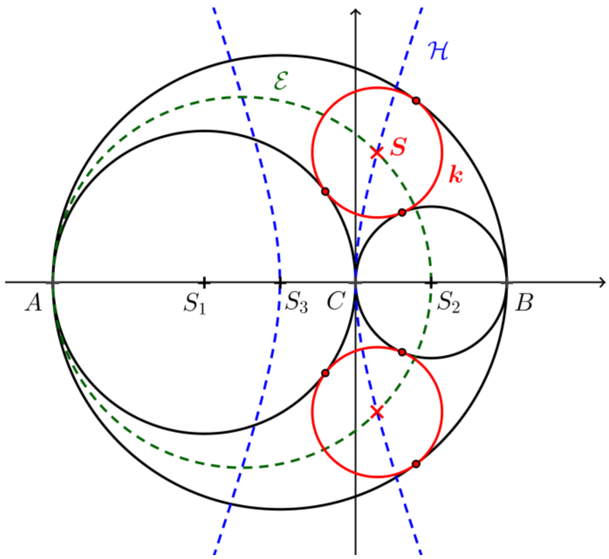
Veta 3. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch nezhodných, nedotýkajúcich sa a nesústredných kružníc $k_i(S_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$, sú dve konfokálne kužeľosečky s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $|r_1 - r_2|$ a $(r_1 + r_2)$ hlavnej osi (s výnimkou nevlastných bodov kužeľosečiek a prípadných spoločných bodov daných kružníc).

3. Kužeľosečky v úlohách

Metódou analytickej geometrie vyriešime dvojicu Apolloniovych úloh (v prostredí programu GeoGebra), pričom použijeme výsledky z predchádzajúcej časti.

Úloha 1. Daná je kružnica s priemerom AB a bod C na AB, ktorý tento priemer delí v pomere $2 : 1$. Nad priemermi AC a CB sú zostrojené ďalšie dve kružnice. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka všetkých troch daných kružníc.

Riešenie. Nech úsečka AB má dĺžku $2d$. Polomery kružníc nad priemermi AC a CB majú potom veľkosti $\frac{2}{3}d$ a $\frac{1}{3}d$. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak pre jej stred S platí:



Obrázok 4

a) bod S je stredom kružnice dotýkajúcej sa zvonka kružníc nad priemermi AC a CB, t. j. leží na hyperbole, ktorej rovnicu môžeme vo vhodne zvolenej sústave súradníc (kde os o_y je dotyčnicou kružníc nad priemermi AC a CB v ich spoločnom bode) vyjadriť v tvare

$$y^2 = \frac{8d}{3}x + 8x^2,$$

b) bod S je stredom kružnice, ktorá sa dotýka zvonku kružnice nad priemerom AC a zvnútra kružnice nad priemerom AB, t. j. leží na elipse, ktorej rovnica má tvar

$$y^2 = \frac{360 - 192d}{75}x - \frac{72}{75}x^2 + \frac{480 - 128d}{75}d.$$

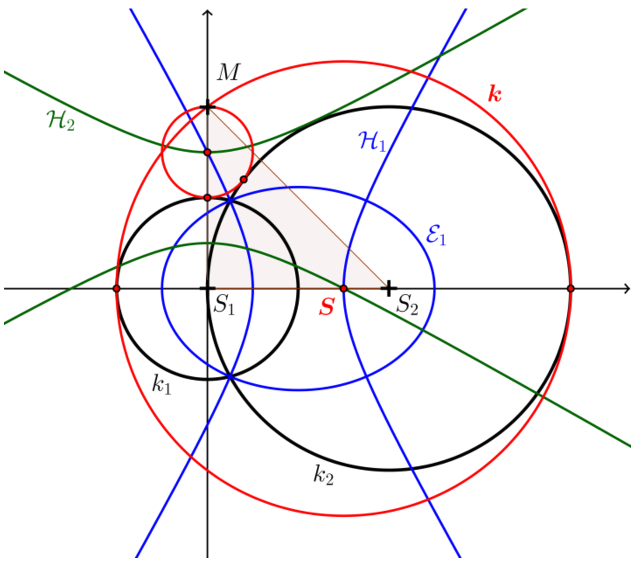
Elipsa a hyperbola (jedna jej vetva, pre $x > 0$), zostrojené podľa predchádzajúcich dvoch bodov, sa pretínajú v stredoch kružníc požadovaných vlastností. Obe riešenia úlohy, zostrojené v prostredí programu GeoGebra, sú znázornené na obrázku 4.

Poznámka. Namiesto hyperboly v bode a) môžeme uvažovať taktiež elipsu, ktorá je množinou stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa zvonku kružnice nad priemerom BC a zvnútra kružnice nad priemerom AB. V tomto prípade sú stredy hľadaných kružníc priesečníkmi dvoch elíps.

Úloha 2. Daný je rovnoramenný, pravouhlý trojuholník MS_1S_2 s pravým uhlom pri vrchole S_1, pričom $|MS_1| = d$ a kružnice $k_1(S_1, \frac{d}{2})$, $k_2(S_2, d)$. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka kružníc k_1, k_2 a prechádza bodom M.

Riešenie. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak podľa vety 3 jej stred S je bodom dvojice konfokálnych kužeľosečiek s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $(r_1 + r_2)$ a $|r_1 - r_2|$ hlavnej osi (elipsa E_1 a hyperbola H_1 na obr. 5), ktorých rovnice môžeme vo vhodne zvolenej sústave súradníc (s osami incidentnými s odvesnami daného pravouhlého trojuholníka) vyjadriť v tvare

$$E_1\colon\ y^2 = \frac{5d}{9}x - \frac{5}{9}x^2 + \left(\frac{5}{12}d\right)^2, \quad H_1\colon\ y^2 = -3dx + 3x^2 + \left(\frac{3}{4}d\right)^2.$$



Obrázok 5

Okrem toho, bod S je stredom kružnice, ktorá sa dotýka kružnice k_1 (resp. k_2) a prechádza bodom M, teda podľa vety 2 (v limitnom prípade, keď bodu M zodpovedá kružnica s "nekonečne malým" polomerom), leží na hyperbole s rovnicou

$$H_2:\ y^2 = \frac{1}{3}x^2 + dy - \frac{3}{16}d^2.$$

Pretože bod M je vonkajším bodom vzhľadom na kružnice k_1 a k_2, tak podmienkam úlohy vyhovujú dva body S, ktoré sú priesečníkmi hyperbol H_1 a H_2 (obr. 5).

4. Záver

Apolloniove úlohy sa tešili veľkému záujmu v celej svojej histórii, čoho dôkazom sú mnohé práce významných matematikov ako boli napr. Archimedes, Apollonius, Pappos, neskôr Viète, Descartes, Newton, Lambert, Euler a ďalší. Aj v dnešnej dobe môžeme nájsť v odbornej literatúre viacero zaujímavých príspevkov s problematikou dotýkajúcich sa kružníc, mnohé aj s podporou výpočtovej techniky. V súčasnej školskej matematike má dynamická podpora výučby geometrie svoje miesto, nakoľko prispieva k ľahšiemu a rýchlejšiemu pochopeniu učiva, ako aj k jeho hlbšej fixácii. Rôzne pohľady na kužeľosečky ako množiny bodov daných vlastností, spolu s ich vizualizáciou v prostredí programu dynamickej geometrie, sa stávajú základom mnohých žiackych aktivít, ktoré prispievajú k prirodzenému osvojovaniu si nových pojmov. Tieto možnosti sme sa snažili načrtnúť aj v tomto príspevku, pri riešení klasických planimetrických úloh metódou analytickej geometrie.

Literatúra

[1] Billich, M. (2009) *The use of geometric place in problem solving.* In: Scientific Issues, Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research (ed. M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč), Ružomberok, Katolícka univerzita, 2009, s. 7-14. ISBN 978-80-8084-418-9

[2] Sklenáriková, Z. (2004). *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy*. In Matematika v proměnách veku III, Edícia Dějiny matematiky, Praha, 2004, s. 45–55. ISBN 80-7285-040-7

[3] Tahir, H. (2007). *A New Approach to Conics.* In D. K. Pugalee, A. Rogerson and A. Schinck (Eds.), Proceedings of the Ninth International Conference: Mathematics Education in a Global Community. Charlotte NC, 2007, pp. 637-642.

Článok prijatý dňa 16. apríla 2013.

Adresa

RNDr. Martin Billich, PhD.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, Hrabovská cesta 1, SK – 034 01 Ružomberok; e-mail: billich@ku.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 001UJS-4/2011.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

LIMIT THEOREMS FOR TOPOLOGICAL GROUP-VALUED MEASURES WITH RESPECT TO FILTER CONVERGENCE

ANTONIO BOCCUTO - XENOFON DIMITRIOU

ABSTRACT. *Some Nikodým boundedness and limit theorems for topological group-valued measures are proved in the context of filter convergence.*

KEY WORDS: *topological group, filter, filter convergence, Brooks-Jewett theorem, Nikodým boundedness theorem, Stone Isomorphism Theorem.*

CLASSIFICATION: *I19*

1 Introduction

In this paper we give some versions of convergence and Nikodým boundedness theorems for topological group-valued measures with respect to filters. In this setting, in general it is impossible to obtain results analogous to the classical ones, even for positive real-valued measures (see for instance [2, Example 3.4], [4, Remark 3.8]). However, for suitable classes of filters/ideals, it is possible to get different versions of such kinds of theorems (see for instance [1] for real- valued measures and [2, 3, 4] for lattice group-valued measures).

Here, using some techniques similar to those in [5, 6, 7], we deal with the topological group setting. We first consider the σ-additive case and then, using the Stone Isomorphism Theorem, we investigate also the finitely additive case. We consider a concept of semivariation analogous to the classical one and we deal directly with measures defined on a σ-algebra of parts of an abstract set, without needing preliminary results for measures defined on the class of all subsets of $\mathbb{N}$, and giving an approach different from that in [3, 4].

2 Preliminaries

Let $Z \neq \emptyset$ be any set. A *filter* $\mathcal{F}$ of Z is a nonempty collection of subsets of Z with $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$ whenever A, $B \in \mathcal{F}$, and such that for each $A \in \mathcal{F}$ and $B \supset A$ we get $B \in \mathcal{F}$.

A filter of Z is said to be *free* iff it contains the filter $\mathcal{F}_{\text{cofin}}$ of all cofinite subsets of Z.

Let P be a countable set, and $\mathcal{F}$ be a filter of P. A subset of P is $\mathcal{F}$-*stationary* iff it has nonempty intersection with every element of $\mathcal{F}$. We denote by $\mathcal{F}^*$ the family of all $\mathcal{F}$-stationary subsets of P.

If $I \in \mathcal{F}^*$, then the *trace* $\mathcal{F}(I)$ of $\mathcal{F}$ on I is the family $\{A \cap I : A \in \mathcal{F}\}$.

A filter $\mathcal{F}$ of P is *diagonal* iff for every sequence $(A_n)_n$ in $\mathcal{F}$ and for each $I \in \mathcal{F}^*$ there exists a set $J \subset I$, $J \in \mathcal{F}^*$ such that the set $J \setminus A_n$ is finite for all $n \in \mathbb{N}$ (see also [3, 4]).

Observe that $\mathcal{F}(I)$ is a filter of I. Indeed, if F_1, $F_2 \in \mathcal{F}(I)$, then $(F_1 \cap F_2) \cap I = (F_1 \cap I) \cap (F_2 \cap I) \in \mathcal{F}$, and hence $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}(I)$.

Let now $F^\circ \in \mathcal{F}$ and $F^\circ \cap I \subset F' \subset I$, and set $F^* := F' \cup F^\circ$: then $F^* \in \mathcal{F}$ and $F^* \cap I \supset F^\circ \cap I$. It is readily seen that $F' \subset F^* \cap I$. To prove the converse inclusion, observe that $F^* \cap I = (F' \cap I) \cup (F^\circ \cap I) \subset F'$. Hence, $F' = F^* \cap I$ belongs to $\mathcal{F}(I)$, and thus we get the claim.

Given an infinite set $I \subset P$, a *blocking* of I is a countable partition $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ of I into nonempty finite subsets.

A filter $\mathcal{F}$ of P is said to be *block-respecting* iff for every $I \in \mathcal{F}^*$ and for each blocking $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ of I there is a set $J \in \mathcal{F}^*$, $J \subset I$ with $\#(J \cap D_k) = 1$ for all $k \in \mathbb{N}$, where $\#$ denotes the number of elements of the set into brackets.
Some examples of filters satisfying these properties and of filters lacking them can be found in [1].

The following result will be useful in the sequel.

Proposition 2.1 *If $\mathcal{F}$ is a block-respecting filter of $\mathbb{N}$, then $\mathcal{F}(I)$ is a block-respecting filter of I for every $I \in \mathcal{F}^*$.*
Proof: Let $I \subset \mathbb{N}$ be any $\mathcal{F}$-stationary set, $L \subset I$ be any $\mathcal{F}(I)$-stationary set and $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ be any blocking of L. If $F^\circ \in \mathcal{F}$, then $\emptyset \neq L \cap F^\circ \cap I = L \cap F^\circ$, and so $L \in \mathcal{F}^*$. By hypothesis, there exists a set $J \in \mathcal{F}^*$, $J \subset L$, with $\#(J \cap D_k) = 1$ for all $k \in \mathbb{N}$. In particular, $\emptyset \neq L \cap F^\circ = L \cap F^\circ \cap I$. From this it follows that $J \in \mathcal{F}(I)^*$. Thus we get the assertion. □

From now on $\mathcal{F}$ is a free filter of $\mathbb{N}$, $R = (R,+)$ is a Hausdorff complete abelian topological group satisfying the first axiom of countability, with neutral element 0, and $\mathcal{J}(0)$ denotes a basis of closed and symmetric neighborhoods of 0 (see also [5, 6, 7]). Moreover, given $k \in \mathbb{N}$ and $U_1, \ldots, U_k \subset R$, set $U_1 + \cdots + U_k := \{u_1 + \ldots + u_k : u_1 \in U_1, \ldots, u_k \in U_k\}$, and $kU := U + \cdots + U$ (k times).

We now give the notions of filter convergence and filter boundedness.

Let $(x_n)_n$ be a sequence in R and $x \in R$. We say that $\lim_n x_n = x$ iff for every $U \in \mathcal{J}(0)$ there is $n_0 \in \mathbb{N}$ with $x_n \in U$ for each $n \geq n_0$, and that $(\mathcal{F})\lim_n x_n = x$ iff $\{n \in \mathbb{N} : x_n - x \in U\} \in \mathcal{F}$ for every $U \in \mathcal{J}(0)$. Note that $\lim_n x_n = x$ iff $(\mathcal{F}_{\text{cofin}})\lim_n x_n = x$.

Let $(B_n)_n$ be a sequence of subsets of R. We say that $\lim_n B_n = 0$ iff for every $U \in \mathcal{J}(0)$ there is $n^* \in \mathbb{N}$ with $B_n \subset U$ for any $n \geq n^*$, and $(\mathcal{F})\lim_n B_n = 0$ iff the set $\{n \in \mathbb{N} : B_n \subset U\} \in \mathcal{F}$ for each $U \in \mathcal{J}(0)$. Observe that $\lim_n B_n = 0$ iff $(\mathcal{F}_{\text{cofin}})\lim_n B_n = 0$.

Let $(U_n)_n$ be an increasing sequence in $\mathcal{J}(0)$. A sequence $(x_n)_n$ in R is $\mathcal{F}$*-bounded by* $(U_n)_n$ iff $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_n\} \in \mathcal{F}$. We say that $(x_n)_n$ is *eventually bounded by* $(U_n)_n$ iff it is $\mathcal{F}_{\text{cofin}}$-bounded by $(U_n)_n$.

From now on, $\mathcal{E}$ is a σ-algebra of subsets of an infinite set G. If $m : \mathcal{E} \to R$ be a finitely additive measure, set $m^+(A) = \{m(B) : B \in \mathcal{E}, B \subset A\}$, $A \in \mathcal{E}$. We say that m is (s)*-bounded* iff $\lim_n m^+(A_n) = 0$ for every disjoint sequence $(A_n)_n$ in $\mathcal{E}$, and that m is σ-

additive iff $\lim_n m^+(C_n)=0$ for every decreasing sequence $(C_n)_n$ in E with $\cap_{n=1}^{\infty} C_n=\varnothing$ (see also [5, 6, 7]).

We now prove the next technical lemma (see also [1, Lemma 3.3], [3, Lemma 2.2] and [4, Lemma 3.1]).

Lemma 2.2 *Let $(a_{i,n})_{i,n}$ be a double sequence in R, and F be a diagonal filter.*

α) If $(\mathsf{F})\lim_{i\in\mathsf{N}} a_{i,n}=0$ for each $n\in\mathsf{N}$, then for every $I\in\mathsf{F}^*$ there exists $J\in\mathsf{F}^*$, $J\subset I$ such that $\lim_{i\in J} a_{i,n}=0$ for all $n\in\mathsf{N}$.

$\alpha\alpha$) If $(V_i)_i$ is an increasing sequence in $\mathsf{J}(0)$ and $(a_{i,n})_i$ is F-bounded by $(V_i)_i$ for every $n\in\mathsf{N}$, then for each $I\in\mathsf{F}^*$ there is $J\in\mathsf{F}^*$, $J\subset I$ such that $(a_{i,n})_i$ is eventually bounded by $(V_i)_i$.

Proof: α) Let $(U_p)_p$ be a countable basis of neighborhoods of 0. By hypothesis, for every n, $p\in\mathsf{N}$ we have $A_{n,p}:=\{i\in\mathsf{N}: a_{i,n}\in U_p\}\in\mathsf{F}$. Since F is diagonal, for each $I\in\mathsf{F}^*$ there is $J\in\mathsf{F}^*$, $J\subset I$, such that for every n, $p\in\mathsf{N}$ the set $J\setminus A_{n,p}$ is finite. Thus, for every n, $p\in\mathsf{N}$ there is $\bar{i}\in\mathsf{N}$ (without loss of generality $\bar{i}\in J$) with $a_{i,n}\in U_p$ for all $i\geq\bar{i}$, $i\in J$. This proves α).
The proof of $\alpha\alpha$) is analogous, taking the sets $A_n^*:=\{i\in\mathsf{N}: a_{i,n}\in V_i\}$, $n\in\mathsf{N}$, instead of the $A_{n,p}$'s. □

3 The main results

We begin with a convergence theorem for topological group-valued measures (for related results see also [1, Theorems 2.6 and 3.5] for the Banach space setting and [3, Lemma 3.1 and Theorems 3.1, 4.1 and 4.2] for the lattice group context). Note that the hypothesis that the involved filter is block- respecting is essential, even when $R=\mathsf{R}$ (see also [1, Remark 3.4]).

Theorem 3.1 *Let F be a block-respecting filter of N, $m_j:\mathsf{E}\to R$, $j\in\mathsf{N}$, be a sequence of σ-additive measures, $(A_n)_n$ be a disjoint sequence in E, with*

i) $\lim_j m_j(A_n)=0$ for any $n\in\mathsf{N}$, and

ii) $(\mathsf{F})\lim_j m_j(\cup_{p\in P}A_p)=0$ for every $P\subset\mathsf{N}$. Then,

β) for every strictly increasing sequence $(l_n)_n$ in N we get

$$(\mathsf{F})\lim_n m_n(A_{l_n})=0;$$

$\beta\beta$) if F is also diagonal, then the only condition ii) is sufficient to get (1).

Proof: Put $H_n:=A_{l_n}$, $n\in\mathsf{N}$. If we deny the thesis, then there is $U\in\mathsf{J}(0)$ with $C:=\{n\in\mathsf{N}: m_n(H_n)\in U\}\notin\mathsf{F}$. Note that $I:=\mathsf{N}\setminus C=\{n\in\mathsf{N}: m_n(H_n)\notin U\}\in\mathsf{F}^*$: otherwise there is $F'\in\mathsf{F}$ with $I\cap F'=\varnothing$, namely $F'\subset C$ and hence, $C\in\mathsf{F}$, a contradiction.
Let now $(U_k)_k$ be a decreasing sequence in $\mathsf{J}(0)$, with $U_0=U$, and $2U_k\subset U_{k-1}$ for every $k\in\mathsf{N}$ (see also [6]). It is not difficult to see that $lU_k\subset U_{k-l+1}$ for all k, $l\in\mathsf{N}$ with $l\leq k+1$.

Let $N_0 = 1$. By σ-additivity of m_1, there exists a cofinite subset $P_1 \subset \mathbb{N}$, with $N_0 < p_1 := \min P_1$, and $m_1^+(F_1) \subset U_1$, where $F_1 := \cup_{t \in P_1} H_t$. By i), there is an integer $N_1 > p_1$ with $m_i(H_t) \in U_1$ whenever $i \geq N_1$ and $t = 1, \ldots, p_1$.
By σ-additivity of m_1, $m_2, \ldots, m_{N_1}$, there is a cofinite subset $P_2 \subset P_1$, with $N_1 < p_2 := \min P_2$, and $m_r^+(F_2) \subset U_2$ for every $r = 1, \ldots, N_1$, where $F_2 := \cup_{t \in P_2} H_t$. Arguing as above, there exists $N_2 > p_2$ with $m_i(H_t) \in U_2$ whenever $i \geq N_2$ and $t = 1, \ldots, p_2$.
Proceeding by induction, we find: a strictly decreasing sequence $(P_k)_k$ of cofinite subsets of $\mathbb{N}$, a strictly decreasing sequence $(F_k)_k$ in $\mathcal{E}$ and two strictly increasing sequences $(N_k)_k$, $(p_k)_k$ in $\mathbb{N}$ such that, for every $k \in \mathbb{N}$,
3.1.1) $N_k > p_k$, $p_{k+1} > N_k$, $p_k = \min P_k$; $F_k = \cup_{t \in P_k} H_t$;
3.1.2) $m_r^+(F_{k+1}) \subset U_{k+1}$ for all $r = 1, \ldots, N_k$;
3.1.3) $m_i(H_t) \in U_k$ whenever $i \geq N_k$ and $t = 1, \ldots, p_k$.
Since $\mathcal{F}$ is block-respecting, there is $J := \{j_1, j_2, \ldots\} \in \mathcal{F}^*$, $J \subset I$, with $N_k \leq j_k < N_{k+1}$ for every $k \in \mathbb{N}$. As $J \in \mathcal{F}^*$, then either $J_1 := \{j_1, j_3, j_5, \ldots\} \in \mathcal{F}^*$ or $J_2 := \{j_2, j_4, j_6, \ldots\} \in \mathcal{F}^*$. Without loss of generality, let $J_1 \in \mathcal{F}^*$ (see also [1, 3, 4]). Put $A := \cup_{h=1}^{\infty} H_{j_{2h-1}}$. We get:

$$m_{j_1}(A) = m_{j_1}(H_{j_1}) + m_{j_1}(H_{j_3} \cup H_{j_5} \cup \ldots);$$

$$m_{j_{2h-1}}(A) = m_{j_{2h-1}}(H_{j_1} \cup H_{j_3} \cup \ldots \cup H_{j_{2h-3}}) +$$

$$+ m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h-1}}) + m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h+1}} \cup H_{j_{2h+3}} \cup \ldots), \quad h \geq 2.$$

Since $j_{2h-1} < N_{2h-1} < p_{2h}$ and

$$H_{j_{2h+1}} \cup H_{j_{2h+3}} \cup \ldots \subset \cup_{l=p_{2h+1}}^{\infty} H_l = F_{2h+1} \quad \text{for every} h \in \mathbb{N},$$

from (3) and 3.1.2) used with $k = 2h$ we obtain

$$m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h+1}} \cup H_{j_{2h+3}} \cup \ldots) \in U_{2h+1} \subset U_3.$$

Moreover, since $j_{2h-3} < N_{2h-3} < p_{2h-2} < p_{2h-1}$ for every $h \geq 2$, from 3.1.3) used with $k = 2h-1$ we get $m_{j_{2h-1}}(H_{j_l}) \in U_{2h-1}$, $h \geq 2$, $l = 1, 3, \ldots, 2h-3$, and hence

$$m_{j_{2h-1}}(H_{j_1} \cup H_{j_3} \cup \ldots \cup H_{j_{2h-3}}) \in (h-1) U_{2h-1} \subset U_h \subset U_3.$$

If $m_{j_{2h-1}}(A) \in U_1$, then from (2), (4) and (5) we have $m_{j_1}(H_{j_1}) \in U_1 + U_2 \subset U$ and $m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h-1}}) \in U_1 + U_2 + U_3 \subset U_1 + U_1 \subset U$ for all $h \geq 2$. But we know that $m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h-1}}) \notin U$, and so we have a contradiction. Thus, we get that $m_{j_{2h-1}}(A) \notin U_1$ for all $h \in \mathbb{N}$, and so $L := \{l \in \mathbb{N} : m_l(A) \notin U\} \in \mathcal{F}^*$. Since, by ii), $\mathbb{N} \setminus L \in \mathcal{F}$, we obtain $L \cap (\mathbb{N} \setminus L) \neq \emptyset$, which is absurd. This proves $\beta)$.
We now prove $\beta\beta)$. If we deny the thesis, then, proceeding analogously as in the proof of $\beta)$, we find $I \in \mathcal{F}^*$ and $U \in \mathcal{J}(0)$ with $m_n(A_{l_n}) \notin U$ for each $n \in I$. By Lemma 2.2, there is $J \in \mathcal{F}^*$, $J \subset I$, with $\lim_{j \in J} m_j(A_{l_n}) = 0$ for any $n \in \mathbb{N}$. Note that the sequence $m_n(A_{l_n})$, $n \in \mathbb{N}$, does not $(\mathcal{F}(J))$-converge to 0 (see also [1]). Since $J \in \mathcal{F}^*$ and $\mathcal{F}$ is block-

respecting, then, by Proposition 2.1, $\mathsf{F}(J)$ is block-respecting too. As $\mathsf{F}(J) \supset \mathsf{F}$, it is easy to see that $(A_{l_n})_n$ satisfies ii) with respect to $\mathsf{F}(J)$. By $\beta)$ used with $\mathsf{F}(J)$ and $(A_{l_n})_n$, it follows that $(\mathsf{F}(J))\lim_n m_n(A_{l_n}) = 0$, obtaining a contradiction. This proves $\beta\beta)$.

We now extend Theorem 3.1 to the setting of finitely additive measures.

Theorem 3.2 *Let $(A_n)_n$ be as in Theorem 3.1, F be a block-respecting filter of N, $m_j : \mathsf{E} \to R$, $j \in \mathsf{N}$, be a sequence of finitely additive s-bounded measures, and assume that*

i) $\lim_j m_j(A_n) = 0$ *for any* $n \in \mathsf{N}$;

ii) $(\mathsf{F})\lim_j \sum_{p\in P} m_j(A_p) = 0$ *for every* $P \subset \mathsf{N}$.

Then for every strictly increasing sequence $(l_n)_n$ in N we get

$$(\mathsf{F})\lim_n m_n(A_{l_n}) = 0.$$

If F is also diagonal, then the only condition ii) is enough to get (6).

Proof: By the Stone Isomorphism Theorem (see also [8]) there is a topological space Ω, such that E is isomorphic to the algebra Q of all clopen subsets of Ω. Let us denote by $\psi : \mathsf{E} \to \mathsf{Q}$ such an isomorphism, and let $\Sigma(\mathsf{Q})$ be the σ-algebra generated by Q. Thus for every $j \in \mathsf{N}$ the measure $m_j \circ \psi^{-1} : \mathsf{Q} \to R$ is σ-additive and admits a σ-additive extension $\mu_j : \Sigma(\mathsf{Q}) \to R$ (see also [5, 9, 10]), satisfying together with the sets $\psi^{-1}(A_n)$, $n \in \mathsf{N}$, the conditions i) and ii) of Theorem 3.1. Hence, $0 = (\mathsf{F})\lim_n \mu_n(\psi^{-1}(A_{l_n})) = (\mathsf{F})\lim_n m_n(A_{l_n})$, and so we get (6).

The last assertion follows by arguing as in the proof of Theorem 3.1, $\beta\beta)$.

We now give a version of the Nikodým boundedness theorem for topological group-valued measures (for the Riesz space context, see also [4, Lemma 3.4 and Theorem 3.5]).

Theorem 3.3 *Let F be a block respecting filter of N, $m_j : \mathsf{E} \to R$, $j \in \mathsf{N}$, be a sequence of finitely additive (s)-bounded measures, and $(A_n)_n$ be a disjoint sequence in E. Let $U \in \mathsf{J}(0)$, $(W_n)_n$ be an increasing sequence in $\mathsf{J}(0)$, and set $V_n := nW_n + U$, $n \in \mathsf{N}$. Suppose that:*

j) the set $\{m_n(A_p) : n \in \mathsf{N}\}$ is eventually bounded by $(W_n)_n$ for each $p \in \mathsf{N}$;

jj) the set $\{\sum_{p\in P} m_j(A_p) : n \in \mathsf{N}\}$ is F-bounded by $(W_n)_n$ for any $p \in \mathsf{N}$. Then

$\gamma)$ for every strictly increasing sequence $(l_n)_n$ in N, the set $D := \{m_n(A_{l_n}) : n \in \mathsf{N}\}$ is F-bounded by $(V_n)_n$.

$\gamma\gamma)$ If F is also diagonal, then the only condition jj) is enough in order that D is F-bounded by $(V_n)_n$.

Proof: For every $n \in \mathsf{N}$, let $H_n := A_{l_n}$. First of all note that, if the m_j's are σ-additive, then the proof of $\gamma)$ is similar to that of Theorem 3.1, $\beta)$. Indeed, if the thesis of the theorem is not true, then $I := \{n \in \mathsf{N} : m_n(H_n) \notin V_n\} \in \mathsf{F}^*$. By σ-additivity of m_1, there is a cofinite set $P_1 \subset \mathbb{N}$, with $1 < p_1 = \min P_1$ and $m_1^+(F_1) \subset U$, where $F_1 := \cup_{t \in P_1} H_t$. By j) there is $N_1 > p_1$ with $m_i(H_t) \in W_i$ for each $i \geq N_1$ and $t = 1, \ldots, N_1$. By induction, there are a strictly decreasing sequence $(F_k)_k$ in $\mathcal{E}$ and two strictly increasing sequences $(N_k)_k$, $(p_k)_k$ in $\mathbb{N}$ such that, for each $k \in \mathbb{N}$,

3.3.1) $N_k > p_k$, $p_{k+1} > N_k$; $m_r^+(F_{k+1}) \subset U_{k+1}$ for every $r = 1, \ldots, N_k$;

3.3.2) $m_i(H_t) \in W_i$ for any $i \geq N_k$ and $t = 1, \ldots, p_k$.

As $\mathcal{F}$ is block-respecting, we find a set $J_1 := \{j_1, j_3, j_5, \ldots\} \in \mathcal{F}^*$, $J_1 \subset I$, with $N_k \leq j_k < N_{k+1}$ for every $k \in \mathbb{N}$. For any $h \in \mathbb{N}$ we have:

$$m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h+1}} \cup H_{j_{2h+3}} \cup \ldots) \in U;$$

$m_{j_{2h-1}}(H_{j_l}) \in W_{2h-1}$, $h \geq 2$, $l = 1, 3, \ldots, 2h-3$, and

$$m_{j_{2h-1}}(H_{j_1} \cup H_{j_3} \cup \ldots \cup H_{j_{2h-3}}) \in (h-1) W_{2h-1}.$$

Let now $A := \cup_{h=1}^{\infty} H_{j_{2h-1}}$. If $m_{j_{2h-1}}(A) \in W_{j_{2h-1}}$, then from (2), (7) and (8) we obtain

$$m_{j_{2h-1}}(A_{j_{2h-1}}) \in h W_{2h-1} + U \subset j_{2h-1} W_{j_{2h-1}} + U = V_{j_{2h-1}}$$

and

$$m_{j_1}(A_{j_1}) \in W_{j_1} + U \subset j_1 W_{j_1} + U = V_{j_1}.$$

This contradicts the fact that $m_{j_{2h-1}}(H_{j_{2h-1}}) \notin V_{j_{2h-1}}$. Thus $m_{j_{2h-1}}(A) \notin W_{j_{2h-1}}$ for all $h \in \mathbb{N}$, and hence $\{l \in \mathbb{N} : m_l(A) \notin W_l\} \in \mathcal{F}^*$. From this, arguing as at the end of the proof of Theorem 3.1, $\beta)$, we get a contradiction, and this proves $\gamma)$. From $\gamma)$, proceeding as in the proof of Theorem 3.1, $\beta\beta)$, we get $\gamma\gamma)$, at least in the σ-additive case.

When the m_j's are finitely additive and (s)-bounded, it is enough to use the results obtained in the σ-additive setting and to argue as in Theorem 3.2.

References

[1] A. AVILES LOPEZ, B. CASCALES SALINAS, V. KADETS, A. LEONOV, *The Schur l_1 Theorem for Filters,* J. Math. Phys., Anal., Geom. **3** (4) (2007), 383–398.

[2] A. BOCCUTO, X. DIMITRIOU, N. PAPANASTASSIOU, *Basic matrix theorems for $(\mathbb{I})$-convergence in (ℓ)-groups,* Math. Slovaca **62** (5) (2012), 269-298.

[3] A. BOCCUTO, X. DIMITRIOU, N. PAPANASTASSIOU, *Schur lemma and limit theorems in lattice groups with respect to filters,* Math. Slovaca **62** (6) (2012), 1145-1166.

[4] A. BOCCUTO, X. DIMITRIOU, N. PAPANASTASSIOU, *Uniform boundedness principle, Banach-Steinhaus and approximation theorems for filter convergence in Riesz spaces,* Proceedings of International Conference on Topology and its Applications ICTA 2011, Cambridge Sci. Publ. (2012), 45-58.

[5] D. CANDELORO, *Uniform (s)-boundedness and absolute continuity* (Italian), Boll. Un. Mat. Ital. **4- B** (1985), 709-724.

[6] D. CANDELORO, *On Vitali-Hahn-Saks, Dieudonné and Nikodým theorems* (Italian), Supplem. Rend. Circolo Mat. Palemo Ser. II **8** (1985), 439-445.

[7] D. CANDELORO, *Some theorems on unifom boundedness* (Italian), Rend. Accad. Naz. Detta XL **9** (1985), 249-260.

[8] R. SIKORSKI, Boolean Algebras, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1964.

[9] M. SION, *Outer measures with values in a topological group,* Proc. London Math. Soc. **19** (3) (1969), 89-106.

[10] M. SION, A theory of semigroup-valued measures, Lect. Notes Math. **355**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

Received on April 17, 2013.

Addresses

Doc. Antonio Boccuto, Ph. D.
Università di Perugia, Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Vanvitelli, 1, I – 06123 Perugia (Italy), e-mail: boccuto@yahoo.it, boccuto@dmi.unipg.it

Dr. Xenofon Dimitriou, Ph. D.
Department of Mathematics, University of Athens, Panepistimiopolis Athens 15784 (Greece)
and Department of Mathematics, Technological and Educational Institute of Piraeus,
Petrou Ralli and Thivon 250, Egaleo 12244, Piraeus (Greece), e-mail: xenofon11@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SOLUTION OF FERMI´S PROBLEM WITH HELP OF PLACEMAT METHOD

FERMIHO ÚLOHA RIEŠENÁ POMOCOU VYUČOVACEJ METÓDY PLACEMAT

KRISTÍNA CAFIKOVÁ – MICHAELA REICHELOVÁ

ABSTRACT. *The contribution is focused on the use of the Placement teaching method and solution of Fermi's problem. We point out the way to combine them in teaching mathematics. We provide the student's solution of a problem "How many volleyball balls can fit in this room?". We summarize the student's opinions on the teaching method and this problem obtained during the research.*

KEY WORDS: *Fermi´s problem, Placemat, group work, teaching method*

ABSTRAKT. *V príspevku sa zameriavame na využitie vyučovacej metódy Placemat a riešenie Fermiho úlohy. Poukážeme na spôsob, ako ich spojiť v rámci vyučovania matematiky. Uvedieme študentské riešenie úlohy „Koľko volejbalových lôpt sa zmestí do tejto miestnosti?". Zhrnieme počas výskumu získané názory študentov na vyučovaciu metódu a túto úlohu.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Fermiho úloha, Placemat, skupinová práca, vyučovacia metóda*

CLASSIFICATION: *D45*

Úvod

Matematika patrí medzi menej obľúbené predmety na základných aj stredných školách. Tento negatívny postoj žiakov nezmenilo ani to, že rozsah hodín určených na vyučovanie matematiky bol znížený a celkové učivo bolo zjednodušené. Príčinou tohto stavu môže byť, že matematika sa aj napriek reformám vyučuje klasickými metódami, ktoré neboli prispôsobené zmenám uskutočneným v poslednom storočí. Práve preto považujeme za potrebné, aby klasické vyučovacie metódy nahradili nové, efektívnejšie. Jednou takou vyučovacou metódou je Placemat. V našom príspevku popisujeme, ako riešili študenti Fermiho úlohu využitím tejto metódy.

Fermiho úlohy

<u>1. úloha</u>
Aký veľký ľadovec by sme museli roztopiť, aby sme vodou z neho mohli zásobovať Nitru počas celého roka?
<u>2. úloha</u>
Koľko gumených medvedíkov sa zmestí do litrovej fľaše? Po koľké poschodie by siahala veža postavená z týchto medvedíkov?
<u>3. úloha</u>
Koľko klavírov je v Chicagu?

Tento typ úloh je pomenovaný po známom fyzikovi, Enricovi Fermim, ktorý mal schopnosť riešiť zdanlivo neriešiteľné úlohy. Úlohy, ktoré sa zdajú byť neriešiteľné bez použitia doplňujúcich informácií alebo bez použitia zložitých postupov a vzorcov. Enrico Fermi bol nielen skvelý experimentálny a teoretický fyzik, ale taktiež skvelý učiteľ fyziky.

Získal Nobelovu cenu za výskum vlastností neutrónov. Štúdium matematiky považoval za nutný predpoklad na štúdium fyziky.

Fermiho úlohy taktiež nazývame „*back-of-envelope calculation*“ (približný, hrubý výpočet). (Robinson, 2008). Fermiho úlohy nie je možné riešiť iba samotným výpočtom (dosadením do vzorca), ale je potrebné pochopiť podstatu daného problému, rozdeliť úlohu na časti a kladením vhodne zvolených otázok dospieť k riešeniu úloh, ktorým nie je presná hodnota, ale odhad (rádový odhad) (Baeyer, 2001). Baeyer vo svojej publikácii píše o Fermiho úlohách ako o zdanlivom hlavolame. Na rozdiel od hlavolamu Fermiho úloha nemôže byť overená logickou dedukciou, je vždy približná. Fermiho úloha vyžaduje vždy aj vedomosti nespomenuté v zadaní. Fermiho úlohy a spôsoby, akými sú riešené, sú vzácne nielen vo vyučovaní matematiky a fyziky, ale aj v bežnom živote. Klasická Fermiho úloha, ktorá sa používa na objasnenie tohto typu úloh, znie: Koľko ladičov klavírov je v Chicagu? Je málo pravdepodobné, že niekto vie hneď a presne odpovedať na túto otázku. Riešenie tejto úlohy nie je štandardné, je treba teda výsledok odhadnúť.

Ako sme spomenuli vyššie, je potrebné rozdeliť úlohy na časti, a potom vhodne zvolenými otázkami dospieť k riešeniu týchto častí a následne k riešeniu celej úlohy. V prípade tretej úlohy by to vyzeralo nasledovne:

A: Koľko klavírov je v Chicagu?

1. Koľko obyvateľov má Chicago?
2. Má každý obyvateľ klavír?
3. Koľko rodín je v Chicagu?
4. Má každá rodina klavír?
5. Koľko rodín v Chicagu má klavír?

B: Koľko klavírov naladí jeden ladič za jeden rok?

1. Ako často sa ladí klavír?
2. Koľko klavírov je potrebné naladiť v Chicagu za rok?
3. Koľko klavírov naladí jeden ladič za jeden deň?
4. Koľko má ladič klavírov pracovných dní?

Riešenie: Vydelíme počet klavírov, ktoré je potrebný naladiť za rok, počtom klavírov, ktoré naladí jeden ladič za rok, a tak dostaneme hľadaný výsledok.

Ärlebäck (2009) sformuloval päť základných charakteristických čŕt Fermiho úloh:

1. Dostupnosť – to znamená, že sú sprístupnené všetkým študentom, skupinám študentov, tiež na viacerých vzdelávacích stupňoch a rôznych úrovniach zložitosti.

2. Spojenie s reálnym svetom – sú realistické.

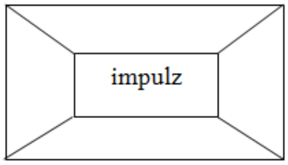
3. Potreba špecifikovať a štruktúrovať dôležité informácie a vzťahy – to znamená, že formulácia problému je tak otvorená, že riešiteľ si hneď nespojí problém so známou stratégiou riešenia, ale uplatňuje svoje skúsenosti, predstavy, konštrukcie, stratégie a iné kognitívne zručnosti na sprístupnenie problému. Podstatou riešenia Fermiho úlohy je správne odhaliť jadro daného problému a rozdeliť ju na jednotlivé kroky. K správnej hodnote dospejeme kladením vhodných otázok.

4. Potreba robiť odôvodnené odhady – absencia číselných dát.

5. Podpora diskusie – diskutovanie o probléme, o riešení, o odhadoch fyzikálnych veličín.

Pre Fermiho úlohy je ale typické, že úloha môže byť riešená viacerými spôsobmi, závisí to od charakteru kladených otázok. Teda, ak je nejaká rádová hodnota neznáma, môžeme začať aj s rôznymi predpokladmi a postupným kladením otázok dospejeme k približne rovnakému odhadu hľadanej hodnoty ako niekto, kto začal riešiť s inými predpokladmi.

Vyučovacia metóda Placemat a jej využitie v praxi



Obrázok 1: Rozdelenie papiera

Názov Placemat pochádza z anglického prekladu slova „prestieranie“. Táto vyučovacia metóda je v Nemecku známa aj ako „Platzdekchen“. Hlavnými charakteristickými črtami sú neverbálna spolupráca žiakov a to, že učiteľ v procese riešenia nemôže zasahovať do práce žiakov.

Žiaci sú rozdelení do štvorčlenných skupín. Každá skupina má k dispozícií papier formátu A1 a každý žiak v skupine dostane pero rôznej farby. Papier je rozdelený na päť častí, ako je to znázornené na obrázku 1. Štyri časti sú určené pre žiakov na písanie. Počas práce všetci majú vyhradené miesto na písanie, takže sa nemôže stať, že na tú istú časť píšu viacerí. Stredná časť je určená pre impulz. Impulz môže byť napísaná myšlienka, veta, vzorec, úloha alebo nakreslený obrázok či symbol. Na impulz musia žiaci reagovať. Žiaci svoje reakcie musia napísať na miesto, ktoré je pred nimi. Ich reakcie môžu byť napísané vety, myšlienky, vzorce alebo nakreslené obrázky, symboly. Keď vyčerpali všetky svoje myšlienky, zase otočia papier o 90° v smere hodinových ručičiek. Prečítajú si, čo napísal žiak pred nimi, a reagujú na to. Môžu daný text doplniť alebo aj opraviť. Keď už nevedia pokračovať, zase otočia papier o 90° a tento postup sa opakuje ešte dvakrát. Práca skončí, keď papier bol štvrtýkrát otočený a ku každému sa vráti časť papiera, na ktorú prvýkrát písal.

Po dokončení prác každej skupiny sa papiere pozbierajú a vyvesia. V tejto fáze využitia metódy sa začne diskusia. Učiteľ sa môže zapojiť do diskusie. Má možnosť povedať žiakom, v čom spočívajú nedostatky v ich vedomostiach. Keď to uzná za potrebné, môže problematické časti učiva ešte raz vysvetliť, alebo nechať svojich žiakov, aby si spoločne preopakovali celé učivo.

Ukážka a výsledky využitia Placematu v praxi

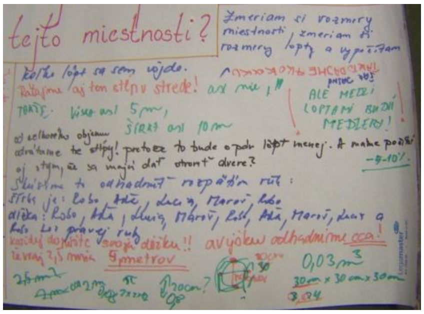
Spojením aktivít medzinárodného projektu Primas a projektu A-Centrum FPV UKF v Nitre – Centrum Inovatívneho Vzdelávania, ITMS kód: 26110230026, aktivita 2.4 Nitrianska mladá veda, sa v dňoch 23. – 30. júna 2012 uskutočnila letná škola doktorandského študijného programu a letná škola objavného vyučovania v Račkovej doline. Na letnej škole sa zúčastnil jeden zahraničný lektor z Viedenskej univerzity, štyria lektori z Katedry matematiky Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, frekventantmi kurzu boli dvaja doktorandi z Katedry fyziky FPV UKF v Nitre, dvanásť doktorandov z Katedry matematiky FPV UKF v Nitre a sedem študentov magisterského štúdia učiteľstva matematiky na KM FPV UKF v Nitre.

Metódu Placemat sme odskúšali na študentoch magisterského štúdia učiteľstva matematiky. Ako impulz sme vybrali úlohu, ktorá znie: „Koľko volejbalových lôpt sa zmestí do tejto miestnosti?“. Študenti po tom, čo sa zoznámili so zásadami správneho využitia vyučovacej metódy, obdržali papier s impulzom a každý z nich v rámci skupiny dostal fixku inej farby.

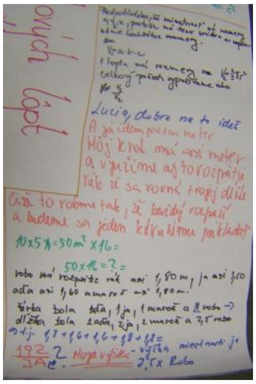
Študentom sme nepovedali, že ide o Fermiho úlohu a že úlohy tohto typu môžu mať viac správnych výsledkov. Nevedeli ani to, že v prípade Fermiho úlohy je dôležitejší správny spôsob riešenia ako výsledok.

Pozorovali sme študentov počas celého riešenia danej úlohy. Po prečítaní impulzu 10 minút len rozmýšľali. Potom niektorí začali pracovať. Študenti sa rozhodli, že najskôr zmerajú miestnosť pomocou dĺžky svojich tiel a pomocou takto získaných mierok vypočítajú objem miestnosti.

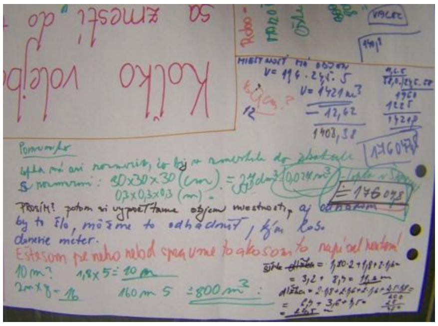
Z analýzy riešenie vyplýva, že nejakým neverbálnym spôsobom sa študenti dohodli o spolupráci. Aj na nasledujúcich obrázkoch (obr. 2, 3, 4 a 5) je dobre vidno súvislosť medzi časťami papiera. Vyzerá ako písomný rozhovor a dohadovanie sa o rozdelení práce. Podľa nás sa skupina rozhodla, že vyučovacia metóda je dosť flexibilná na to, aby sa trochu zmenili zásady jej používania. Namiesto toho, aby časti úlohy riešili sami, celú úlohu chceli spoločnou silou vyriešiť. Samotné dĺžky vyjadrili pomocou rozpätí rúk členov skupiny (napr. „Šírka bola Aďa, 1 ja, 1 Maroš, 2 Robo".) Výšku miestnosti zistili odhadom. Zo získaných údajov nakoniec vypočítali približný objem miestnosti, ktorá mala tvar kvádra. Potom pomocou odhadu zisťovali, koľko percent miestnosti môžu mať stĺpy. Časťou riešenia bol objem miestnosti 2800 m^3. Rozmery volejbalovej lopty tiež skúšali zistiť pomocou odhadu. Zistili, že lopta môže mať 0,03 m^3. Žiaľ, po týchto pomocných výpočtoch študenti nepokračovali vo svojom riešení z dôvodu nedostatku miesta na papieri. Pre nás bol postačujúci samotný postup riešenia.



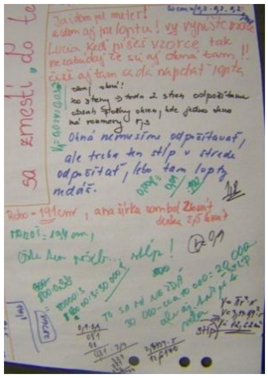
Obrázok 2: Prvá časť riešenia úlohy



Obrázok 3: Druhá časť riešenia úlohy



Obrázok 4: Tretia časť riešenia úlohy



Obrázok 5: Štvrtá časť riešenia úlohy

Správne používanie metódy umožňuje otočenie papiera najviac štyrikrát, v tomto prípade vidíme, že študenti otočili osemkrát. Odôvodnili to s tým, že podľa nich postup riešenia danej úlohy požadoval takýto prístup. Je pravdou, že niektoré zásady správneho používania metódy zmenili, ale hlavná charakteristika vyučovacej metódy zostala nezmenená, a tou je neverbálna písomná spolupráca.

Názory študentov a pedagógov na túto metódu

Využitie Placematu v skupine budúcich učiteľov nám umožnilo, aby sme mohli odpozorovať niekoľko kladov a záporov využitia vyučovacej metódy a Fermiho úlohy. Po rozhovore so študentmi sme sa dozvedeli ich názor o danej vyučovacej metóde a o samotnej Fermiho úlohe. Všetky klady a zápory sme zhrnuli a napísali.

Klady využitia Placematu

- ✓ žiaci pri vypočítaní úlohy využívali svoju kreativitu;
- ✓ spolupráca môže zlepšiť vzťah v skupine;
- ✓ keďže každý žiak má svoju časť papiera, nemôže byť nikto v skupine utlačovaný;
- ✓ každý žiak sa naučí byť trpezlivým a ohľaduplným, lebo papier môžu otočiť len vtedy, keď sú všetci členovia skupiny hotoví;
- ✓ dobrý výber impulzu môže spôsobiť nadšenie u žiakov, čo motivuje ich k práci;
- ✓ nikto sa nemusí báť vyjadriť sa;
- ✓ sebavyjadrenie spôsobí silnejšiu sebaistotu;
- ✓ používanie odborných výrazov obohatí slovnú zásobu.

Zápory využitia Placematu

- ✗ zlý výber impulzu môže viesť k tomu, že žiaci nechcú na tento impulz reagovať;
- ✗ veľmi rozsiahly impulz môže spôsobiť, že žiaci zaplnia písmom celú vlastnú časť a po otočení papiera už nezostane priestor pre ďalšieho žiaka;
  náročná príprava pre učiteľa.

Klady využitia Fermiho úlohy

- ✓ je vhodné ju použiť aj v triedach s väčším počtom žiakov;
- ✓ rozvíja zmysel pre spoluprácu;
- ✓ učiteľ je facilitátorom;
- ✓ rozvíja sa kreativita žiakov;
- ✓ rozvíja schopnosť klásť správne otázky, štruktúrovať problémy a odhadovať hodnoty.

Zápory využitia Fermiho úlohy

- ✗ časová náročnosť;
- ✗ náročnosť na prípravu učiteľa;
- ✗ problematické hodnotenie práce žiakov.

Záver

Naším cieľom bolo, aby sme vyskúšali vyučovaciu metódu Placemat na študentoch. Táto metóda je vhodná na riešenie neštandardných úloh, preto sme si ju vybrali. Boli sme zvedaví, ako budú reagovať, keď si vyskúšajú metódu, s ktorou sa ešte nestretli. Chceli sme zistiť ich názory o vyučovacej metóde aj o Fermiho úlohe. Po dokončení práce v diskusií nám povedali, že ich Placemat a zadaná úloha zaujali. Dozvedeli sme sa aj to, že by radi vyskúšali úlohu spolu metódu počas budúceho učiteľského povolania. Počas rozhovoru nám zhrnuli pozitívne i negatívne názory, čo nám dalo komplexnú spätnú väzbu o výhodách a nevýhodách využitia. Diskutovali sme aj o možnostiach odstránenia jednotlivých nevýhod.Naše ciele sme síce dosiahli, ale musíme konštatovať, že pri ďalších využitiach vyučovacej metódy budeme musieť vykonať menšie úpravy. Je potrebné, aby úloha bola lepšie premyslená. Musíme postrážiť, aby študenti neotočili papier viac ako štyrikrát. Tiež musíme dávať pozor, aby mali dostatočne veľký priestor na papieri. Totiž môže nastať, že po treťom otočení už nie je miesto na reakciu štvrtého člena skupiny.

Literatúra

[1] Ärlebäck, J. B. 2009. *On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school*. The Montana Mathematics Enthusiast, 6(3): S. 331–364, 2009. ISSN 1551-3440.

[2] Baeyer, H. C. 2001. *The Fermi Solution,* Dover Publications: New York. 2001. ISBN 978-0486417073.

[3] Barzel, B – Büchter, A. – Leuders, T. (2011) *Mathematik Methodik*. Berlin: Cornelsen, 2011. 271 s. ISBN 978-3-589-22378-7.

[4] Cafiková, K. 2012. *Prebudenie záujmu detí o matematiku*. Písomná práca k dizertačnej skúške. KM FPV UKF Nitra 2012, 40 s.

[5] Holubová, R. 2008. *Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže na PŘF UP v Olomouci*. In Vyučovanie fyziky vo svetle nových poznatkov vedy, Zborník z konferencie DIDFYZ 2008.

[6] MUED. *Steckbrief Methoden-Werkzeuge von A bis Z* [citované 21.6.2012] Dostupné na: (http://www. Mued.de/docs/k5/methodenkoffer.pdf)

[7] Reich, K. *Placemat-Methode* [citované 21. 6. 2012] Dostupné na: (http://methodenpool.uni-koeln.de/download/placemat.pdf)

[8] Reichelová, M. Teleki, A. 2012 *Význam Fermiho úloh vo vyučovaní fyziky*. In Aktuálne problémy fyzikálneho vzdelávania v európskom priestore, DIDFYZ 2012. FPV UKF, Nitra, 2012.

[9] Reichelová, M. 2012. *Zvýšenie úrovne znalostí stratégiou kvalitatívneho myslenia.* Písomná práca k dizertačnej skúške. KF FPV UKF Nitra 2012, 54 s.

[10] Robinson, A. W. 2008. *Don't just stand there—teach Fermi problems!* In Physics Education. 2008, vol. 43, no. 1, s. 83-88. ISSN 1361-6552.

[11] Taggart, G. L. 2007. *Fermi Questions,* In Mathematics Teaching in the Middle School. 2007, vol. 13, no. 3, s. 164-167.

[12] Tolar, J. 1975. *Enrico Fermi*, In Pokraky matematiky, fyziky a astronomie. 1975. Vol. 20, No. 1, s.1-4.

Adresa autorov

Mgr. Kristína Cafiková
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra;e-mail: kristina.cafikova@ukf.sk

Mgr. Michaela Reichelová
Katedra fyziky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra;e-mail: michaela.reichelova@ukf.sk

Poďakovanie

Príspevok a výskum popisovaný v rámci neho bol realizovaný z projektu UGA -> 22/2010: Tvorba materiálov na detské fyzikálne tábory a z projektu UGA -> VI/6/2013 - Prebudenie záujmu žiakov o matematiku prostredníctvom netradičných vyučovacích metód.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

MATHEMATICS B-DAY IN SLOVAKIA

SONA ČERETKOVÁ

ABSTRACT. *The experience of the competition Mathematics B-day in Slovakia is discussed in the article. The process of finding schools, preparing assignment and organisation of the contest day is described. The attention is paid also to the process of assessment of pupils reports. Some hints for future research in mathematics education are posed.*

KEY WORDS: *mathematics competition, open ended task, assignment, assessment*

ABSTRAKT. *V príspevku sú opísané skúsenosti s organizovaním tímovej matematickej súťaže Matematický B-day na Slovensku. V článku sa nachádzajú informácie o tom, ako boli oslovené školy, ako bolo pripravované zadanie súťaže a ako bola súťaž organizovaná. Pozornosť je venovaná aj hodnoteniu žiackych riešení úloh súťaže. V článku je načrtnutých aj niekoľko námetov k ďalšiemu výskumu v teórii vyučovania matematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: matematická súťaž, otvorené úlohy, zadanie, hodnotenie*

CLASSIFICATION: *U44, A84, D54*

Introduction

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia and Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, The Netherlands (FIsme) are project partners within 7FP project PRIMAS[1]. The contest Mathematics B-day is in described as follows:

„In Dutch upper secondary education, students can choose between two math courses: mathematics A (preparing for social sciences at university level) and mathematics B (preparing for mathematics and natural sciences at university level). Mathematics A is less formal than mathematics B. At the end of the final year (grade 12) a national exam assesses knowledge and skills. Since 1999 assessment should also include process skills. A timed written exam is not appropriate for that. For that reason an 'alternative' assessment is developed. For the mathematics B program, this assessment is called the Mathematics B-day.

At school, teams of 3 or 4 students work for a whole day on an investigative, open ended task. At the end they hand in a report with their findings. The presented problem does not necessarily reflect the typical math B subject matter. Instead, students are challenged to show process skills in developing strategies, making conjectures and try to prove or reject them, logical reasoning, critically reviewing models and adjust them and also co-operate.

Officially, the Mathematics B-day is a contest for teams of students. Most participating schools use the task for the school exam of the process skills; the result is part of the final grade. About half of the schools is involved in the contest. The best papers are sent in and are ranked by teachers in four regional groups. The final ten best papers are ranked by a national jury."[2]

No experience with this kind of group competition has existed in Slovakia to date. There are group competitions, organised for the same age group of pupils, but the spirit and the content of those competitions is different. Mainly are based on short standard

[1] http://www.primas-project.eu/
[2] http://www.fisme.science.uu.nl/fisme/en/projects/indexorg.php

problems with the content in the school curriculum. The contest session lasts a maximum of four hours. Group work is not based on communication within the group, nor in developing one common set of findings, but in dividing tasks between group members and solving the task individually. The group result is then based on adding points for the correct solutions of individuals.

The B-day spirit and philosophy of preparing one set of findings as the result of competition is a completely new experience for pupils as well as for their teachers in Slovakia. The assignment is complex mathematical text with the length of about 10 pages. Teams are asked to hand out the set of findings, complex mathematical text, within seven hours of intense work. The atmosphere in the room is very open, pupils in teams discuss their findings openly. There is possibility to use internet or “call to friend” or use some books or journals during the solution of problems and writing reports. Some good communicative teams had lot of fun the whole day.

Finding schools, teachers and pupils

The contest Mathematics B-day has been piloted in Slovakia in 2011 and 2012. The competition attracted 40 pupils from six schools and two towns in 2011, and 117 pupils form 15 schools from 9 towns in 2012.

The Department of Mathematics is in active contact with many secondary schools in region and with mathematics teachers who work there. Contacts are based on long-term cooperation with schools

- in teacher education – schools serve as training schools for regular practice of student teachers;
- in organising Mathematical Olympiad (MO) competition (it is the 62st consecutive year of MO this school year in Slovakia and the Czech Republic);
- on other national and international project activities, for example: workshops for teachers with new study materials, textbooks and innovative, active pedagogies in math education promotion;
- in undertaking experiments, schools serve as a research location for PhD students.

Personal visits to schools and detailed explanations to cooperative teachers and their headmasters about B-day was crucial in attracting schools, represented by teachers of mathematics, to take part in the B-day.

The visiting of schools and recruiting of teachers and their pupils should be accomplished several weeks before the B-day. An official letter addressed to headmasters and teachers and signed by university/faculty/department authorities is crucial. Personal and e-mail delivery of the letter is essential; anonymous sending by regular post or e-mail is not recommended, as it does not achieve the desired results.

Teachers nominated their pupils. The list of pupils should be obtained one week before the B-day.

Teachers’ presence during the day is not required, but might be welcome and recommended to allow teachers to see what their students are able to do in group work.

Assignment

The original assignment is in English and is sent by FIsme coordinator. Cooperation with some other colleagues (but maximum two) in proof reading of the assignment translated to Slovak language is necessary. It helps to avoid misprints, to adjust the text if it is more readable (Slovak, not English in Slovak words), and to avoid mistakes.

A little cultural problem occurred: the style of the original assignment in English is not very official; it is a kind of informal mathematics text. An experienced colleague, a professor in the theory of mathematics education, who was asked for proof reading, required a more official version of the text in Slovak. He corrected the assignment text similar to a journal article or textbook style and asked for numbering of the pictures for instance. An acceptable compromise was found. The tuning of the Slovak version of the assignment took several hours of intensive communication, comparison with the original text, and explanation of expressions, words and sentences. It was a very profitable period and very important for the final version of the assignment. The question about the effect of different language versions of the assignment and its effect to pupils' reports subsequently has been raised as an interesting subject of following research.

Some colleagues were sceptical of the topics of the B-day 2011 and B-day 2012; of the tasks and of the whole process of finding solutions. They explained their doubts about the attractiveness of the topics and tasks. They were very curious if tasks would be attractive for pupils. Their doubts were not fulfilled.

Time estimate for the assignment finalization completion: minimum one week for proof reading, several hours for discussion with colleagues, and separate discussions.

Time for copying assignment and for preparation of folders for pupils is about one day. Doing this on the last day before the B-DAY is not recommended, but two or three days before are reasonable. If the B-DAY is on Friday, Wednesday is the last chance to avoid stress. This depends on the technical equipment and competence of the technical staff.

Competition

Pupils worked very intensively from the very beginning. Group work and cooperation was evident. It was created by the spirit of the tasks: playing games in 2011 and folding stripe of paper in 2012. Some of them did not read the first page of the assignment, where the instructions are described, very carefully, so some questions about the report, what is necessary to solve, were raised several times during the first part of the day. Pupils missed the numbering of the tasks, which is familiar for them from textbooks or standard school materials. Some pupils were confused by relatively long text of explanations. Nobody missed the picture numbering, because the pictures are the coherent part of the particular text or task in the assignment. Pupils used recommended manipulatives, wrote their initial solutions to the tablecloth, square paper was used for marking the initial solutions, too. Some teams photographed their pictures and included pictures to the final file. Coloured pen and pencils were in very good use, too.

Pupils did not stop thinking about problems during the lunch-break, either. Some of them used napkins for drawing pictures with solutions during lunch. The mood and atmosphere was very friendly, almost relaxed, but the deep thinking and inner concentration of individuals was evident even during the lunch break. Pupils were instructed to concentrate on the result file after lunch.

There was constant assistance from organisers during the whole time of the competition. Some pupils commented upon their immediate feelings. The most impressive comments:

(1) “*We did not need school mathematics today, but also simple mathematical thinking was not possible to use. We had to start to think in some way and then needed to keep track all day. And it was that*.”

(2) “*What a pity that I cannot come next year…I finish secondary school this school year and the next year I am at university*.”

Evaluation of pupils reports

University teachers, teacher educators and PhD students in Theory of Mathematics Education were asked to evaluate the results files handed in by pupils. There were eight persons in the team of evaluators. A set for each evaluator contained printed materials: the complete assignment and result files handed in by pupils’ teams.

The evaluators were given comfortable time for the evaluation. Two main dilemmas were found by evaluators:

- evaluate the whole result, performance as a whole - or to put the main focus of the evaluation on the final solution(s) only,
- evaluate mathematical knowledge performance or the essay style of the report.

Particular evaluations were put on the table and the winning group was very clear both years.

The evaluation process should require special analysis and more arguing meetings perhaps - not for changing the final results of the B-day but for evaluators themselves, to be more aware of the focus of the evaluation. It is also a question of the individual experience and responsibility of the particular person-evaluator.

Important part of the evaluation is a jury report, assessment of the particular team work. The report is delivered to first ten best teams on the day of the official B-day evaluation event. The report is supplements diploma. An example of the jury report, which comments work of the best Slovak team in B-day 2012[3]:

Jury report

Compared to all other reports, this team delivers a very short report. The texts are concise and clear and demonstrate a deep mathematical understanding. The report is very well readable independent from knowing the task.

Beside the clearness of the report, this team demonstrates elegance which is highly appreciated by mathematicians. That is shown for example in the proof that every string of 2k letters L and R has discrepancy 0 or 2.

Very special is also the way in which this team uses the concepts of symmetry and reduction by skipping odd positions in clarifying most of their findings.

The report shows a very mature level of mathematical understanding. But a mathematical literate reader needs invest some thinking work to fully understand the correctness of most of the later parts in the report.

That is, apart from some small mistakes, the main reason why this team does not end up at a higher position. Some more elaboration on how this deep mathematical understanding was found should have been helpful.

Based on these considerations, in the opinion of the jury, the team of Gymnázium Jozefa Gregora Tajovského in Banská Bystrica fully deserves the fifth position for the Mathematics B-day 2012.

[3] Jury report delivered to the best Slovakian team during B-day 2012 event in Utrecht, 15 March 2013

The jury report is a special type of assessment of the original investigative work in mathematics. The criteria of the assessment are related to the quality of the mathematical thoughts and formulations, content and organization of the B-day report. The comparison with other reports is an important point of such assessment. The question about methods of assessing investigative work and assessing creativity is raised. It is a challenge for practicing new skills in assessment of B-day 2012 reports evaluators and interesting topic for future research in mathematics education.

How to write mathematically, how to promote mathematical research of open tasks, how to master problem solving skills, how to describe mathematical knowledge and ideas clearly and detailed enough for any reader are some other interesting questions for practicing these special skills and competences in mathematics teachers education, courses for gifted pupils and also on professional development courses for practicing teachers.

Conclusion

Experiences of piloting the competition Mathematics B-day with the target group for which it is originally meant are very positive for everyone involved in 2011 and 2012 in Slovakia[4]. The other B-day assignments: *In the Hands of Time* and *Zig-Zag Functions* has been translated into Slovak and promoted to student teachers, PhD students in Theory of Mathematics Education and mathematics teachers within professional development course: Inquiry Based Learning and Teaching Mathematics. The successful and challenge B-day story in Slovakia is to be continuing. The project PRIMAS activities and ideas in inquiry based learning mathematics will continue besides the project itself is finishing in December 2013. The competition Mathematics B-day is an excellent example of sustaining ideas and sharing activities which have been opened by the research project.

Figure 1

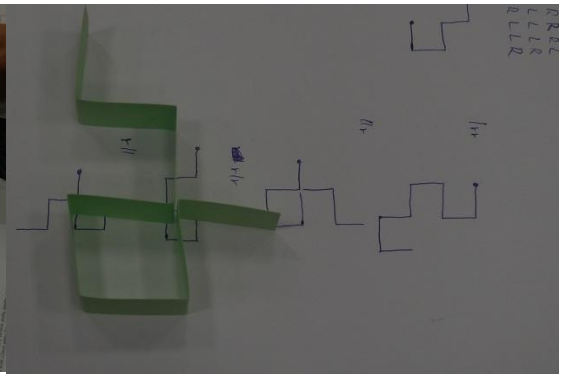


Figure 2

B-day 2012 (Cr)easy! folding stripe of paper

[4] https://www.ukf.sk/udalosti/2212-Netradicna-matematicka-sutaz
https://www.ukf.sk/udalosti/2313-Vyhodnotenie-timovej-matematickej-sutaze-B-DAY
https://www.ukf.sk/udalosti/2632-Sutaz-Matematicky-B-DAY-2012

References

[1] Morgan, C. (1998). Writing Mathematically. The Discourse of Investigation. London, Falmer Press, 1998. Pages 232. ISBN 0-7507-0811

[2] Gordon Calvert, L.M. (2001). Mathematical Conversations within practice of mathematics. Peter Lang Publishing, Inc., New York, 2001. Pages 158. ISBN 0-8204-5498-3

[3] Lipman, M. (2003). Thinking in Education. Cambridge University Press, 2003. Pages 304. ISBN 0-521-01225-2

[4] Slavík, J. (1999). Hodnocení v současné škole. Portál, s.r.o., Praha, 1999. Strán 190. ISBN 80-7178-262-9

[5] Kolář, Z., Šikulová, R. (2009). Hodnocení žáku. Grada Publishing a.s., Praha, 2009. Strán 199. ISBN 978-80-247-2834-6

[6] Kyriacou, Ch. (2012). Klíčové dovednosti učitele. Portál s.r.o. 2012. Strán 164. ISBN 978-80-262-0052-9

[7] Mogensen, A. (2008). Meeting the gifted – while not forgetting others. In E. Sendova (Ed.) *Meeting in Mathematics*. Demetra Publishing House, Sofia, 2008. Pp. 3-17. ISBN 978-954-9526-49-3

[8] Andresen, M. (2013). European Aims to Stimulate Inquiry in School Mathematics. In B. Grevholm, P.S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko, P. Persson (Eds.) *Nordic Research in Didactics of Mathematics: Present, Past and Future*. CAPPELEN DAMM 2013. pp 41- 60. ISBN 978-82-02-39348-9

[9] Goodchild, S. (2013). Reporting Classroom Research: A Moral Dilema. In B. Grevholm, P.S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko, P. Persson (Eds.) *Nordic Research in Didactics of Mathematics: Present, Past and Future*. CAPPELEN DAMM 2013. pp 199 – 224. ISBN 978-82-02-39348-9

Received on April 22, 2013.

Address

doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: sceretkova@ukf.sk

Acknowledgement

Project 7FP PRIMAS, www.primas-project.eu

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

GEOGEBRA AS A MEANS OF VISUALIZATION SOLUTIONS APPLICATION TASKS

GEOGEBRA AKO PROSTRIEDOK VIZUALIZÁCIE RIEŠENÍ APLIKAČNÝCH ÚLOH

JANKA DRÁBEKOVÁ

ABSTRACT. *Information and communication technologies are changing the fundamental principles of education and develop visual literacy. They allow the search for new approaches to creation and to solve mathematical problems The article deal with solving selected application tasks using the software GeoGebra. We show the tasks of the mathematical analysis with economic issues. Application tasks teach students connect knowledge with practice and formulate & solve problems in their specified contexts.*

KEY WORDS: *GeoGebra, visualization, mathematical analysis, application tasks*

ABSTRAKT. *Informačné a komunikačné technológie menia základné princípy vzdelávania, rozvíjajú vizuálnu gramotnosť a umožňujú hľadanie nových prístupov k tvorbe či k riešeniu matematických úloh. V článku sa zaoberáme riešením vybraných aplikačných úloh pomocou softvéru GeoGebra. Uvádzame úlohy z matematickej analýzy s ekonomickou problematikou. Aplikačné úlohy učia študentov spájať vedomosti s praxou, formulovať problémy a riešiť ich v stanovených súvislostiach*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: GeoGebra, vizualizácia, matematická analýza, aplikačné úlohy*

CLASSIFICATION: *M25, R25*

Úvod

Informačné a komunikačné technológie (IKT) umožňujú meniť podmienky vyučovacieho procesu, vplývajú na vyučovacie metódy, umožňujú hľadanie nových prístupov k samotnému učeniu či k pochopeniu problematiky a tým menia základné princípy vzdelávania. Dnes už nestačí motivovať študentov ukazovaním statických obrázkov a výpočtov, ale treba ich podporiť v snahe používať rôzne vizualizácie a viaceré reprezentácie skúmaných problémov [8]. IKT sú v dnešnej dobe efektívnou pomôckou pri vytváraní kognitívnych spojení medzi verbálno-logickou a obrazovo-názornou reprezentáciou matematických objektov resp. problémov.

Vzhľadom na fakt, že matematika slúži iným vedným odborom ako prostriedok na formuláciu a riešenie ich špecifických problémov, môžeme prostredníctvom matematických softvérov zabezpečiť vizualizáciu rôznych odborných pojmov. V článku sa zaoberáme riešením vybraných ekonomických problémov pomocou softvéru GeoGebra a aparátu matematickej analýzy. Zamerali sme sa na učivo poslucháčov Fakulty ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre.

Vizuálna gramotnosť a matematický softvér

Vizuálna gramotnosť sa terminologicky považuje za nový pojem, ale obsahovo predchádza samotný pojem gramotnosti, pretože používanie obrazových symbolov má podstatne dlhšiu tradíciu ako používanie písma [3]. Ako prvý použil termín „Visual

Literacy“ John Debesa (1969) [7]. V súčasnosti existuje vyše 150 definícií vizuálnej gramotnosti, jedna z oficiálne uznávaných, na základe akceptácie Medzinárodnou asociáciou pre vizuálnu gramotnosť (International Visual Literacy Association, New York) znie [3]: „*Vizuálna gramotnosť označuje skupinu vizuálnych schopností, ktoré človek dokáže rozvíjať zrakovým vnímaním za súčasného zainteresovania ďalších vnemových skúseností. Rozvoj týchto schopností je základným predpokladom učenia sa jedinca. Ich rozvoj umožňuje vizuálne gramotnej osobe vnímať a interpretovať vizuálne znázornenia, či už prirodzené alebo umelo vytvorené, s ktorými sa stretáva vo svojom okolí*.“

V matematike sa využívajú symboly alebo postupnosti symbolov, ktoré reprezentujú alebo opisujú abstraktný stav [2] a vizuálnu gramotnosť môžeme charakterizovať aj ako schopnosť chápať a používať obrazy, vrátane schopnosti myslieť, učiť sa a vyjadrovať sa prostredníctvom abstraktných symbolov a obrazov [4]. Aspekt vizualizácie (znázornenia) matematických objektov a vzťahov medzi nimi je teda bezprostredne spojený s apektom reprezentácie a opisu [2]. Vizuálnu gramotnosť študentov v matematike budujeme a rozvíjame pri práci s obrazovým materiálom, teda pomocou obrazovo-názornej reprezentácie matematických pojmov. Pre mnohých študentov je totiž jednoduchšie prenikať do matematických pojmov a zákonitostí na základe konkrétneho zmyslového vnímania predmetov a javov.

Vizuálna gramotnosť zahŕňa v sebe schopnosť vizuálne objekty nielen čítať ale aj tvoriť, napr. v podobe rôznych obrazov, schém, náčrtov či grafov [5]. V súčasnosti máme k dispozícii množstvo freeware alebo shareware softvérov, ktoré sa dajú v matematickom vzdelávaní využiť na rozvoj vizuálnej gramotnosti študentov a obrazovo-názornú reprezentáciu rôznych pojmov, či na riešenie špecifických aplikovaných problémov.

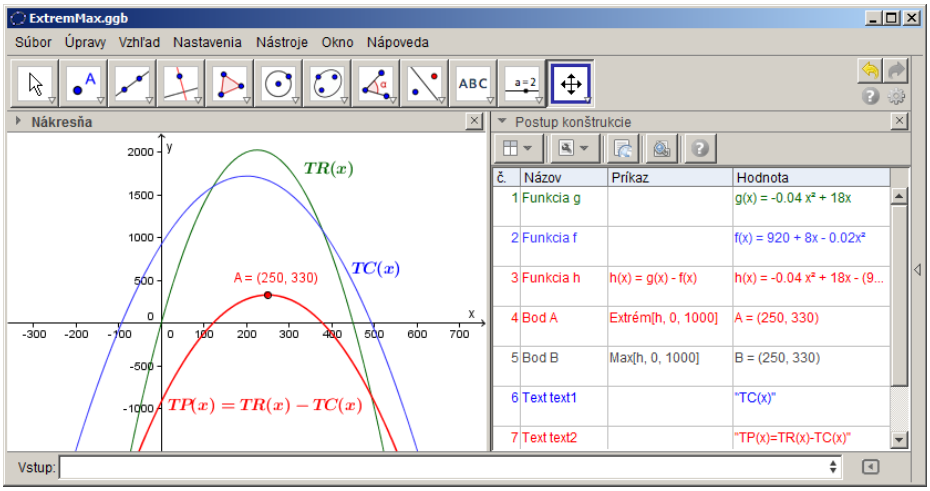
V článku sme sa zamerali na využitie softvéru GeoGebra pri riešení aplikačných úloh z matematickej analýzy týkajúcich sa ekonomických funkcií. Softvér GeoGebra je voľne šíriteľný softvér, ktorý v sebe spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Na jeho plnú funkčnosť je potrebná iba podporná platforma Java6 [8]. Program bol vyvinutý pre účely vyučovania a učenia matematiky Markusom Hohenwarterom a získal mnoho medzinárodných ocenení v oblasti výučbových softvérov [1].

Vybrané aplikačné úlohy riešené softvérom GeoGebra

Aplikačné úlohy rozvíjajú u študentov samostatnosť, aktivitu a tvorivosť [7]. Riešením úloh, ktoré spájajú vedomosti študentov s reálnym životom resp. praxou, sa študenti učia nielen formulovať problémy ale aj riešiť ich v stanovených súvislostiach a napokon sformulovať správne závery zadaných problémov. V tejto časti článku uvedieme aplikačné úlohy [6] z matematickej analýzy, v ktorých stanovené matematicko-ekonomické otázky vyriešime pomocou softvéru GeoGebra.

Úloha 1: *Vypočítajte pri akej úrovni produkcie dosiahne firma maximálny zisk a vypočítajte jeho výšku, ak poznáte funkciu celkových nákladov* $TC(x)=920+8x-0{,}02x^2$ *a funkciu celkových príjmov* $TR(x)=18x-0{,}04x^2$.

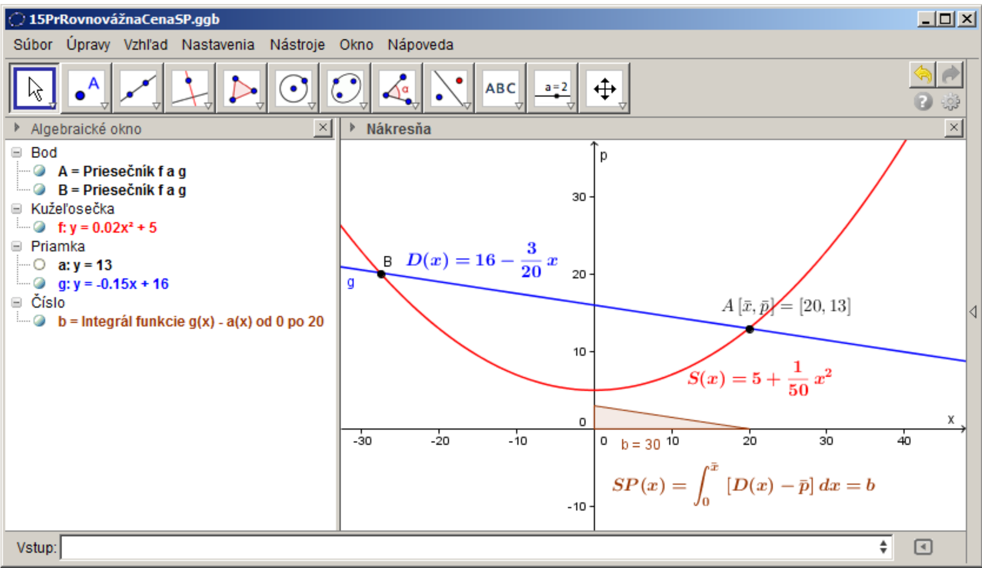
Riešenie: Softvérom GeoGebra si pomocou rozdielu zadaných funkcií, znázorníme funkciu celkového zisku $TP(x)$ a pomocou príkazu „Extrém[<Funkcia>, <Začiatok intervalu>,<Koniec intervalu>]“ resp. príkazu „Max[<Funkcia>, < x od >,< x do >]“ určíme hľadanú hodnotu (obr.1) a sformulujeme záver: „firma dosiahne maximálny zisk pri úrovni produkcie 250 a výška zisku bude 330 p.j.“



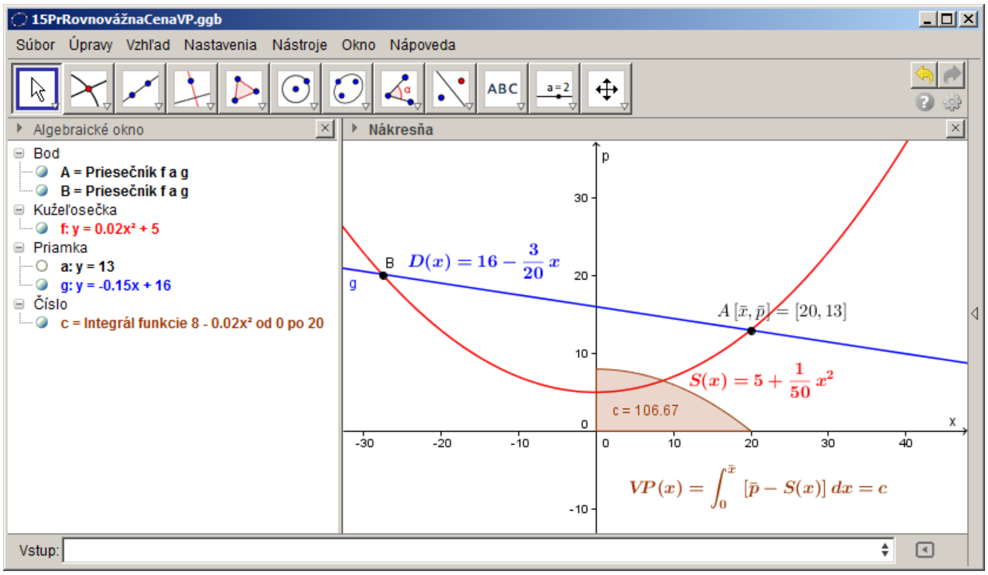
Obrázok 1

Úloha 2: *Nájdite rovnovážnu cenu* $\overline{p}$ *a jej zodpovedajúce množstvo tovaru* $\overline{x}$ *a určte spotrebiteľský prebytok a prebytok výrobcu, ak funkcie dopytu a ponuky sú v tvare* $D(x) = 16 - \frac{3}{20}x$, $S(x) = 5 + \frac{1}{50}x^2$.

Riešenie: Znázorníme si grafy zadaných funkcií $D(x), S(x)$. Rovnovážnu cenu $\overline{p}$ a jej zodpovedajúce množstvo tovaru $\overline{x}$ vyjadrujú súradnice bodu $A[\overline{x}, \overline{p}] = [20,13]$, pričom $A \in [D(x) = g(x) \cap f(x) = S(x)] \wedge A \in R_0^+ \times R_0^+$. Prebytok spotrebiteľa môžeme vypočítať ako určitý integrál na intervale $\langle 0,20 \rangle$ z funkcie $g(x) - a(x)$, pričom $a: y = \overline{p}$ (obr.2) a prebytok výrobcu ako určitý integrál na intervale $\langle 0,20 \rangle$ z funkcie $\overline{p} - S(x) = 8 - 0.02x^2$ (obr.3). V oboch prípadoch použijeme príkaz „Integrál[<Funkcia>, < x od >,< x do >]“.



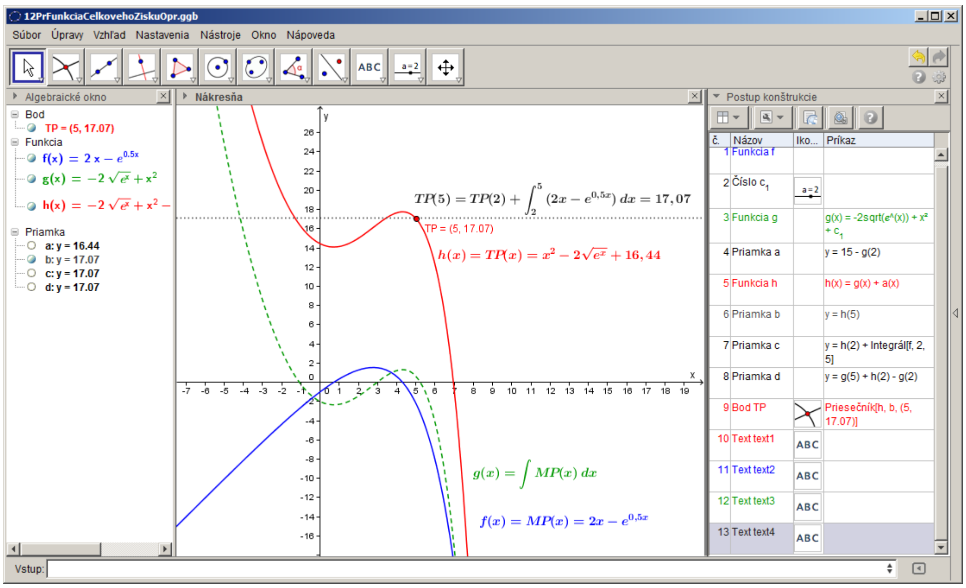
Obrázok 2



Obrázok 3

Úloha 3: *Firma vyrába sejačky. Určte celkový zisk pri výrobe 5 sejačiek, ak funkcia marginálnych ziskov má tvar* $MP(x) = 2x - e^{0,5x}$, $x \in \langle 0,20 \rangle$ *a vieme, že celkový zisk pri produkcii 2 sejačiek bol 15 p.j.*

Riešenie: Prístupov k riešeniu tejto úlohy pomocou prostriedkov IKT je niekoľko. My uvádzame dva spôsoby zistenia integračnej konštanty funkcie $\int MP(x)dx = TP(x) + c$ a štyri spôsoby zistenia celkového zisku pre $x = 5$ (obr.4, obr.5). Znázorníme si funkciu marginálneho zisku $MP(x) = f(x)$ a pomocou príkazu „Integral[f]“ znázorníme tiež funkciu celkového zisku $TP(x) = g(x)$.

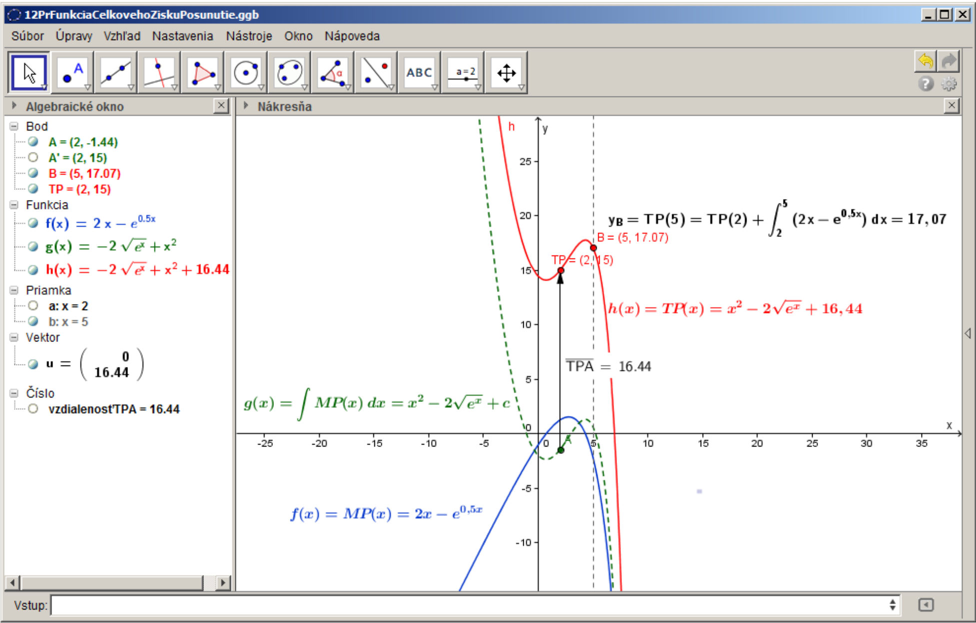


Obrázok 4

Integračnú konštantu zistíme napríklad pomocou funkcie $a: y = 15 - g(2)$, keďže zo zadania úlohy vieme $TP(2) = 15$ a zobrazíme funkciu $h(x) = g(x) + a(x) = TP(x) + 16{,}44$. Celkový zisk pri výrobe 5 sejačiek môžeme zistiť pomocou nasledovných funkcií (obr.4):

1) $b: y = h(5)$
2) $c: y = h(2) + \text{Integral}[f, 2, 5]$
3) $d: y = h(2) + g(5) - g(2)$

Softvér GeoGebra vypočíta hľadanú hodnotu ale aj znázorní grafy zadaných konštantných funkcií. Ak chceme zvýrazniť bod $TP(5)$, ktorý je riešením úlohy, použijeme napríklad ikonu  „priesečník objektov“ (obr.4).



Obrázok 5

Ďalší spôsob riešenia úlohy je prezentovaný na obr.5. Na zistenie funkcie celkového zisku $h(x) = TP(x)$ sme využili posunutie funkcie $g(x) = \int MP(x)dx$ v smere vektora $\overrightarrow{TPA}$, kde $TP[2{,}15]$, $A[2, g(2)]$ a veľkosť vektora $\overrightarrow{TPA}$ sa rovná hľadanej integračnej konštante $\left|\overrightarrow{TPA}\right| = 16{,}44$. Celkový zisk pri výrobe 5 sejačiek vyjadruje y_B-ová súradnica bodu $B[5{,}17.07]$, ktorý sme znázornili ďalším možným spôsobom, ako priesečník priamky $a: x = 5$ a funkcie $h(x)$.

Záver

Vizualizácia má vo vzdelávaní bezpochyby veľký význam. Obrazovo-názorná reprezentácia pojmov resp. problémov môže byť tiež chápaná ako kognitívny nástroj dôležitý pre dosiahnutie vyššej kvality názorného myslenia študentov a ich schopnosti uplatniť komplexné matematické vedomosti. V súčasnosti existuje množstvo prostriedkov IKT, pomocou ktorých môžu učitelia rozvíjať schopnosť vizualizácie u študentov. My sme v článku poukázali na využitie softvéru GeoGebra pre vizualizáciu riešení vybraných aplikačných úloh s ekonomickou tematikou.

Literatúra

[1] Csiba, P. (2007). GeoGebra – dynamická matematika pre školy. In: Zborník príspevkov z konferencie Ematik 2007. Bratislava: FMFI UK, 2007. 21-26. ISBN 978-80-89186-34-1

[2] Fulier, J. (2008). Vizualizácia v matematike: Realistické versus pedagogické znázornenie grafu funkcie. In: Zborník z vedeckého seminára „Učme aplikovať matematiku“. Nitra: Edícia Prírodovedec č. 298, FPV UKF, 2008. 19-27. ISBN 978-80-8094-290-8

[3] Hašková, A. (2004). Terminologické vymedzenie pojmu informačná gramotnosť. Technológia vzdelávania. Nitra: SLOVDIDAC, Vol 12, No 7, 2004. 4-7. ISSN 1355-003X

[4] Koreňová, L., Jodas, V. (2002). Niektoré možnosti využitia internetu a didaktického softvéru vo vyučovaní matematiky v základných a stredných školách. Bratislava: MCMB, 2002. 81s. http://kagdm.edu3000.sk/korenova/JOKO.pdf (2008-10-17)

[5] Modráková Klimkovská, G. (2008). Podpora vyučovania matematiky na základnej škole prostredníctvom využitia interaktívnej tabule. In: Zborník príspevkov z konferencie EMATIK 2007. Bratislava: FMFI UK, 2008. 90-95. ISBN 978-80-89186-34-1

[6] Országhová, D., Trenčianska, A., Pechočiak, T., Gregáňová, R., Stehlíková, B., Zentková. I. (2004). Aplikované úlohy z matematiky v ekonómii. Nitra: Vydavateľstvo SPU, 2004. 131s. ISBN 80-8069-333-1

[7] Pavlovičová, G., Rumanová, L. (2012). Rôzne prístupy k tvorbe geometrických úloh. In: Acta mathematica 15. Nitra: Edícia Prírodovedec č. 515 , FPV UKF, 2012. 115-120. ISBN 978-80-558-0135-3

[8] Velichová, D. (2010). Úloha PAS pri budovaní kognitívnych spojení v matematike. In: Zborník vedeckých prác Nové trendy v matematickom vzdelávaní 2010. Nitra: Vydavateľstvo SPU, 2010. 163-168. ISBN 978-80-552-0413-0

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autorov

RNDr. Janka Drábeková, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita, Tr.A. Hlinku 2, SK – 949 76 Nitra; e-mail: janka.drabekova@uniag.sk

Poďakovanie - Acknowledgement

Príspevok vznikol s podporou grantu KEGA 021SPU-4/2011.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON ONE INTERESTING CLASS OF PEANO TYPE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES I.

O JEDNEJ ZAUJÍMAVEJ TRIEDE FUNKCIÍ VIAC PREMENNÝCH I.

JOZEF FULIER

ABSTRACT. *This contribution deals with the generalization of the Peano function* $\wp\colon \wp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0) = 0$; *as a homogenous function of two variables with a degree* $k = 0$ *in case of homogenous functions of n-variables* $(n \geq 2)$ *with a degree* $k \leq 0$. *We will list interesting properties of such functions and prove that these functions are continuous at a point* $[0,0,\dots,0]$.

KEY WORDS: *continuity, limit of a function of several variables*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať zovšeobecnením Peanovej funkcie* $\wp\colon \wp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0) = 0$; *branej ako homogénna funkcia dvoch premenných stupňa* $k = 0$ *pre prípad homogénnych funkcií n-premenných* $(n \geq 2)$ *stupňa* $k \leq 0$. *Uvedieme zaujímavé vlastnosti takýchto funkcií a dokážeme, že tieto funkcie nie sú spojité v bode* $[0,0,\dots,0]$.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *spojitosť, limita funkcií viac premenných*

CLASSIFICATION: D50, D80, I65

1 Úvodné poznámky

Z hľadiska rozvoja matematickej kultúry a budovania nadhľadu je veľmi dôležité, aby aj učitelia matematiky na základných a stredných školách mali do svojej matematickej prípravy zaradené aj elementy *teórie funkcie viac premenných* (najmä diferenciálny, príp. aj integrálny počet funkcie viac premenných). Je vhodné poznamenať, že *funkcie viac premenných* sa objavili už v čase zrodu matematickej analýzy: najprv v geometrii u *Gottfrieda W. Lebniza* (1646 - 1716) v roku 1694, keď pracoval s krivkami závisiacimi od parametrov a neskôr vo fyzike v roku 1748 u *Jean le Rond d' Alemberta* (1717 - 1783) pri riešení problému *kmitania struny*. V tomto prípade pozícia $u(t,x)$ struny je ozajstnou funkciou priestorovej súradnice x a času t. Ako poznamenávajú *Hairer* a *Wanner* (2008) k dôležitému prielomu v systematickom štúdiu funkcie viacerých premenných došlo v polovici 19. storočia, keď sa dospelo k zdanlivo jednoduchej myšlienke: usporiadaná dvojica čísel (následne aj n-tica čísel) sa začala označovať jediným symbolom, jediným písmenom $[x_1, x_2] =: x, [x_1, x_2, \dots, x_n] =: x$, ktoré sa začali považovať za nové matematické objekty. Boli nazvané rôznymi názvami: *extenzívnymi veličinami*[1] (*extensive Grösse*) *H. Grassmannom* (1844, 1862), „*komplexami*“ (*complexes*) *G. Peanom* (1888) a „*vektormi*“ *W. Hamiltonom* (1853).

V učiteľskom, ale i v neučiteľskom štúdiu na UKF v Nitre sa v predmete *Matematická analýza* 4 zaoberáme aj *limitou* a *spojitosťou* funkcie viacerých premenných. Samotné

[1] Fyzikálna veličina sa nazýva *intenzívna veličina,* ak jej hodnota nezávisí od veľkosti systému (napr. teplota, hustota). Protipólom *intenzívnej veličiny* (antonymom) je *extenzívna veličina*, ktorá od veľkosti systému závisí (napr. objem, hmotnosť). *Extenzívne veličiny* sú spravidla veličinami aditívnymi.

definície týchto pojmov sa na prvý pohľad neveľmi odlišujú od limity a spojitosti funkcie jednej premennej:

Nech $D \subset \mathbb{R}^n, f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, nech $a \in \mathbb{R}^n, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom definujeme

1. Nech bod a je hromadným bodom definičného oboru D funkcie f. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťami: $x_k \in D, x_k \neq a$, pre každé $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$; platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

2. Funkcia f je spojitá v bode $a \in D \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťami $x_k \in D$, pre každé $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$; platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

Poznamenajme, že zámerne začíname ako prvou, *Heineho definíciou* limity a spojitosti funkcie f v danom bode a, pretože formálne sú temer totožné s jednorozmerným variantom (pre $n = 1$). Formálne odlišnosti sú iba v nových symboloch, vystupujúcich vo dvoch inklúziach $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Študentom pritom zdôrazňujeme, aby sa „nanovo“ neučili nové definície, ale aby si spomenuli na definície „staré“ a v pamäti si ich aktualizovali prostredníctvom nových symbolov v uvedených inklúziách. Je prirodzené, že pri tomto postupe príslušné ekvivalentné *Cauchyho definície* týchto pojmov (s využitím pojmu okolia bodu) sa dokazujú ako matematické vety. Týmto sme sa nezbavili základných problémov s limitou a spojitosťou funkcie viacerých premenných, ale aspoň z časti eliminujeme strach z nepoznaného, najmä u slabších študentov. Prirodzene učiteľ musí mať na pamäti, že praktické zisťovanie limity a spojitosti funkcie viacerých premenných, nie je až tak jednoduché, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. Zložitosť, ktorú nám funkcie viacerých premenných prinášajú máme na začiatku skrytú v rovnakých, (starých) symboloch, ale *s novým obsahom* (o čom sa ľahko presvedčíme, ak prechodom k súradniciam, detailnejšie rozpíšeme príslušné inklúzie a nerovnosti), preto študenti sa musia s touto novou situáciou detailnejšie oboznámiť pri riešení konkrétnych úloh. Pripomenutie si jednostranných limít a jednostrannej spojitosti funkcie jednej premennej môžeme využiť pri zavedení pojmov *limity funkcie n − premenných vzhľadom na množinu* $D_1 \subset D (\subset \mathbb{R}^n)$ (v označení $\lim_{x\to a,\ x\in D} f(x)$) a tiež *spojitosti funkcie vzhľadom* na danú *podmnožinu definičného oboru.* Tieto nové definície dostaneme z vyššie uvedených definícií formálnym nahradením definičného oboru funkcie D jeho podmnožinou D_1, čím nahrádzame *funkciu f jej parciálnou funkciou* s definičným oborom D_1.

Z definície limity (resp. limity vzhľadom na nejakú množinu) funkcie vyplýva (s možnou odvolávkou na *vetu o jednoznačnosti* limity postupnosti), že existencia limity funkcie a ani jej hodnota v danom bode $a \in \mathbb{R}^n$ nezávisia od výberu *parciálnej funkcie* k funkcii f, t.j. od výberu príslušnej podmnožiny D_1 definičného oboru D funkcie f (samozrejme je potrebné, aby bod a bol hromadným bodom tejto podmnožiny D_1). Preto, ak existujú aspoň dve množiny $D_1, D_2 \subset D$ (pričom bod a je hromadným bodom uvedených množín) také, že $\lim_{x\to a,\ x\in D_1} f(x) \neq \lim_{x\to a,\ x\in D_2} f(x)$, potom limita $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje. V tejto súvislosti užitočným a často názorným prípadom bude prípad, ak v istom prstencovom okolí bodu a body podmnožiny D_1 definičného oboru D vytvárajú *krivku K prechádzajúcu bodom a*. V tomto prípade hovoríme o tzv. *limite funkcie f* v bode *a vzhľadom na krivku K*. Väčšinu odlišností a ťažkostí v porovnaní s funkciou jednej premennej (podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ sú predsa len jednoduchšie, resp. naopak sú analyticky ťažko zvládnuteľné) odhalíme už pri funkcii dvoch premenných $f\colon z = f(x,y)$, kde bod $X = [x,y] \in D \subset \mathbb{R}^2$. Nemalou výhodou tohto prípadu je skutočnosť, že spomínané krivky K sú rovinné krivky, napríklad *priamka, kružnica, parabola atď. prechádzajúce bodom* $a = [x_0, y_0]$ a príslušné parciálne funkcie danej funkcie na krivke K i samotnú funkciu f dvoch premenných je ešte možné *vizualizovať* prostredníctvom ich grafov v euklidovskom priestore E_3.

Východiskom pre naše ďalšie úvahy bude pozoruhodná funkcie dvoch premenných tvaru

$$\wp\colon \wp(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0{,}0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0{,}0], \end{cases}$$

ktorou sa zaoberal vynikajúci taliansky matematik *Giuseppe Peano* [2] v práci *„Annotazioni" al trattato di calcolo del* (*Peano*, 1884). Je vhodné poznamenať, že *Peano*, ako vynikajúci logik, mal veľkú záľubu v objavovaní slabých miest, resp. chybnej argumentácie v dielach svojich rovesníkov i v dielach slávnych matematikov. Je tvorcom celého radu *protipríkladov* (angl. *counterexamples*), z nich najslávnejšia je tzv. *Peanova krivka* (je to pozoruhodná krivka, ktorá *vyplní bezo zvyšku celú časť roviny* – je to prvá známa forma dnešných fraktálov). Zostrojil tiež príklad funkcie, ktorej parciálne derivácie nekomutujú a k dôležitým (možno menej známym je i príklad funkcie $\wp$). Poznamenajme, že *G. Peano* vo svojich *„Poznámkach"* uviedol príklad tejto funkcie ako protipríklad na chybnú argumentáciu *L. A. Cauchyho* (1789-1857) v jeho slávnom diele *Cours d'analyse algébrique* (1821), v ktorom *Cauchy* stotožnil *spojitosť* funkcie $f\colon z = f(x,y)$ s tzv. *oddelenou spojitosťou* funkcie f vzhľadom k obom premenným (t. j. so spojitosťou dvoch funkcií jednej premennej: $g_y(x) = f(x,y), h_x(y) = f(x,y)$).

Peanovu funkciu $\wp$ nájdeme (príp. s nedôležitými modifikáciami – jednu použijeme aj my a označíme ju symbolom $\wp_1$) pravdepodobne v každej učebnici a v každej zbierke úloh z matematickej analýzy, ktoré sa zaoberajú aj funkciami viacerých premenných. V ďalšom si ukážeme, že táto funkcia stojí (resp. môže stáť) v pozadí tvorby ďalších dôležitých protipríkladov, ale aj štandardných úloh, ktoré sa vyskytujú v zbierkach úloh zaoberajúcich sa *limitou* a *spojitosťou funkcie viacerých premenných*.

Uveďme niektoré neštandardné (v zmysle: pozoruhodné či zdanlivo paradoxné) vlastnosti *Peanovej funkcie* $\wp_1 \coloneqq \frac{1}{2}\wp$.

Základné vlastnosti funkcie $\wp_1\colon \wp_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0{,}0]; \\ 0, \ \text{pre } [x,y] = [0{,}0]. \end{cases}$

Funkcia $\wp_1$ *v bode* $[0{,}0]$ ***nemá limitu***, *preto* ***nie je spojitá, nie je diferencovateľná*** *v tomto bode, napriek tomu, že funkcia* $\wp_1$

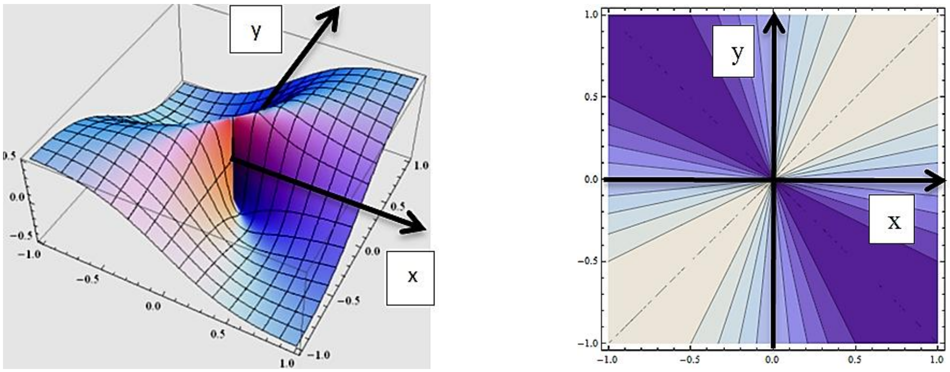
1. *je* ***spojitá*** *(na celej rovine) vzhľadom* ***na premennú x*** *i vzhľadom na* ***premennú y****; špeciálne to tiež znamená, že funkcia* $\wp_1$ *je spojitá na súradnicových osiach* $y = 0, x = 0$*;*
2. *je s* výnimkou bodu $[0{,}0]$ je *konštantnou funkciou vzhľadom na každú priamku prechádzajúcej bodom* $[0{,}0]$, preto v bode $[0{,}0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii f;
3. *jej obe* ***parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine****, teda aj v bode* $[0{,}0]$ (v *tomto bode sú však obe tieto parciálne derivácie nespojité*).

[2] *Giuseppe Peano* (1858-1932) bol jedným zo zakladateľov matematickej logiky a významne sa podieľal na vzniku teórie množín. Vytvoril štandardnú axiomatizáciu štruktúry prirodzených čísel, ktorá je známa pod názvom *Peanova aritmetika*. V živote G. Peana sa objavil zaujímavý vzťah so Slovenskom. Totiž keď sa v roku 1897 v Zürichu konal I. *medzinárodný kongres matematikov*, organizačný výbor navrhol, aby hlavné prednášky predniesli Felix Klein, Adolf Hurwitz, Henri Poincaré a Slovák z Liptovského Mikuláša: *Aurel Stodola* (1859-1942), profesor ETH v Zürichu, vynikajúci odborník v odbore parných turbín, ktorého výpočty a konštrukcie dali základ tomuto odvetviu strojárstva. Bohužiaľ, náš rodák, zo zdravotných dôvodov ponuku nemohol prijať (mal mať prednášku *o aplikáciách matematiky*), preto bol o prednášku požiadaný *Giuseppe Peano*, ktorý ponuku prijal a predniesol prednášku o matematickej logike.

Dôkaz uvedených vlastností je jednoduchý. Preto iba v skratke: funkcia $\wp_1$ nie je spojitá v bode $[0,0]$, pretože na každej priamke prechádzajúcej bodom $[0,0]$, s parametrickými rovnicami $x = \alpha t, y = \beta t$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nadobúda (výnimkou bodu $[0,0]$ iba *konštantné hodnoty* $\wp_1(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ (pozri graf funkcie $\wp_1$ na Obr. 1). To však znamená, že limita parciálnej funkcie závisí od výberu priamky prechádzajúcej začiatkom, preto limita funkcie $\wp_1$ v bode $[0,0]$ neexistuje (konkrétne pre priamku $y = x$ limita parciálnej funkcie pre $x \to 0$ sa rovná hodnote $1 \neq \wp_1(0,0) = 0$). *Iné zdôvodnenie*, prečo funkcia $\wp_1$ nemôže byť v bode $[0,0]$ spojitá: v ľubovoľne malom okolí začiatku súradnicovej sústavy funkcia $\wp_1$ nadobúda všetky funkčné hodnoty dané intervalom s koncovými bodmi $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

S využitím softvéru *Mathematica* je možné prostredníctvom jednoduchých príkazov načrtnúť priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\wp_1$ (svetlejšie časti vrstevnicového grafu prislúchajú väčším funkčným hodnotám):

Plot3D$[x\,y/(x^2+y^2)\,,\{x,-1{,}1\},\{y,-1{,}1\}]$, ContourPlot $[x\,y/(x^2+y^2)\,,\{x,-1{,}1\},\{y,-1{,}1\}]$).



Obr.1. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\wp_1 : z = \wp_1(x,y)$

V ďalšom sa pokúsime o prostredníctvom *zovšeobecnenia*, ale aj špecifikácie *Peanovej funkcie* $\wp_1$ (tvorbou špeciálnych *zložených funkcií* s hlavnou zložkou $\wp_1$) vytvoriť zaujímavé a dostatočne *všeobecné funkcie*, ktorých špeciálne prípady a naň naviazané problémové úlohy nachádzame aj v náročnejších zbierkach úloh či problémov, či v špecializovaných monografiách, napr. (Kudrjavcev a kol., 2002), (Gelbaum et Olmsted, 1964).

2. Zovšeobecnenia dimenzionálne: *prípad funkcie* n *− premenných*

Vytvoriť podľa dvojrozmerného variantu *Peanovej funkcie* jej n- rozmerný variant je úloha iste veľmi jednoduchá. Stačí totiž položiť

$$P_1 : P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{x_1\, x_2 \dots x_n}{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] \neq [0,0,\dots,0]; \\ 0, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] = [0,0,\dots,0]. \end{cases}$$

Pri detailnejšom pohľade na funkcie $\wp_1$ a P_1 ľahko zistíme, že okrem vizuálnej zhody oboch funkcií majú spoločnú zaujímavú vlastnosť: obe tieto funkcie sú homogénnymi funkciami 0 − tého stupňa. Poznamenajme, že funkcia $F : y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nazýva *homogénnou funkciou stupňa* $k \in R$ *na množine* Ω, ak pre každé $t > 0$ platí $F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre ľubovoľný bod $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \Omega$.
Dá sa preto očakávať, že platí nasledovná veta (doplnená ešte o jeden zaujímavý prípad)

Veta 1. Nech $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ a nech funkcia

$$F : F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] \neq [0, 0, \dots, 0]; \\ 0, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] = [0, 0, \dots, 0]; \end{cases}$$

je *homogénnou funkciou stupňa* $k \in R$, $k \leq 0$, pričom $f \neq const$. Nech bod $O = [0, 0, \dots, 0]$ je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f a nech existujú aspoň dva body $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \in D(f)$, pre ktoré $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, pričom bod $t = 0$ je hromadným bodom definičných oborov funkcií $g_\alpha : g_\alpha(t) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t)$, $g_\beta : g_\beta(t) = f(\beta_1 t, \beta_2 t, \dots, \beta_n t)$, kde

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0, \;\; \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2 \neq 0.$$

Potom funkcia F *nie je spojitá* v bode $O = [0, 0, \dots, 0]$.
Špeciálne to znamená, že

1. Pre $k = 0$ je každá *parciálna funkcia* k funkcii f vzhľadom na (*vhodnú*) *priamku prechádzajúcej bodom* $O = [0, 0, \dots, 0]$ v istom *prstencovom okolí* tohto bodu *konštantná,* s konštantou závisiacou od smerového vektora príslušnej priamky, preto $\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ neexistuje, preto funkcia F nie je spojitá v bode $[0, 0, \dots, 0]$.
2. Ak $k < 0$, potom $lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ buď *neexistuje* alebo je *nevlastná*.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady vety.
1. Pre $k = 0$ parciálna funkcia k funkcii f na priamke prechádzajúcou začiatkom súradnicovej sústavy so smerovým vektorom $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, pre ktorý platí $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0$, t.j. na množine

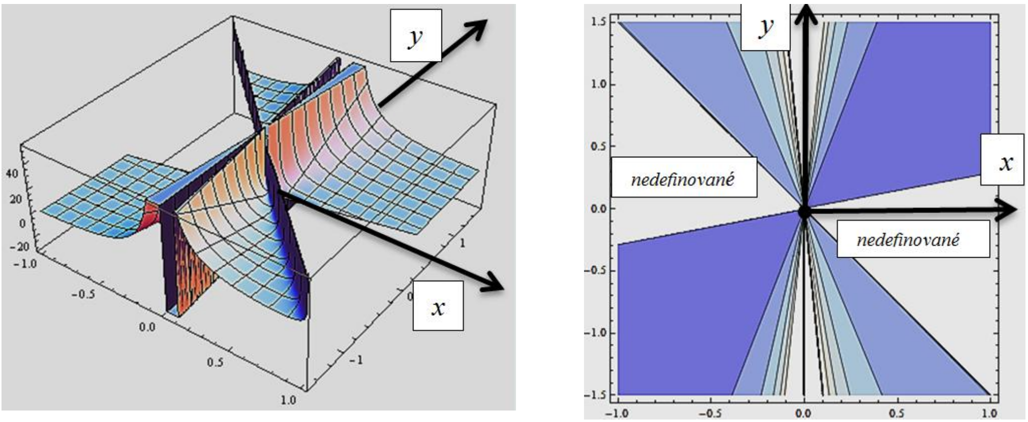
$$D_\alpha := \{[x_1, x_2, \quad \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = \alpha_1 t, x_2 = \alpha_2 t, \dots, x_n = \alpha_n t; t \in \mathbb{R}\} \cap D(f)$$

sa rovná $g_\alpha(t) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = t^0 f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, teda je konštantnou funkciou nezávisiacou od premennej t. Preto, ak $t = 0$ je hromadným bodom množiny D_α, tak $\lim_{t \to 0} g_\alpha(t) = \lim_{t \to 0} f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Táto limita závisí voľby priamky (resp. od voľby jej smerového vektora α) prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy a vzhľadom na to, že podľa predpokladu existujú aspoň dve priamky, na ktorých príslušné parciálne funkcie $g_\alpha(t), g_\beta(t)$ k funkcii f majú pre $t \to 0$ rôzne limity, preto $\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ neexistuje.
2. V prípade $k < 0$, položme $n := -k > 0$ a vyberme z bodov $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \in D(f)$ ten (nech je to napr. α), pre ktorý je $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Potom pre limitu parciálnej funkcie k funkcii f platí $\lim_{t \to 0} g_\alpha(t) = \lim_{t \to 0} f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) * \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t^n} \neq f(0, 0, \dots, 0) = 0$, pretože posledná limita buď neexistuje alebo je nevlastná.

Príklad 1. Ľahko overíme, že $\frac{\partial \wp_1}{\partial x}, \frac{\partial \wp_1}{\partial y}$ sú homogénne funkcie stupňa $k = -1$, preto nie sú spojité v bode $[0, 0]$.

Príklad 2. Dokážte, že funkcia $f \colon f(x, y) = \dfrac{x^2 y - 2y^3 \ln \frac{3x+2y}{7y-2x}}{(x^3 + y^2 x) \operatorname{arctg} \frac{2013y^2 - 5x^2}{15xy + y^2}}$ nemá v bode $[0, 0]$ limitu.

Riešenie. Funkcia f nie definovaná na priamkach $x = 0, y = -15x, y = \pm \sqrt{\frac{5}{2013}}\, x$ a „medzi a na" priamkach $y = \frac{2}{7}x, y = -\frac{3}{2}x$ čo znamená, že bod $[0, 0]$ je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Funkcie $P(x, y) = x^2 y - 2y^3 \ln \frac{3x+2y}{7y-2x}$, $Q(x, y) = (x^3 + y^2 x)$ artg $\frac{2013y^2 - 5x^2}{15xy + y^2}$ sú homogénne funkcie stupňa 3, preto funkcia f je homogénnou funkciou stupňa 0. Pre limitu



Obr. 2. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie f z príkladu 2.

parciálnej funkcie k funkcii f na priamke $y = kx$ $(x \neq 0)$ ležiacej v definičnom obore funkcie f platí $\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \frac{k - 2k^3 \ln \frac{3+2k}{7k-2}}{(1+k^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{2013k^2-5}{15k+k^2}}$. Ak zvolíme napríklad $k = 1$ a $k = 2$ dostaneme dve rôzne hodnoty, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$ neexistuje.

Priestorový a vrstevnicový graf funkcie f v dvojrozmernom intervale $J = [-1, 1] \times [-1{,}5\,; 1{,}5]$ načrtnutý systémom *Mathematica* je na Obr. 2.

Literatúra

[1] Cauchy, A.L. (1821). Cours d'analyse algébrique, Oeuvres série 2, vol. III

[2] Eliáš J., Horváth J., Kajan J. (1980) *Zbierka úloh z vyššej matematiky,* Alfa, Bratislava.

[3] Fulier, J. – Vrábel, M. (2007). Diferenciálny počet. Vysokoškolská učebnica. Nitra FPV, UKF 2007, 304 s. ISBN 978-80-8094-132-1

[4] Gelbaum, B.R. – Olmsted, J.M.N. (1964). Counterexamples in Analysis. HOLDEN-DAY, San Francisco, London, Amsterdam. 251 s.

[5] Hairer, E.,- Wanner, G. (2008). Analysis by Its History. Springer 2008. 377 s. ISBN 978-0-387-77031-4

[6] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M. (1961). Matematika II. SVTL Bratislava, 1961, 855s.

[7] Kudrjavcev, L.D - Kutasov, A.D. - Čechlov, V.I. - Šabunin, M.I. (2002). Sbornik zadač po matematičeskomu analizu, Tom 3, Funkcii mnogich peremennych. Nauka 2002, 468 s.

[8] Peano, G. (1884). "Annotazioni" al trattato di calcolo del 1884, Opere scelte I, s. 47-73

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: jfulier@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON ONE INTERESTING CLASS OF PEANO TYPE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES II.

O JEDNEJ ZAUJÍMAVEJ TRIEDE FUNKCIÍ VIAC PREMENNÝCH II.

JOZEF FULIER

ABSTRACT. *This contribution discusses a limit and continuity of two composite functions of the form* $F(x,y)=\frac{yg(x)}{y^2+g^2(x)}, F(0,0)=0, respectively\ f(x)=\frac{g(x)h(x)}{g^2(x)+h^2(x)}$, *which are associated with Peano function* $\wp\colon \wp(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0)=0$ *in case that* $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.

KEY WORDS: : *continuity, limit of a function of several variables*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať limitou a spojitosťou dvoch zložených funkcií tvaru* $F(x,y)=\frac{yg(x)}{y^2+g^2(x)}, F(0,0)=0, resp.\ f(x)=\frac{g(x)h(x)}{g^2(x)+h^2(x)}$, *ktoré súvisia s Peanovou funkciou* $\wp\colon \wp(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0)=0$ *za predpokladov, že* $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: limita, spojitosť funkcie viac premenných*

CLASSIFICATION: D50, D80, I65

1 Úvodné poznámky

Tento článok je bezprostredným pokračovaním práce, v ktorej sme sa zaoberali limitou a spojitosťou funkcie, ktorú sme pracovne nazvali *Peanovou funkciou* a označili sme ju symbolom $\wp_1$ na počesť vynikajúceho talianskeho matematika *Guiseppe Peana* (1858 - 1932), ktorý v práci (Peano, 1884) zostrojil funkciu $\wp = 2\wp_1$ s pozoruhodnými vlastnosťami. Funkciu $\wp_1$ sme definovali nasledovne

$$\wp_1\colon \wp_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y]\neq[0,0];\\ 0, \qquad \text{pre } [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

V prvej časti sme sa zaoberali jedným z možných zovšeobecnení *Peanovej funkcie* $\wp_1$ (ako funkcie dvoch premenných), zovšeobecnením pre prípad funkcie $n-$ premenných.
V tejto časti zostaneme v dvojrozmernom prípade, pričom budeme využívať v podstate iba *Peanovu funkciu* $\wp_1$ a operáciu skladania. Dokážeme niekoľko všeobecných tvrdení, z ktorých bezprostredne vyplývajú pozoruhodné vlastnosti istých funkcií, s ktorými sa stretávame v náročnejších zbierkach úloh a problémov z matematickej analýzy, či dokonca ako protipríklady, napríklad vo vynikajúcej monografii *Counterexamples in Analysis* (Gelbaum et Olmsted, 1964).

Keďže *Peanova funkcia* $\wp_1$ bude bazálnou pre naše ďalšie úvahy, sformulujme opätovne jej základné vlastnosti.

***Základné vlastnosti funkcie** $\wp_1: z = \wp_1(x,y)$*

Funkcia $\wp_1$ *v bode* $[0,0]$ ***nemá limitu**, preto **nie je spojitá, nie je diferencovateľná** v tomto bode, napriek tomu, že funkcia* $\wp_1$

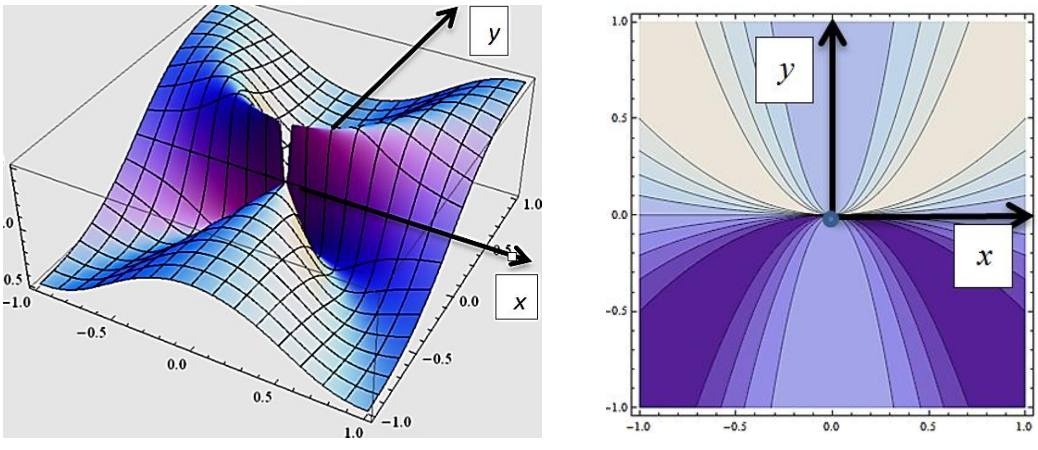
4. *je **spojitá** v bode* $[0,0]$ (*i na celej rovine*) *vzhľadom **na premennú*** x *i vzhľadom na **premennú*** y*; špeciálne to tiež znamená, že funkcia* $\wp_1$ *je spojitá na súradnicových osiach* $y = 0, x = 0$*;*
5. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú priamku prechádzajúcej bodom* $[0,0]$, *je s výnimkou tohto bodu **konštantná**, s konštantou závisiacou od smerového vektora príslušnej priamky, preto v bode* $[0,0]$ ***existujú vlastné limity** každej z týchto parciálnych funkcií funkcie* $\wp_1$;
6. *jej obe **parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine**, teda aj v bode* $[0,0]$.

2. Zovšeobecnenia – využitie zloženej funkcie s hlavnou zložkou $\wp_1$

Prvý príklad, ktorým uvedieme celú problematiku je funkcia tvaru $f_2: f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$, ktorým sa vo forme protipríkladu v základných kurzoch matematickej analýzy dokazuje, že pre existenciu limity $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ nepostačuje, aby *existovali* a *rovnali sa* navzájom *všetky limity* parciálnych funkcií k funkcii *na priamkach* prechádzajúcich bodom $[0,0]$. Napriek tomu, že ide o známu úlohu (či protipríklad) a mal by ju poznať každý absolvent učiteľského štúdia matematiky, opätovne sformulujme kľúčové vlastnosti aj funkcie f_2.

Príklad B. (pozri napr. (Fulier et Vrábel, 2007), (Gelbaum et Olmsted, 1964)). Dokážte, že funkcia $f_2: f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y)$ v bode $[0,0]$ *nemá limitu*, preto *nie je spojitá, nie je diferencovateľná* v tomto bode, napriek tomu, že pre funkciu f_2 platí

1. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú priamku prechádzajúcej bodom* $[0,0]$) *je spojitá v bode* $[0,0]$ (*samozrejme aj v ostatných bodoch príslušnej priamky)*;
2. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú parabolu* tvaru $y = Ax^2 (A \in \mathbb{R})$ je, *s* výnimkou bodu $[0,0]$, je *konštantnou funkciou s konštantou rovnou číslu* $\frac{A}{1+A^2}$, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii f_2;
3. *jej obe parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine, teda aj v bode* $[0,0]$.

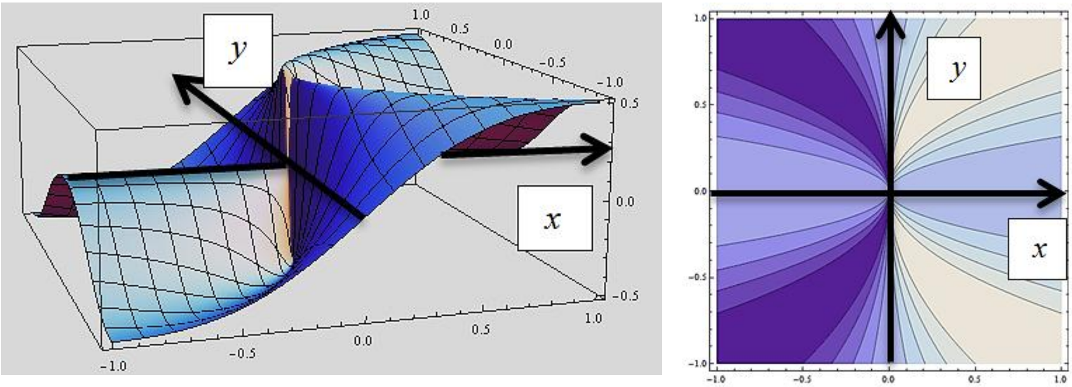


Obr. 1. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $f_2: z = f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y)$

Náčrt riešenia. Spojitosť parciálnej funkcie vzhľadom k ľubovoľnej priamke $x = \alpha t, y = \beta t, t \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ vyplýva z toho, že pre každé $t \in \mathbb{R}$ je $f_2(\alpha t, \beta t) = \wp_1((\alpha t)^2, \beta t) = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4 t^2 + \beta} t \to 0 = f(0,0)$ pre $t \to 0$. *Parciálna funkcia* k funkcii f_2 vzhľadom k *ľubovoľnej parabole* tvaru $y = Ax^2$ ($x \neq 0$, $A \in \mathbb{R}$), t.j. funkcia $\wp_1(x^2, Ax^2) = \frac{A}{1+A^2} = const$, preto existuje jej vlastná limita $\lim_{x\to 0} \wp_1(x^2, Ax^2) = \frac{A}{1+A^2}$. Pre rôzne A dostávame však rozličné výsledky, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f_2(x,y)$ neexistuje a teda funkcia f_2 nie je spojitá v bode [0,0].

Poznámka 1. Pozoruhodné správanie sa funkcie f_2 je možné odhaliť na priestorovom a vrstevnicovom grafe tejto funkcie vytvorenom systémom *Mathematica* na Obr.1.

V niektorých zbierkach úloh nachádzame často prípad funkcie, ktorý je symetrický k funkcii f_2, t.j. funkciu $h_2 \colon h_2(x,y) = \wp_1(x, y^2)$. Z hľadiska našich cieľov je rozdiel medzi týmito funkciami nepodstatný. Totiž rozdiel je iba v tom, že funkcia g_2 je konštantná na parabolách s rovnicou $x = Ay^2, (y \neq 0, A \in \mathbb{R})$ (pozri tiež graf funkcie h_2 na Obr. 2).



Obr. 2. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $h_2 \colon z = h_2(x,y) = \wp_1(x, y^2)$

V nasledujúcej časti sa budeme venovať zovšeobecneniu úlohy z *Príkladu B.* Bezprostredným zovšeobecnením môže byť prípad, v ktorom rolu kvadratickej funkcie $y = x^2$ preberie ľubovoľná spojitá funkcia $g \colon y = g(x)$ s vlastnosťou $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Využitím Peanovej funkcie vytvoríme zloženú funkciu

$$F \colon F(x,y) := \wp_1(g(x), y) = \frac{g(x)y}{g^2(x) + y^2}.$$

Táto funkcia má už jednu zaujímavú vlastnosť: jej parciálne funkcie vzhľadom na každú z kriviek $y = Ag(x)$, (kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), t.j. funkcie tvaru $f_A \colon f_A(x) = \frac{g(x)Ag(x)}{g^2(x)+g^2(x)} = \frac{A}{A^2+1}$ sú v prstencovom okolí bodu $x_0 = 0$ konštantnými funkciami, ktoré majú limity, ale ich hodnota závisí od čísel A, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} F(x,y)$ neexistuje. To však znamená, že funkcia F je nespojitá v bode $[0,0]$. Zostáva ešte nájsť funkciu $h \colon y = h(x)$, či možno ešte lepšie, systém funkcií (napr. $h_B \colon y = Bh(x)$, kde B je ľubovoľné reálne číslo), vzhľadom ku ktorým sú príslušné parciálne funkcie k funkcii F spojité v bode $x_0 = 0$, t.j. pre ktoré je $\lim_{x\to 0} F(x, h_B(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{Bg(x)h(x)}{g^2(x)+B^2h^2(x)} = 0$. Túto vlastnosť vieme zabezpečiť dvoma jednoduchými podmienkami na funkcie g, h.

Uvedenú úvahu môžeme preformulovať do nasledovnej vety.

Veta 1. Nech je funkcia g: $y = g(x)$ je daná spojitá v okolí $U(0)$ bodu 0, pričom pre každé $x \in U(0), x \neq 0$ je $g(x) \neq g(0) = 0$. Nech $h: y = h(x)$ je ľubovoľná spojitá funkcia v okolí $U(0)$ bodu 0 taká, že $h(0) = 0$ a pre každé $x \in U(0),\ x \neq 0$, je $h(x) \neq 0$. Nech funkcie g, h naviac spĺňajú: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$, alebo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$. Potom platí:

Funkcia $F: F(x,y) \coloneqq \wp_1(g(x), y) = \frac{g(x)y}{g^2(x)+y^2}$, kde $\wp_1$ je *Peanova funkcia*. *nemá v bode* $[0,0]$ *limitu*, preto *nie je spojitá* a *nie je* ani *diferencovateľná* v tomto bode, napriek tomu, že funkcia F má nasledovné vlastnosti

1. je *spojitá* (na množine $U(x_0) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) *vzhľadom na premennú* x i *vzhľadom na premennú* y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* ku krivke $\mathcal{H}_B$ danej rovnicou $y = Bh(x)$, (kde $B \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je *spojitou funkciou* v okolí $U(0)$ a teda i v bode $[0,0]$, preto pre limitu funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}_B$ platí
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{H}_B} F\,(x,y) = \lim\nolimits_{x\to 0} F[x, Bh(x)] = F(0,0);$$
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{L}_A$ danej rovnicou $y = Ag(x)$, ($A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je pre každé $x \in U(0), x \neq 0$ *konštantnou funkciou*, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii F, pričom
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{L}_A} F\,(x,y) = \lim\nolimits_{x\to 0} F[(x, Ag(x)] = \frac{A}{A^2+1};$$
4. existujú obe parciálne derivácie $\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial F(0,0)}{\partial y}$.

Dôkaz. Nech funkcie spĺňajú predpoklady vety a nech $A \neq 0, B \neq 0$ (pre $A = 0, B = 0$ je dôkaz triviálny). Pre limitu *parciálnej funkcie* k funkcii F *vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}_B$ danej rovnicou sa rovná

$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{H}} F\,(x,y) = \lim\nolimits_{x\to 0} F[x, Bh(x)] = \lim_{x\to 0} \wp_1[g(x), Bh(x)] =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{Bg(x)h(x)}{g^2(x)+B^2h^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{B\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)}{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^2 + B^2} = \lim_{x\to 0} \frac{B\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)}{1+B^2\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)^2} = 0 = F(0,0),$$ pretože podľa predpokladu buď $\frac{g(x)}{h(x)} \to 0$ alebo $\frac{h(x)}{g(x)} \to 0$ pre $x \to 0$. To však znamená (ak uvážime aj spojitosť funkcií g, h), že funkcia F je spojitá vzhľadom na krivku $\mathcal{H}_B$ v celom okolí $U(0)$. Analogická situácia je aj s limitou funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{L}_A$. Platí totiž

$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{L}_A} F\,(x,y) = \lim_{x\to 0} F[(x, Ag(x)] = \lim_{x\to 0} \frac{Ag^2(x)}{A^2g^2(x) + g^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{A}{A^2+1} = \frac{A}{A^2+1}.$$

Táto limita však závisí od výberu kriviek $\mathcal{L}_A$, preto $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} F\,(x,y)$ neexistuje.

A celkom na koniec, ľahko nahliadneme, že napríklad pre $\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}$ platí

$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$. Podobná situácia je aj s $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} = 0$.

Poznámka 2. Ľahko overíme, že vo formulácii Vety 1 môže byť okolie $U(0)$ bodu 0 nahradené pravým, resp. ľavým okolím tohto bodu, ba dokonca aj okolím $U(x_0)$ ľubovoľného bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Zaujímavé, že požiadavky na limity funkcií $g, h, f/g$ môžeme sformulovať aj pomocou tzv. symbolov „o“: $g(x) = o\big(h(x)\big)$, alebo $h(x) = o(g(x))$ pre $x \to 0$. Avšak vzhľadom na nejednotné používanie uvedeného symbolu, to neurobíme.

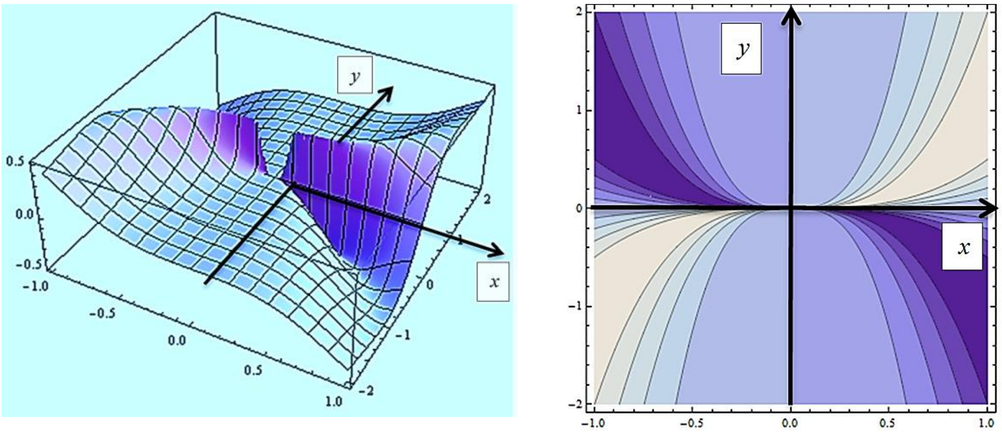
Na základe vyššie uvedenej vety je možné ľahko vyriešiť nasledovnú úlohu

Úloha 1. a) Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ sú dané čísla. Dokážte, že nasledovné funkcie nie sú spojité v bode $[0,0]$

a) $F_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^n y}{x^{2n}+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$ b) $F_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^{2\alpha}+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$

napriek tomu, že funkcia F_1 (resp. F_2) má nasledovné vlastnosti:

1. je spojitá vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = A_k x^k$ (resp. $y = B|x|^\beta$) pre ľubovoľný exponent $k \in N, k \neq n$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0, \beta \neq \alpha$) a každú konštantu $B \in \mathbb{R}$, je *spojitou funkciou*;
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = Ax^n$ (resp. $y = A|x|^\alpha$), kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta, je pre každé $x \neq 0$ *konštantnou funkciou*, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií;
4. *jej obe **parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine**, teda aj v bode* $[0,0]$ (v *tomto bode sú však obe tieto parciálne derivácie nespojité*).



Obr. 3. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $F: F(x,y) = \frac{yx^3}{y^2+x^6}, F(0,0) = 0$

Poznámka 3. Je vhodné poznamenať, že pri tvorbe náročnejších úloh uvedeného typu je možné „skomplikovať" konkrétne zadanie funkcie $F: F(x,y) \coloneqq \wp_1(g(x),y) = \frac{g(x)y}{g^2(x)+y^2}$ vynásobením „neškodným" súčiniteľom, napríklad funkciou $f: z = f(x,y)$, pre ktorú je: $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f\,(x,y) = b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

V prípade, že funkcie f, g majú naviac aj derivácie, tak Vetu 1 je možné preformulovať do nasledovného tvaru.

Veta 2. Nech $n \in \mathbb{N}$, je ľubovoľné, ale pevne zvolené číslo a nech $k \in N, k \neq n$ je ľubovoľné číslo. Nech funkcia $g: y = g(x)$ je definovaná v okolí $V(0)$ bodu $x_0 = 0, g(x) \neq 0$ pre $x \neq 0$ a nech je v tomto okolí $n - krát$ spojite diferencovateľná, pričom pre $g^{(i)}(x) \neq 0$ ($i = 0,1,\dots,n$) pre každé $x \neq 0$ a v bode x_0 nech spĺňa
$g(0) = g'(0) = g"(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0, g^{(n)}(0) = a \neq 0,\ a \in \mathbb{R}$.

Potom funkcia $F\colon F(x,y) = \wp_1(g(x),y)$, kde $[x,y] \in \Omega = V(0) \times \mathbb{R}$ nemá v bode $[0,0]$ limitu, teda nie je ani spojitá a ani diferencovateľná, napriek tomu, že funkcia F má vlastnosti:

1. je spojitá (aj v bode $[0,0]$) vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}$ danej rovnicou $y = Bh(x)$, pre každú konštantu $B \in \mathbb{R}$ je *spojitou funkciou* a teda pre limitu funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}$ platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0],\ [x,y]\in\mathcal{H}} F(x,y) = 0$ kde funkcia $h\colon y = h(x)$ je v okolí $V(0)$ $k - krát$ spojite diferencovateľná, s vlastnosťami: kde $h^{(j)}(x) \neq 0$ $(j = 0,1,\dots,k)$ pre $x \neq 0$ a $h(0) = h'(0) = h''(0) = \cdots = h^{(k-1)}(0) = 0, h^{(k)}(0) = b \neq 0, b \in \mathbb{R}$;
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = Ag(x)$, kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta, je (s výnimkou bodu $[0,0]$) *konštantnou funkciou,* (s konštantou $\frac{A}{A^2+1}$), preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii F;
4. obe parciálne derivácie prvého rádu funkcie f existujú na množine $\Omega = V(0) \times \mathbb{R}$, teda j v bode $[0,0]$.

Dôkaz. Zrejme stačí dokázať iba tvrdenia z časti 2. Nech sú teda splnené predpoklady vety. Vytvorme parciálnu funkciu $F(x, Bh(x)) = \wp_1(g(x), Bh(x)), x \in V(0)$. Máme dokázať, že $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1(g(x), Bh(x)) = 0$.

Vzhľadom na to, že pre $n, k \in N$, platí $k \neq n$, môžu nastať dva prípady:

a) Nech $k > n$. Potom $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), Bh(x)\big) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{Bg(x)h(x)}{[g(x)]^2+[Bh(x)]^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{B\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)}{B^2\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]^2+1}$ a stačí $n -$ krát aplikovať *L´Hospitalovo pravidlo* na limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}$:a využiť spojitosť $n -$tých derivácií funkcií g, h, teda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim\limits_{x\to 0}\frac{h^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{h^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)} = \frac{0}{a} = 0$, využitím čoho už ľahko dostaneme $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), Bh(x)\big)$,

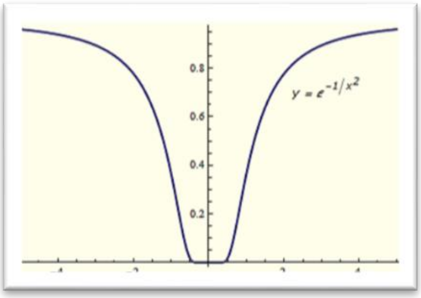
b) Nech $k < n$. Potom $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), h(x)\big) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)}{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]^2+1}$ a opätovne stačí $k -$ krát aplikovať *L´Hospitalovo pravidlo* na limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)} (= \frac{0}{b} = 0)$, teda tiež platí $\lim\limits_{x\to 0}F(x, Bh(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), h(x)\big) = 0 = F(0,0)$.

Na záver sformulujeme tvrdenie, v ktorej vystupuje jedna zaujímavá funkcia, ktorá sa objavuje v mnohých protipríkladoch z matematickej analýzy. Ide o pozoruhodnú funkciu definovanú nasledovne

$$\mathscr{g}\colon \mathscr{g}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

Táto funkcia je *nekonečne krát diferencovateľná* na celej číselnej osi, s výnimkou jediného bodu $x = 0$ je kladná, ale napriek tomu je $\mathscr{g}^{(k)}(0) = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, pozri napríklad (Kluvánek et kol.,1961, s.111, príklad 5)).

Dôsledkom uvedených vlastností tejto funkcie je, že *MacLaurinov rad funkcie* g ***konverguje*** na intervale $(-\infty,\infty)$, ale ***jeho súčet*** sa v žiadnom bode $x \neq 0$ ***nerovná funkcii*** $g(x)$.
V uvedenom príklade je tiež dokázané, že pre každé nezáporne celé čísla n a k platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g^{(n)}(x)}{x^k} = 0$. Tento fakt v ďalšom využijeme.



Obr. 4. Graf funkcie $g\colon y = g(x)$

Dá totiž očakávať, že aj zložená funkcia vytvorená z funkcie g a *Peanovej funkcia*

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{F}(x,y) = \wp_1(g(x), y)$$

bude mať určite zaujímavé vlastnosti.
V monografii (Gelbaum – Olmsted, s. 148-149, 1964) je uvedené, že limita funkcie $\mathcal{F}$ v bode $[0,0]$ vzhľadom na ľubovoľnú ***algebraickú krivku*** $x^m = \left(\frac{y}{c}\right)^n$, t. j. $y = cx^{m/n}$, kde $c \neq 0$ je konštanta a $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné čísla, (v prípade párneho n sa samozrejme predpokladá, že $x \geq 0$) sa rovná nule. Tento výsledok v dôkaze nasledujúcej vety ***zovšeobecníme pre ľubovoľnú krivku*** $y = x^\alpha$ (kde $x \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$) a následne ho využijeme v našej teórii.

Veta 3. Funkcia $\mathcal{F}\colon \mathcal{F}(x,y) = \wp_1(g(x), y)$ nemá v bode $[0,0]$ limitu, teda nie je ani spojitá a ani diferencovateľná v tomto bode, napriek tomu, že pre funkciu $\mathcal{F}$ platí

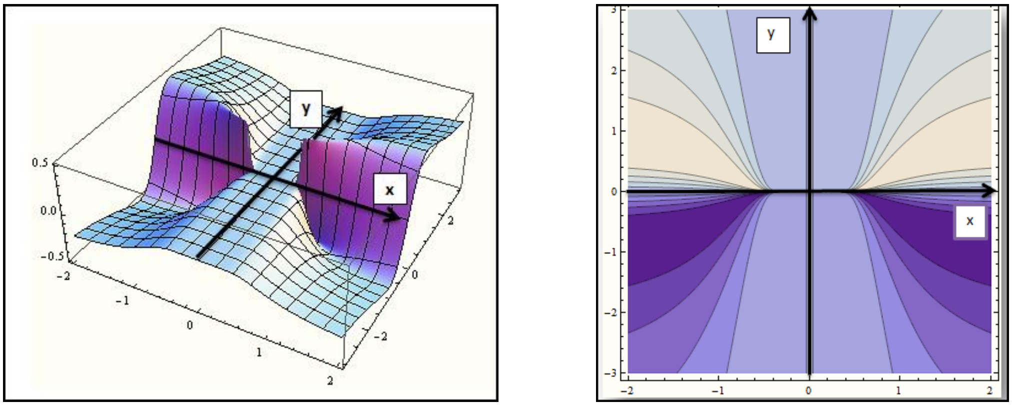
1. je spojitá (i v bode $[0,0]$) vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}$ danej rovnicou $y = Bx^\alpha$, $x \geq 0$[1] (kde $\alpha, B \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ sú ľubovoľné konštanty), je *spojitou funkciou*, a teda pre limitu funkcie $\mathcal{F}$ vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}$ platí
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],\ [x,y]\in\mathcal{H}} \mathcal{F}(x,y) = \lim_{x\to 0} \wp_1(g(x), Bx^\alpha) = 0;$$
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* ku krivke $\mathcal{H}_1$ tvaru $y = Ag(x)$, (kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je pre $x \neq 0$ *konštantnou funkciou s konštantou* $\frac{A}{A^2+1}$, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii $\mathcal{F}$;
4. obe parciálne derivácie prvého rádu funkcie f v bode $[0,0]$ existujú.

Dôkaz. Opätovne dokážeme iba tvrdenie z časti 2. Ostatné tvrdenia sú zrejmé. Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch ľahko nahliadneme, že pre $x > 0$ platí

$\mathcal{F}(x, Bx^\alpha) = \wp_1(g(x), Bx^\alpha) = \frac{Bg(x)x^\alpha}{[g(x)]^2 + (Bx^\alpha)^2} = B\,\frac{\frac{g(x)}{x^\alpha}}{[g(x)/x^\alpha]^2 + B^2}$. Tvrdenie vety zrejme platí v prípade, ak číslo $\alpha > 0$ je číslo prirodzené, t.j. ak $\alpha = n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade je podľa citovaného príkladu pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$, preto aj $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{F}(x, Ax^n) = 0$.

---

[1] $\alpha > 0$ môže byť aj iracionálnym číslom, preto mocninná funkcia $y = x^\alpha$ je definovaná iba pre $x \geq 0$.



Obr. 5. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\mathcal{F}: \mathcal{F}(x,y) = \wp_1(\mathscr{g}(x), y)$

Pre $0 < \alpha \notin \mathbb{N}$ zrejme existuje nejaké $n = 0,1,2,\ldots$ také, že pre $\alpha \in (n, n+1)$. Využitím *monotónnosti* mocninnej funkcie s *kladným exponentom* dostaneme pre každé $x > 0$ nerovnosť $\frac{\mathscr{g}(x)}{x^{n+1}} < \frac{\mathscr{g}(x)}{x^{\alpha}} < \frac{\mathscr{g}(x)}{x^{n}}$, z ktorej na základe vety o limite troch funkcií dostaneme pre každé $x > 0, \alpha > 0$ požadovanú rovnosť $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathscr{g}(x)}{x^{\alpha}} = 0$. Zvyšok dôkazu je už zrejmý.

Literatúra

[9] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.(1980). *Zbierka úloh z vyššej matematiky,* Alfa, Bratislava, 1980

[10] Fulier, J. – Vrábel, M. (2007). *Diferenciálny počet*. Vysokoškolská učebnica. Nitra FPV, UKF 2007, 304 s. ISBN 978-80-8094-132-1

[11] Gelbaum, B.R. – Olmsted, J.M.N. (1964). *Counterexamples in Analysis*. HOLDEN-DAY, San Francisco, London, Amsterdam. 251 s.

[12] Hairer, E.,- Wanner, G. (2008). *Analysis by Its History*. Springer 2008. 377 s. ISBN 978-0-387-77031-4

[13] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M. (1961). *Matematika* II. SVTL Bratislava, 1961, 855s.

[14] Kudrjavcev, L.D - Kutasov, A.D. - Čechlov, V.I. - Šabunin, M.I. (2002). Sbornik zadač po matematičeskomu analizu, Tom 3, Funkcii mnogich peremennych. Nauka 2002, 468 s.

[15] Peano, G. (1884). “Annotazioni” al trattato di calcolo del 1884, Opere scelte I, s. 47-73

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: jfulier@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

HISTORICAL METHODS OF SOLVING LINEAR EQUATIONS IN TEACHING MATHEMATICS

VYUŽITIE NIEKTORÝCH HISTORICKÝCH METÓD RIEŠENIA LINEÁRNYCH ROVNÍC VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

MONIKA KRČMÁROVÁ

ABSTRACT. *This paper deals with some methods of solving linear equations known from the history of mathematics. We mainly focus on their use and inclusion in teaching mathematics. Various methods for solving linear equations together with the historical problems are the examples of the integration of history in mathematics education at primary and secondary school .*

KEY WORDS: *linear equations, teaching, history, methods of solving*

ABSTRAKT. *V príspevku sa zaoberáme niektorými metódami riešenia lineárnych rovníc známych z dejín matematiky. Zameriavame sa najmä na ich vhodné využitie a zaradenie do vyučovania matematiky. Rôzne metódy riešenia lineárnych rovníc spolu s historickými úlohami sú príkladom integrácie histórie do vyučovania matematiky na základných aj stredných školách.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *lineárne rovnice, vyučovanie, história, metódy riešenia*

CLASSIFICATION: *A30, D40*

Úvod

Slovné úlohy vedúce k lineárnym rovniciam sú tisícky rokov staré. Úlohy lineárneho charakteru sa objavujú už v *Matematike v deviatich knihách* aj v staroegyptských papyrusoch. Známe boli viaceré algoritmy na vyriešenie rovníc, úlohy mali ale slovný charakter, riešenia boli tiež popísané slovne, chýbala vhodná symbolika. V článku sa budeme venovať metódam riešenia lineárnych rovníc: metóde chybného predpokladu, metóde dvoch chybných predpokladov a metóde váh.

Tieto metódy sa v škole dnes už nevyučujú. Podľa štátneho vzdelávacieho programu (ŠVP - ISCED2, 2009) je riešenie rovníc (súčasť tematického okruhu Čísla, premenná a počtové výkony s číslami) zaradené do 8. a 9.ročníka ZŠ a na strednej škole sa rovnice a ich sústavy (súčasť tematického okruhu Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy) preberajú v 1.ročníku (ŠVP - ISCED 3A, 2009). Práve na základnej škole sa žiaci stretávajú s rovnicami prvýkrát. V ôsmom ročníku je však riešenie rovníc chápané len ako propedeutika, odporúča sa riešiť jednoduché úlohy vedúce k rovniciam, no bez formalizácie rovnice (úvahou, znázornením alebo metódou pokus-omyl) (ŠVP - ISCED2, 2009). V deviatom ročníku sa žiaci naučia riešiť rovnice systematicky, ekvivalentnými úpravami.

Práve tu vidíme dostatok priestoru na zaradenie motivujúcich prvkov z histórie matematiky do vyučovania. Tým, že učiteľ žiakom ukáže, ako sa riešili rovnice v minulosti, sa nielen prehĺbia vedomosti žiakov o riešení rovníc, motivácia formou poznatkov z histórie je aj dlhodobo jednou z používaných foriem ako zaujať žiakov. Podľa Smitha (Smith, 1996, In: Carter, D.B., 2006) dokonca matematika vyučovaná izolovane,

bez zmienky o jej pôvode a dejín, vedie v mnohých ohľadoch k odporu a strachu z matematiky.
Pri uvedených úlohách úplné riešenia neuvádzame, keďže sa rovnice ľahko vyriešia.

Metóda chybného predpokladu

Metóda chybného predpokladu sa zmieňuje v 7. a 8. knihe Matematiky v deviatich knihách. Tam sa metóda použila na riešenie systémov dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych (metóda je nazvaná *Tshuifen,* je popísaná len slovne). Nazývala sa aj metódou prebytku a nedostatku,[1] metódou falošného predpokladu, neskôr bola používaná nielen v Číne, ale i v Babylone, i v Európe, najmä v Taliansku., nachádza sa aj v 12.kapitole Fibonacciho *Liber abaci*.

Je možné, že táto metóda sa do Európy dostala z Číny alebo Egypta do Indie cez arabských matematikov k Fibonaccimu, nie je to však isté, mohla sa prirodzene vyvinúť všade nezávisle od seba.
Podstatou metódy je uhádnuť riešenie (rovnice $ax = b$) , hoci často chybné, a potom ho vhodne korigovať, aby sme dostali správne riešenie. Riešenie touto metódou by sme mohli popísať troma etapami (anglicky „guess-check-adjust“):

1. uhádnuť (odhadnúť) riešenie
2. skontrolovať navrhnuté riešenie
3. prispôsobiť riešenie, ak sme hádali nesprávne

Riešenie ukážme napríklad na úlohe z Rhindovho papyrusu:

Úloha 1. *„Hromada a jej štvrtina dávajú spolu 15.“* Treba zistiť, koľko predstavuje hromadu.
Úloha vedie na jednoduchú rovnicu

$$x+\frac{1}{4}x=15$$

Postup riešenia úlohy:

1. Uhádneme (vhodne) riešenie, napríklad $x = 4$, je vhodné, keďže sa z neho už ľahko vypočíta štvrtina (podobne sa postupuje aj v iných príkladoch).
2. Skontrolujeme riešenie: po dosadení riešenia do ľavej strany rovnice dostaneme 5 (namiesto 15, čo indikuje pravá strana rovnice)
3. Prispôsobíme riešenie - uhádnuté riešenie treba ešte strojnásobiť, aby sme dostali 15, preto správne riešenie bude trojnásobkom uhádnutého riešenia, teda 12.

Práve tento postup nám umožňuje ukázať žiakom ôsmeho ročníka (na vhodných rovniciach, tvaru $ax=b$), ako riešiť lineárne rovnice o jednej neznámej bez toho, aby vedeli niečo o ekvivalentných úpravách rovníc, ktoré sa preberajú až v deviatom ročníku.

Uvedieme niektoré historické úlohy (z Rhindovho papyrusu), ktoré sa riešili touto metódou a ktoré sú vhodné využiť na hodinách matematiky. Úlohou žiakov je vyriešiť úlohy, nájsť riešenie metódou chybného predpokladu. V nasledujúcej úlohe si žiaci precvičia prácu so zlomkami, učiteľ ich na začiatku vyzve, aby nepočítali s desatinnými číslami, aj riešenie uviedli v tvare zlomku.

[1] názov pochádza zo systému rovníc, ktorý sa riešil: $a_1x=y+d_1$, $a_2x=y-d_2$, $(a_1>a_2)$, kde d_1 bol prebytok, d_2 nedostatok nejakej čiastky peňazí.

Úloha 2. „*Neznáme množstvo a jeho sedmina dávajú spolu 19.*“
Úloha vedie na lineárnu rovnicu

$$x+\frac{x}{7}=19,$$

kde x je neznáme množstvo. Za riešenie je vhodné zvoliť násobok sedmičky, vezmime x = 7. Po dosadení dostaneme ľavú stranu rovnice rovnú ôsmym namiesto 19. Žiaci by mali (prípadne za pomoci učiteľa) zistiť, čím musíme vynásobiť číslo 8, aby sme dostali 19. Správna odpoveď je $\frac{19}{8}$, to je zlomok, ktorý predstavuje, koľkokrát treba zväčšiť uhádnuté riešenie 7. Riešenie rovnice je $7.\frac{19}{8}=\frac{133}{8}$.

Úloha 3. $x+\frac{x}{5}=21$

Úloha 4. „*K neznámemu množstvu sme pripočítali jeho dve tretiny a od tohto súčtu sme odčítali jeho tretinu. Ostalo nám 10. Aké bolo neznáme množstvo*?“
Riešenie: Riešme túto úlohu použitím metódy chybného predpokladu (použijeme ju dvakrát). Úloha vedie na rovnicu

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.(x+\frac{2}{3}x)=10$$

Substituujme najprv $x+\frac{2}{3}x=y$ a riešme tak metódou chybného predpokladu najprv rovnicu

$$y-\frac{1}{3}.y=10$$

Hádajme riešenie, napr. y_0 = 3. Ľavá strana tejto rovnice po dosadení čísla tri [f(3)] je 2, čo je päťkrát menej, ako 10. Preto správne riešenie rovnice bude päťkrát väčšie ako uhádnuté riešenie, teda y = 15.
Vrátime sa k substitúcii a riešime rovnicu

$$x+\frac{2}{3}x=15.$$

Uhádnime riešenie x_0 = 3, f(3) = 5, čo je trikrát menej ako 15, preto koreňom pôvodnej rovnice bude číslo trikrát väčšie ako pôvodné odhadované číslo, riešením rovnice je teda číslo 9.

Úloha 5. „*Našiel som kameň, ale neviem, koľko vážil. Po tom, ako som pridal jeho sedminu a potom jednu jedenástinu toho všetkého, kameň vážil 60 talentov. Koľko talentov vážil kameň?*“[2]
Riešte úlohou (dvojnásobným) použitím metódy chybného predpokladu.

[2] Talent bola jednotka hmotnosti používaná v Mezopotámii. 1 talent = 60 šekelov = 1/60 míny. Jedna mína predstavuje približne 500g.

Metóda dvoch chybných predpokladov

Táto metóda je podobná metóde (jedného) chybného predpokladu, vyžaduje si ale hádanie dvoch rôznych riešení. Tento postup riešenia lineárnych rovníc bol vysvetlený v Matematike v deviatich knihách (časť *Jiuzhang Suanshu*), uvedených bolo aj 19 problémov na riešenie úloh vedúcich na lineárnu rovnicu typu $ax = b$, alebo $ax + c = b$.[3] V arabskej matematike sa toto pravidlo tiež objavilo, pod názvom *hisab al-Chata΄ayn* („pravidlo dvoch chýb"). Známe sú aj iné označenia, „pravidlo dvoch chybných predpokladov", „druhá metóda prebytku a nedostatku", „regula duorum falsorum positionum".

Postup ukážeme na riešení rovnice: $10x - 6 = 0$

1. Uhádneme dve riešenia, napríklad $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
2. Pre obe riešenia vypočítame hodnoty výrazu $10x - 6$: $f_1 = 10.1 - 6 = 4$, $f_2 = 10.2 - 6 = 14$.
3. Prvé odhadnuté riešenie vynásobíme hodnotou f_2, druhé odhadnuté riešenie vynásobíme hodnotou f_1 a hodnoty súčinov odčítame: $1.14 - 2.4 = 6$. Tento výsledok bude predstavovať čitateľa riešenia rovnice.
4. Menovateľa riešenia rovnice získame ako rozdiel $f_2 - f_1$: $14 - 4 = 10$.
5. Zapíšeme riešenie rovnice: $\dfrac{6}{10}$

Všeobecne, pre riešenie rovnice $ax + b = 0$ (Smith, 1958, s.440):
zvolíme nejaké dve rôzne riešenia x_1, x_2. Dosadíme:

$$f_1 = ax_1 + b \qquad /.x_2 \tag{1}$$

$$f_2 = ax_2 + b \qquad /.x_1 \tag{2}$$

odkiaľ

$$f_1 - f_2 = a(x_1 - x_2) \tag{3}$$

Po vynásobení každej z rovnice (1) a (2) príslušnými uhádnutými riešeniami máme

$$f_1x_2 = ax_1x_2 + bx_2 \tag{4}$$

$$f_2x_1 = ax_2x_1 + bx_1 \tag{5}$$

po odčítaní (4) a (5) :

$$f_1x_2 - f_2x_1 = b(x_2 - x_1) \tag{6}$$

Vydelením (6) a (3) dostávame:

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1x_2 - f_2x_1}{f_1 - f_2},$$

pričom pravá strana je neznáme riešenie rovnice (vieme, že $x = -\dfrac{b}{a}$).

Vyriešte metódou dvoch chybných predpokladov nasledujúce úlohy:

[3] toto pravidlo sa používalo, keď metóda chybného predpokladu „nestačila". Akonáhle totiž namiesto typu rovnice $ax = b$ bolo treba riešiť rovnice typu $ax + b = c$, metóda chybného predpokladu nefungovala, preto sa použilo pravidlo dvoch chybných predpokladov.

Úloha 6. $2x - 14 = 0$

Úloha 7. $\frac{5}{4}x - 50 = 0$

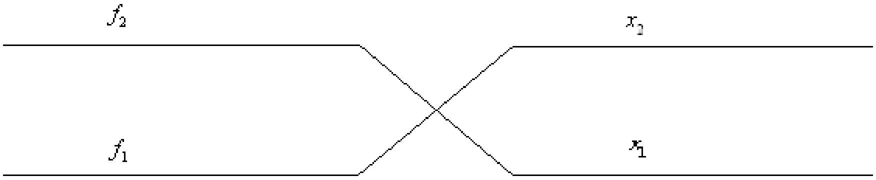
Je zrejmé, že úlohy na využitie metódy dvoch chybných predpokladov ($ax + b = c$) si vieme ľahko previesť na úlohy, kde vieme použiť jednoduchšiu, metódu jedného chybného predpokladu ($ax = b$). Tieto (ekvivalentné) úpravy však kedysi neboli známe.

Metóda váh

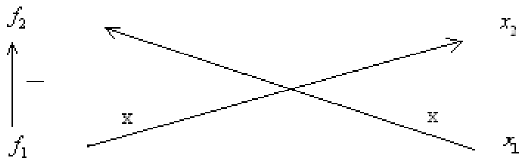
Túto metódu používali Arabi. Ide vlastne modifikáciu metódy popísanej vyššie, názov je odvodený od pomocnej schémy, ktorá sa pri metóde používala. Na jej ramená sa vpisovali hodnoty f_2, f_1 a odhadovaných riešení x_1 a x_2 (Obr.1). Riešenie získame ako podiel

$$\frac{f_1 x_2 - f_2 x_1}{f_1 - f_2} \tag{7}$$

Na zapamätanie vzťahu (7) nám slúži schéma. Do nej vpíšeme hodnoty f_2, f_1 a x_1 a x_2 (Obr.1). Obrázok 2 jednoducho ilustruje, ako grafickú pomôcku chápať (x predstavuje súčin, - predstavuje rozdiel).



Obrázok 1

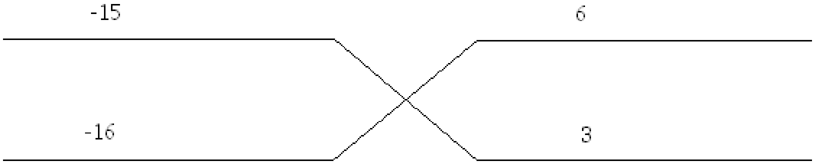


Obrázok 2

Úloha 8. $\frac{1}{3}x - 17 = 0$

Za uhádnuté riešenia vezmime napríklad $x_1 = 3,\ x_2 = 6$

Schéma, pomocou ktorej úlohu vyriešime, potom vyzerá takto:



Obrázok 3

Riešenie rovnice bude nasledujúce:

$$\frac{-16.6-(-15).3}{-16-(-15)}=\frac{-96+45}{-1}=\frac{-51}{-1}=51$$

Žiaci si v úlohe precvičia počítanie s celými číslami (predpokladá sa, že pravdepodobne zvolia za uhádnuté riešenia čísla menšie ako 51). Tematický celok *celé čísla* sa odporúča zaraďovať do ôsmeho ročníka, preto je táto úloha vhodná najmä pre ôsmakov.

Záver

Na príklade niektorých historických úloh a postupov riešenia lineárnych rovníc sme ukázali, ako história matematiky môže byť aktívne využitá vo vyučovaní matematiky. Aj niektoré metódy, ktoré sa v škole nevyučujú, môžu nájsť uplatnenie v súčasných učebných plánoch a na hodine matematiky.

Literatúra

[1] BEČVÁŘ, J. (2007). Přímá úměrnost - lineární rovnice [online]. In: Jindřich Bečvář (author): Z historie lineární algebry. Praha: Matfyzpress, 2007 [cit.20.3.2013]. Dostupné na internete: http://dml.cz/dmlcz/400924.

[2] CARTER, D.B. (2006). The Role of History of Mathematics in the Middle School [online]. East Tennessee State University, 2006, [cit. 2012-07-10], 145 p. Dostupné na internete: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/historia/textos/The%20role%20of%20the%20history%20of%20mathematics%20in%20the%20middle%20school.*Donette%20Barker,%20Carter.*historia-%20tesis%20completa.pdf.

[3] KATZ, V., MICHALOWITZ, K. D. (eds). (2004). Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics (Module 7: Linear Equations). 2004, Electronic ISBN: 9780883857410.

[4] SMITH, D.E. (1958). History Of Mathematics, Vol II. Courier Dover Publications, 1958. 736 s. ISBN: 978-0486204307

[5] Štátny vzdelávací program: Matematika, príloha ISCED2. Bratislava, 2009.

[6] Štátny vzdelávací program: Matematika, príloha ISCED3A, 2.upr. verzia. Bratislava, 2009.

Článok prijatý dňa 2. mája 2013.

Adresa autora

Mgr. Monika Krčmárová
Katedra matematiky, Fakulta Prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr.A.Hlinku 1, SK – 94901 Nitra; e-mail: monika.galbava@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

FINANCIAL MATHEMATICS IN ELECTRONIC STUDY MATERIALS

FINANČNÁ MATEMATIKA V ELEKTRONICKÝCH ŠTUDIJNÝCH MATERIÁLOCH

RADOMÍRA GREGÁŇOVÁ

ABSTRACT. *In the article we deal with the some possibilities of different types of applications in electronic study materials. A financial mathematics study materials were created in the form of electronic study materials, on-line courses or web sites. Creating electronic study materials allows us to study independently. Electronic study materials influence the methods and forms of a university study of mathematics.*

KEY WORDS: *mathematics, applications, financial mathematics, electronic study materials*

ABSTRAKT. *V príspevku sú uvedené niektoré možnosti rôznych typov aplikácií v elektronických študijných materiáloch. Študijné materiály s finančnou matematikou boli vytvorené vo forme elektronických študijných materiálov, on-line kurzov alebo webových stránok. Vytvorené elektronické študijné materiály umožňujú samostatné a aktívne učenie sa. Elektronické študijné materiály ovplyvňujú metódy a formy štúdia vysokoškolskej matematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *matematika, aplikácie, finančná matematika, elektronické študijné materiály*

CLASSIFICATION: *R25, M35*

The university education system

The university education system gives students a general theoretical basis for the bachelor's degree in education and vocational training courses, learning applications for undergraduate and master's study. Then graduates of the Faculty of Economics and Management, the Slovak University of Agriculture (FEM SUA) in Nitra, have a better possibility of inclusion in the fields of economics, management, marketing, banking, finance, insurance, social services, in general, and in many other areas (Gregáňová, Országhová, 2010).

The transformation of education is connected with the reduction in the curricula of mathematical subjects. The basic assumption for successful learning of mathematics at university is a good base of secondary curriculum (Országhová, 2009). The reducing of scope and content of mathematics is done at secondary schools. It is very difficult to join secondary knowledge with knowledge of higher mathematics.

Basic knowledge of higher mathematics student obtained by passing compulsory subjects Mathematics I, II, in the 1st year bachelor's degree. These subjects provide a basic course of higher mathematics with examples of applications in economics and technical courses (Gregáňová, Országhová, 2010).

Students pass the exam in the compulsory subjects at the end of the first term and of the second term in the first year of university studies. The Chart 1 shows faculties of the university, number of terms of the teaching of compulsory subjects in mathematics and their actual hour range in the academic year 2012/2013.

Slovak University of Agriculture in Nitra			
Faculty	Number of Terms	Hour Range of Reading	Hour Range of Seminar
FEM , FE	2	2	2
FBFR, FESRR	1	1	3

Chart 1: FE - Faculty of Engineering, FEM - Faculty of Economics and Management, FBFR - Faculty of Biotechnology and Food Resources, FESRR - Faculty of European Studies and Regional Development

From long-term experience from the teaching of mathematics at the Slovak University of Agriculture in Nitra we can state that teaching of compulsory subjects is carried out with hour range of contact teaching getting smaller and smaller. This is followed by the content reduction of the taught thematic units. Requirements of teachers on the individual study are increasing. This is mainly demanding for the students in the 1st year because they have to cope with changes regarding new requirements and a system of studying being moved form the secondary school to the university. In the teaching of mathematical subjects it is important to consider specificity of the process of acquisition and fixation of mathematical knowledge (Országhová, Gregáňová, Majorová, 2007).

The aim of the teacher is to motivate the students to arise their interest in mathematics. It is important for them to realize that the acquired knowledge will be necessary in other economical subjects. One of the possibilities of motivating the students is to show the necessity of acquiring of mathematics and its consecutive applications in which the use of mathematics results in simplification of many situations and problems of various areas.

Mathematical education supported by IT

Mathematical education without information technology is not possible now. The implementation of e-learning methods into the teaching of mathematics is one way of the improvement of the university education.

The areas in which we can monitor the effect of using information technology in education include:

- Information and communication technologies influence the form and content of the educational process,
- New requirements for independent work of full-time and external study form students,
- Information technology promote active independent learning and individual work of each student, then therefore the success of the study,
- Production of educational materials in the form of electronic documents,
- Electronic testing and evaluation of students' knowledge through computers.

One particular application possibilities of electronic documents in education is the use of Web pages, which should meet the following requirements:

- Easy and comfort handling,
- Multimedia content,
- Clarity of content,
- Availability and reasonable price.

The role of educators is that students understand that information technology and the Internet are not objective knowledge, but primarily a tool for communication, information retrieval and collaboration. They are a means of implementing new forms of education, whether students or teachers.

Tools of information technology allow applications of mathematics teaching in the modern form by e-learning. It is important to choose an appropriate methodological approach creation of interactive curriculum materials in mathematics, making it a useful didactic tool for individual study (Gregáňová, Országhová, 2010).

In teaching process it is necessary to mediate to students not only theoretical knowledge but also possibilities of application in practice. The solving of applied tasks represents one of the possible ways of the innovation of the content and the teaching of mathematics at universities.

Course APPLIED MATHEMATICS on the web sites

We were created e-learning materials on the web sites for students at the SUA in Nitra which are accessible at URL: http://www.fem.uniag.sk/km/aplikovana_matematika/.

Theoretical knowledge, examples, tasks and also applied tasks from physics and economics are on these web sites. The implementation of applied tasks represents one of the possible ways of the content innovation and the teaching methods of mathematics in universities study.

By solving of applied tasks:

- we increase motivation of students to study theoretical methods of mathematics,
- we support and develop creativity of students,
- we demonstrate connection of theory and practical tasks,
- we develop interdisciplinary relations between mathematics and finance,
- we increase quality of education (Országhová, 2005).

Contribution of created web sites is:

- obtaining mathematical knowledge by attractive way of e-learning,
- implementation of new and non-traditional method of teaching of mathematics at universities by using IT,
- development of interdisciplinary relations, supported by solving of applied tasks for profile subjects and practice,
- support of education and professional growth of teachers in field of using IT in university education (Gregáňová, 2005).

Financial aplications in the course APPLIED MATHEMATICS

We present applied tasks of financial mathematics which are accessible at URL: http://www.fem.uniag.sk/km/aplikovana_matematika/.

Next, we introduce chosen thematic units of financial mathematics which are accessible at above mentioned URL:

- Simple Interest (see Fig. No.1)
- Compound Interest
- Continuous Interest

Web sites provide to students ability to study independently in any time and place.

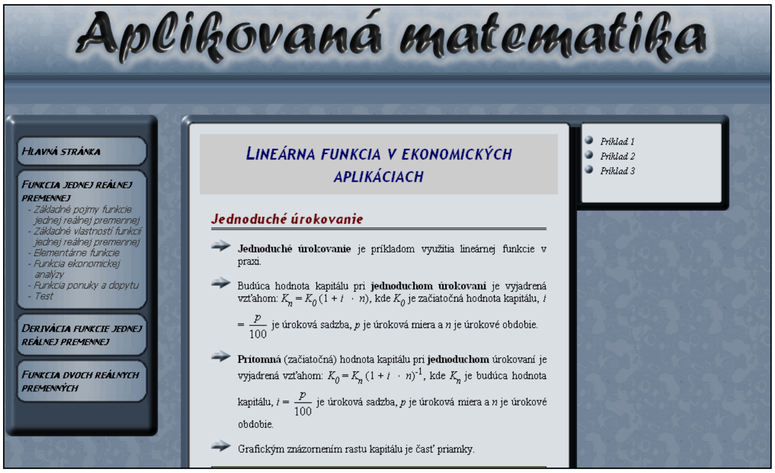


Fig. No. 1: Simple interest tasks - Preview web sites at URL:
http://www.fem.uniag.sk/km/aplikovana_matematika/

Tasks of Financial Mathematics in the courses EULER´S NUMBER

At the SUA in Nitra, the practical realization of educational ways and the creation of study materials are supported by LMS MOODLE. Educational system MOODLE offers for the author of teaching course a variety of modules and activities that can be used in the teaching mathematics. We were created electronic study course with the title EULER’S NUMBER like an alternative method to study independently. This electronic study course provides to students of SUA in Nitra to get knowledge about this important mathematical constant and its application in financial mathematics. This course is accessible at URL: http://moodle.uniag.sk/fem/course/view.php?id=85 (see Fig. No. 2).

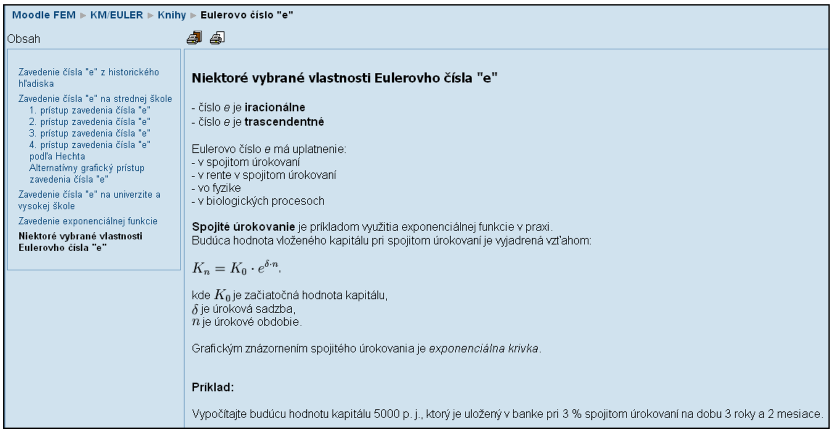


Fig. No. 2: Applied tasks of financial mathematics - preview at URL:
http://moodle.uniag.sk/fem/course/view.php?id=85

The next electronic study materials are created in the form of web sites (see Fig. No.3). We present the created electronic course via web sites with the title Euler’s number e. This course is accessible at URL: http://www.fem.uniag.sk/km/eulerovo_cislo/. Created electronic study materials present introduction of Euler’s number e and they also afford opportunity of applied tasks of financial mathematics.

Fig. No. 3: Applied tasks of financial mathematics - preview web sites at URL: http://www.fem.uniag.sk/km/eulerovo_cislo/

Electronic e-learning materials are created for:
- students of the Slovak University of Agriculture in Nitra,
- students from other universities in Slovak Republic,
- employ Students, which are study at university,
- the admass, it is accessible on the web sites of the FEM SUA Nitra.

Electronic e-learning materials can be recommended to students as an alternative self-study in preparation for testing of mathematics (Gregáňová, Országhová, 2010).

Conclusion

Information technologies in the teaching at universities represent wide possibilities for the use, the application and the preparation of study materials and courses. Method of e-learning increases the attractiveness of education, as well. From long-term experience from the teaching of mathematics at the Slovak University of Agriculture in Nitra we can state that students are interested in applied mathematical subjects. Applied tasks are important motivating factors of the study of mathematics for future economists and managers. The quality of mathematical knowledge is the important factor for the content of education and we can stimulate it by solving of applied tasks. Suitable applications are the gateway to bring mathematics knowledge to students.

The mathematical knowledge level of students will increase by including applications into learning and teaching. Trying to apply mathematics to specialized subjects, to understand the mathematics in their university education has a significant place (Drábeková, Rumanová, 2007).

By modification of the contents of mathematical education we can improve the ability of graduates to apply special mathematical methods in engineering practice and research (Drábeková, Kecskés, 2010).

In the paper we dealt with the educational content from the field of financial mathematics that can be very useful for future economists and managers. Further, by an appropriate choice of applied tasks we show students the usage of the mathematical apparatus in the profile professional branches.

References

[1] DRÁBEKOVÁ, J., KECSKÉS, N. 2010. Model of bactericidal effect of ultraviolet radiation. In Proceedings of the international conference 9th Interantional conference – APLIMAT 2010. Bratislava: STU, 2010, CD, p. 733-738. ISBN 978-80-89313-47-1

[2] DRÁBEKOVÁ, J., RUMANOVÁ, L. 2007. Proposal for e-learning course on school mathematics for students of non-economic faculties SUA. In Proceedings of the international conference „EMATIK 2007“. Bratislava: FMFI UK, 2007, p. 30-34. ISBN 978-80-89186-34-1

[3] GREGÁŇOVÁ, R. 2005. Web pages of mathematics and its utilization in the education process. In Proceedings of the international conference UNINFOS 2005. Banská Bystrica: UMB, 2005, p. 50-54. ISBN 80-8083-103-3

[4] GREGÁŇOVÁ, R., ORSZÁGHOVÁ, D. 2010. Applied problems of financial mathematics on the web sites. In Proceeding of reviewed articles of international conference ISD 2010"Global Economy: Challenges and Perspectives" May 26-28, 2010, Nitra, Slovak Republic.Nitra: SPU, 2010, p. 2501-2524. ISBN 978-80-552-0385-0

[5] ORSZÁGHOVÁ, D. 2005. Applied tasks as the support of interdisciplinary relations between mathematics and physics. In Proceedings of the international conference “Research and Teaching of Physics in the Context of University Education 2005”. Nitra: SPU, 2005, p. 154-157. ISBN 80-8069-528-8

[6] ORSZÁGHOVÁ, D. 2009. Mathematical Analysis Tasks in the Bachelor’s Study at the Faculty of Economics and Management of the SUA in Nitra. In Proceedings of the 6th Conference on Mathematics and Physics at Technical universities with International Participation. Czech Republic, Brno: UO, 2009, p. 189-196. ISBN 978-80-7231-667-0

[7] ORSZÁGHOVÁ, D., GREGÁŇOVÁ, R., MAJOROVÁ, M. 2007. Professional training of economists and managers in the context of the transformation of university education. In Scientific papers on CD of International workshop Curtea de Arges, Arges County. Romania, Nitra-Bucharest, 2007, s. 259-264. ISBN 978-80-8069-857-7

[8] URL: http://moodle.uniag.sk/fem/course/view.php?id=85

[9] URL: http://www.fem.uniag.sk/km/aplikovana_matematika/

[10] URL: http://www.fem.uniag.sk/km/eulerovo_cislo/

Received on April 17, 2013.

Adress

Mgr. Radomíra Gregáňová, PhD.
Department of Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, 94976 Nitra, Slovakia
e-mail: radomira.greganova@uniag.sk

Poďakovanie - Acknowledgement

The paper was supported by grant from Grant Agency KEGA with title “Teaching of mathematics with applications - changes in the content of university mathematical education “, No. 021SPU-4/2011.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

EXPLICIT AND TACIT MATHEMATICAL KNOWLEDGE

EXPLICITNÉ A TACITNÉ MATEMATICKÉ ZNALOSTI

JOZEF HVORECKÝ

ABSTRACT. *A contemporary theory of Management (called Knowledge Management) also addresses ways of human learning. In the conference contribution, its concepts will be used for explaining some sources of difficulties students experience during their learning. We will concentrate on relationships between formal (i.e. explicit) and not-fully-formal and informal (i.e. tacit) knowledge and demonstrate how they interact. Some challenges for the teachers coming from their interrelationships will be exemplified, too.*

KEY WORDS: *Explicit knowledge, Tacit knowledge, Relations between tacit and explicit knowledge, Tacit knowledge facilitation*

ABSTRAKT. *Jedna z moderných teórií v oblasti manažmentu (nazývaná znalostný manažment) sa zaoberá aj učením sa. V príspevky použijeme jej prístupy na vysvetlenie problémov, s ktorými sa stretávajú študenti pri štúdiu matematiky. Budeme sa venovať vzťahu medzi formálnymi (explicitnými) a neformalizovanými a podvedomými (tacitnými) vedomosťami a ukážeme, ako sú previazané. Nakoniec sa sústredíme na možné dôsledky týchto vzťahov pre vyučovanie matematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Explicitné znalosti, tacitné znalosti, Vzťah tacitných a explicitných znalostí, Rozvoj tacitných znalostí*

CLASSIFICATION: *D30, D40*

Úvod

Matematika je verejnosťou chápaná ako náročný predmet a mnohokrát počujeme inak úspešné osobnosti chváliť sa, že ju nevedia a nikdy nevedeli. Chcú tým zrejme naznačiť svoju spätosť so svojimi spriaznencami, o ktorých predpokladajú to isté. Bariéry v prijímaní matematiky ako užitočného a spoločensky prospešného predmetu sa aj preto prekonávajú iba pomaly, hoci úsilie učiteľov a výskumných pracovníkov v oblasti didaktiky matematiky je zamerané na jej sprístupnenie, viď napríklad [1, 2, 3, 4]. V tomto článku naznačujeme jednu z možných ciest postavenú na využití princípov znalostného manažmentu. Zdôrazňujeme potrebu rozvoja tacitných – podvedomých, často až nevedomých – poznatkov, ktoré však hrajú pri riešení úloh zásadnú úlohu, nakoľko robia explicitné vedomosti použiteľnými.

Stručne o znalostnom manažmente

Znalostný manažment je nové odvetvie manažmentu zamerané na vyhľadávanie, zber, uchovávanie a šírenie poznatkov. Znalostný manažment vychádza z dvoch základných zdrojov:

- Prvým zdrojom sú ekonomické teórie. Peter Drucker už v roku 1959 [5] usúdil, že kým v doterajšej histórii ľudstva sa rozvoj dial na základe prírodných zdrojov (pôda, nerastné bohatstvo, ľudská sila), nastupuje obdobie, keď sa rozvoj bude najvýraznejšie opierať o intelektuálny kapitál, čiže schopnosť jednotlivcov a tímov podporovať ekonomický rast efektívnejším využitím prírodných zdrojov, založeným na inovatívnych riešeniach. Drucker tým postavil do popredia potrebu rozvoja intelektuálneho kapitálu a ľudských zdrojov vôbec.

- Druhým zdrojom sú informačné a komunikačné technológie (IKT), predovšetkým oblasť umelej inteligencie. Vývoj ukázal, že IKT sú schopné veľmi úspešne nahradiť časť ľudských schopností, zatiaľ čo iná časť je pre nich zatiaľ nedosiahnuteľná. Medzi oblasti, v ktorých sú počítače úspešné patrí schopnosť zapamätať si údaje veľmi spoľahlivo a na prakticky neobmedzene dlho, presne vykonávať náročné výpočty, či nepretržite a bez únavy riadiť výrobu. Zlyhávajú však v oblastiach, v ktorých sa uplatňuje intuícia alebo vrodené dispozície.

To viedlo k rozlišovaniu dvoch typov poznatkov: explicitných a tacitných. Explicitné poznatky sú tie, ktoré sú presne špecifikované a zaznamenané štandardizovaným spôsobom na médiách. V matematike do tejto skupiny patria okrem vzorcov aj grafy, geometrické konštrukcie, zobrazenia priestorových telies atď. Vo väčšine oblastí ľudského poznania vznikli „jazyky“, ktoré zjednodušujú zápis poznatkov a tým aj komunikáciu medzi nimi: zápis melódií do notovej osnovy, chemické vzorce, technické výkresy a pod. Ostatné poznatky označujeme ako tacitné. Sú postavené na skúsenostiach a ich vlastník niekedy ani netuší, že ich má – a ak o nich aj vie, nedokáže ich bezprostredne odovzdať iným. V matematike sem patrí schopnosť rozpoznať, ktorý vzorec je na riešenie danej úlohy najvhodnejší. Počítače preto pri riešení spravidla využívajú metódu pokusov a omylov, počas ktorej sa snažia zosúladiť tvar vzorca s typom úlohy a vyskúšať, „či to vyjde“. Stojí za povšimnutie, že slabší žiaci postupujú rovnako. V obidvoch prípadoch je dôvod rovnaký – snaha využiť explicitné poznatky v presvedčení, že ich aplikovaním dosiahnu cieľ. Tú istú úlohu pritom okamžite vyrieši spolužiak, ktorý má viac tacitných poznatkov v danej oblasti. Obidva druhy poznatkov sa totiž dajú rozširovať.

Nonaka a Takeuchi [6] vypracovali tzv. SECI model, ktorý naznačuje rast ľudských poznatkov prostredníctvom interakcie tacitných a explicitných poznatkov – viď obr. 1.

	Tacitné poznatky	Explicitné poznatky
Tacitné poznatky	**Socializácia**	**Externalizácia**
Explicitné poznatky	**Internalizácia**	**Kombinácia**

Obrázok 1: SECI model

Nositelia tacitných poznatkov komunikujú s nositeľmi (vo všeobecnosti iných) tacitných poznatkov v procese, ktorý nazývame *socializáciou* (S). Tá sa deje buď formou neformálnej výmeny poznatkov, diskusiu, rozprávaním príbehov a podobenstiev, ale aj introspekciou. Socializácia je zrejme najstaršou metódou získavania poznatkov. Je aktuálna dodnes napríklad vo forme dialógu, učňovských praxí, couchingu, mentoringu a pod. Učenie počas socializácie je vlastne transformáciou tacitných poznatkov na nové tacitné.

Úspech predchádzajúcej metódy výrazne závisí od schopnosti nadviazať adekvátnu komunikáciu. *Externalizácia* (E) je snahou odosobniť ju a vyjadriť poznatky v podobe nezávislej od podávajúceho. Poznatky musia byť reprezentované v dohovorenej a zrozumiteľnej podobe (ako čísla, texty, vzorce, obrázky atď.). Takto spracované poznatky sú jednak vodnejšie na širšiu distribúciu a zároveň umožňujú „dialóg“ s autorom, ktorý prestáva byť viazaný na konkrétne miesto a okamih. Typickou externalizáciou v matematike je transformácia slovnej úlohy na vzorec. Učenie počas externalizácie vedie k zmene tacitných poznatkov učiaceho sa na explicitné – „zviditeľnené“.

So zápismi v externalizovanej podobe sa dá pracovať a tým rozširovať poznanie. Tento proces sa označuje ako kombinácia (C). Matematika je disciplínou, v ktorej hrá kombinácia mimoriadnu úlohu. Tak, ako učiaci sa nadobúda skúsenosti s formálnymi manipuláciami, nadobúda popri nových explicitných poznatkoch aj tacitné. Pravidlá „kombinovania" sú v matematike presne definované – až do takej miery, že ich dokážu vykonávať stroje. Ako príklady môžu slúžiť tabuľkové kalkulátory, programy ovládajúce manipuláciu s formálnymi výrazmi (tzv. CAS – z angl. Computer Algebra Systems), programy dynamickej geometrie, umožňujúce animovanie geometrických konštrukcií a/alebo priebehov funkcií.

V poslednej etape, nazývanej *internalizácia* (I), ľudia získané poznatky interpretujú, snažia sa im porozumieť a začleniť ich do vlastného systému poznatkov. Bez internalizácie sa novo nadobudnutý poznatok ľahko stratí – zabudne. Iba potom, keď nový poznatok úspešne internalizuje, stane sa jeho nositeľ schopným ho využívať – hovoriť o ňom, kriticky ho hodnotiť, oznamovať ho ďalším – teda spraviť súčasťou svojej znalostnej bázy využívanej pri socializácii. Práve zosobnenie poznatku patrí medzi základné ciele vzdelávania.

Názov modelu využíva začiatočné písmená jednotlivých procesov. Získavanie poznatkov však prebieha zložitejšie, ako by sa zdalo z povrchného pohľadu na obr. 1:

- **Učenie sa vo vnútri jednotlivých kvadrantov**: Počas socializácie sa učíme prezentovať vlastné názory a skúsenosti, chápať spôsob rozmýšľania partnerov, rozumieť ich mentalite a pocitom. Behom externalizácie sa snažíme vyjadriť svoje myšlienky presne a jednoznačne. Učíme sa, ktorý formát je vhodný na zamýšľaný účel a ako vyjadriť myšlienku stručne, napríklad vzorcom alebo obrázkom. Počas kombinácie sa učíme plánovať a kontrolovať svoje kroky tak, aby viedli k novému poznatku. Keď v priebehu internalizácie ho zaraďujeme medzi existujúce, učíme sa reorganizovať ich doterajšiu štruktúru tak, aby spolu s novým poznatkom tvorili nový, zdokonalený systém.
- **Učenie sa počas pohybu v smere hodinových ručičiek:** Cyklus S-E-C-I sa začína zrodom myšlienky v mysli jednotlivca alebo počas dialógu (S). Zatiaľ vágnu myšlienku sa jej autor snaží formulovať čo najpresnejšie (E). Predbežný výsledok sa potom kombinuje s už existujúcimi poznatkami, testuje sa, či a do akej miery je s nimi kompatibilný a či je vierohodný (C). Aby sa stal súčasťou intelektuálnej výbavy, treba ho „ustáliť" – zvyknúť si naň a naučiť sa ho využívať (I).
- **Trvalé učenie sa**: po skončení úplného kruhu sa poznatok spravidla predkladá komunite na posúdenie. Poznatok sa dozvedajú aj tí jej členovia, ktorí o ňom doposiaľ nevedeli, vďaka čomu sa učenie komunity ako celku urýchľuje. Vďaka „socializácii poznatku" sa môže začať nový cyklus S-E-C-I-S-E-C-I-S-… Tým vzniká tzv. dvojúrovňové učenie sa, pri ktorom jedinec môže čerpať zo spoločného fondu poznatkov a – na rozdiel od Robinsona Crusoea – nie je odkázaný na získavanie každého z nich izolovane a na vlastné riziko.

SECI model a vyučovanie matematiky

SECI model naznačuje, prečo sa nemôže stotožňovať matematické poznanie so schopnosťou rýchle a efektívne vykonávať matematické operácie: výpočty, úpravy vzorcov, konštruovať geometrické útvary atď. Takéto činnosti svojou podstatou patria medzi kombinácie, t. j. tvoria obsah iba jedného zo štyroch kvadrantov – kvadrantu E. Hoci aj pri kombináciách, ktorými meníme existujúce explicitné poznatky na nové explicitné, vznikajú aj tacitné poznatky, sú však viazané iba na vhodnosť a bezchybnosť manipulácií. Teda nie na ich zmysluplnosť v celkovom kontexte ľudského poznania. Pritom práve kontext hrá pri riešení mnohých matematických úloh zásadnú úlohu.

Porovnajme dve úlohy:

- *Priemerný kôň váži 670 kg. Koľko váži 17 koní?*
- *Priemerný kôň beží rýchlosťou 24 km/hod. Ako rýchlosťou beží 17 koní?*

Schopnosť vykonávať matematické operácie nie je v druhej úlohe previazaná so schopnosťou dať správnu odpoveď. Podstatná je tacitná znalosť o tom, že rýchlosť behu koní nedá skladať rovnakým spôsobom ako ich hmotnosť. Schopnosť násobiť je potrebnejšia pri prvej úlohe, lebo bez nej sa nedá dostať k výsledku. Úlohy uvedeného typu by mali viesť k tacitnému poznatku: *Nie všetko, čo vyzerá ako výpočtová úloha, ňou naozaj je.*

Ďalšia dilema vzniká vtedy, keď znenie úlohy dovoľuje viac interpretácií. To ukazuje nasledujúca úloha:

- *Kapela zahrá istú skladbu za 5 minút. Ako rýchlo zahrá rovnakú skladbu 5 kapiel?*

Ak si kapely skladbu rozdelia, stihnú to za minútu. Ak sa rozhodnú hrať naraz, potrvá to 5 minút, ak po sebe, tak 25. O zmysluplnosti jednotlivých alternatív možno teda viesť diskusiu. Tá môže viesť k spresneniu pôvodného zadania tak, aby bolo jednoznačne jasné, ktoré riešenie máme na mysli – teda k externalizácii výsledkov diskusie. Poznatok o existencii úloh, ktoré majú odlišné (a protichodné) riešenia vinou nejednoznačnosti formulácie by sa mal v študentoch internalizovať. Len v takom prípade budú schopní odhaliť podobné viacznačnosti textov v budúcnosti.

Socializácia v matematike môže mať podobu diskusie o vhodnosti a primeranosti nástrojov. Mnoho úloh má niekoľko riešení, ktoré sa líšia obťažnosťou a presnosťou (viď napr. [7]). Aj na nich sa dá demonštrovať, že matematika nie je až taká rigorózna veda, ako sa z neznalosti domnieva verejnosť. Tieto poznatky sú však matematikom známe už od 30-tych rokov minulého storočia [8], ale ich prezentovanie v exaktnej podobe presahuje úroveň všeobecnej matematickej gramotnosti. Aj medzi matematikmi samotnými sa dajú očakávať rozpory o vhodnosti podobných zjednodušení.

Externalizácia sa pri vyučovaní matematiky uplatňuje najmä pri riešení slovných úloh. Žiaci však málokedy formulujú aj zadanie. To je spravidla vopred pripravené a úlohou žiakov je iba priradiť formulu k slovnému zadaniu a vložiť do nej konštanty, ktoré sú jeho súčasťou. Vyššie sme naznačili, že žiaci môžu byť zapojení aj do formulácie riešenia. V ideálnom prípade by mali socializáciou prísť k prvotnej, počiatočnej formulácii a počas externalizácie ju spresňovať.

Kombinácia môže, ale nemusí mať tradičnú podobu. Pretože ju dnes dokáže vykonávať aj IKT, práve jej využitie môže veľmi efektívne demonštrovať ako jeden z krokov v SECI cykle – nie dominantný, ale čiastkový. Ide o ústup z tradičných pozícií vo vyučovaní matematiky smerujúci k „zrovnoprávneniu“ kombinácie s ostatnými komponentmi SECI modelu. V niektorých učebniciach (napr. [9]) sa už podobný prístup začína objavovať.

Cyklus by mal končiť internalizáciou. Tá má adresovať nielen návyky získané pri riešení úlohy, ale aj viesť k pochopenie hlbšieho obsahu realizovaných činností a ich potenciálneho využitia v budúcnosti. Učiacich sa treba pýtať, v čom vidia užitočnosť nového poznatku, čím sa podobá na už známe a čím sa od nich líši. Z tohto pohľadu je dôležité, aby napríklad učebnice na odborných školách adresovali tie oblasti matematiky, s ktorými bude mať študent najväčšiu pravdepodobnosť sa stretnúť a teda si predstaviť ich uplatnenie. Neučiť teda „matematiku ako takú“, ale „matematiku ako súčasť profesijnej prípravy“. Takýto prístup zároveň prispeje aj k motivácii študentov a teda k ich ochote učiť sa.

Záver

Ako vidieť, vo vyučovaní matematiky sa dajú uplatňovať všetky komponenty SECI modelu. V súčasnosti sa však vyučovanie matematiky koncentruje na kombinácie – na kvadrant, v ktorom dominujú explicitné poznatky. Získavanie poznatkov socializáciou, externalizáciou a internalizáciou nie je bežné. Študenti teda nemajú možnosť rozvíjať si tacitné poznatky. Príležitostné stretnutia s nimi sú spravidla nedostačujúce na pochopenie širších súvislosti.

Tacitné poznatky majú v tomto zmysle „nadmatematickú" hodnotu. Dovoľujú diskutovať nie o matematických postupoch, ale o matematike ako celku. Ich dôležitosť naznačuje skutočnosť, že vystupujú v 3 zo 4 kvadrantov – rovnako ako explicitné. Nejde teda o nič iné, ako o úprava pomeru smerom k rovnováhe.

Samozrejme, vzniká otázka, kde vziať adekvátny časový priestor. IKT ponúkajú riešenie – preniesť na ne podstatne vyšší podiel rutinných výpočtových činností a viac sa sústrediť na chápanie toho, čo sa vlastne pri riešení deje. V danej chvíli je už na internete dostatok izolovaných príkladov zo všetkých oblastí matematiky. Výzvou pre didaktiku matematiky je metodologicky ich zjednotiť, dať im spoločný rámec a vhodným spôsobom do nich zapracovať kompletné cykly SECI.

Literatúra

[1] Čeretková Soňa (2010): Projekt 7RP PRIMAS. Jasná pod Chopkom: JSMF, Zborník 42. konferencia slovenských matematikov, str. 26.

[2] Vankúš Peter (2012) Didaktické hry v matematike. Bratislava: Univerzita Komenského. 144 str. ISBN 978-80-8147-002-8.

[3] Winklerová Dana (2008): Hravá čísla. Praha: Junior. 20 str. ISBN 80-7267-320-3.

[4] Barry Cipra (2001): Chibičky. Praha: Dokořán. 78 str. ISBN 80-86569-26-8.

[5] Peter Drucker (1959): Landmarks of Tomorrow. New York: Harper&Brothers, 403 s.

[6] Ikujiro Nonaka, Hirotaka Takeuchi (1995): The Knowledge-Creating Company – How Japanese Companies Create the Dynamics of Innovation. Oxford University Press, London.

[7] Gabriela Lovászová, Jozef Hvorecký (2002): When There is More Ways to Get There… Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Zaven Karian, Gary Fitz-Gerald (editors): Proceedings of the Seventh Asian Technology Conference in Mathematics, ATCM, Melakka, str. 263–272, ISBN 983-41193-0-5

[8] Pavol Zlatoš (1995): Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou. Bratislava: IRIS, 208 s., ISBN 80-88778-09-3

[9] Adrian Oldknow, Ran Taylor, Linda Tetlow (2010): Teaching Mathematics Using ICT. London: Continuum International Publishing Group, 3rd edition, 311 str. ISBN 978-1441-156-88-4

Článok prijatý dňa 18. apríla 2013.

Adresa autora

Prof. RNDr, Jozef Hvorecký, PhD.
Katedra informačných technológií, Vysoká škola manažmentu, Panónska cesta 17, SK - 851 05, Bratislava, e-mail: jhvorecky@vsm.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

USING GRAPHIC DISPLAY CALCULATOR IN SOLVING SOME PROBLEMS CONCERNING CALCULUS

JOANNA JURECZKO

ABSTRACT. *Calculus is considered as one of the most difficult topics in mathematics taught in high schools all over the world. A lot of students have problems with understanding the crucial objects like: limits of functions, geometric interpretation of derivative or even patterns of derivatives. It has occurred that ICT can help students muddle through this topic easily and helps them to understand it deeply. In this paper the role of graphic display calculator will be examined.*

KEYWORDS: *mathematics learning, limits, derivatives, graphic display calculator.*

CLASSIFICATION: *B10, C70, D40, Q60.*

Introduction

Teaching and learning mathematics in all levels is kind of a challenge for both teachers and students. As it appears some topics are more difficult than others. One of the most difficult topics taught in high schools is calculus, where majority of students have problems with understanding some crucial objects concerning this topic like: limits of functions, graphic interpretation of derivatives or even assimilation of patterns for derivatives. As a result, when students cannot understand such objects they do not want to learn further applications of differentiation. The consequence of such a situation may be an inability of studying some technical faculties at universities. Obviously not all syllabuses in high schools include this topic. However, one of such high school programs in which calculus is obligatory is International Baccalaureate Diploma Programme.

International Baccalaureate Diploma Programme (shortly IB) was established in 60s' of the last century in Geneva for gifted students aged 3-19. Nowadays International Baccalaureate Organization (shortly IBO) collaborates with about 3,500 schools in more than 100 countries all over the world. This program is divided into three groups: Primary Years Programme for children aged 3-12, Middle Year Programme for students aged 11-16 and Diploma Programme for students in age 16-19. As for this paper only Diploma Programme will undergo further consideration. (For further information you visit the Internet websites eg. ibo.org.pl).

Mathematics in Diploma Programme is divided into three levels:

1. mathematics higher level dedicated for students who want to continue their studies in technological universities or faculties closely deriving from mathematics,
2. mathematics standard level for students who are not to study mathematics directly but enroll in faculties using applications of mathematics (like economics, biology, chemistry, etc.)
3. mathematical studies standard level for other students.

Teaching and learning mathematics in all levels require their own syllabus but all of them are connected with using graphic display calculator which is a mandatory device used in all mathematical activities in this class and during final exams. Further information are to be found in [1] and [2].

Graphic display calculator (shortly GDC) was introduced to teaching mathematics in 90s' of the last century. At the beginning both teachers and students were skeptically as disposed to using this device. However, some researchers started to carry out their studies in which they showed that GDC could have positive influence on students while learning mathematics. Moreover, GDC could make this process more attractive for teachers and students. In the first decade of this century more and more researchers showed a significant impact of this tool on learning mathematics. For additional information concerning the usage of GDC during lessons, difficulties students had to face and problems while using it during public examinations (see [3], [4], [5], [6]). The researches were conducted in different fields of mathematics (not only for high school students) but we will focus only on some parts of calculus. Other papers concerning similar problems are to be found in [7], [8], [9]. Nevertheless, it seems that among these papers propositions of using GDC in finding limits and patterns for particular kinds of derivatives were not verified. Hence, my goal was to verify these propositions and find further applications of using GDC.

Prior to the research I asked the question

1. How can we use GDC in teaching students calculus?
2. How much teacher should engage himself/herself in teaching derivatives if he/she uses GDC?
3. Is it a good idea to use GDC in all activities concerning calculus?
4. What are the dangers of using GDC in these topics?

Although I was able to find a full answer for most questions asked, for some I have obtained only a partial answer.

Methodology and collecting data

The research was carried out among two groups of students attending IB class (higher level). The first group (named A) consisted of ten people (two girls and eight boys) whereas the second one (named B) consisted of 12 students (six girls and six boys). All students were taught by me. Students in both groups worked during normal 45-minute lessons. There were six lessons observed (four in the second group). Moreover, group B was in the first year whereas group A in the second year of IB class hence there were no similar tasks for both of them. In group A I carried out research tasks concerning limits of sequences and convergence of series. However, in group B I took into account the topics concerning limits of functions and patterns. In this paper I have limited my analysis to the second group only.

Each lesson had the same scheme. At the beginning of any given lesson I provided students with GDCs and tasks for solving. Additionally I introduced the topic but without any specific and particular propositions of solutions. During each lesson my help was restricted to solving problems with GDC itself (for example syntax errors). However, I did not propose or suggest any solution. Because the research was carried out during the initial lessons concerning the issue of differentiation and before the introduction of exponential and logarithmic functions and trigonometry I only considered polynomials and rational functions. However, the second type of functions I only considered in the first lesson about limits. During particular lessons students obtained such tasks to work with:

1. Finding limits of polynomials and rational functions.
2. Finding the patterns for derivatives of polynomials with different coefficients and degrees with at least two coefficients different than zero (the crucial was the pattern for $y = ax^n$ where a is a real number and n is a natural number which was the first part of this investigation).

3. Finding the patterns for derivatives of composite functions in the form:

$$y = (polynomial\ of\ degree\ k)^n$$

where k and n are natural numbers and examining roots of functions and their derivatives. Among others there were examples in which the inner function had real roots but there were also examples with complex roots only.

4. Examining monotonicity and concavity of polynomials by observing behavior of the first and the second derivatives.

Students during all lessons worked individually. Additionally, all lessons were recorded. During all lessons students used Casio fx – cg 20 with color and very precise screen.

Analysis

After the research I analyzed not only students' work papers but also recording. Since each lesson was concerned with another problem I took every lesson into account separately. It is worth to emphasize that in almost all tasks students used GDC mode Graph but some of them used Dyna Graph (during lesson 2) and Table (during lesson 1). However, it seemed that the mode Graph occurred the best one for this topic due to its visual aspects. Even though one can find Dyna Graph equivalent useful, in the aforementioned model of Casio GDC this mode works very slowly, hence it is rather not efficient enough. Below there is an analysis of each lesson respectively to the order presented in the previous paragraph.

1. Finding limits of polynomials and rational functions. During solving these tasks students who used only GDC mode Graph had no problems with finding proper limit which tended to the real number. However, students who used only Table mode were concentrated on the information of „no value" if the limit tended to a point in which the function was not defined. It is worth to note that almost half of students decided to use Table. Although none of them found answer no one checked the limits using mode Graph. Nevertheless, such problems did not occur when students considered limits of functions tending to infinity. In these kinds of examples students used only mode Graph because, as they emphasized in the interview, Table showed only finite number of values of the function. At this point we can sum up this lesson with an observation that students can understand sense of limits of functions but only when they use GDC mode Graph.

2. Finding the patterns for derivatives of polynomials. Students started their investigation with constant functions, next they proceeded to questions which were concentrated on linear, quadratic and cubic functions, but only in the form of monomials, i.e. $y = ax^n$ for $a \in R$ and $n \in N$. Students without any problems generalized the derivative of monomials, but more complicated examples of polynomials for which at least two coefficients were different than zero were rather difficult for almost half of students. Although students discovered the pattern for $y = ax^n$ they could not apply it for further polynomials, i.e. students could not discover patterns for sums and subtraction of monomials especially in the functions in which free term was equal to zero. We can sum up this lesson that without teacher's help the second part of the task was too difficult for students although they analyzed each pair of graphs simultaneously (the graph of function and its derivative on the same screen). Hence it is a good idea to use GDC to show students the relations between both graphs (of functions and corresponding derivatives). However, more complicated examples may confuse students.

3. Finding the patterns for derivatives of composite functions in the form

$$y = (polynomial\ of\ degree\ k)^n$$

where k and n are natural numbers. Students prior to this lesson were taught about composite functions especially where inner and outer functions are polynomials. In this part of the research their task was to recognize the patterns for derivatives of such a type of functions. During the whole work all student did not use any reduction formulas. They did not show for functions like polynomials but for composite functions only. Before this lesson they practiced calculating derivatives of polynomials. However during this lesson they were only concentrated on observing GDC screen. Additionally, students had different kinds of examples to solve. The first ones were when the inner function had real root(s). As a result students without any problems found roots which were common for the functions and their derivatives. Nevertheless, almost none of them found another zeros of derivatives which occurred in the derivative of composite function. The further examples in which the inner functions had no real roots did not help students. In this way students were not able to find general pattern for composite functions. To my surprise students had even problem with evaluating the degree of the derivatives of such functions. In this task GDC was not so helpful as before as it did not facilitate students to draw any generalizations.

4. Examining monotonicity and concavity of polynomials. The last lesson was the most difficult for students. Only four of twelve students tried to find similarities between the first derivative and the graph (examining monotonicity) and the second derivative and the function (examining concavity). (Some other students were concentrated on finding roots but they obtained wrong conclusions hence their work was no longer analyzed by me). Two of the four students finished their work successfully giving the proper theorems but without any assumptions. What is worth noticing is that students during the whole research knew only polynomials and rational functions and they did not know that there are functions which have no derivatives in particular points. In this research GDC was completely useless when students were unaided by the teacher as they had no prior knowledge what is the interpretation of the first and second derivatives. Without such information from the teacher students can find examining functions with GDC a waste of time

Further propositions

Further research was conducted in the same group of students. The research concerned integrations. This part of research will be presented very briefly due to the size of this paper.

Students' task was to find a general pattern for integrals while using GDC only. Because previous investigation focused on derivatives of polynomials, in this case students discovered general pattern for $\int ax^n dx,$ where a – real number and n –natural number. Students were unable to use mode Graph or any other mode because GDC can only calculate definite integrals. When I prompted my students, that they can consider $\int_0^x ax^n dx$ they quickly concluded the relation between differentiation and integration for other polynomials. They still did not understand the sense of the definite integrals and they completely confused when they started to examine $\int_0^x e^x\, dx$. They knew that $(e^x)' = e^x$ but the graph of $y = e^x$ and graph of its integral did not covered. Only they widened their investigations into the integral $\int_0^x e^x\, dx$ for $x \in \{-1, 0, 1\}$ they were able to understand sense of definite integrals and soon after they quickly created the pattern similar to Newton-Leibniz formula. However, it is crucial to emphasize at this point that students considered only polynomials and the functions $y = e^x$. Other examples have been not considered yet (especially trigonometric functions). In this topic GDC was very helpful for finding some basic patterns of integration but in a restricted sense due to the fact that students could only observe definite integrals and they did not recognize the sense of undefined ones.

Conclussions

Students used GDC for a few months prior to the research and they were familiarized with modes Graph and Table hence they had no problems with using those tools efficiently. However they solved some tasks focused on generalizations (especially using graphs) but only a few students were able to do all tasks properly. The only risk is that they could be familiar with these topics somewhere earlier.

Generally, the research showed that students unaided could generalize patterns only for simple tasks. However, in more complicated examples they could not apply obtained patterns for further examples. It means that the problem is not connected with the proper usage of GDC but with mathematical skills needed for a process of generalization. Even though GDC came in handy in this task, it could not substitute the logical thinking.

In the interview conducted after the research students admitted that they were so preoccupied with using GDC itself that they did not find any other solutions. However, they would probably be able to find general patterns otherwise. Additionally, they seemed to believe that they probably would not discover the main theorems of calculus because they worked only on polynomials (and rational functions in the case of limits).

Although students had some problems with differentiation they hardly had any problems with generalization of patterns for integrals. It means that students have to have more stimuli in solving tasks.

Answering the questions set in the introduction we can conclude that

1. It is a good idea to use GDC mode Graph to introduce sense of limits of functions rather than mode Table (especially in points where the function is undefined).
2. GDC can be used for finding general patterns for derivatives of monomials but for polynomials with at least two coefficient different than zero it seems to be too difficult (without any aid from the teacher).
3. Examining some other behavior of derivatives occurred too difficult for the majority of students (especially in the field of monotonicity and concavity but also for derivatives of composite functions).

To conclude finally, it seems profitable to use GDC in topic of limits and calculus. However, a teacher should do it in moderation. Moreover, a teacher should be engaged in teaching derivatives and integrals with GDC too as it appears that students familiar with modern calculators, when unaided, have problems with the generalization and confirmation of previously obtained patterns.

This research has showed that there are some dangers of investigation calculus with GDC. Hence in some examples it is the main role of the teacher to correct improper thinking of the students in order not to develop bad habits among them.

In the nearest future the research is planned to be repeated among randomly chosen students from universities (who are to learn calculus) in order to confirm or rejects my current observations.

References

[1] Jureczko J. (2012). The role of mathematics in programs: International Baccalaureate Diploma and Polish Diploma, part 1 (in Polish), Nauczyciele i Matematyka plus Technologia Informatyczna. Summer 2012, no. 82, p.26-30.

[2] Jureczko J. (2012). The role of mathematics in programs: International Baccalaureate Diploma and Polish Diploma, part 2 (in Polish), Nauczyciele i Matematyka plus Technologia Informatyczna. Autumn 2012, no.83, p. 21-26.

[3] Berry J., Graham E., Smith A. (2006). Observing student working styles when using graphic calculators to solve mathematics problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vo. 37 no. 3, 15 April 2006, p. 291-308.

[4] Foster P. A., Taylor P. C. (2003). An investigation of communicative competence an upper-secondary class where using graphics calculators was routine. Educational Studies in Mathematics, 2003, 52, p.57-77.

[5] Foster P.A., Mueller U., Haimes D., Malone J. (2003). Impact on school assessment where use of graphics calculators is mandatory in a related public examination}. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 2003, vol. 34, no. 3, 343-359.

[6] Mitchelmore M., Cavanagh M. (2000). Students difficulties in operating a graphics calculator. Mathematics Education Research Journal, 2000, vol. 12, no. 3, 254-268.

[7] Goetz A., Kahan J. (1995). Suprising Results Using fo Derivatives}. The Mathematics Teacher, Jan 1995, 88, 1; p. 30-33.

[8] Gordon S. P., Gordon F. S.(2002). Using data analysis to motivate derivative formulasMathematics and Computer Education, Fall 2002; 36, 3; p. 247-253.

[9] Forster P. A. (2004). Efficient Use of Graphics Calculators in High School Calculus.The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education; 2004, 11, p. 13-23.

Received on April 16, 2013.

Address

Dr Joanna Jureczko
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, College of Sciences, Cardinal Stefan Wyszynski University in Warsaw, Dewajtis Street, No. 5, 01-815 Warsaw, Poland,
e-mail: j.jureczko@uksw.edu.pl

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON AN APPROXIMATION OF NUMBER π

O JEDNOM ODHADE ČÍSLA π

MICHAELA KLEPANCOVÁ – MAREK VARGA

ABSTRACT. *In the arcticle with the help of the elementary geometric considerations we will try to find Viete´s formula for evaluation the number π. At the same time we find the possibility of approximation of this constant.*

KEYWORDS: π *, inscribed circle, circumscribed circle, aproximation*

ABSTRAKT. *V článku sa pomocou elementárnych geometrických úvah pokúsime nájsť Vieteov vzorec na výpočet čísla π. Súčasne nájdeme možnosť aproximácie tejto konštanty.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Ludolfove číslo, kružnica vpísaná (opísaná) n – uholníku, aproximácia*

CLASSIFICATION: *A 308*

Úvod

Eulerova formula $e^{i\pi}+1=0$ je považovaná za najkrajší matematický vzorec. Obsahuje totiž základné konštanty matematickej analýzy, algebry, teórie čísel i geometrie. V ďalších riadkoch sa budeme venovať práve číslu π, spomenutému aj v uvedenom vzťahu, ktoré poznáme predovšetkým z geometrie. Toto číslo je známe už z viacerých starovekých civilizácií, pričom každá používala svoju vlastnú aproximáciu. Napríklad v babylonskej matematike sa počítalo s hodnotou $\pi \doteq \frac{25}{8} = 3{,}125$; egyptskí matematici zas položili $\pi \doteq \frac{256}{81} \doteq 3{,}1605$; v Biblii postačila aproximácia $\pi \doteq 3$. Zatiaľ čo náš prvý uvedený odhad je asi z obdobia 2000 rokov p. n. l., Archimedes zo Syrakúz v dobe približne 200 rokov p. n. l. už našiel ohraničenie $\frac{223}{71} \doteq 3{,}140 < \pi < \frac{22}{7} \doteq 3{,}142$. Ďalší záujem o toto číslo prichádza až v stredoveku – Viete ho určil s presnosťou na 9 desatinných miest, van Roomen na 15, Ludolf van Ceulen dokonca na 35 desatinných miest (v roku 1610). Odvtedy číslo π nesie označenie Ludolfove číslo.

Nasledujúcimi úvahami sa pokúsime odvodiť rovnosť

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots=\frac{2}{\pi},$$

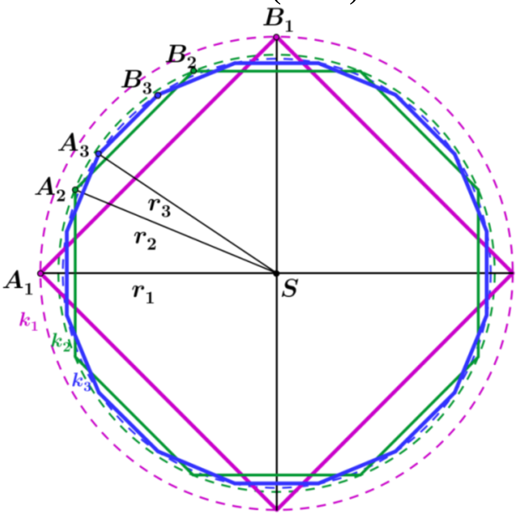
ktorú ešte v roku 1593, no odlišným spôsobom, objavil francúzsky matematik Francois Viete a ktoré zovšeobecnil Leonard Euler v tvare

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

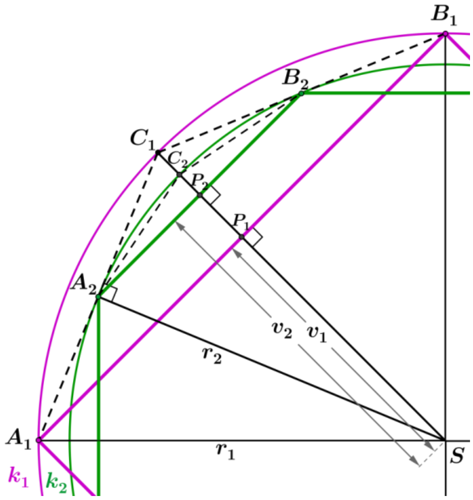
Z nášho postupu vyplynie aj istá možnosť odhadu čísla π .*

Kružnice opísané *n* - uholníku

Uvažujme postupnosť pravidelných 2^{n+1}- uholníkov s konštantným obvodom *o*. Nech kružnice k_n (kde $n = 1, 2, \dots$) opísané uvažovaným 2^{n+1}- uholníkom sú sústredné so stredom v bode S (obr. 1).



Obrázok 1



Obrázok 2

Označme A_1B_1 stranu pravidelného 2^2 - uholníka s obvodom *o*, potom pre jej dĺžku samozrejme platí $|A_1B_1| = \dfrac{o}{4}$. Ak bod S je stred kružnice k_1, opísanej uvažovanému štvorcu, potom úsečka SA_1 je jej polomerom (obr. 2).

Označme P_1 pätu kolmice z bodu S na stranu A_1B_1 uvažovaného štvorca, t.j. úsečka SP_1 je výškou z bodu S na stranu uvažovaného štvorca. Dĺžku polomeru SA_1 kružnice k_1 označme r_1 a dĺžku výšky z bodu S na stranu A_1B_1 uvažovaného štvorca ako v_1, teda $|SA_1| = r_1$, $|SP_1| = v_1$.

Nech úsečka A_2B_2 je stranou nasledujúceho pravidelného 2^3- uholníka s obvodom *o*. Potom pre jej dĺžku a veľkosť uhla A_2SB_2 platí $|A_2B_2| = \dfrac{o}{8}$, $|\measuredangle A_2SB_2| = \dfrac{360°}{8}$, t.j.

$$|A_2B_2| = \frac{1}{2}|A_1B_1|, \quad |\measuredangle A_2SB_2| = \frac{1}{2}|\measuredangle A_1SB_1|.$$

To však znamená, že stranu A_2B_2 pravidelného osemuholníka môžeme zostrojiť ako strednú priečku trojuholníka $A_1B_1C_1$, kde bod C_1 je priesečník osi uhla A_1SB_1

---

* V predošlých riadkoch sme spomenuli velikánov, ktorý sa snažili vyčísliť π logickými, tj. matematicky korektnými, postupmi. Ako protiklad k tomuto riešeniu problémov môžeme tradične použiť politikov a ich správanie. V roku 1897 sa v štáte Indiana jednoducho rozhodli, že "správnu" hodnotu π môžu uzákoniť legislatívne... Našťastie, táto procedúra bola prerušená istým matematikom, ktorý zhodou náhod sa tohto zasadania zúčastnil.

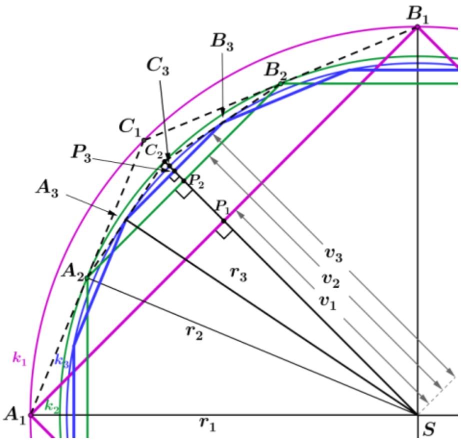
s kružnicou k_1. Potom je polomerom kružnice k_2, opísanej uvažovanému osemuholníku. Nech P_2 je päta kolmice z bodu S na stranu A_2B_2 uvažovaného osemuholníka, t.j. úsečka SP_1 je výškou z bodu S na stranu uvažovaného osemuholníka. Dĺžky úsečiek SA_2, SP_2, podobne ako v predchádzajúcom prípade označme $|SA_2| = r_2$, $|SP_2| = v_2$. Keďže r_2 je dĺžka strany a v_2 dĺžka výšky na základňu rovnoramenného trojuholníka A_2SB_2, je zrejmé, že platí $r_2 > v_2$.

Z obr. 2. tiež vidíme, že $r_2 - v_2 = |C_2P_2| < |C_1P_1| = r_1 - v_1$. Keďže v_2 je výškou na stranu A_2B_2 rovnoramenného trojuholníka A_2B_2S, kde $|A_2S| = |B_2S| = r_2$, tak $r_2 - v_2 > 0$. Odtiaľ už vyplýva platnosť nerovnosti $0 < r_2 - v_2 < r_1 - v_1$. No vzhľadom k tomu, že úsečka A_2C_2 leží na osi uhla $B_2A_2C_1$, bod C_2 patrí úsečke C_1P_2, t.j. $|C_2P_2| < |C_1P_2|$. Keďže úsečka A_2B_2 je strednou priečkou trojuholníka $A_2B_2C_1$, tak $|C_1P_2| = \frac{1}{2}|C_1P_1| = \frac{1}{2}(r_1 - v_1)$. Zhrnutím uvedeného dostávame

$$0 < r_2 - v_2 = |C_2P_2| < |C_1P_2| = \frac{1}{2}(r_1 - v_1),$$

prípadne

$$0 < r_2 - v_2 < \frac{1}{2}(r_1 - v_1).$$



Obr. 3

Stranu A_3B_3 pravidelného šestnásťuholníka, pre ktorej dĺžku platí $|A_3B_3| = \frac{1}{2}|A_2B_2| = \frac{o}{16}$ môžeme analogicky ako v predchádzajúcom prípade zostrojiť ako strednú priečku trojuholníka $A_2B_2C_2$, kde bod C_2 je priesečník osi uhla A_2SB_2 s kružnicou k_2 (obr. 3). Potom úsečka SA_3, kde $|SA_3| = r_3$, je polomerom kružnice k_3 opísanej uvažovanému šestnásťuholníku a úsečka SP_3, kde $|SP_3| = v_3$, je výškou z bodu S na stranu uvažovaného pravidelného šestnásťuholníka.

Z obr. 3 vidíme, že $r_3 - v_3 = |C_3P_3| < |C_2P_2| = r_2 - v_2$, t.j. $0 < r_3 - v_3 < r_2 - v_2$. Využitím nerovností z predchádzajúceho prípadu tak dostávame $0 < r_3 - v_3 < r_2 - v_2 < r_1 - v_1$. Keďže úsečka A_3C_3 leží na osi uhla $B_3A_3C_2$, bod C_3 patrí úsečke C_2P_3, t.j. $|C_3P_3|<|C_2P_3|$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade, úsečka A_3B_3 je strednou priečkou trojuholníka $A_3B_3C_2$, teda $|C_2P_3|=\frac{1}{2}|C_2P_2|=\frac{1}{2}(r_2-v_2)$. Odtiaľ už vyplýva nerovnosť

$$0<r_3-v_3=|C_3P_3|<|C_2P_3|=\frac{1}{2}|C_2P_2|=\frac{1}{2}(r_2-v_2)<\frac{1}{4}(r_1-v_1),$$

resp.

$$0<r_3-v_3<\frac{1}{2^2}(r_1-v_1).$$

V zostrojovaní pravidelných 2^{n+1}- uholníkov s konštantným obvodom o môžeme zrejme podobným spôsobom pokračovať ľubovoľne dlho. Nech teda úsečka SA_n, kde $|SA_n|=r_n$, je polomerom kružnice k_n, opísanej uvažovanému 2^{n+1}- uholníku a úsečka SP_n, kde $|SP_n|=v_n$, je výškou z bodu S na stranu tohto pravidelného 2^{n+1}- uholníka.

Potom zrejme platí aj nerovnosť $r_n-v_n=|C_nP_n|<|C_{n-1}P_{n-1}|=r_{n-1}-v_{n-1}$. Vzhľadom na to, že v_n je výškou na základňu rovnoramenného trojuholníka A_nB_nS, kde $|A_nS|=|B_nS|=r_n$, pre každé $n\in\mathbb{N}$ tiež platí $r_n>v_n$, čiže $r_n-v_n>0$. To však znamená, že platí $0<r_n-v_n<r_{n-1}-v_{n-1}$. Využijúc nerovnosti, získané v predchádzajúcich prípadoch, dostávame

$$0<\ldots<r_n-v_n<\ldots<r_3-v_3<r_2-v_2<r_1-v_1.$$

Podobnými úvahami ako v predchádzajúcich prípadoch by sme zrejme tiež dospeli k záveru (ktorý možno dokázať matematickou indukciou), že pre všetky $n\in\mathbb{N}$ tiež platí

$$r_n-v_n=|C_nP_n|<|C_{n-1}P_n|=\frac{1}{2}|C_{n-1}P_{n-1}|=\frac{1}{2}(r_{n-1}-v_{n-1})<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1),$$

resp.

$$r_n-v_n<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1).$$

Z uvedeného už vyplýva, že pre všetky $n\in\mathbb{N}$ platí

$$0<r_n-v_n<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1).$$

Keďže $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ a súčasne $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1)=0$, tak na základe vety o limite zovretej postupnosti dostávame

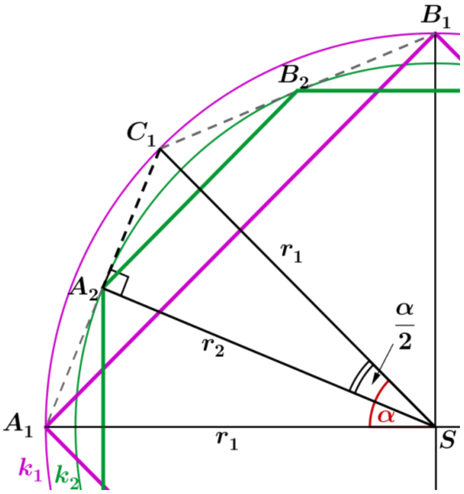
$$\lim_{n\to\infty}(r_n-v_n)=0 \text{ resp. } \lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}v_n.$$

Nech $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=R$. Pretože r_n je polomer kružnice opísanej 2^{n+1}- uholníku a v_n zas polomer kružnice vpísanej 2^{n+1}- uholníku, pre obvod o 2^{n+1}- uholníka, kde $n=1,2,\ldots,$ platí

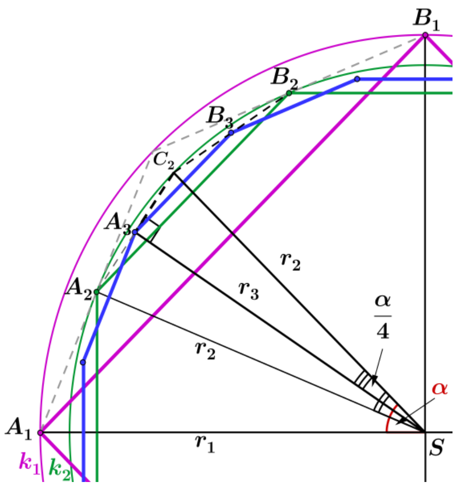
$$2\pi v_n<o<2\pi r_n.$$

No keďže $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi v_n = 2\pi R$ a tiež $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi r_n = 2\pi R$, z vety o limite zovretej postupnosti vyplýva, že aj $o = 2\pi R$, čiže $R = \dfrac{o}{2\pi}$.

Geometricky možno interpretovať tento fakt nasledovne: existuje jediná kružnica, ktorá je zároveň členom postupnosti vpísaných i opísaných kružníc; navyše – táto istá kružnica je súčasne akýmsi limitným „2^{n+1}– uholníkom“ v postupnosti nami konštruovaných 2^{n+1}– uholníkov.



Obr. 6a



Obr. 6b

Ak označíme veľkosť uhla $|A_1SC_1| = \dfrac{\pi}{4}$ symbolom α, potom z obr. 6a, 6b je už zrejmé, že platí $\dfrac{r_2}{r_1} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{r_3}{r_2} = \cos\dfrac{\alpha}{2^2}$. Matematickou indukciou už potom ľahko dokážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnosť $\dfrac{r_n}{r_{n-1}} = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$.

Dosadením práve získaných rovností do nasledujúcej triviálne platnej rovnosti $r_n = r_1 \dfrac{r_2}{r_1} \cdot \dfrac{r_3}{r_2} \cdot \dfrac{r_4}{r_3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \dfrac{r_n}{r_{n-1}}$ pre r_n tiež dostávame

$$r_n = r_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \ldots \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}} = r_1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Využijúc skutočnosť, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, získavame

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} = R,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{R}{r_1} \equiv \frac{\dfrac{o}{2\pi}}{r_1}.$$

Keďže $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, použitím vzťahu pre polovičný argument kosínusu, t.j. $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, môžeme predchádzajúcu rovnosť napísať v tvare

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots = \frac{R}{r_1} \equiv \frac{\frac{o}{2\pi}}{r_1}.$$

Ak zvolíme $o = 2$, potom $R = \frac{1}{\pi}$ a $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, dostávame

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

prípadne po úprave získavame rovnosť

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}.$$

Navyše si všimnime, že z uvedeného tiež vyplýva možnosť aproximácie čísla π, keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$v_n < R < r_n \Leftrightarrow v_n < \frac{o}{2\pi} < r_n, \text{ t.j. } \frac{o}{2r_n} < \pi < \frac{o}{2v_n}.$$

Záver

Výpočet čísla π fascinoval matematikov či laikov už oddávna. V článku sme sa dostali k vzorcu, ktorý iným spôsobom odvodil koncom 16. storočia Francois Viete (zaujímavosťou hodnou spomenutia je, že v tomto zápise sa prvýkrát v histórii matematiky objavil nekonečný súčin). Zároveň sme pri našom postupe pri opisovaní kružníc našli metódu na jednoduché ohraničenie Ludolfovho čísla.

Literatúra

[1] Znám, Š. (1986). Pohľad do dejín matematiky. Bratislava, Alfa, 1986. 240 s.

[2] Beckmann, P. (1998). Historie čísla π. Praha, Academia, 1998. 172 s. ISBN 80-200-0655-9

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autorov

Mgr. Michaela Klepancová
Katedra matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: michaela.klepancova@ukf.sk
PaedDr. Marek Varga
Katedra matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: mvarga@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

THE SECOND GRAPHIC VIEW OF PROGRAM GEOGEBRA

DRUHÉ GEOMETRICKÉ OKNO V PROGRAME GEOGEBRA

MÁRIA KMEŤOVÁ

ABSTRACT. *Dynamic program GeoGebra has its place in mathematics teaching for several years. The program allows its effective use in various areas of mathematics by opening of different types of views (such as algebraic, CAS, spreadsheet, construction protocol, etc.). In this paper, we focus on the use of possibility to open the second graphic view, which provides program GeoGebra 4.2. We present examples for simultaneous viewing and comparing different geometric constructions with the same starting data.*

KEY WORDS: *GeoGebra, geometric constructions, parallel coordinates*

ABSTRAKT. *Dynamický program GeoGebra má už niekoľko rokov svoje miesto vo vyučovaní matematiky. Otváranie rôznych typov okien (ako napr. algebraické, CAS, tabuľkový kalkulátor, postup konštrukcie, atď.) v programe umožňuje jeho využitie v rôznych oblastiach matematiky. V tomto článku sa zameriavame na využitie možnosti otvoriť druhé geometrické okno, ktoré ponúka program GeoGebra 4.2. Uvádzame príklady na simultánne sledovanie a porovnávanie rôznych geometrických konštrukcií s totožnými východiskovými údajmi.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *GeoGebra, geometrické konštrukcie, paralelné súradnice*

CLASSIFICATION: *G90, R60, U70*

Úvod

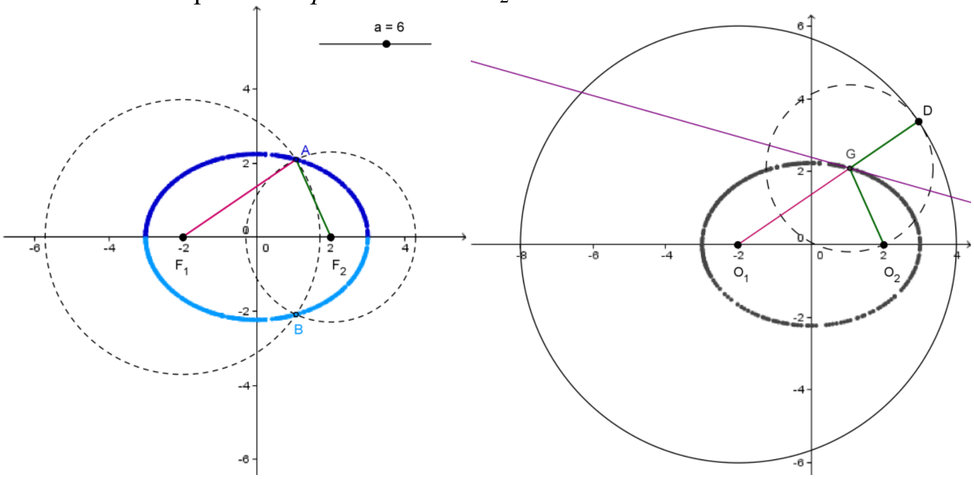
Vo vyučovaní geometrie je často veľmi užitočné nejaký jav skúmať z rôznych hľadísk a poukázať na viaceré súvislosti. Geometrické objekty sa väčšinou dajú zostrojiť rôznymi konštrukciami. Dve vedľa seba umiestnené geometrické okná v GeoGebre [5] poskytujú výbornú možnosť na porovnanie a pochopenie vzťahov medzi jednotlivými krokmi rôznych konštrukcií toho istého geometrického objektu.

V príspevku uvedieme príklady na dva druhy konštrukcie kužeľosečiek, konštrukciu hodografu krivky a konštrukciu duálneho obrazu krivky. V každom z vymenovaných prípadov je možné sledovať konštrukciu jedného vybraného bodu danej krivky (resp. jemu zodpovedajúcej priamky) paralelne v dvoch rôznych súvislostiach.

Konštrukcie kužeľosečiek

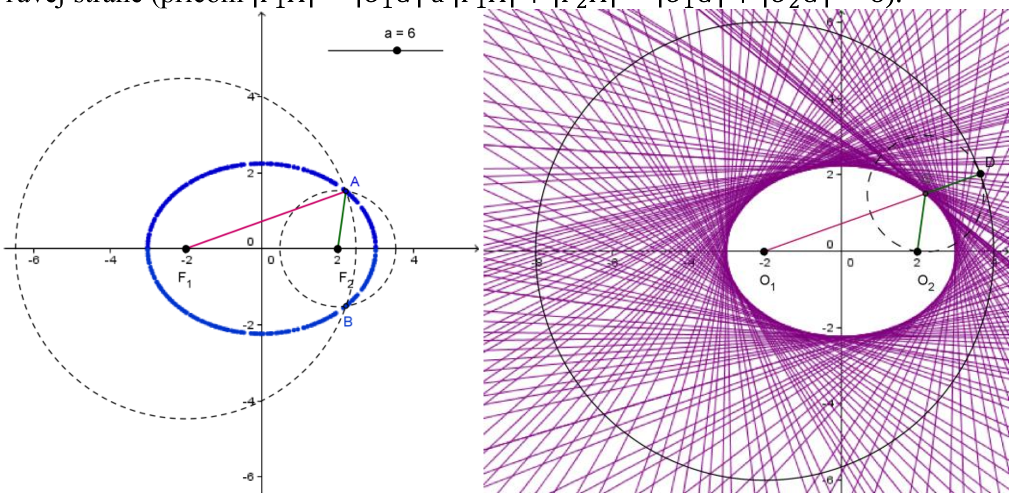
Jeden z dvoch tu porovnaných konštrukcií elipsy (resp. hyperboly) je nasledovná. Tieto kužeľosečky vytvárame ako množinu všetkých stredov kružníc dotýkajúcich sa danej kružnice a prechádzajúcich daným bodom. Ak daný bod sa nachádza vo vnútri danej kružnice, dostaneme elipsu, v opačnom prípade dostaneme hyperbolu. Konštrukcia pomocou programu GeoGebra je nasledovná: Na určujúcej kružnici k so stredom O_1 (a polomerom dĺžky hlavnej osi hľadanej elipsy) si zvolíme bod D. Hľadaný stred G kružnice, ktorá sa dotýka kružnice k v bode D a prechádza daným bodom O_2 sa nachádza na osi o tetivy DO_2 a zároveň na priemere DO_1 kružnice k, teda $G = DO_1 \cap o$. Keďže už poznáme jeden bod (bod G) hľadanej krivky, stačí použitím tlačidla „množina bodov“ vyznačiť bod D kružnice k a bod G, ktorý hľadanú množinu bodov určuje.

Program vykreslí množinu bodov, ktoré by sme dostali obdobnou konštrukciou ku všetkým bodom kružnice k, teda elipsu s ohniskami O_1 a O_2. Ak bod O_2 je vonkajším bodom kružnice k, tak body G opíšu hyperbolu. Ak danú kružnicu k nahradíme priamkou p, tak množina všetkých stredov jej dotykových kružníc prechádzajúcich bodom O_2 tvorí parabolu s riadiacou priamkou p a ohniskom O_2.



Obrázok 1

Z didaktického hľadiska je veľmi dobré túto konštrukciu porovnať s konštrukciou kužeľosečiek podľa definície. Teda v prípade elipsy zostrojíme body, ktorých súčet vzdialeností od daných dvoch bodov F_1 a F_2 je daná konštanta väčšia ako vzdialenosť F_1F_2 (dĺžka hlavnej osi hľadanej elipsy). Na obrázku 1 vidíme ukážku súčasnej konštrukcie bodu elipsy danej veľkosťou hlavnej osi 6 jednotiek a vzdialenosťou ohnísk 4 jednotky v dvoch geometrických oknách, kde pohybom bodu D po určujúcej kružnici program GeoGebra postupne vykresľuje vznikajúce body G na pravej strane a zodpovedajúce body A na ľavej strane (pričom $|F_1A| = |O_1G|$ a $|F_1A| + |F_2A| = |O_1G| + |O_2G| = 6$).



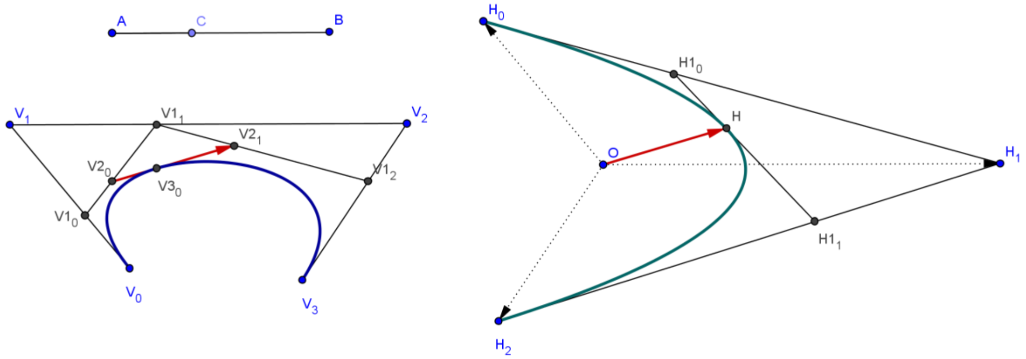
Obrázok 2

Obdobne sa dajú vytvoriť dvojice konštrukcií bodov hyperboly alebo paraboly.

Táto konštrukcia umožňuje aj ukážku tvorby príslušnej obalovej krivky, ktorú tvoria dotyčnice v jednotlivých zostrojených bodoch. Pre elipsu to vidíme na obrázku 2.

Konštrukcia krivky a jej hodografu

Hodograf krivky je taká krivka, ktorá vyjadruje zmeny smeru dotyčnice pôvodnej krivky v každom jej bode [1], [3].



Obrázok 3

Na obrázku 3 na pravej strane vidíme hodograf krivky z ľavej strany. Pohybom bodu *C* po úsečke *AB* určíme parameter z intervalu ⟨0, 1⟩ pre ktorý sa zobrazí bod krivky určený de Casteljauovým algoritmom [1] s vyznačenou dotyčnicou a dotykovým vektorom, ktorý je polohovým vektorom bodu *H* na hodografe krivky na pravej strane.

Dualita a paralelné súradnice

Nech sú dané body s homogénnymi súradnicami $(x_1, x_2, 1)$ v karteziánskej súradnicovej sústave $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ rozšírenej euklidovskej roviny $\bar{E}_2$. Nech je súradnicová sústava s paralelnými osami [2], [4] vložená do súradnicovej sústavy $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ s kolmými súradnicovými osami *x*, *y* tak, že paralelné súradnicové osi x_1 a x_2 sú dané rovnicami $x = 0$ resp. $x = 1$ v tejto sústave.

Definujeme dualitu, ktorá priradí každému bodu $B = (x_1, x_2, 1)$ rozšírenej euklidovskej roviny $\bar{E}_2$ priamku určenú spojnicou vyznačených súradníc x_1 a x_2 na paralelných súradnicových osiach. Rovnice priamok – obrazov bodov určíme nasledovne: Ku každému bodu *B* priradíme priamku *p* danú všeobecnou rovnicou $ax + by + c = 0$, kde

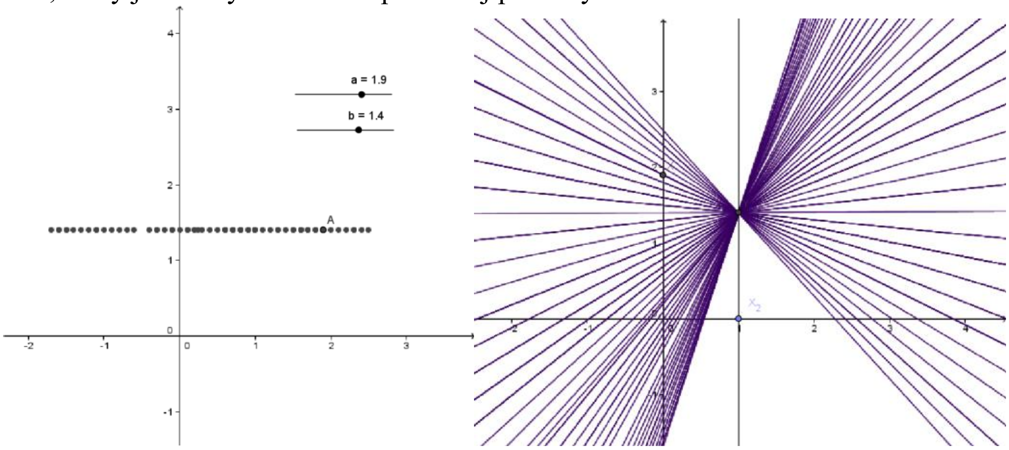
$$[a, b, c] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pre nevlastné body rozšírenej euklidovskej roviny $(x_1, x_2, 0)$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = [x_1 - x_2, 0, -x_1],$$

čo znamená, že obrazmi nevlastných bodov rozšírenej euklidovskej roviny budú priamky rovnobežné s osou *y*. Viac o tejto dualite nájde čitateľ v literatúre [4].

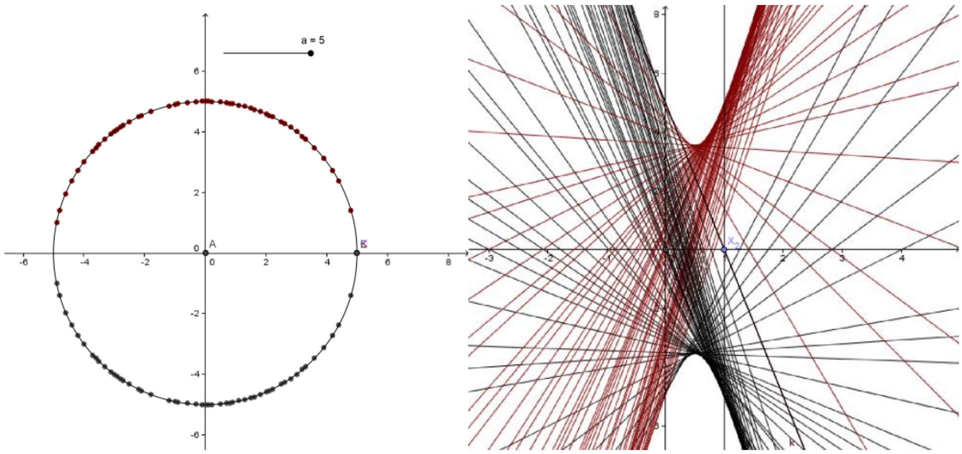
Kvôli jednoduchosti, v ďalšej časti namiesto zobrazovania útvarov v súradnicovej sústave s paralelnými súradnicovými osami budeme hovoriť o zobrazovaní útvarov v paralelných súradniciach.
Program GeoGebra umožní vizualizovať body a ich duálne obrazy v paralelných súradniciach simultánne v dvoch geometrických oknách. Na obrázku 4 vidíme vyznačené body ležiace na jednej priamke a ich duálne obrazy - priamky prechádzajúce jedným bodom, ktorý je duálnym obrazom pôvodnej priamky.



Obrázok 4

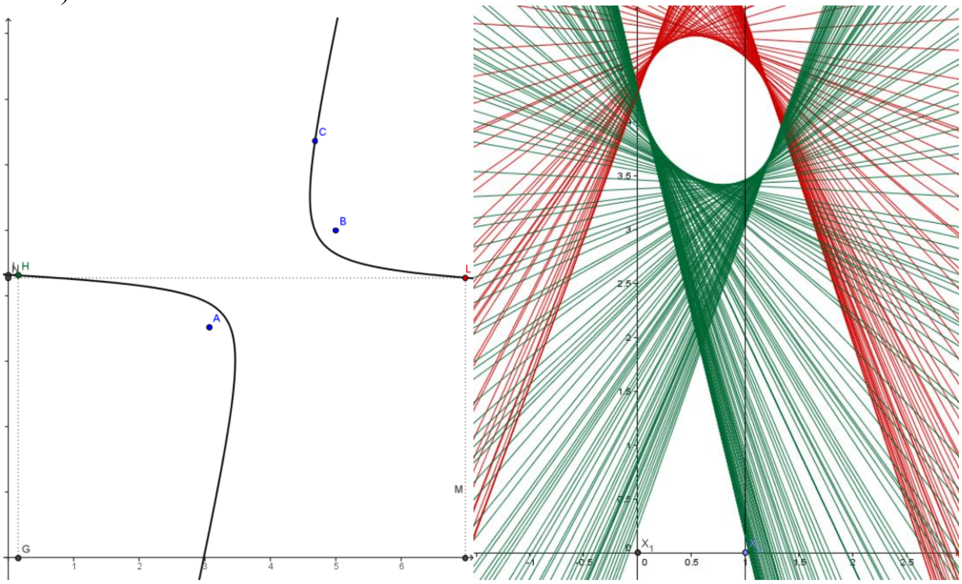
Obrazy niektorých rovinných kriviek v paralelných súradniciach

Pomocou programu GeoGebra [5] vieme vykresliť obrazy niektorých rovinných kriviek v paralelných súradniciach vo vedľa seba umiestnených geometrických oknách. Môžeme tak simultánne sledovať tvorbu bodovej krivky a zodpovedajúcej duálnej priamkovej (obalovej) krivky v paralelných súradniciach.



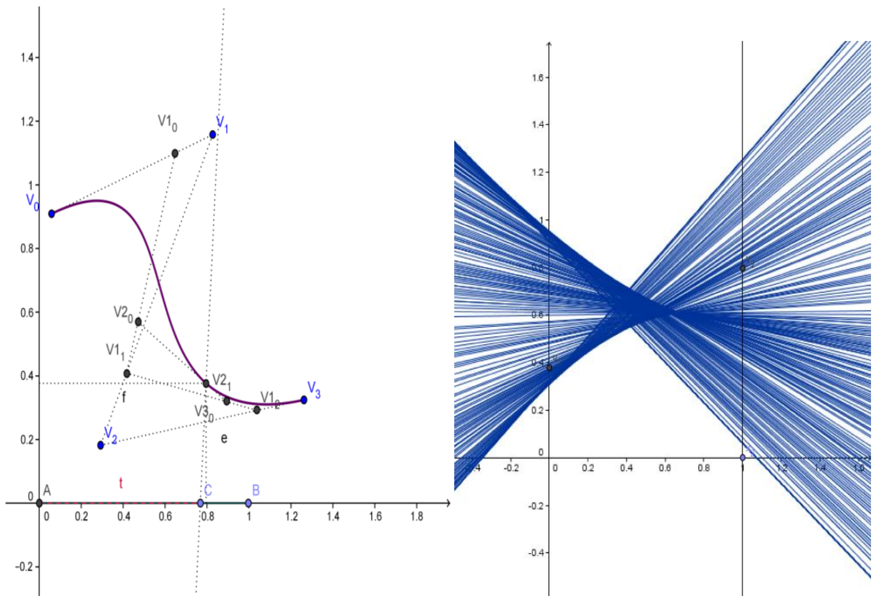
Obrázok 5

Obrazom nevlastného bodu v tomto duálnom zobrazení je priamka rovnobežná s osou y. [2], [4]. Vyplýva z toho, že priamky, ktoré tvoria obraz krivky s vlastnými bodmi, obaľujú krivku „podobnú hyperbole“ [4]. Príklad takejto krivky a jej obrazu, ako boli súčasne vytvorené v dvoch geometrických oknách vedľa seba, vidíme na obrázku 5. Duálny obraz elipsy (aj kružnice) je hyperbola, obrazy bodov hyperboly obaľujú elipsu [3] (pozri obrázok 6).



Obrázok 6

Ďalší zaujímavý vzťah môžeme objaviť a zviditeľniť pomocou dvoch geometrických okien programu GeoGebra medzi bodovou krivkou a jej duálneho obrazu. Inflexnému bodu krivky zodpovedá bod vratu na duálnej krivke a naopak, bodu vratu na krivke zodpovedá inflexný bod na duálnej krivke [4]. V prvom geometrickom okne na obrázku 7 je Bézierova krivka s inflexným bodom zostrojená de Casteljauovým algoritmom [1] a v druhom geometrickom okne je vykreslená príslušná (obalová) duálna krivka s bodom vratu .



Obrázok 7

Záver

V článku sme poukázali na užitočnosť didaktického využitia druhého geometrického okna v novej verzii programu GeoGebra.

Literatúra

[1] Farin, G., Hansford, D. (2000). The Essentials of CAGD. A K Peters 2000, ISBN 1-56881-123-3

[2] Kmeťová, M. (2012). Paralelné súradnice v geometrii. G - Slovak Journal for Geometry and Graphics, N°18/2012, Volume 9, Slovenská Spoločnosť pre Geometriu and Grafiku Bratislava 2012, str. 31-40. ISSN 1336-524X

[3] Kmeťová, M. (2005). Pohyblivé krivky. Zborník príspevkov z vedeckého seminára Rozvíjanie priestorovej a geometrickej predstavivosti, FPV UKF Nitra 2005, pp. 17-22 ISBN 80-8050-863-1

[4] Inselberg, A. (2009). Parallel Coordinates, Visual Multidimensional Geometry and Its Applications, Springer 2009, ISBN 978-0-378-21507-5

[5] www.geogebra.org

Článok prijatý dňa 25. Apríla 2013.

Adresa autora

doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, UKF v Nitre, Tr. A. Hlinku č. 1, SK – 949 74 Nitra;
e-mail: mkmetova@ukf.sk

Poďakovanie

Článok vznikol s podporou grantu KEGA 004UJS-4/2011.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

MATHEMATICS GLOBALLY

MATEMATIKA GLOBÁLNE

IVETA KOHANOVÁ

ABSTRACT. *In this article we focus on basic principles and aims of global education, which supports development of pupils' critical thinking. In concrete example of mathematics lesson with global context we also introduce three-phase model of teaching, model EUR.*

KEY WORDS: *global education, critical thinking, mathematics*

ABSTRAKT. *V článku sa venujeme základným princípom a cieľom globálneho vzdelávania, ktoré pomáha rozvíjať kritické myslenie žiakov. Na konkrétnej ukážke vyučovacej hodiny matematiky s kontextom globálneho problému predstavujeme tiež trojfázový model vyučovacej hodiny EUR..*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: globálne vzdelávanie, kritické myslenie, matematika*

CLASSIFICATION: *A40*

Globálne vzdelávanie, kritické myslenie, ako a prečo?

Dňa 18.1.2012 bola na rokovaní vlády Slovenskej republiky schválená Národná stratégia pre globálne vzdelávanie na obdobie rokov 2012 – 2016 [1]. Jej predkladateľmi boli Ministerstvo zahraničných vecí SR a Ministerstvo školstva, vedy výskumu a športu SR, ktoré pri jej tvorbe úzko spolupracovali s Platformou mimovládnych rozvojových organizácií. Pri vypracovaní stratégie bol kladený dôraz na dlhodobé zvyšovanie povedomia slovenskej spoločnosti o problémoch globálneho sveta a schopnostiach Slovenska i jeho občanov pomáhať iným, ako aj na reálne zlepšenie kvality slovenského vzdelávacieho systému s minimálnym zaťažením štátneho rozpočtu. Témy globálneho vzdelávania, ktoré napomôžu žiakom a študentom získavať tieto zručnosti, majú byť preto do vyučovacieho procesu na Slovensku začlenené formou doplnenia existujúcich osnov jednotlivých predmetov, teda aj matematiky.

Globálne rozvojové vzdelávanie je vzdelávanie, ktoré zdôrazňuje globálny kontext v učení (sa). Prostredníctvom neho si žiaci uvedomujú, že globálne problémy ako je ekonomická a finančná kríza, nelegálna migrácia, bezpečnostné hrozby, klimatické zmeny a vývoj v iných častiach sveta ovplyvňujú život aj u nás. Pri tomto type vzdelávania dochádza aj k rozvoju kritického myslenia a k hlbšiemu porozumeniu spomínaných fenoménov. Globálne vzdelávanie prináša zmenu postojov žiakov, poskytuje priestor na uvedomenie si vlastnej úlohy vo svete, v ktorom žijeme, motivuje ľudí k zodpovednosti a vychováva smerom k osvojeniu si hodnôt aktívneho globálneho občana.

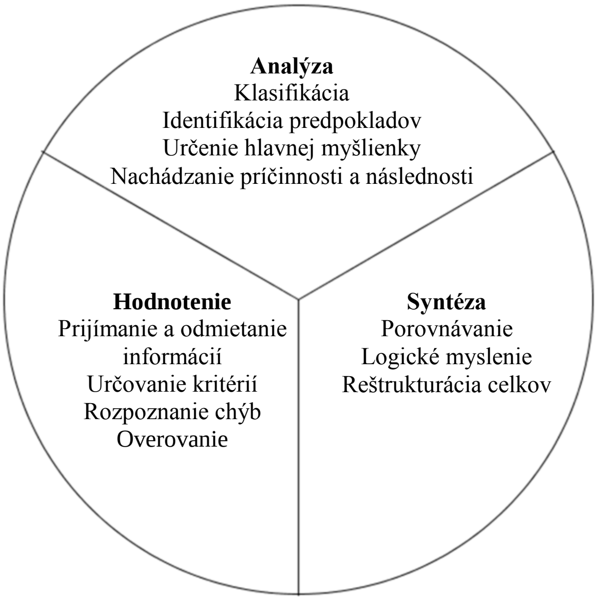
Pri jeho začleňovaní do vyučovania matematiky sa možno inšpirovať metodickými príručkami [2], ktoré vydalo občianske združenie Človek v ohrození. Ukazuje sa, ž najefektívnejší model začleňovania globálnych tém do vyučovania je trojfázový model vyučovacej hodiny EUR, ktorý rešpektuje mechanizmy prirodzeného učenia a podporuje rozvoj kritického myslenia. Tento model opíšeme v nasledujúcej kapitole. Čo sa však myslí pod pojmom kritické myslenie? Na prvý pohľad (prvé počutie) nám toto slovné spojenie môže evokovať niečo negatívne; ako kritika osoby, činov, či chovania alebo postojov. Slovo kritika (pochádzajúce z gréckeho *kritiké*) však znamená umenie rozlišovať a posudzovať. Je to zručnosť, ktorá nám umožní lepšie si poradiť s požiadavkami 21. storočia. V súčasnej dobe informačnej explózie je človek čoraz častejšie nútený získané informácie triediť, porozumieť im, pochybovať o nich a až na základe dôkladného uvažovania si vytvoriť vlastný názor a stanovisko. Očakávaným výstupom školského vzdelávania sú preto mysliaci žiaci, ktorí ako občania budú prispievať k riešeniu problémov spoločnosti a vytvárať hodnoty. Každý občan, by mal byť schopný nielen posúdiť výhodnosť nákupu, ale aj orientovať sa na istej úrovni v zákonných pravidlách, či rozmanitých ponukách z akejkoľvek oblasti života, a tiež rozlíšiť, čo je principiálna politika a čo sú prázdne populistické frázy. Uvedieme niekoľko definícií kritického myslenia [3], [4], [5].

„Kritické myslenie je mentálny proces, ktorý slúži na získavanie a hodnotenie informácií a nachádzanie logických a objektívnych záverov. "

„Kritické myslenie či uvažovanie je intelektuálny proces, ktorý spočíva v pojmovom uchopení (konceptualizácii), analýze, syntéze a vo vyhodnotení informácií."

„Myslieť kriticky znamená uchopiť myšlienku a skúmať jej východiská, podrobiť ju nezaujatému skepticizmu, porovnávať ju s opačnými názormi, vytvárať vlastné predpoklady a na základe toho zaujať určité stanovisko. Kritické myslenie je zložitý proces tvorivej integrácie myšlienok a informácií, proces reštrukturalizácie konceptov. Je to aktívny a interaktívny kognitívny proces prebiehajúci súčasne na mnohých úrovniach. Obyčajne je cieľavedomý, ale rovnako môže byť tvorivo improvizačný."

Vo všetkých uvedených definíciách je informácia (myšlienka) najprv získaná a uchopená, a nakoniec vyhodnotená. Tak, ako naznačuje definícia [5], samotnému vyhodnoteniu predchádza analýza a syntéza, ktoré sú podľa [6] chápané ako myšlienkové operácie v procese kritického myslenia. Tieto operácie v sebe zahŕňajú isté zručnosti, ktoré operácie dotvárajú (Obrázok 1).



Obrázok 1: Model kritického myslenia

Model EUR

Trojfázový model vyučovacej hodiny EUR (Evokácia - Uvedomenie si významu-Reflexia) sa v našich zemepisných šírkach rozšíril vďaka projektu Čítaním a písaním ku kritickému mysleniu [5]. Jeho jednotlivé fázy možno charakterizovať nasledovne:

Evokácia

V rámci tejto časti vyučovacej hodiny vyzveme žiakov, aby sa zamysleli, čo už o danej téme vedia alebo čo by sa chceli dozvedieť. Vytvoria si akúsi databázu individuálnych vedomostí, ktoré budú rozširovať o nové. Každý žiak má teda príležitosť uvedomiť si, čo už vie, alebo tuší, čomu rozumie, aký má na daný problém názor, skúsenosti a tiež musí formulovať, čo nevie, čo sa potrebuje dozvedieť, aby mohol zaujať stanovisko alebo daný problém vyriešiť. Evokácia je teda príležitosť pre uistenie sa, ale aj pochybnosti, hypotézy a otázky. Takto má žiak možnosť aktívne nadobudnúť trvalé vedomosti, keďže informácia, ktorú si žiaci vedia spojiť s doterajšími vedomosťami nie je odsúdená na zabudnutie.

Uvedomenie si významu

V rámci tejto fázy žiaci získavajú nové poznatky, overujú si svoje pôvodné koncepty o danej problematike, a na ich základe si uvedomujú význam a súvislosti. Učiteľ v tejto fáze najviac ovplyvňuje, s akými informáciami, faktami, úlohami, či problémami sa žiaci zaoberajú. Mal by predkladať podnetné materiály, ktoré smerujú k dosiahnutiu výchovno-vzdelávacieho cieľa hodiny. Tiež iniciuje prepojovanie nových poznatkov s poznatkami nazhromaždenými v evokácii a snaží sa udržať žiakov motivovaných.

Reflexia

V tejto fáze hodiny si žiaci pripomenú, s čím sa počas hodiny stretli, k akým poznatkom dospeli a sústredia sa na význam, ktorý si uvedomili. Tento význam interpretujú, v rámci diskusie kladú otázky týkajúce sa sporných bodov a snažia sa tento význam aplikovať aj v iných oblastiach. Reflexia je príležitosť pozrieť sa na doterajší proces učenia sa, žiak si uvedomuje, aké poznatky získal, čomu porozumel, prípadne aké postoje zmenil. Až v tejto fáze si žiaci skutočne osvojujú učivo a tu vznikajú trvalé vedomosti. Učiteľ kladie zrozumiteľné otázky, ktoré podporujú diskusiu a tak získava spätnú väzbu, čomu jeho žiaci neporozumeli. V rámci tejto časti je dôležitý aj dostatočný čas na sebareflexiu žiakov.

V nasledujúcom texte uvedieme konkrétnu ukážku začlenenia globálneho vzdelávania na hodine matematiky pre 8. ročník základnej školy. Námet bol inšpirovaný aktivitou publikovanou na stránke Populačnej kancelárie vo Washingtone (http://www.prb.org) a prispôsobený lokálnym podmienkam.

Globálne vzdelávanie v rámci hodiny matematiky

Názov aktivity: Budovanie pyramídy

Vyučovacie ciele: žiak má vedieť:

- interpretovať grafické informácie,
- porovnať údaje vo viacerých grafoch,
- vytvoriť modifikovanú pyramídu v podobe stĺpcového diagramu,
- zhodnotiť čo má vplyv na zmeny vo vekovej pyramíde,
- vysvetliť dôležitosť vekovej a pohlavnej štruktúry populácie.

Kompetencie: interpretácia grafických údajov, znázorňovanie údajov na diagrame

Materiál: populačné pyramídy pre 3 rôzne krajiny, tabuľka s údajmi o pohlavnej a vekovej štruktúre obyvateľstva pre viacero krajín (najlepšie toľko, koľko je žiakov v triede)

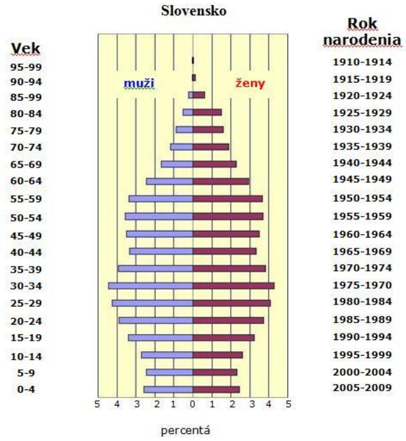
Priebeh hodiny:

Evokácia:

Na začiatku hodiny kladieme žiakom otázky, na ktoré sa snažia odpovedať: Čo je to populácia? Aký je priemerný vek ľudí na Slovensku? Ľudí v ktorej vekovej kategórii je u nás najviac? Akú úlohu zohráva vek ľudí v krajine? Akú úlohu zohráva pohlavie ľudí v krajine? Ako sme spomínali vyššie, nie je dôležité, aby žiaci vedeli odpovedať na všetky otázky, ide len o ich zaangažovanie do aktivity, aby začali nad otázkami aspoň uvažovať.

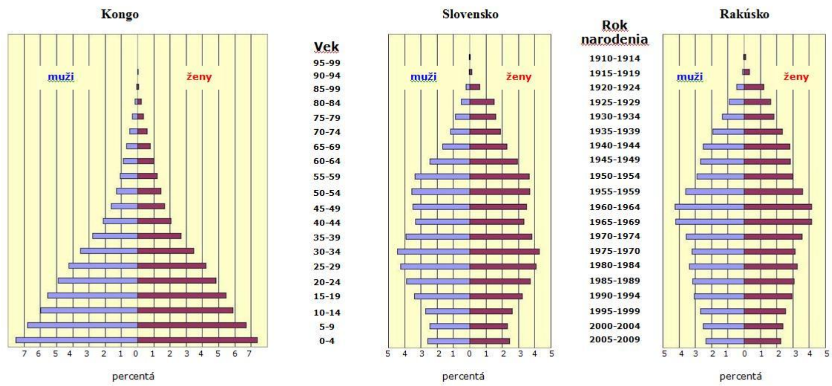
Uvedomenie si významu:

Žiakom predstavíme populačnú pyramídu Slovenska, v ktorej sú znázornené údaje z roku 2010 (Obrázok 2). Vysvetlíme, že pyramída znázorňuje vekovú a pohlavnú štruktúru obyvateľstva. Každé políčko udáva, koľko percent žien alebo mužov z celkovej populácie (5 431 000 obyvateľov) bolo v roku 2010 v danej vekovej kategórii [7].



Obrázok 2: Populačná pyramída Slovenska v roku 2010

Pre lepšie pochopenie tejto pyramídy žiaci hľadajú odpovede na nasledujúce otázky: V ktorej vekovej skupine je najviac ľudí? Kde (v ktorom dieliku) sa nachádzajú žiaci tejto triedy? Je viac ľudí v Tvojej vekovej skupine alebo v tej pod Tebou? Čo myslíš, prečo? V ktorej vekovej skupine je výrazne viac žien? Pozornosť žiakov upriamime aj na fakt, že pyramída ukazuje aj históriu populačného rastu, napríklad v 70.tych rokoch mali ľudia väčšie rodiny. Keď sa už žiaci vedia orientovať v pyramíde, ukážeme im populačné pyramídy ďalších dvoch krajín, Konga a Rakúska, tiež s údajmi z roku 2010 (Obrázok 3).

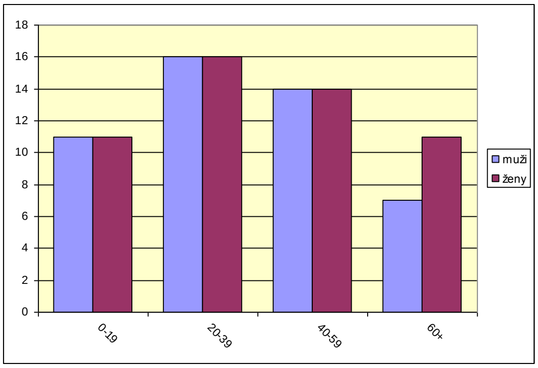


Obrázok 3: Populačné pyramídy

Následne by mali žiaci interpretovať pyramídu pre Kongo; zhodnotiť v čom sa odlišuje od pyramídy pre Slovensko; zistiť v ktorej vekovej skupine je najviac ľudí; určiť aká časť obyvateľstva je v tejto vekovej kategórii. Podobne interpretujú pyramídu pre Rakúsko, v čom sa líši od Konga a od Slovenska. V ďalšej časti hodiny každý žiak nakreslí upravenú populačnú pyramídu pre konkrétnu krajinu v podobe stĺpcového diagramu (pre jednoduchosť budeme pracovať len so 4 vekovými kategóriami: 0-19, 20-39, 40-59, 60+). Najprv však spolu so žiakmi prekreslíme pyramídu pre Slovensko na základe údajov z tabuľky (Tabuľka 1) do diagramu (Obrázok 4).

Veková kategória	**muži**	**ženy**
0-19	11	11
20-39	16	16
40-59	14	14
60+	7	11

Tabuľka 1: Veková štruktúra obyvateľstva Slovenska v roku 2010 (v percentách)



Obrázok 4: Veková štruktúra obyvateľstva Slovenska v roku 2010 (v percentách)

Žiakov potom rozdelíme do skupín po 4 a každému dáme tabuľku s dátami pre jednu (rôznu) krajinu, pričom nevedia, pre ktorú krajinu kreslia diagram. Pre limitujúci rozsah článku tieto tabuľky s dátami neuvádzame (dáta sú dostupné na [7]). Dôležité je, aby v našom výbere boli zastúpené tak bohaté krajiny, ako aj rozvojové krajiny. Keď už žiaci nakreslili stĺpcové diagramy, v rámci skupiny si ich vymenia, porovnávajú a diskutujú, prečo asi vyzerajú rôzne. Všetkých žiakov teraz necháme samých popreskupovať sa do skupín podľa tvaru diagramov – tí, čo ich diagram vyzerá podobne ako diagram Slovenska, atď. Keď je preskupovanie dokončené, žiakom ukážeme zoznam krajín, ktorých diagramy kreslili a necháme ich odhadnúť, ktorú krajinu by mohli reprezentovať. Potom im ukážeme kľúč správnych odpovedí. Na záver necháme žiakov hľadať podobnosti medzi diagramami krajín z rovnakého regiónu.

Reflexia:

Na základe informácií, ktoré žiaci získali z populačných pyramíd, resp. z diagramov, ktoré vytvorili, si môžu teraz porovnať svoje odpovede z časti Evokácia. Na záver hodiny ešte rozvinieme ďalšiu diskusiu pomocou týchto otázok: Prečo by asi vlády jednotlivých krajín mali poznať podiel populácie v jednotlivých vekových kategóriách? Aké produkty používajú mladí ľudia? Aké služby potrebujú? A čo starí ľudia? Je dôležité, aby vláda krajiny poznala vek populácie, ktorej vládne?

Záver

Vedieť kriticky myslieť je nielen podľa autorov Štátneho vzdelávacieho programu [8] dôležitou súčasťou vedomostnej výbavy každého žiaka. Je to kompetencia, ktorá žiaka pripraví na zvládnutie reálnych životných situácií, ktoré si budú vyžadovať zhodnotiť danú situáciu a následne sa rozhodnúť pre správne riešenie. Je preto dôležité u žiakov túto kompetenciu rozvíjať. V tomto článku sme predstavili globálne vzdelávanie, ako jednu z možností, ktorá podporuje rozvoj kritického myslenia. Bližšie sme opísali metódu EUR, ktorú považujeme za vhodný nástroj implementácie globálnych tém do vyučovania matematiky, vzhľadom na Národnú stratégiu pre globálne vzdelávanie na obdobie rokov 2012 – 2016. Primárnym cieľom globálneho vzdelávania však nie je dať priame odpovede na otázky súvisiace s globálnymi problémami, skôr primäť žiakov k tomu, aby videli veci v súvislostiach, porozumeli globálnej podstate sveta, poznali príčiny a dôsledky najdôležitejších globálnych problémov, či uvedomili si rozdiely v ekonomickej a sociálnej situácii v rôznych krajinách sveta, teda vedeli kriticky myslieť. Nenútenou formou tak možno prekvapivo robiť aj na hodinách matematiky, pričom si myslíme, že globálne vzdelávanie ponúka široký priestor aj pre podporu medzipredmetových vzťahov. V súvislosti s ostatnou školskou reformou a následnými zmenami vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách bolo potrebné na to pripraviť aj budúcich učiteľov. To si vyžadovalo zmeny v ich príprave, teda zmenu obsahových náplní viacerých kurzov v rámci učiteľskej prípravy na vysokej škole, z ktorých už pár prebehlo [9], [10]. Podobne aj v súvislosti so začleňovaním globálneho vzdelávania do vyučovania vidíme potrebu tieto témy zaraďovať do prípravy budúcich učiteľov a pomocou odborných článkov oboznámiť aj širokú učiteľskú verejnosť o danej problematike.

Literatúra

[1] Národná stratégia pre globálne vzdelávanie na obdobie rokov 2012 – 2016. dostupné na: http://www.statpedu.sk/files/documents/odborne_info/narodna_strategia_globalne%20vzdelavanie_2012_2016.pdf, 29.3.2013

[2] Cárová T., Kohanová I. a kol. (2012) Globálne vzdelávanie na ZŠ: matematika. Bratislava: Človek v ohrození, 2012. ISBN 978-80-970900-4-3

[3] Schafritz, J.M., Koeppe, R.P., Soper, E.W. (1988) The Facts on File dictionary of education. New York: Facts on File, 1988.

[4] Scriven, M., Paul, R. Defining Critical Thinking. dostupné na: http://www.criticalthinking.org/aboutCT/define_critical_thinking.cfm, 29.3.2013

[5] Steele, J. L., Meredith, K. S., Temple, Ch. (1998) Rámec pre kritické myslenie vo vyučovaní. Príručka I. Bratislava: Združenie Orava pre demokraciu vo vzdelávaní, 1998.

[6] Kolláriková, Z. (1995) Model kritického myslenia a zásady jeho rozvoja. Výchova ku kritickému mysleniu teória a prax. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 1995. ISBN 80-85756-18-8

[7] Population Division of the Department of Economic and Social Affairs of the United Nations Secretariat.World Population Prospects: The 2008 Revision. dostupné na: http://esa.un.org/ unpp, 29.3.2013

[8] Štátny pedagogický ústav. (2010) Štátny vzdelávací program, Matematika, Príloha ISCED 2. Bratislava, 2010.

[9] Regecová, M., Slavíčková, M. (2011) Curricular changes in preparation of future teachers - financial mathematics course. European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów: University of Rzeszów, 2011. ISBN 978-83-7338-683-9

[10] Vankúš, P. (2011) Dynamické modelovanie matematických problémov v programe Microsoft Excel ako súčasť prípravy budúcich učiteľov matematiky. Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Nitra: UKF, 2011. ISBN 978-80-8094-853-5

Článok prijatý dňa 23. apríla 2013.

Adresa autorov

PaedDr. Iveta Kohanová, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Mlynská dolina, 842 28 Bratislava;
e-mail: kohanova@fmph.uniba.sk

Poďakovanie

Článok vznikol za podpory grantu KEGA 091UK-4/2012.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATLAB

RIEŠENIE LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC POMOCOU MATLABU

LÝDIA KONTROVÁ – IVANA POBOČÍKOVÁ

ABSTRACT. *The present paper describes the fact that revised and pedagogically justifiable implementation of CAS systems (e.g. Matlab system) is a great contribution to teaching higher mathematics. It brings practical applications to mathematics teaching and thus enhances motivation and students' interest in the discussed topic.*

KEY WORDS: *linear differential equation, Matlab*

ABSTRAKT. *V článku poukážeme na skutočnosť overenú dlhoročnou praxou, že premyslené a pedagogicky zdôvodnené implementovanie systémov CAS (v našom prípade systému Matlab) je veľkým prínosom pri vyučovaní vyššej matematiky. Posúva jej vyučovanie viac k aplikáciám z praxe, čím sa zvyšuje motivácia a záujem študentov o preberanú problematiku.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *lineárna diferenciálna rovnica, Matlab*

CLASSIFICATION: *C 70, D 40, B 40*

Introduction

In this paper we show the examples of Matlab application to the solution of linear *n*-th order constant coefficient differential equations. The assigned differential equation is solved with the help of simple commands of the system Matlab. The examples can serve as a simple manual for students – only the basic knowledge of Matlab and the knowledge of mathematics on the level of the first form of bachelor study is sufficient.

During seminars we teach our students how to understand differential equations and be able to solve them. From our experience we know that if the students are shown a concrete application of differential equations in the field they study their interest in the defined problem is higher. However, these application examples are sometimes computationally demanding and hence time consuming. But if these examples are solved with the help of the system Matlab they can be used in the teaching process to enhance the motivation of students.

Computer algebra systems (CAS) and their place in teaching mathematics

Computer algebra systems (including Matlab) are strong computational and visual tools with wide practical application. Using of CAS systems in mathematics teaching at the university has both supporters and opponents.

Bernhard Kutzler from ACDCA (Austrian Centre for Didactics of Computer Algebra) speaks about it in a very pertinent way: *"There exist thousands of ways – good and bad – how to use CAS in teaching. Inappropriate approaches usually come from technical enthusiasts – teachers who use CAS just because they exist. But CAS should never manage mathematics teaching – mathematics teaching (didactic intention) should manage their application. "* [4].

Helmut Heugl, the director of an Austrian project Derive and TI-89/92 adds: *"If CAS application is not pedagogically justified then it is pedagogically justifiable not to use it".* [5].

Systems CAS were created to make routine, long-winded and complicated calculations instead of people, to make their work easier and provide desired results. But their usage only for this purpose is from a didactic viewpoint (when we emphasize the development of students' mathematical education) insufficient and inappropriate.

We cannot be satisfied with the fact that our students are able to obtain the result by application of suitable mathematical software. Our ambition is to lead students to mathematical terms understanding and subsequent application of the received knowledge in practice.

Therefore we consider using CAS with comprehension to be the most appropriate one. In the first phase of the educational process we want our students to manage the discussed topic in a theoretical way and to learn the principle of the solution of specific exercises. This will help them to obtain a critical detached view necessary for the correct choice of a solution method and interpretation and evaluation of the obtained results. Only theoretically educated students are offered to use mathematical software suitable for the solution of more complicated application exercises.

We do not want to replace a traditional mathematical teaching by using a Matlab system. However we would like to motivate students to be able to solve also more complicated exercises from practice.

Matlab possesses a powerful library of functions serving for the solution of ordinary differential equations. What is more, Matlab has also extensive graphical possibilities which can be used in a teaching process. Ordinary differential equations, which often occur in engineering practice, are linear nth order constant coefficient differential equations.

Basic terms

Linear *n*-th order constant coefficient differential equations have the form

$$y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+a_2\,y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\,y'+a_n\,y=f(x),$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are real numbers, $f(x)$ is a continuous function on the interval $\langle a, b\rangle$ and y is an unknown function. This equation can be put in the form

$$L(y)=f(x),$$

where $L(y)=y^{(n)}+a_1\,y^{(n-1)}+a_2\,y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\,y'+a_n\,y$.

A general solution of this differential equation is searched with the help of the following theorem:

Theorem. Let $Y(x)$ is a solution of a linear differential equation with the right side $L(y)=f(x)$. Then each solution of this differential equation is in the form

$$y=z+Y,$$

Where $z=c_1\,y_1+c_2\,y_2+\ldots+c_n\,y_n$ is a general solution of the corresponding linear differential equation without a right side $L(y)=0$ and $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are arbitrary real numbers.

Generally, the solution Y can be found by the method of variation of constants.

Theorem. If $y_1, y_2, \ldots, y_n$ is a fundamental system of solutions of the differential equation $L(y)=0$ then the solution of a linear differential equation with the right side $L(y)=f(x)$ is in the form

$$Y=\sum_{i=1}^{n} y_i(x)\int \frac{W_i(x)}{W(x)}\,dx,$$

where $W(x)$ is the Wronski determinant and $W_i(x)$ is a determinant which results from Wronski determinant by replacing $i-$th column by the column of elements $0, 0, \ldots, f(x)$. [3]

Examples of solved exercises

With the help of Matlab we can solve a differential equation symbolically by using the command `dsolve`. Its application is presented in the following exercises:

Exercise 1. Let's find a general solution of the differential equation

$$y''-7\,y'+10\,y=-(6\,x+7)\,e^{2x} \tag{1}$$

Let's find a solution of this differential equation that satisfies initial conditions

$$y(0)=0,\ y'(0)=1 \tag{2}$$

Solution. We solve a linear second-order constant coefficient and special right side differential equation. For its solution we use a command `dsolve` where we put the differential equation in apostrophes. A letter `D` indicates a derivative of the function. Generally notation `Dny` means *n*-th derivative of the function $y=y(x)$ of the variable x. So `Dy` means the first derivative of the function and `D2y` means the second derivative of the function $y=y(x)$ of the variable x.

```
>> y=dsolve('D2y-7*Dy+10*y=-(6*x+7)*exp(2*x)','x')
y =
exp(2*x)*C2+exp(5*x)*C1+x*(3+x)*exp(2*x)
>>
```

The second way how to set a differential equation is its defining with the variable called `dr`. This way is useful if we solve more differential equations.

```
>>dr='D2y-7*Dy+10*y=-(6*x+7)*exp(2*x)';
>> y=dsolve(dr,'x')
y =
exp(2*x)*C2+exp(5*x)*C1+x*(3+x)*exp(2*x)
>>
```

Thus a general solution of the differential equation (1) is

$$y=x\,(x+3)\,e^{2x}+c_1\,e^{5x}+c_2\,e^{2x},$$

where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

Let's find the solution of the differential equation (1) which satisfies initial conditions (2). The differential equation (1) is defined by the variable called `dr`, initial conditions (2) will be defined by the variable `zp`. We also use a command `pretty` with the help of which a symbolic expression of a solution in the form similar to a mathematical notation is noted.

```
>>dr='D2y-7*Dy+10*y=-(6*x+7)*exp(2*x)';
>>zp='y(0)=0,Dy(0)=1';
>> y=dsolve(dr,zp,'x')
y =
2/3*exp(2*x)-2/3*exp(5*x)+x*(3+x)*exp(2*x)
>>pretty(simple(y))

 2/3 exp(2 x) - 2/3 exp(5 x) + x (3 + x) exp(2 x)
>>
```

Thus, the solution of the differential equation (1) satisfying initial conditions (2) is

$$y = x\,(x+3)\,e^{2x} - \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{2}{3}e^{2x}.$$

With the help of the following commands we draw a graph of the solution on the interval $\langle 0,1 \rangle$.

```
>> x=linspace(0,1,20);
>> z=eval(vectorize(y));
>> plot(x,z)
>>
```

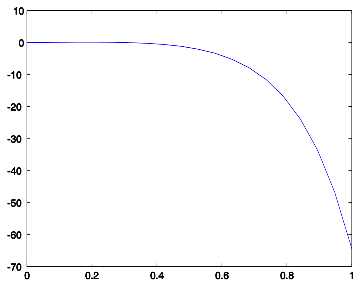


Figure 1.

Exercise 2. Let's find a general solution of the differential equation

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \tag{3}$$

Solution. We solve a linear second-order constant coefficient differential equation. Let's define it with the help of a variable called `dr`.

```
>> dr='D2y+y=1/(cos(x))^3';
>> y=dsolve(dr,'x')
y =
sin(x)*C2+cos(x)*C1+1/2*(1-2*cos(x)^2)/cos(x)
>>
```

Thus a general solution of the differential equation (3) is

$$y = \frac{1}{2\cos x} - \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

Exercise 3. For an electric circuit in Figure 2 it is true that

$$RCL\frac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + Ri_2 = E(t). \qquad (4)$$

Let's find a general solution of this differential equation if $L = 1\,\mathrm{mH}$, $R = 10\,\Omega$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ and $E(t) = 2\sin(100\,\pi\,t)$. [1]

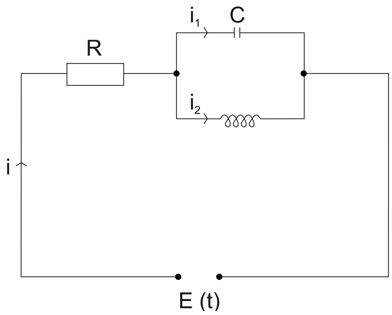


Figure 2

Solution. We solve a second-order linear constant coefficient differential equation. From the example it is obvious that solving this type of differential equation is time-consuming. Let's define a differential equation for a variable called **dr** .

```
>> dr='10*D2i2+Di2+10*i2=2*sin(100*pi*t)';
>> i2=dsolve(dr,'t')
i2 =
exp(-1/20*t)*sin(1/20*399^(1/2)*t)*C2
+exp(1/20*t)*cos(1/20*399^(1/2)*t)*C1
+(sin(100*pi*t)-10000*pi^2*sin(100*pi*t)
-10*cos(100*pi*t)*pi)/(5-99500*pi^2+500000000*pi^4)
>>
```

Thus a general solution of the differential equation (4) is

$$i_2 = \frac{\left(1 - 10\,000\,\pi^2\right)\sin(100\,\pi\,t) - 10\,\pi\cos(100\,\pi\,t)}{5 - 99\,500\,\pi^2 + 500\,000\,000\,\pi^4} +$$

$$+ c_1\, e^{-\frac{1}{20}t} \cos\frac{\sqrt{399}}{20}t + c_2\, e^{-\frac{1}{20}t} \sin\frac{\sqrt{399}}{20}t,$$

where c_1, c_2 are arbitrary real numbers.

Conclusion

In several exercises of this paper the possibility of Matlab implementation in linear differential equations teaching was presented. Matlab system is a tool not only for elimination of routine and mechanical calculations but predominantly for enhancement of students' motivation during the process of this thematic unit learning.

References

[1] Croft, A., Davison, R., Hargreaves, M. (2001). Engineering Mathematics. Harlow Essex, Pearson Education Limited, 2001. ISBN 0-13-026858-5.

[2] Eliaš, J., Horváth, J., Kajan, J. (1980). Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Bratislava, SVŠT, 1995. ISBN 80-227-0742-2.

[3] Moravčík, J. (1992). Matematická analýza (3). Bratislava, Alfa, 1992.

[4] Kutzler, R. - Kokol, V.: Pokročilá matematika pre vaše PC - Derive 6.0. [online], http:// www.chartwellyorke.com/Derive5book.pdf/.

[5] Heugl, H. - Kutzler, B. DERIVE in Education: Opportunities and Strategies. Proceedings of the 2nd Krems Conference on Mathematics Education September 27-30, 1993, Krems, Austria.

Received on April 12, 2013.

Addresses

RNDr. Lýdia Kontrová, PhD.
Department of Mathematics, Faculty of Humanities, University of Žilina in Žilina, Univerzitná 8215/1, SK-010 26 Žilina, e-mail: lydia.kontrova@fhv.uniza.sk

Mgr. Ivana Pobočíková, PhD.
*Department of Applied mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Žilina in Žilina, Univerzitná 8215/1, SK010 6 Žilina, e-mail:*ivana.pobocikova@fstroj.uniza.sk

Acknowledgement

This paper has been written with the support of Cultural and Educational Grant Agency of Slovak Ministry of Education, project: K-046 ŽU-4/2011.´

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

STATISTICAL PROCESSING OF THE OUTCOMING TEST RESULTS OF 7TH GRADE OF PRIMARY SCHOOL OF KEGA 015 UKF – 4/2012 PROJECT

ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKOV VÝSTUPNÉHO TESTU PRE 7. ROČNÍK ZŠ PROJEKTU KEGA 015 UKF – 4/2012

MÁRIA KÓŠOVÁ [1] – EDITA SZABOVÁ– EVA UHRINOVÁ

ABSTRACT. *The paper deals with statistical processing of outcoming test results, which was written as part of project KEGA 015 UKF – 4/2012. The aim of this project was to compare knowledge level of pupils from 7th grade of primary school in the experimental and control group in this school year 2011/2012. By comparing these groups we want to verify hypotheses as are comparing the knowledge of pupils from experimental school with Hungarian and Slovak teaching language, the pupils with and without failure learning and the level of boy knowledge and the level of girl knowledge. This paper deals with the reliability of the outcomming test and the item analysis of the test also.*

KEY WORDS: *KEGA_015_UKF_–_4/2012, statistical processing of the outcoming test results, tasks of real-life context*

ABSTRAKT. *V nasledujúcom príspevku sa zaoberáme štatistickým spracovaním výsledkov výstupného testu projektu KEGA 015 UKF – 4/2012. Cieľom tohto projektu v školskom roku 2011/2012 bolo porovnanie úrovne vedomostí žiakov 7. ročníka ZŠ v experimentálnej a kontrolnej skupine. Porovnaním týchto skupín chceme overiť hypotézy týkajúce sa porovnania úrovne vedomostí žiakov v experimentálnych školách s vyučovacím jazykom slovenským a maďarským, úrovne vedomostí žiakov s poruchou a bez poruchy učenia, úrovne vedomostí chlapcov a dievčat. Okrem toho sa zaoberáme aj reliabilitou testu a položkovou analýzou testu.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *KEGA_015_UKF_–_4/2012, štatistické spracovanie výsledkov testu, úlohy s kontextom z reálneho života*

CLASSIFICATION: *B12*

Úvod

Nasledujúci príspevok podáva informácie o štatistickom spracovaní výsledkov výstupného testu v rámci riešenia projektu KEGA 015 UKF – 4/2012 s názvom *Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií II – Alternatívne učebné programy z matematiky pre základné školy v zmysle cieľov nového štátneho vzdelávacieho programu a v zmysle zvyšovania matematickej gramotnosti podľa dopadov PISA,* ktorého cieľom bolo v školskom roku 2011/12 vytváranie nových učebných materiálov predmetu matematika a overenie efektívnosti vyučovania pomocou týchto materiálov v 7. ročníku ZŠ. Tento projekt nadväzuje na projekt KEGA 3/7001/09 s rovnakým názvom, ktorý bol venovaný tvorbe nových učebných materiálov a overeniu ich efektívnosti vo vyučovaní v 5. a 6. ročníku ZŠ. Jedná sa o materiály zamerané na zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií prostredníctvom problémových úloh s kontextom z reálneho života, a tým aj na prípravu žiakov na medzinárodné testovanie vedomostí.

[1] Corresponding author

V rámci tohto projektu prebieha experiment, ktorý začal náhodným rozdelením škôl zapojených do výskumu na experimentálne a kontrolné a napísaním vstupného testu, ktorého výsledky sa nachádzajú v článku [7]. V každom roku riešenia sú pre experimentálne školy pripravované materiály s úlohami s kontextom z reálneho života pre každú vzdelávaciu oblasť pre konkrétny ročník. Na konci školského roka žiaci experimentálnych a kontrolných škôl píšu výstupný test. Štatistické spracovanie výsledkov výstupných testov možno nájsť pre 5. ročník v [8] a pre 6. ročník v [4].

Hlavná hypotéza výskumu a výskumná vzorka

Hlavnou hypotézou výskumu je hypotéza

H0: *Pripravené materiály efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 7. ročníka ZŠ.*

Výskumnú vzorku tvorí 620 žiakov 7. ročníka základných škôl zo štyroch okresov Nitrianskeho kraja. Niektoré školy sú školy s vyučovacím jazykom maďarským.

Metodológia a nástroje výskumu

Ako metóda výskumu bol použitý experiment. Školy boli teda náhodne rozdelené do dvoch skupín - školy experimentálne a školy kontrolné. V experimentálnej skupine je 13 škôl, kontrolnú skupinu tvorí 12 škôl. Ako výskumné nástroje boli použité didaktické testy – vstupný a výstupný test. Vstupný test bol použitý iba na začiatku experimentu (to zn. v 5. ročníku v školskom roku 2009/2010). Výstupnými testami sa porovná úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej a kontrolnej skupine na konci každého školského roku.

Výstupný test a ďalšie hypotézy výskumu

Výstupný test pre 7. ročník obsahoval 6 úloh, z ktorých každá pozostávala z niekoľkých podúloh. Všetky otázky v úlohách boli otvorené. Obsahová validita testu bola posúdená učiteľmi 7. ročníka ZŠ. Test bol najskôr odskúšaný na jednej z experimentálnych škôl a na základe toho boli niektoré úlohy mierne upravené. Každá z úloh mala pridelený určitý počet bodov. Každý žiak mohol získať celkovo maximálne 30 bodov (Súčet).

Na základe výsledkov výstupného testu sa overuje nasledovná hypotéza:

H1: *Úroveň vedomostí žiakov v experimentálnej skupine je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v kontrolnej skupine v prospech experimentálnej skupiny.*

Okrem tejto hypotézy sme si stanovili overiť a ďalšie hypotézy:

H2: *Úroveň vedomostí žiakov v školách z experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom slovenským nie je významne odlišná od úrovne vedomostí žiakov v školách z experimentálnej skupiny s vyučovacím jazykom maďarským.*

H3: *Úroveň vedomostí chlapcov z experimentálnej skupiny nie je významne odlišná od úrovne vedomostí dievčat z experimentálnej skupiny.*

H4: *Úroveň vedomostí žiakov s poruchou učenia z experimentálnej skupiny je významne odlišná od úrovne vedomostí ostatných žiakov z experimentálnej skupiny.*

Výsledky výstupného testu

Vzhľadom na stanovené hypotézy porovnávame priemerný počet dosiahnutých bodov z testu v týchto skupinách: experimentálna a kontrolná (E a K), experimentálne školy s vyučovacím jazykom slovenským (ESJ) a s vyučovacím jazykom maďarským (EMJ), skupina dievčat z experimentálnych škôl (EZ) a chlapcov z experimentálnych škôl (EM), skupina žiakov bez poruchy učenia z experimentálnych škôl a skupina žiakov s poruchou učenia z experimentálnych škôl (ENie a EAno). Popisné štatistiky porovnávaných skupín sme zhrnuli v tabuľke1.

skup. 1, skup.2	Popisné štatistiky - aritmetický priemer počtu bodov z testu (Priemer), smerodajná odchýlka (Sm. o.), počet platných hodnôt (Počet)					
	Priemer skup. 1	Priemer skup. 2	Sm. o. skup. 1	Sm. o. skup. 2	Počet skup. 1	Počet skup. 2
K, E	7,31	13,87	8,33	7,12	294	326
EMJ, ESJ	15,48	12,76	8,64	7,94	120	174
EZ, EM	13,82	13,93	8,37	8,31	155	139
ENie, EAno	16,9	5,95	7,25	4,55	10	10

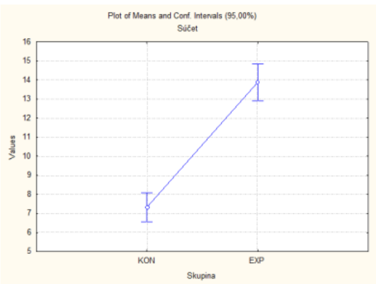
Tabuľka 1: Popisné štatistiky výstupného testu pre 7. ročník projektu KEGA

Keďže p-hodnoty testu normality (Shapirov – Wilkov test) sú pre skupiny E, K, ESJ, EMJ, EZ, EM, ENie menšie ako 0,05 nemožno rozdelenie počtu bodov v žiadnej z týchto skupín považovať za normálne. Jedinou skupinou, v ktorej možno rozdelenie počtu bodov považovať za normálne je skupina žiakov s poruchou učenia z experimentálnych škôl (EAno). Vzhľadom na uvedené sme na overenie hypotéz H1 – H4 použili neparametrický *Mannov-Whitneyov U test.*

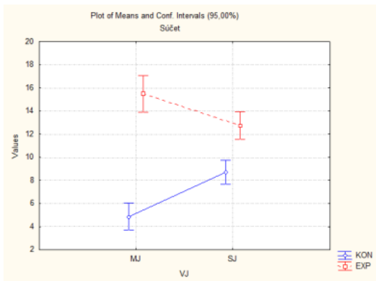
sk.1, sk.2	Súč.por. skup. 1	Súč. por. skup. 2	U	Z	p	Z uprav	p	Počet skup. 1	Počet skup. 2
K, E	78968	113542	25667	-9,99	0,00	-10,00	0,00	326	294
EMJ, ESJ	19534,5	23830,5	8605,5	2,56	0,01	2,56	0,01	120	174
EZ, EM	22775,0	20590,0	10685,0	-0,120	0,904	-0,120	0,90	155	139
EAno, ENie	144	66	11	2,95	0,003	2,95	0,003	10	10

Tabuľka 2: Výsledky Mann-Whitneyovho U testu

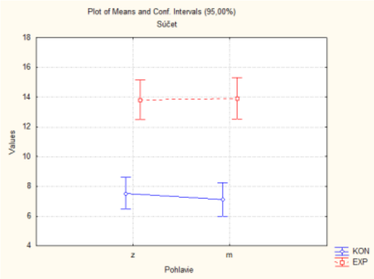
Grafické znázornenie priemerného počtu bodov z testu spolu s 95% intervalmi spoľahlivosti dosiahnutého v jednotlivých skupinách možno vidieť na obrázkoch *1a - 1d*. Pre porovnanie, na obrázkoch *1b*, *1c* a *1d* uvádzame aj znázornenie výsledkov z kontrolných škôl.



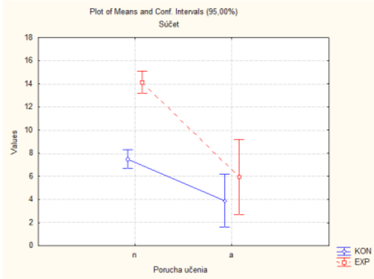
Obrázok 1a: Graf priemerov pre E a K



Obrázok 1b: Graf priemerov pre SJ a MJ



Obrázok 1c: Graf priemerov pre Z a M



Obrázok 1d: Graf priemerov pre Nie a Ano

Z výsledkov *U testu* i z grafu na obrázku *1a* je zrejmé, že rozdiel medzi priemerom v experimentálnej skupine (13,87) a v kontrolnej skupine (7,31) je štatisticky významný v prospech experimentálnej skupiny (*Z adj.* = -10,00, *p* = 0,000), z čoho vyplýva platnosť hypotézy *H1*. Teda zamietame štatistickú hypotézu *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v skupinách E a K rovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov za test v skupinách E a K je identické*. To znamená, že platí alternatívna štatistická hypotéza *Stredné hodnoty počtu bodov za test sa v skupinách E a K nerovnajú* resp. *Rozdelenie počtu bodov v skupinách E a K nie je identické*.

Rovnako tak, z výsledkov *U testu* (*Z adj.* =2,56 , *p*= 0,01) vyplýva, že je významný rozdiel medzi priemerom v skupine experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským (15,48) a s vyučovacím jazykom slovenským (12,76) v prospech škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Ak sa však pozrieme na obrázok 1b, zistíme, že aj v kontrolnej skupine škôl pravdepodobne existuje významný rozdiel medzi priemermi škôl s vyučovacím jazykom slovenským a maďarským, avšak v prospech slovenských škôl.

Vzhľadom na to sme si súbor rozdelili na štyri skupiny (ESJ, KSJ, EMJ, KMJ), ktoré sme porovnali prostredníctvom neparametrického mnohonásobného porovnania priemerov. Zistili sme, že je významný rozdiel medzi priemermi všetkých skupín okrem rozdielu medzi skupinami EMJ A ESJ. Tento záver je síce odlišný od záveru *Mann Whiteyovho U testu*, ale keďže nás prioritne zaujíma len porovnanie dvoch skupín EMJ a ESJ, berieme za smerodajný výsledok práve záver *Mann – Whitneyovho U testu*. Dosiahnuté *p*-hodnoty neparametrického mnohonásobného porovnania priemerov uvádzame v tabuľke 3. Hypotéza H2 sa teda nepotvrdila, čo znamená zamietnutie štatistickej hypotézy *Rozdelenie počtu bodov za test v základných súboroch skupín* ESJ *a* EMJ *je identické.*

Teda medzi výsledkami v týchto skupinách je signifikantný rozdiel. Žiaci experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským dosiahli lepšie výsledky ako žiaci experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom slovenským. Pričom zaujímavým zistením je aj situácia v kontrolných školách, kde sa tiež preukázal významný rozdiel v dosiahnutých výsledkoch (*p*-hodnota=0,000052), avšak pre školy s vyučovacím jazykom slovenským (aj z výsledkov porovnania prostredníctvom *M-W U testu* vyplýva významnosť tohto rozdielu, Z *adj.*=-5,12, *p*-hodnota=0,0000). Z čoho ďalej vyplýva, že síce nastalo významné zlepšenie v oboch typoch škôl (MJ aj SJ), ale výraznejší posun nastal práve v školách s vyučovacím jazykom maďarským.

	KMJ (4,87)	EMJ (15,48)	KSJ (8,69)	ESJ (12,76)
KMJ (4,87)		0,000000	0,000052	0,000000
EMJ (15,48)	0,000000		0,000000	0,137588
KSJ (8,69)	0,000052	0,000000		0,000001
ESJ (12,76)	0,000000	0,137588	0,000001	

Tabuľka 3: neparametrické mnohonásobné porovnania priemerov

Z výsledkov *U testu* (*Z adj.*= -0,12, *p*= 0,9) ďalej vyplýva, že medzi dosiahnutým priemerným počtom bodov z testu v skupine chlapcov z experimentálnych škôl (13,93) a v skupine dievčat z experimentálnych škôl (13,82) nie významný rozdiel. Hypotéza H3 sa potvrdila, teda štatistickú hypotézu *Rozdelenie počtu bodov za test v skupine EZ a EM je identické* nezamietame. V experimentálnych školách nie je signifikantný rozdiel v úrovni vedomostí medzi chlapcami a dievčatami.

Aby sme pri vyhodnocovaní hypotézy H4, a teda porovnávaní priemerov skupiny žiakov s poruchou učenia z experimentálnych škôl a bez poruchy učenia z experimentálnych škôl, neporovnávali dva súbory s veľmi odlišným rozsahom, urobili sme náhodný výber 10 žiakov zo skupiny ENie. Z výsledkov *U testu* pre porovnanie týchto dvoch skupín vyplýva, že je významný rozdiel v úrovni vedomostí medzi skupinami EAno a ENie. Štatistickú hypotézu *Rozdelenie počtu bodov za test v skupinách EAno a ENie je identické* zamietame, teda naša hypotéza H4 sa potvrdila.

Analýza kvality výstupného testu

V tejto časti uvádzame popisné štatistiky počtu bodov za test bez ohľadu na skupiny, koeficient reliability testu a položkovú analýzu testu. Reliabilita testu by mala byť aspoň 0,65. Reliabilita nad 0,85 sa považuje za postačujúcu na to, aby bolo možné na základe jednej skúšky prijať rozhodnutie ([6]).

V tabuľke 4 sú uvedené popisné štatistiky počtu bodov za test a tabuľka 5 obsahuje položkovú analýzu testu, teda popisné štatistiky počtu bodov za úlohy – aritmetický priemer, medián, modus, smerodajnú odchýlku, ďalej percento žiakov, ktorí dosiahli maximálnu úspešnosť riešenia (úloha je podozrivá, ak je týchto žiakov aspoň 80 %), percento žiakov, ktorí získali z úlohy 0 bodov (úloha je podozrivá, ak je týchto žiakov aspoň 80 %). Vidíme, že ani jedna úloha nie je podozrivá. Modus počtu bodov je vo všetkých úlohách rovný 0.

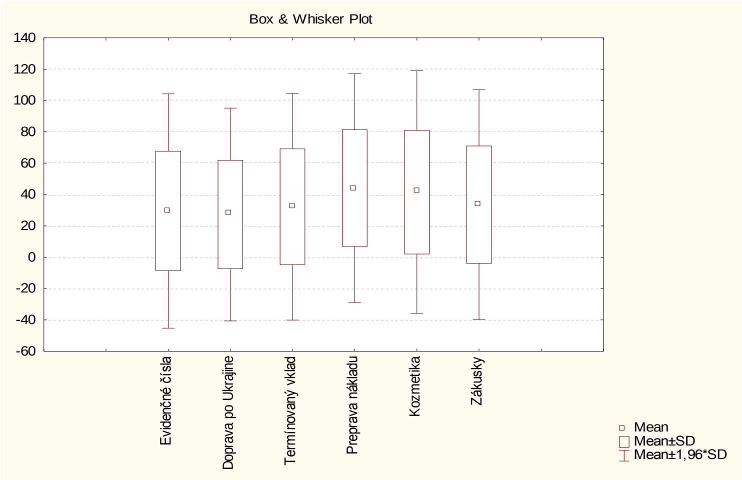
Premenná	N platných	Priemer	Medián	Modus	Poč. mod.	Min	Max	Sm. odch.
Súčet	620	10,43	9	0	53	0	30	8,37

Tabuľka 4: Popisné štatistiky počtu bodov za test

	Popisné štatistiky								
	priemer	med	mod	Poč. mod.	min	max	smer. odch.	% žiakov s min	%žiakov s max
Evidenčné čísla	1,48	0	0	338	0	5	1,91	54,52%	15,81%
Doprava po Ukrajine	1,37	1	0	303	0	5	1,73	48,87%	9,84%
Termínovaný vklad	1,61	1	0	238	0	5	1,84	38,39%	16,77%
Preprava nákladu	2,21	2	0	177	0	5	1,86	28,55%	20,16%
Kozmetika	2,08	2	0	219	0	5	1,98	35,32%	20,16%
Zákusky	1,68	1	0	227	0	5	1,87	36,61%	18,39%

Tabuľka 5: Položková analýza testu

Vypočítali sme percentuálnu úspešnosť riešenia každej úlohy u každého žiaka a nakreslili sme škatuľové grafy pre priemernú percentuálnu úspešnosť, smerodajnú odchýlku percentuálnej úspešnosti a 1,96 násobok smerodajnej odchýlky percentuálnej úspešnosti (obr. 3).



Obrázok 2: Škatuľové grafy percentuálnej úspešnosti úloh

Najvyššiu priemernú percentuálnu úspešnosť dosiahli žiaci pri riešení úlohy *Preprava nákladu*. Naopak, najťažšou úlohou bola pre žiakov úloha *Doprava po Ukrajine.*

Pre zistenie miery reliability testu sme vypočítali koeficient reliability *Cronbachovu alfu* (0,846), ktorej hodnota svedčí o dostatočnej reliabilite výstupného testu. Pre stanovenie miery reliability testu je ešte nutné zistiť hodnotu spomínaného koeficientu aj po odstránení jednotlivých úloh z testu. Ak sa hodnota *Cronbachovej alfy* zväčší po odstránení danej úlohy, táto úloha znižuje reliabilitu testu. Hodnoty koeficientu reliability po odstránení jednotlivých úloh sa nachádzajú v tabuľke 6.

	Evidenčné čísla	Doprava po Ukrajine	Termínovaný vklad	Preprava nákladu	Kozmetika	Zákusky
alfa po odstr.	0,807338	0,818892	0,802029	0,824704	0,814417	0,82663

Tabuľka 6: Hodnoty koeficientu reliability po odstránení jednotlivých úloh

Záver

Preukázali sme, že nami vytvorený výstupný test pre žiakov 7. ročníka bol dostatočne reliabilný.

Na základe jeho výsledkov možno konštatovať, že materiály pripravené pre učiteľov a prostredníctvom nich pre žiakov 7. ročníka ZŠ efektívne prispeli k zvýšeniu kľúčových matematických kompetencií žiakov 7. ročníka ZŠ.

Ukázalo sa, že žiaci z experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom maďarským dosiahli významne lepšie výsledky ako žiaci z experimentálnych škôl s vyučovacím jazykom slovenským. Naopak, v kontrolných školách dosiahli lepšie výsledky žiaci zo škôl s vyučovacím jazykom slovenským. Možno sa domnievať, že to môže byť spôsobené tým, že v školách s vyučovacím jazykom maďarským sa viac pracuje s pripravenými materiálmi.

Nepreukázal sa signifikantný rozdiel v úrovni vedomostí vzhľadom na pohlavie žiakov v experimentálnych školách.

Ďalej sa preukázal očakávaný výsledok, že vedomosti žiakov s poruchou učenia sú významne slabšie ako vedomosti žiakov bez porúch učenia v experimentálnych školách.

Literatúra

[1] Anděl, J. (2003). Štatistické metódy. Praha: Matfyzpress, 2003. ISBN 80-86732-08-8

[2] Gavora P.(2001). Úvod do pedagogického výskumu. Bratislava: UK, 2001. ISBN 80-223-1628-8

[3] Kaňová E. (2005). Tvorba didaktických testov z pravdepodobnosti a ich analýza. In: Zborník zo VI. Vedeckej konferencie doktorandov a mladých vedeckých pracovníkov, Nitra: Edícia Prírodovedec č. 159, 2005. ISBN 80-8050-813-5

[4] Kóšová, M. - Rybanský, Ľ. (2011). Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 6. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: ACTA MATHEMATICA 14, Nitra: Katedra matematiky FPV UKF, 2010, s.117-123. ISBN 978-80-8094-7958-7.

[5] Rosa. V. (2007). Metodika tvorby didaktických testov. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2007.

[6] Rybanský, Ľ. – Vrábelová M. (2010). Štatistické spracovanie výsledkov vstupného testu KEGA 3/7001/09. In: Zborník príspevkov z vedeckej konferencie Pedagogická veda a školská prax v historickom kontexte, Trnava: Katedra pedagogiky FF Univerzity sv. Cyrila a Metoda v Trnave, 2010.

[7] Rybanský, Ľ. – Vrábelová M. (2010). Štatistické spracovanie výsledkov výstupného testu pre 5. ročník projektu KEGA 3/7001/09. In: ACTA MATHEMATICA 13, Nitra: Katedra matematiky FPV UKF, 2010, s. 225-232. ISBN 978-80-8094-791-1.

[8] Zvára, K. – Štěpán, J. (2001). Pravdepodobnost a matematická statistika. Praha: Matfyzpress, Bratislava: VEDA, 2001. ISBN 80-2240736-4

Článok prijatý dňa 15. apríla 2013.

Adresa autorov

Mgr. Mária Kóšová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr.A.Hlinku1, SK – 94974 Nitra; e-mail: `maria.kosova@ukf.sk`

Mgr. Edita Szabová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr.A.Hlinku1, SK – 94974 Nitra; e-mail: `edita.szabova@ukf.sk`

PaedDr. Eva Uhrinová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr.A.Hlinku1, SK – 94974 Nitra; e-mail: `eva.uhrinova@ukf.sk`

Poďakovanie

Tento článok bol podporený grantom KEGA 015 UKF - 4/2012.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

DIFFERENT APPROACHES IN SOLVING OF CHOSEN MATHEMATICAL TASK FOR GRADUATING STUDENTS

RÔZNE POSTUPY RIEŠENIA VYBRANEJ ÚLOHY Z MATURITNÉHO TESTU

RENÁTA KUNOVÁ

ABSTRACT. *Recently, graduation from mathematics consists of two distinct parts: external written test given by national organization NÚCEM and internal oral part, which is self-set by each educational institution. In our contribution, we analyze one particular task found in graduation test from 2012 and explain different means and approaches of solution from the viewpoint of high school students.*

KEY WORDS: *quadratic equation – solutions, NÚCEM analysis*

ABSTRAKT. *V súčasnosti maturitná skúška z matematiky pozostáva z dvoch častí: externá písomná časť – test, ktorý zadáva celoštátne NÚCEM a ústna interná časť – maturitné zadania, ktoré si pripravuje každá škola sama. V našom príspevku analyzujeme jednu položku maturitného testu z roku 2012.Podávame rôzne spôsoby a postupy riešenia z pohľadu žiakov gymnázia.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: kvadratická rovnica – riešenia, analýza NÚCEM*

CLASSIFICATION: *U94*

1 Teoretické východiská

Postupy riešenia kvadratických rovníc vysvetľuje Muhammad al-Chorezmí v knihe *Hisáb al-džabr ua'l-muqábala* (حساب الجبر و المقابلة). Zo slova al-džebr vznikol názov **algebra**, čo znamená spojenie alebo doplnok. Je to časť matematiky, ktorá študuje vzťahy a vlastnosti kvantity pomocou matematických symbolov.[1]
Algebru môžeme rozdeliť ešte do ďalších častí:

- *elementárna algebra* zaoberajúca sa základnými vlastnosťami operácií na množine reálnych čísel, výrazmi a rovnicami, ktoré obsahujú reálne premenné,
- *abstraktná algebra* študuje abstraktné algebrické štruktúry, ako sú napr. grupy, okruhy, zväzy a polia,
- *lineárna algebra* sa zaoberá špecifickými vlastnosťami vektorových priestorov,
- *počítačová algebra* študuje hlavne algoritmy symbolických a numerických výpočtov riešiacich rozmanité algebrické problémy.

V Štátnom vzdelávacom programe ISCED 3A [2] vo výkonovom štandarde v tematickom okruhu Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy a v Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky [3] v kapitole 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy sú uvedené pojmy, vlastnosti a vzťahy, ktoré si má osvojiť žiak, maturujúci z predmetu matematika.

Osvojené základné pojmy kvadratickej rovnice sú: koeficienty kvadratickej rovnice, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia. Rozširujúcimi pojmami sú: koeficient pri lineárnom a kvadratickom člene.

Vlastnosti a vzťahy:

- diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$
- využitie Vietových vzťahov, ktoré určujú vzťah medzi koreňmi x_1, x_2 a koeficientmi a, b, c kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$
  $x_1 + x_2 = - b/a$
  $x_1 . x_2 = c/a$
  (ak má rovnica len jeden koreň x_1, tak sa jedná o tzv. dvojnásobný koreň)
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- nájsť všetky riešenia kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení,
- zostaviť kvadratickú rovnicu,
- využívať ekvivalentné a neekvivalentné úpravy,
- rozhodnúť, či úprava zachová alebo zmení množinu riešení danej rovnice. [3]

2 Žiacke riešenia vybranej úlohy z testu MA 3606 (2012)

V našom príspevku sme sa zamerali na rozbor jednej úlohy externej časti maturitného testu z roku 2012. Bola to úloha uzavretá s výberom odpovede z piatich možností, pričom správna je vždy len jedna možnosť.

Naším cieľom bolo, danú úlohu vyriešiť za presne stanovený časový limit a následne urobiť rozbor všetkých ponúknutých žiackych riešení.

Štruktúra maturitného testu z matematiky

Každý školský rok je maturitný test externej časti maturitnej skúšky z matematiky určený pre maturantov všetkých typov stredných škôl. Obsahuje 30 úloh, ktoré vychádzajú z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Dvadsať úloh je otvorených s krátkou odpoveďou. Žiaci počítajú a výsledky zapisujú podľa pokynov v zadaní – zaokrúhľujú, počítajú s presnosťou na jedno alebo dve desatinné miesta. Desať úloh je uzavretých s výberom jednej správnej odpovede z piatich ponúknutých možností. Pomôcky, ktoré žiaci využívajú sú bežné písacie potreby, kalkulačka bez grafického displeja a vzorce vypísané vzadu v teste. Časová dotácia na celý test je 120 minút. Test sa píše počas písomných maturitných skúšok v polovici marca ako tretí v poradí, po slovenskom jazyku a cudzích jazykoch.

Zadanie vybranej úlohy: Určte reálne čísla a, b tak, aby kvadratická rovnica $ax^2 + bx - 2 = 0$ mala korene -2 a $\frac{1}{2}$.

A. $a = 12 \quad b = 9$
B. $a = 2 \quad b = -3$
C. $a = 2 \quad b = 3$
D. $a = -2 \quad b = 3$
E. $a = -2 \quad b = -3$

Riešenie I.

Korene -2 a $\frac{1}{2}$ dosadíme do kvadratickej rovnice za neznámu x, zostavíme a riešime sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

$$4a - 2b - 2 = 0$$
$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - 2 = 0 \qquad /.4$$

$$4a - 2b - 2 = 0$$
$$a + 2b - 8 = 0 \qquad /+$$

$$5a - 10 = 0$$
$$a = 2$$
$$b = 3$$

Správna odpoveď: C

Riešenie II.

Pri riešení využívame Vietove vzťahy. Kvadratickú rovnicu normujeme a zapíšeme do sústavy.

$x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{2}{a} = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad -2 + \frac{1}{2} = -\frac{b}{a}$

$x_1 . x_2 = -\frac{2}{a} \qquad -2.\frac{1}{2} = -\frac{2}{a}$

$$a = 2 \qquad b = 3$$

Riešenie III.

Pri riešení využijeme rozklad kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov $ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$ a roznásobíme.

$$a(x - x_1).(x - x_2) = 0$$
$$(x + 2).\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Zo zostavenej rovnice priamo vidíme správnu odpoveď. $a = 2 \qquad b = 3$

Riešenie IV.
Kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx - 2 = 0$ najčastejšie riešime pomocou diskriminantu.
$D = b^2$ - $4ac$ = b^2 + $8a$

$$-2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$-4a = -b+\sqrt{D}$$
$$a = -b-\sqrt{D}$$
$$-3a = -2b$$

$$a = \frac{2}{3}b$$

Hľadaním závislosti medzi a a b nájdeme vyhovujúce riešenie - najmenšie hodnoty na množine celých čísel sú b = *3* a a =*2.*

Riešenie V.
Overovanie každej z piatich možností po dosadení do pôvodného zadania kvadratickej rovnice za premenné a a b a následné vypočítanie koreňov kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu.

$12x^2 + 9x - 2 = 0$	D = 177	
$2x^2 - 3x - 2 = 0$	D = 25	$x_1 = 2$ $x_2 = -\frac{1}{2}$
$2x^2 + 3x - 2 = 0$	D = 25	$x_1 = -2$ $x_2 = \frac{1}{2}$
$-2x^2 + 3x - 2 = 0$	D = -7	
$-2x^2 - 3x - 2 = 0$	D = -7	

Takto riešiť úlohu je vhodné žiakom, ktorí sú v počítaní rýchli a presní. Nerobia numerické chyby, chyby v znamienkach a pod.

Riešenie VI.
Do danej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx - 2 = 0$ dosadíme koreň – 2.
Z rovnice $4a - 2b - 2 = 0$ vyjadríme neznámu $b = 2a - 1$ a postupným dosadzovaním zistíme, že vyhovujú hodnoty $a = 2, b = 3$.

Ďalšie úlohy z maturitných testov:

1. Určte hodnotu c tak, aby číslo 4 bolo koreňom kvadratickej rovnice
   $3x^2 - 2x + c = 0$ $(c = -40)$.
2. Určte hodnotu koeficientu b tak, aby jeden z koreňov kvadratickej rovnice
   $5x^2 + bx + 24 = 0$ bol $x_1 = 8$ $(b = -43)$.
3. Určte parameter b tak, aby platila rovnosť
   $(6x^2 + bx + 2 = 0) : (2x - 1) = (3x - 2)$ $(b = -7)$.

3 Analýza NÚCEM

V Správe o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky (2012) sa k danej úlohe (úloha č. 24 v maturitnom teste MA 6306) uvádza:
Testovaná myšlienková operácia: zložitejšia.

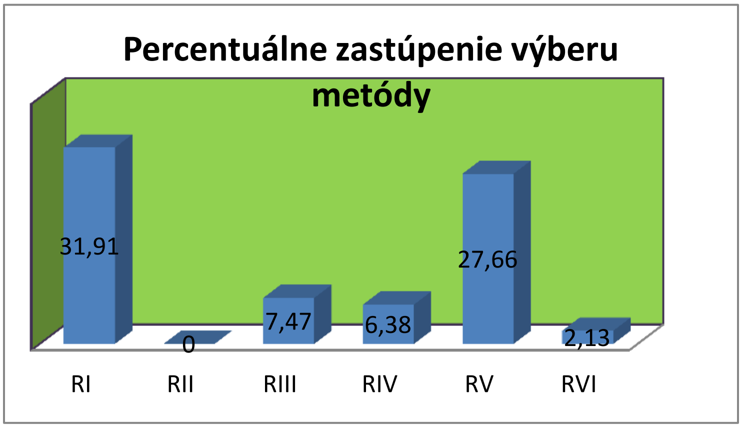
Predpokladaná obtiažnosť: stredná obtiažnosť.
Celková úspešnosť: 73 % (Gymnázia – 79,4 %, Stredné odborné školy 61,3 %)

Odpovede a frekvencia výskytu:
C 73 % správna odpoveď
B 9,9% numerická chyba – správne vyrátaná hodnota koeficientu a, ale chyba pri
dopočítaní hodnoty b
D 9,3% numerická chyba – správne vyrátaná hodnota koeficientu b, ale chyba pri
dopočítaní hodnoty a
E 5,2% numerická chyba – žiak sa dopustí viacerých numerických chýb, alebo
volia odpoveď náhodne
náhodne
A 1,9% volia odpoveď náhodne
0,7 % neuvedená odpoveď.

Komentár: Úloha vyžadovala určiť kvadratickú rovnicu na základe koreňov rovnice, zručnosť pri umocňovaní a pri práci so zlomkami. Úspešnejší boli žiaci gymnázií v porovnaní s odbornými školami. Úloha nebola až tak obtiažna ako sa predpokladalo. Žiaci s priemernými schopnosťami riešili úlohu s pravdepodobnosťou 0,8. Tiež rozlišovacia sila položky nebola veľká. Všetky distraktory si vyberali žiaci rovnomerne. Pravdepodobnosť voľby správnej odpovede C sa s rastúcou hodnotou úrovne schopností žiaka zvyšovala [4].

4 Priebeh a vyhodnotenie riešenej úlohy

Úlohu riešilo spolu 94 žiakov, 19 žiakov 4. ročníka – maturantov z matematiky v tomto školskom roku, 56 žiakov 2. ročníka štvorročného gymnázia a 19 žiakov VI. ročníka osemročného gymnázia. Časová dotácia na danú úlohu bola 5 minút. Správne riešenie počas stanoveného času nevedelo nájsť 24,47% žiakov.



Legenda:
RI – sústava dvoch lineárnych rovníc
RII – Vietove vzťahy
RIII – rozklad na koreňové činitele
RIV– riešenie diskriminantom
RV – spätné dosadenie daných možností
RVI – dosadenie jedného koreňa

Obrázok 1: Výber metódy riešenia

Snažili sme sa o analýzu žiackych riešení a z nich vyplývajúcich postupov a metód pri riešení zdanlivo ľahkej matematickej úlohy.

Najčastejšie použitou metódou bolo dosadenie oboch koreňov do kvadratickej rovnice a zostavenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi (Riešenie I) – tento postup zvolilo 31,91% žiakov. Potom nasleduje spätné dosadenie ponúknutých možností v zadaní úlohy a výpočet kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu (Riešenie V) – takto riešilo 27,66% žiakov. Riešenie pomocou koreňových činiteľov (Riešenie III) využilo 7,47% žiakov. Sústavou, ktorú si žiaci zostavili pomocou vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (Riešenie IV) riešilo úlohu 6,38 % žiakov. Dosadenie jedného koreňa a následné vyjadrenie neznámej (Riešenie VI) postupným dosadzovaním ponúknutých možností využilo 2,13% žiakov.

Riešenie využitím Vietových vzťahov (Riešenie II) nepoužil ani jeden žiak, až po zadaní návodu učiteľom vedeli žiaci pokračovať. Vo 4. ročníku nevedelo riešiť úlohu 31 % žiakov, v II. ročníku 25% žiakov a v VI. ročníku 15,78 % žiakov. Celkovo úspešnosť danej úlohy bola 75,53%, čo je v súlade s výsledkami NÚCEM.

5 Záver

V našom príspevku sme chceli ukázať, že úlohy v maturitnom teste poskytujú široké možnosti riešenia. Postupy riešení kvadratických rovníc si žiaci majú osvojiť na povinných hodinách matematiky v prvom a druhom ročníku strednej školy(podľa ŠVP). Našli sme šesť spôsobov ako dôjsť k správnemu výsledku vybranej úlohy, je teda len na žiakoch aký postup zvolia pri riešení. Úlohou školy a učiteľov je dbať na neustále rozvíjanie písomného prejavu v matematike, pretože od školského roku 2012/2013 (Maturita 2013) sa kladie vyšší dôraz na výsledky písomnej časti maturitnej skúšky. Doteraz žiak zmaturoval bez ohľadu na to, aké hodnotenie získal z EČ MS, ak z ústnej časti MS odpovedal aspoň na známku dobrý. Podľa nových zmien z matematiky bude musieť získať viac ako 25 % z EČ MS, ak odpovie z ústnej časti MS aspoň na známku dobrý, alebo získať viac ako 33 % z EČ MS, ak odpovie z ústnej časti MS na známku dostatočný.

Literatúra

[1] Kubáček, Z. (2009).Matematika pre druhý ročník gymnázií. Prvá časť. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, spol. s r.o.,2009. 112s.ISBN 978-80-7158-983-9

[2] Štátny pedagogický ústav, Štátny vzdelávací program Matematika – príloha ISCED 3A, schválené ÚPK, Bratislava 2009

[3] Štátny pedagogický ústav, Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, Bratislava 2009

[4] http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2012/vysledky_analyzy/Sprava_EC_MS_2012_MAT.pdf

Článok prijatý dňa 24. apríl 2013.

Adresa autora

RNDr. Renáta Kunová, PhD.
Gymnázium Janka Kráľa, Ul. SNP 3, SK – 953 01 Zlaté Moravce,
e-mail: kunovarenata@gmail.com

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SUPER EDGE-MAGIC TOTAL LABELING OF SOME CLASSES OF GRAPHS

HRANOVO SUPERMAGICKÉ ÚPLNÉ OHODNOTENIE NIEKTORÝCH TRIED GRAFOV

LUKÁŚ LEDNICKÝ

ABSTRACT. *In this contribution we investigate the super edge-magic total labeling of certain classes of graphs. We prove that the triangular book $B_{3,n}$ is super edge-magic for any n and prove a necessary condition for a (n,k)-kite graph to be super edge-magic.*

KEY WORDS: *Graph theory, Super edge-magic graphs, Book graph, Kite graph.*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať hranovo supermagickým ohodnotením niektorých tried grafov. Dokážeme, že kniha $B_{3,n}$ je hranovo supermagická pre ľubovoľné n a nutnú podmienku, aby bol graf draka $D_{n,k}$ hranovo supermagický.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Teória grafov, Hranovo supermagické grafy, Graf knihy, Graf draka.*

CLASSIFICATION: K35

Úvod

V tomto príspevku budeme pod označením graf $G=(V,E)$ uvažovať neorientovaný graf bez násobných hrán a slučiek. Označme $v=|V(G)|$ počet vrcholov grafu *G* a $e=|E(G)|$ počet hrán grafu *G*.

Existuje viacero druhov ohodnotení s prívlastkom magické. V tomto príspevku sa budeme zaoberať hranovo magickým a supermagickým úplným ohodnotením grafov. Hranovo magické grafy prvýkrát definovali Kotzig a Rosa v roku 1970. Okrem iného dokázali, že bipartitný graf $K_{m,n}$ je hranovo magický pre ľubovoľné prirodzené čísla *m* a *n*, kružnica C_n je hranovo magická pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ [2].

Základné definície a poznatky

Ohodnotenie grafu je zobrazenie elementov grafu (vrcholov, hrán) do množiny prirodzených alebo nezáporných celých čísel. V tomto príspevku bude definičným oborom tohto zobrazenia zjednotenie vrcholovej a hranovej množiny. Takéto zobrazenie sa nazýva úplné. Na takéto zobrazenie môžeme klásť rôzne podmienky, čím vzniká množstvo rôznych druhov ohodnotení. Najúplnejší prehľad takýchto ohodnotení podal Gallian [2].

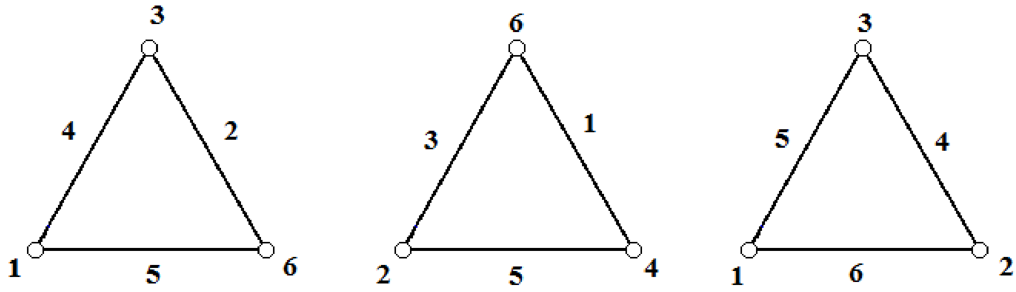
Prenesením vlastnosti magických štvorcov na hrany grafu vytvoríme hranovo magické úplné ohodnotenie grafu.

Definícia: Hranovo magické úplné ohodnotenie grafu *G* je bijektívne zobrazenie $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\ldots,v+e\}$ s vlastnosťou:

$$\forall uw \in E(G): \lambda(u)+\lambda(uw)+\lambda(w)=m,$$

pre nejakú konštantu *m*, ktorú budeme nazývať magický súčet grafu. Ak existuje aspoň jedno hranovo magické úplné ohodnotenie grafu *G*, tak hovoríme, že graf *G* je hranovo magický. Ak sú vrcholy hranovo magického grafu ohodnotené číslami 1, 2, ..., *v*, tak sa tento graf nazýva hranovo supermagický.

Pre daný graf môže existovať viacero magických ohodnotení, a to s rôznymi magickými súčtami. Na obrázku 1 sú tri rôzne úplné ohodnotenia grafu C_3. Prvé nie je hranovo magické, druhé je hranovo magické s magickým súčtom 11 a tretie je hranovo supermagické s magickým súčtom 9.



Obrázok 2

Z obrázku vidíme, že hodnota magického súčtu pre ten istý graf môže byť rôzna a závisí od samotného magického ohodnotenia. Predpokladajme, že graf *G*, je supermagický. Potom množina $S=\{\lambda(u)+\lambda(w); uw\in E(G)\}$ je tvorená postupnosťou *e* po sebe nasledujúcich prirodzených čísel [4]. Každý vrchol prispieva svojim ohodnotením do toľkých prvkov postupnosti, s koľkými hranami je incidentný. Potom platí:

$$\sum_{u\in V(G)}(\deg(u)\lambda(u))=s+(s+1)+\ldots+(s+e-1)=es+\frac{e(e-1)}{2}=es+\binom{e}{2},$$

kde deg(*u*) je stupeň vrcholu *u* v grafe *G* a *s* je minimum množiny *S*.

Ak existuje bijektívne zobrazenie $\lambda:V(G)\to\{1,2,...,v\}$, pre ktoré platí, že množina *S* je tvorená postupnosťou za sebou nasledujúcich prirodzených čísel, tak toto zobrazenie indukuje hranovo supermagické úplné ohodnotenie grafu *G*. Toto ohodnotenie bude mať rovnaké ohodnotenie vrcholov ako zobrazenie λ. Hranám priradíme čísla *v*+1, *v*+2, ... *v*+*e* tak, aby magický súčet grafu bol *s*+*v*+*e*.

Niektoré hranovo supermagické grafy

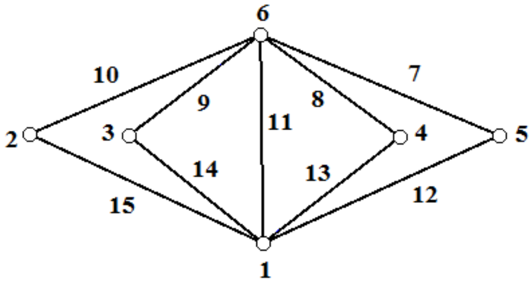
Teraz sa budeme zaoberať magickými ohodnoteniami istých skupín grafov. Graf knihy (z anglického book graph) B_n sa skladá z *n* kružníc C_4 s práve jednou spoločnou hranou. Zovšeobecnený graf knihy $B_{k,n}$ sa skladá z *n* kružníc C_k s práve jednou spoločnou hranou. Pre knihy $B_{3,n}$ platí nasledujúca veta.

Veta 1: Graf $B_{3,n}$ je hranovo supermagický pre ľubovoľné *n*.

Dôkaz: Označme vrcholy incidentné so spoločnou hranou všetkých kružníc u_1 a u_{n+2}. Ostatné vrcholy označme $u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}$. Definujme zobrazenie $\lambda:V(B_{3,n})\cup E(B_{3,n})\to\{1,2,\ldots 3n+3\}$ nasledovne:

$$\lambda(u_i) = i \qquad 1 \le i \le n+2$$
$$\lambda(u_1u_i) = 3n+5-i \qquad 2 \le i \le n+2$$
$$\lambda(u_iu_{n+2}) = 2n+4-i \qquad 2 \le i \le n+1$$

Zobrazenie spĺňa podmienky uvedené v definícii 1, a preto je graf hranovo supermagický s magickým súčtom $3n+6$. Na obrázku môžeme vidieť ohodnotenie grafu pomocou zobrazenia z dôkazu vety 1.



Obrázok 3

Graf draka (z anglického kite graph) $D_{n,k}$ pozostáva z kružnice dĺžky n a cesty dĺžky k pripojenej k jednému z vrcholov kružnice. O tejto triede grafov môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 2: Ak je graf $D_{n,k}$ hranovo supermagický, tak n a k sú rovnakej parity.

Dôkaz: Graf $D_{n,k}$ obsahuje $n+k$ vrcholov z toho jeden vrchol stupňa 3, jeden vrchol stupňa 1 a ostatné vrcholy sú stupňa 2. Označme x vrchol stupňa 3 a y vrchol stupňa 1. Nech graf $D_{n,k}$ je hranovo supermagický, potom existuje bijektívne zobrazenie $\lambda : V(D_{n,k}) \cup E(D_{n,k}) \to \{1,2,\ldots,2(n+k)\}$ a platí:

$$\sum_{u\in V(D_{n,k})} \deg(u)\lambda(u) = \lambda(x) - \lambda(y) + \sum_{u\in V(D_{n,k})} 2\lambda(u) = (n+k)(n+k+1) + \lambda(x) - \lambda(y) =$$
$$= s(n+k) + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

Z poslednej rovnosti vyjadríme s.

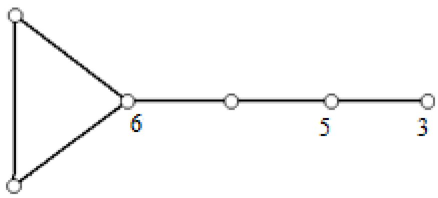
$$s = \frac{n+k+3}{2} + \frac{\lambda(x)-\lambda(y)}{n+k}$$

Rozdiel v čitateli druhého zlomku bude vždy nenulový a nikdy neprevýši číslo $n+k-1$. Ak uvážime, že s musí byť prirodzené číslo, tak jediné prípustné hodnoty pre druhý zlomok sú ±0,5. V tom prípade však súčet $n+k$ musí byť párny, a teda čísla n a k musia byť rovnakej parity.

Veta 2 je nutnou podmienkou, aby bol graf $D_{n,k}$ hranovo supermagický. Dá sa ukázať, že graf $D_{3,3}$ nie je hranovo supermagický. Dôkaz tohto tvrdenia možno vykonať preskúmaním všetkých šiestich možných ohodnotení vrcholov x a y. Rozdiel medzi ohodnoteniami týchto vrcholov musí byť ±3, preto sú prípustné len nasledujúce spôsoby ohodnotenia oboch vrcholov:

$$\lambda(x)=6 \quad \lambda(y)=3 \qquad \lambda(x)=3 \quad \lambda(y)=6$$
$$\lambda(x)=5 \quad \lambda(y)=2 \qquad \lambda(x)=2 \quad \lambda(y)=5$$
$$\lambda(x)=4 \quad \lambda(y)=1 \qquad \lambda(x)=1 \quad \lambda(y)=4$$

Vezmime si prvé priradenie. Potom $s=5$ a množina S je tvorená číslami 5, 6, 7, 8, 9 a 10. Potom však vrchol s ohodnotením 1 nesmie byť susedný s vrcholmi s ohodnoteniami 1 a 2. Vrchol s ohodnotením 6 musí byť susedný s vrcholom, ktorý má ohodnotenie 4 a nesmie byť susedný s vrcholom, ktorý má ohodnotenie 5. Na obrázku 3 môžeme vidieť, čiastočné ohodnotenie tohto grafu. Vrcholom je potrebné priradiť ohodnotenia 1, 2 a 4. Žiadnemu z neohodnotených vrcholov už nie je možné priradiť ohodnotenie 2, lebo by vznikol súčet 8. Ten však už vytvárajú vrcholy s ohodnoteniami 3 a 5.K podobným sporom vedú aj ostatné možnosti ohodnotenia vrcholov *x* a *y*.

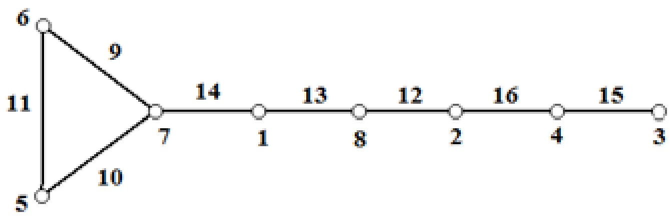


Obrázok 4

Na obrázku 4 môžeme vidieť graf $D_{3,5}$, ktorý hranovo supermagický je s magickým súčtom 22. Pri hľadaní supermagických ohodnotení tejto triedy grafov nám pomáha podmienka z dôkazu vety 2. Ak má platiť

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(y)}{n+k}=\pm\frac{1}{2},$$

tak potom platí $|\lambda(x)-\lambda(y)|=\dfrac{n+k}{2}$.



Obrázok 4

Pre niektoré špeciálne hodnoty k už bola dokázaná nutná a postačujúca podmienka. Park a kolektív [3] dokázali, že graf $D_{n,2}$ je hranovo supermagický vtedy a len vtedy, keď n je párne.

Záver

V príspevku sme sa dokázali, že graf knihy $B_{k,n}$ je hranovo supermagický pre $k = 3$ a ľubovoľné n. Ďalej je možné skúmať graf knihy pre iné hodnoty k a zistiť, či sú hranovo supermagické. Dokázali sme tiež nutnú podmienku, kedy je graf draka $D_{n,k}$ hranovo supermagický. Okrem týchto tried existuje ešte mnoho ďalších, ktorých magické vlastnosti neboli preskúmané.

Literatúra

[1] Figueroa-Centeno, R. M., Ichishima, R., Muntaner-Batle, F. A. (2001).The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings. In Discrete Mathematics 231. Elsevier, 2001.s. 153 – 168.

[2] Gallian, J. A. (2009). A dynamic survey of graph labeling. In The electronic journal of combinatorics 16. s. 1 – 219.

[3] Park, J. Y., Choi, J. H., Bae, J. H. (2008). On super edge-magic labeling of some graphs. In Bulletin of the Korean Mathematical Society 45. 2008. s. 11 -21.

[4] Wallis, W. D. Magic Graphs, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 2001. ISBN 0-8176-4252-8.

Článok prijatý dňa 24. apríla 2013.

Adresa autorov

Mgr. Lukáš Lednický
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, 97974 Nitra; e-mail: lukas.lednicky@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

MIND MAPS AS A TOOL FOR ENLARGING MATHEMATICAL LITERACY

RENATA MAJOVSKÁ

ABSTRACT. *We present mind maps as one of tools suitable for problem solving, improvement creativity and expanding capacity for knowledge in mathematical education at all levels of education. We introduce our experiences with usage open source mind mapping software Freemind. Basic rules for map creating are given.*

KEY WORDS: *Mind Map, Open Source, Freemind, Problem Solving*

ABSTRAKT. *V příspěvku představujeme mentální mapy jako jeden z prostředků pro řešení matematických problémů, zvýšení kreativity a rozšíření kapacity vědomostí ve výuce matematiky na každé úrovní vzdělávání. Uvádíme své zkušenosti s používáním open source programu Freemind pro tvorbu mentálních map. Uvádíme základní pravidla pro tvorbu mentálních map.*

KLÍČOVÁ SLOVA: *Mentální mapa, open source, Freemind, řešení problému*

CLASSIFICATION: *C30, Q30*

Introduction

Mind maps or “similar” semantic, concept or cognitive maps have been used for learning, brainstorming, memory, visual thinking, problem solving by educators, scientists, artists, psychologists and people in general in various spheres of activities for centuries. We should mention Leonardo da Vinci, Isaac Newton, Charles Darwin, Albert Einstein, Thomas Jefferson, Winston Churchill, Richard Feynman and many others.

Modern Mind mapping was invented by Tony Buzan as a special technique for taking notes during his study of psychology, neurophysiology, neurolinguistics and informatics. Tony Buzan is the world's leading author, lecturer and adviser to governments, businesses, professions, universities and schools on the brain, learning and thinking skills. Tony Buzan together with his brother Barry Buzan developed commercial PC programme iMindMap. Nowadays mobile applications are available for Apple and Android [8].

Mind Maps

A mind map is a diagram used to represent words, ideas, tasks or other related items. They are arranged radially around a central key word or idea. It is used to generate, visualize and classify ideas and structures. It is an image-centred diagram that represents semantic or other connections between portions of information.

The method of mind mapping is based on the assumption that the two halves of the human brain perform different tasks. While the left side is mainly responsible for logic, words, arithmetic, linearity, sequences, analysis, lists, the right side of the brain mainly performs tasks like multidimensionality, imagination, emotion, colour, rhythm, shapes, geometry and synthesis. Mind mapping enables to use both sides of the brain, letting them work together and thus increases productivity and memory retention [2].

The style and shape of a mind map evokes the human neuron including its functions, Fig. 1.

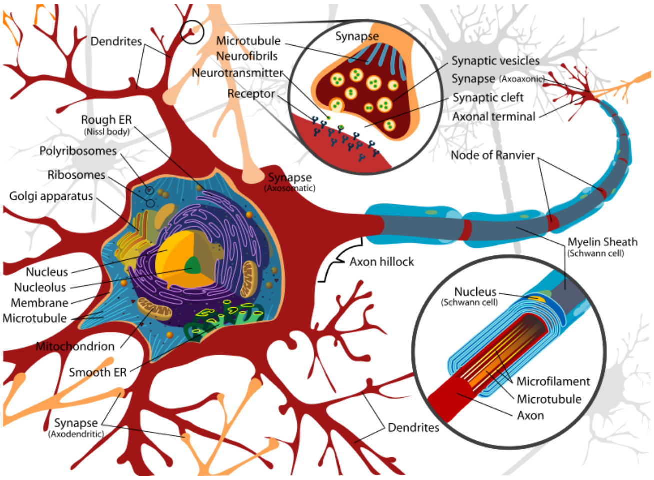


Figure 1: Human neuron

Mind maps are useful for brainstorming – individually or as a group, studying, memorizing and summarizing information, notes, consolidating information from different research sources, thinking through complex problems, presenting information in a format that shows the overall structure of your subject.

Mathematics as the network science

Mathematics is not a linear subject. It is extremely associative. We can look at any of the notebooks or blackboards of the great mathematicians. They are filled with arrows, boxes, doodles, pictures and all the 'thinking tools'. Many studies of great mathematicians show that a high proportion of them thought about numbers not as black and white digits but in colours and spatial forms.

Mathematics is the network science. Mathematical objects, such as concepts, definitions, theorems, proofs, algorithms, rules, theories are not only interrelated among each other but also connected with other sciences and the real world. There is a widespread consensus in the actual didactical discussions that mathematics should be cognized by students in its connection not received as a collection of isolated rules and facts. The significance of the previous sentence is apparent from the definition of The PISA Mathematics Domain [5].

"*The PISA mathematics domain is concerned with the ability of students to analyse, reason and communicate ideas effectively as they pose, formulate, solve and interpret mathematical problems in a variety of situations. The PISA mathematics assessment focuses on real-world problems, moving beyond the kinds of situations and problems typically encountered in school classrooms."*

In the same Pisa study we can also find the definition of mathematical literacy: "*The mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen."*

One method how to support these mathematical domain, enlarge mathematical literacy, express the network character of mathematics is its visualization. Teachers with modern approach to mathematical education use various tools for it [6]. We can use mind maps and concept maps for graphic presentation of mathematical network.

Mind Maps in Mathematical Education

Mind mapping have been used in many fields since they were established. Mind maps can be used for problem solving, exploration, development of thinking and individual expression of creativity, memorizing, concentration, motivation, mental literacy, improving memory, presentations, organization, preparation, brainstorming, work planning and others [3].

Although mind maps have been often used in education, they are seldom used in mathematics in spite of the special technique of mind mapping which uses both halves of the brain and lets them work together what is very useful for mathematical thinking, which requires engagement of both hemispheres. The left hemisphere is suitable for analytic deduction and arithmetic, the right hemisphere for spatial tasks, e.g. geometry. The constant emphasis on rules and algorithms in mathematical education which we can see in our educational system for many years may prevent the development of creativity and spatial ability. The balance between logic and creativity is very important.

Rules for Creating Mind Maps

It can be easy to create a map. We need a paper and pencil or the computer, especially when we create more sophisticated or comprehensive maps, and our brain and pedagogical skills of course.

At first we must decide if we will create a map using a large sheet of paper and coloured pencils or using a mind mapping software which can be used effectively to organize large amounts of information, combining spatial organization, dynamic hierarchical structuring and node folding. Software packages can extend the concept of mind mapping by allowing individuals to map their thoughts and ideas with information on their computers. The main advantages we see in the facts that maps created using a computer are graphically neat, can be complemented, corrected and reorganized continuously, supported by pictures, uploaded into the internet, sharing with several people.

Mind maps are hierarchically structured and it is necessary to observe some principles when we are creating a mind map. Following rules are recommended [1]:

- Use a large sheet of paper without lines in landscape format or desktop.
- Place the topic of the mind map in the centre of the desktop (paper). The topic of the mind map should be displayed in an eye-catching way, preferably by a coloured image. If a picture does not seem appropriate, the topic should be named by a well-chosen keyword.
- From the topic draw a main branch for each of the main ideas linked to the topic. Write keywords denoting the main ideas directly on the lines. Use printed letters. If a special order is needed for understanding the topics, the branches may be numbered or ordered clockwise. If possible, only one word per line, preferably a noun, should be written down. As 90% of the words in texts are unnecessary, using a few meaningful keywords will be sufficient to remember the entire context.
- Starting from the main branches you may draw further lines (sub-branches) for secondary ideas (sub-topics) and so on. The order follows the principle: from the abstract to the concrete, from the general to the special.
- Use colours when drawing a mind map.

Add images, sketches, symbols, such as little arrows, geometric figures, exclamation marks or question marks, as well as self-defined symbols to your mind map.

Open source programme Freemind

We use open source program Freemind. This mind mapping software is written in Java. Free download and Freemind User Guide are available from [7]. This Mind mapping software has wide range of usage as any commercial programme. We put down our ideas, structure and expand and connect them. Freemind also works as a tree editor. We can create foldable trees of plain text, notes enriched with colours, icons, cloud-shapes, and other graphics. This will help us to customize our map. For example, we can use clouds to group together the nodes that are interrelated, colours to differentiate between completed tasks and other tasks, and icons to prioritize a node. We can add hyperlinks to web pages, local files in our computer or email addresses.

Freemind gives us the option to export and import data. It is possible to export an entire mind map or just a branch to HTML, XHTML, PNG or JPEG picture and Open Office Writer document. We can import folder structures and Internet favourites into Freemind. We can print the whole map into one page or to several sheets of paper. Freemind web applet enables other users to view mind maps from their browser. We must download and install the Java applet at our website so that users having Java 1.4 or a higher version can browse through our maps.

The great positive of the Freemind is its usability. The presence of a simple and intuitive interface makes the application easy to use and understand. It can be almost fully controlled by the keyboard. The initial desktop of the program is in Fig. 2.

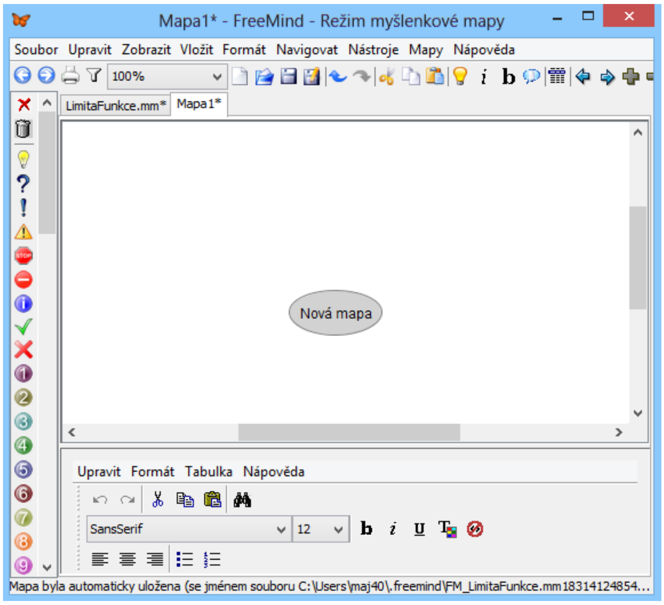


Figure 2: Desktop of Freemind

Mind Maps in Calculus

We create and use mind mapping to help students to master basic theorems, features, links and solving methods for more complicated topics such as Limits, Derivate, Integrals, etc. Visual layout helps to clear orientation and facilitates remembering. Mind maps are inserted into elearning course in CMS Moodle. Unfortunately the Freemind does not enable the export of mind maps with all its interactive tools. The mind maps are inserted into CMS Moodle as a static bitmap. But students can download the programme Freemind to their computers or portable flash disks and use the mathematical mind maps with all dynamic advantages. After mind maps are presented in the mathematical course students are able to use them at home, adjust them or create their own mind maps.

The limit of function belongs to one of the most important concepts and sometimes to one of the most difficult as well as by students the most ignored topic of Calculus. We started to support difficult definitions of the limit in our mathematical courses by applets before five years [4]. But students confuse the methods of computation of the limit in the definite point with the limit in the infinity as well as the limit of rational function with the irrational function.

The special techniques of mind mapping organise the mathematical knowledge in a clear and concise overview of the connectedness of mathematical objects around a main topic and enable the balance between logic and creativity. Students see them on one sheet of paper. The mind maps introducing the limit of function are in Fig. 3 and 4.

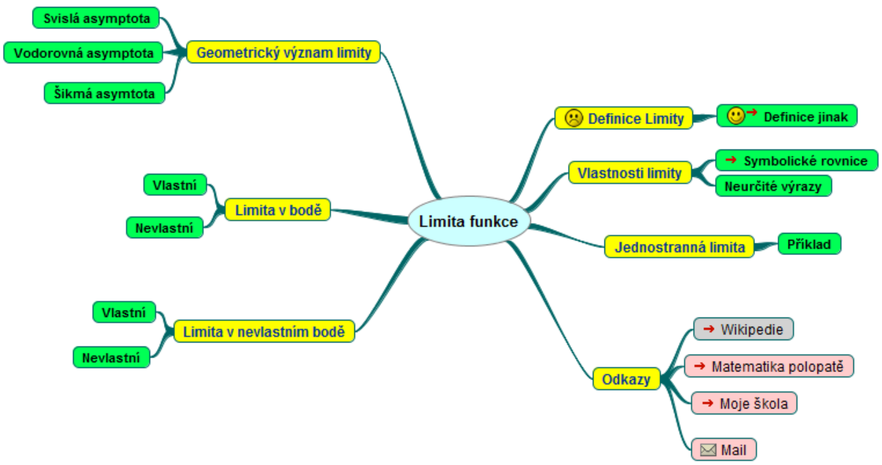


Figure 3: Limit of function - Basic definition

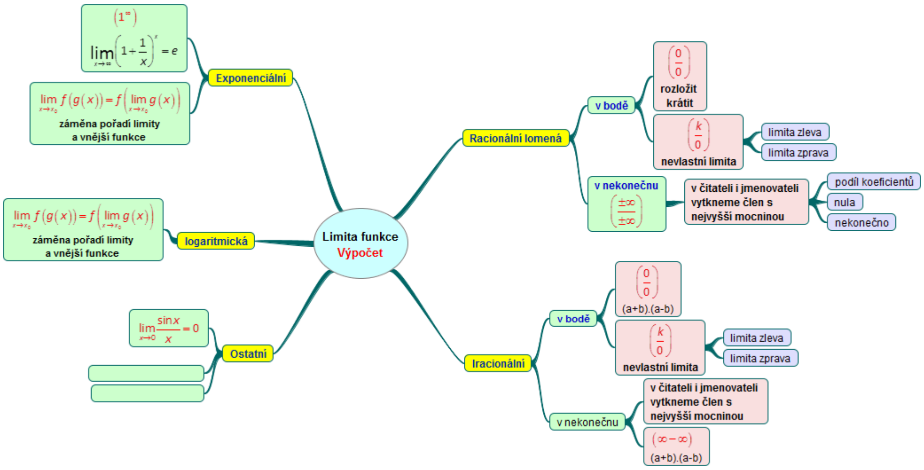


Figure 4: Limit of function - Basic rules

Some of subtopics contain the link to the file in PDF Format or web pages. The connected files include basic information relating to the given topic. If a node contains the arrow it means that it is the hyperlink.

In a subject like mathematics, students often forget important results, theorems or methods and they are not able to apply them in the related questions. But with mind maps they can remember the results in an order. Mind maps have an open structure and anybody including students may add own concepts, methods or thoughts.

Conclusion

Mind maps are more compact than standard notes. Mostly we need one paper or screen. Using mind maps enables us to make relations, dependences and generate new ideas and conclusions. A good mind map shows the structure of the problem, importance of individual items, and all interrelationships among them. We can quickly refresh and repeat any topic. Students like to work with them. We recommend using an open source programme for mental mapping because of its interchange ability, flexibility, reparability and possibility of sharing.

References

[1] Buzan, T., Buzan. B. (2001). The Mind Map Book. London: BBC Books, 2001. p. 318. ISBN 0-563-53733-7

[2] Buzan, T. (2005). The Ultimate Book of Mind Maps. London: Thorsons, 2005. p. 241. ISBN 978-0-00721291-0

[3] Ficová, L., Žilková, K. (2012). Mentálne mapy ako prostriedok integrácie obsahu primárneho matematického vzdelávania. Prešov: In: Komplexnosť a integrita v predprimárnej, primárnej a špeciálnej edukácii [elektronický zdroj]. Prešovská univerzita, 2012. CD-ROM, p. 237-243. ISBN 978-80-555-0664-7

[4] Majovská, R. (2007). Limita funkce nemusí patřit k obtížným tématům. Nitra: In: ACTA MATHEMATICA 10, Zborník z V. nitrianskej matematickej konferencie. 2007. p. 276. ISBN 978-80-8094-181-9

[5] PISA (2009). Assessment Framework – Key Competencies in Reading, Mathematics and Science. OECD: 2009, p. 84. http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf

[6] Vallo, D., Ďuriš, W. (2012). Visualization in Math Teaching – Concept of Percent. Nitra: In: ACTA MATHEMATICA 15, Zborník z X. nitrianskej matematickej konferencie, 2012. p. 210. ISBN 978-80-558-0135-3

[7] http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page

[8] http://www.thinkbuzan.com/intl/

Received on May 2, 2013.

Address

PaedDr. Renata Majovská, PhD.
Department of Mathematical Methods in Economics, Faculty of Economics, VŠB-Technical University Ostrava, Sokolská 33., CZ – 702 21 Ostrava; e-mail: renata.majovska@vsb.cz

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

IDENTIFICATION OF MATHEMATICS' TEACHERS BELIEFS CONNECTED TO INQUIRY-BASED LEARNING

JANKA MELUŠOVÁ[1] – JÁN ŠUNDERLÍK – SOŇA ČERETKOVÁ

ABSTRACT. *Teachers are considered as one of most important factors concerning implementation of innovation in education, including inquiry-based learning. From the research in this area we consider beliefs and knowledge for teaching mathematics as the biggest influence on teachers' decisions making in practice. So that is why beliefs and knowledge of teachers are crucial inputs to courses of professional development. In our contribution we design the theoretical framework for analysis of teacher beliefs. Tool for characterizing teachers based on their beliefs is described and its use is illustrated on case of Beata who participated in course of professional development.*

KEY WORDS: *teachers' beliefs, in-service teachers, professional development*

CLASSIFICATION: *D504*

Introduction

Even teaching is considered as a social activity, the teacher is the main decision-making person in the classroom. Approximately every two minutes teacher has to take important decisions in order to solve various kinds of problems (related to students' knowledge, classroom management, etc.) (Handal & Herrington, 2003). According to Schoenfeld (2011), in order to attempt the process of solving problems (not only in mathematics) and understand it, it is necessary to examine person's knowledge base, repository of problem-solving strategies, means of monitoring and self-regulation (metacognitive skills) and his/her beliefs.

Variety of educational research examined the relation between teachers' beliefs and their institutional practice (Handal, 2003). Ernest (1989) suggested that beliefs are the primary regulators for teachers' acting and practice in classroom. Furthermore, they claim that without change in teachers' beliefs the change in school-practice is not possible (Chapman, 1999). However, the change in affective level is longitunidal process and to be successful in it, teacher has to obtain several good cases and examples of good-practices within the innovation in education (Čeretková/PRIMAS, 2011). Hermans et al. (2008) suggest that there is a shared set of educational beliefs in particular schools. This is in conclusion with Pajares (1992) who reported about sharing common beliefs within supportive groups which teachers tend to form to gain confidence. Paris and Combs (2006) propose that this kind of sharing of teaching practices depend on the school culture.

One of main objectives of 7FP project PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science across Europe) was to "support teachers with inquiry-based learning (IBL) pedagogies in mathematics and science". According to project's materials (Čeretková/PRIMAS, 2011), in a narrow sense, IBL may be defined as a teaching approach which intends to promote learning by engaging students in any of the processes or activities typically involved in scientific research. Within the project the broader understanding what IBL means is used. It includes activity and independent work of

[1] Corresponding author

students, role of teacher as a facilitator of students' learning, collaborative classroom atmosphere and processes and competences as a part of expected learning outcomes. In promoting IBL to teachers' community local contextual factors (e. g. national curriculum, national assessment, textbooks, opinions of students and their parents) have to be taken into account (Dorier/PRIMAS, 2012). Contextual factors defined in Dorier/PRIMAS (2011) can be evaluated on the national level and taken into account when planning the courses for professional development (CPD) of mathematics teachers. CPDs were chosen as a main tool to spread the IBL into regular mathematics education. On the other side, the characteristics of the teachers participating of CPD and their tendency to adopt IBL have to be investigated individually.

The study

As Handal & Herrington (2008) claim: "Teachers are those who ultimately decide the fate of any educational enterprise. Consequently…discrepancies between teachers' opinions and ideas underpinning a curriculum innovation need to be identified, analyzed and addressed." Individual characteristics of teachers participating on CPD about IBL are needed in order to adopt the structure of CPD and course materials for needs of the group and to choose the right intervention for each participant. With this intention we tried to develop a framework for such kind of identification. On the other hand it is useful for better understanding of the mathematical background of Slovak mathematics teachers.

We assumed that the information of teachers' knowledge and teachers' beliefs will be the most crucial aspects for positive implementation of IBL in their classrooms. In this paper we focused on three different types of mathematics teachers' beliefs and consider their possible influence to willingness of teachers to implement IBL in their day-to-day teaching. From the wide variety of areas we narrow ourselves to: mathematics that the teacher consider as the most important in the classroom, the goal that this mathematics have in the classroom and the instructions that are needed to achieve valuable outcomes.

Beliefs about mathematics

The first area Liljedahl (2008) describes three possible concepts of mathematics and their influence on acting in classroom: (a) **Mathematics as toolbox** – means that mathematics is seen as a set of rules, formulas, skills and procedure, therefore these are stressed by the teacher and memorization and mastery are enforces. Mathematics activity is understood as calculating, using rules, procedures and formulas. (b) **Mathematics as system** – in this aspect mathematics is characterized by logic, rigorous proofs and exact definitions with precise mathematical language. Proofs and definitions are used not only as content, by also as pedagogical strategies. Doing mathematics activity means to develop accurate proofs using precise language. (c) **Mathematics as process** – the main aim of the teacher understanding mathematics as process is to provide students with experience with the doing of mathematics. Relations between different notions play important role. Mathematics activity in this case means generating rules and formulas, inventing or re-inventing mathematics.

Beliefs about teaching goals

The second area that we consider as crucial in teacher beliefs system is connected with contribution made by Kuhs & Ball (1986; in Pepin, 1999) which identified four distinct approaches to teaching mathematics: (a) **Learner-focused** – teaching is focused on students' inquiry and development; (b) **Content-focused with emphasis to conceptual understanding** – teaching is led by content, but conceptual understanding is stressed; (c) **Content-focused with emphasis to performance** – high performance and mastery of students is the main goal; (d) **Classroom-focused** – teaching is based on good knowledge about effective classroom.

Beliefs about mathematics instruction

The third part that we choose was defined by Murphy et al. (2004) which distinguishes two main characteristics of instruction in mathematics classroom. (a) **Teacher-centered** means mostly lecturing with classroom discussion. (b) **Student-centered** means involving classroom practices that actively engage students in activities that can assist them to construct mathematical concept, require reasoning and creativity, applying information etc.

Methodology

Looking for approach how to identify teachers' beliefs we agree that it is hard to be scientific about human affairs in comparison to objectivity of nature (Bunge, 1996). Particularly, beliefs are hidden structures underpinning subjects' behavior, opinions and decision-making, therefore they have to be studied in indirect way. Constructivism was chosen as an inquiry paradigm.

The research question was:

- How can be teachers' beliefs identified congruent with their classroom practice?
- How are these beliefs influenced by school culture?

According to previous analysis of national contextual factors (Dorier/PRIMAS, 2012), we expect Slovak teachers to have concept of mathematics as a system due to the way how are future teachers educated at the university in Slovakia. Based on nature of national assessments we assume the teachers to be content-oriented with emphasis on performance. As it is only few years since the curricular reform and lack of opportunities to practice, we suppose that the teachers will use mostly teacher-centered instruction.

Several sources of data were analyzed. Teachers were **interviewed** by semi-structured interview aimed to obtain information about their beliefs about mathematic and their teaching. Sample **lesson** for each teacher was **video-taped** to investigate their classroom practice. The **whole-group** discussion was performed to obtain information about the teachers' opinions what does good teaching of mathematics mean.

Implementation

In order to evaluate designed theoretical frame we piloted it at CPD about IBL in upper-secondary mathematics organized within the project PRIMAS. We choose one teacher, using pseudonym Beata, from grammar school that has strong tradition in students performing high in assessments and in mathematics competitions. Teaching in mathematics is mostly uniformed and teachers teaching in the same grade use the same curriculum maps, so they may use the same assessment forms. Teachers usually do not discuss their pedagogies, but they share developed tasks or other classroom materials.

Beata is a teacher with three years of teaching experience. As she mentioned, she is teaching in traditional organization of lesson. At the beginning she explains the theory, then she shows it on few examples and then practice the topic together on several tasks. We consider her teaching beliefs about mathematics instruction as teacher-centered.

Beata characterized a good math teacher as: “Somebody, that knows mathematics well, at least at the higher level than he teaches.” Except it he must be able to explain the content in several ways and adapt it also to the low-achieving students. As a third main condition she mentioned that good teacher needs to be empathetic and able to work with young people, to understand them and to be tolerant. It is evidence that she sees teaching within its social environment and put strong emphases on teacher mathematical content knowledge. We can connect it to the model of teacher knowledge that was presented by Ball et al. (2008). In that model authors elaborated the two main categories of teachers’ knowledge running on Shulman (1986) who characterized teachers’ knowledge as pedagogical content knowledge and subject content knowledge, in our case mathematical content knowledge. If we analyze it more deeply, then Beata pointed to common content knowledge CCK – as a mathematics that the teacher needs to know at least at the one level higher to pass his students’ needs. The other key factor was the specialized content knowledge SCK that she sees as something crucial for teaching mathematics. When she was interviewed about outcomes of her teaching and her beliefs about learning she mentioned that she “wanted her students to understand what they have learned”. And when we turned the question to teaching she characterized it as: “leading students to use logical thinking and constructive thinking” and this can be done in all mathematics topics. This is in contradiction with the classroom practice where she spends a lot of time on practicing and drills the algorithms and formulas that are required for tests and final assessment. When she was asked how she defined a good learning and teaching Beata had difficulties to formulate the answer. It is something that she has not questioned by herself in more detail. It may be caused by lack of reflection on her pedagogical content knowledge, or some level of uniformity in teaching at her school might cause that she is not questioning in her teaching, or she may not be aware of different approaches she is using. Her teaching goals are hidden into the common regular practice that she experienced as a student, at the university and now as a mathematics teacher.

Generally, she mostly focused on the content. If we focused our attention to beliefs of inquiry-based learning she was positive about it and willing to using it, but the main contextual factor that is hindering her in the classroom is the lack of time.

Using descripted theoretical framework we would characterize Beata as **teacher-centered** teacher (Murphy et al., 2004) and she is **content-focused with emphasis to performance** (Kuhs & Ball, 1986) but she claims she would like to teach her students to think, but she does not know how. This may indicate the internal tendency to emphasize the conceptual understanding. In the relation to concept of mathematics (Liljedahl, 1999), Beata emphasized practicing, memorizing and knowledge of formulas. This implies her understanding **mathematics as toolbox**. However, in her personal beliefs she is set more in concept of **mathematics as process**. She would like to stress relations between the mathematical objects, role of metacognition, but she does not use this in her teaching.

If we look at it from the perspective of the content, there is discrepancy between her actual beliefs and practice. She wanted her students to develop important process skills that they will need in their future career but in the classroom she is using mostly mathematics as a tool.

Discussion

From the presented theoretical framework we consider that teachers understanding mathematics as a process are the most tending to use constructivist pedagogies, inquiry-based learning included. We assume that the teachers with concept of mathematics as a system can also successfully implement IBL, but in other topics than teachers with mathematics as process. Based on the analysis we would like to focus Beata's attention to the discrepancy between her beliefs and classroom practice. This may cause the willingness of Beata to use classroom practices within her not enacted process beliefs.

Active role of student is typical for inquiry-based learning, so teachers whose beliefs about mathematics instruction are student-centered are more likely to use IBL in their practice. In the case of Beata and her teacher-centered beliefs we need to identify the biggest source of contribution to these beliefs. We assume it may be the strong influence of previous practice as a student as well as the strong school culture that is mostly teacher-oriented. For accurate consideration more data are needed. Within these settings we need to start questioning the school culture, teacher practice as well as looking and reflect at different IBL processes that may occur also in teacher-centered classroom.

From characteristics of approaches it is obvious, that teachers with learner-focused goals of teaching are the most willing to use inquiry-based learning. Teachers with classroom-focused teaching goals may also tend to adopt IBL, as one of its characteristics is collaborative classroom culture. Our assumption is that the most reluctant to IBL will be teachers emphasizing the performance of the students, because classroom activities within IBL are considered to more time-consuming and there will be less time for memorizing and drill of some skills or algorithms. This can lead to teachers' assumptions that their students will score less of national assessment.

As we assumed, from observing the teaching practice and from the interview with the teacher, we categorized Beata beliefs consistently with initial assumptions. But from the interview we identify a tension between her current and ideal practice. We see the main reason of this tension in the school culture oriented to performance and in the lack of experience in students-oriented classroom activities.

As a consequence for CPD we think that experience and reflection on activity involving students' inquiry planned in detail can be helpful to persuade the teacher about the advantages of implementing IBL into her day-to-day teaching. Designed framework may serve as a tool for analysis that seems to be reasonable way to structure the interview with participants of the CPDs about IBL. It was useful not only to evaluate current beliefs and practice, but also identify the sources of tension between real and ideal practice.

References

[1] Ball, D.L., et al. (2008) Content knowledge for teaching. What makes it special? In *Journal of Teacher Education*. 2008(59). 5, pp. 389-407.

[2] Bunge, M. (1996). Finding Phylosophy in Social Science. YALE University Press, 1996. 432 p.

[3] Čeretková, S./PRIMAS (2011*). Guide of supporting actions for teachers in promoting IBL*. Available at http://www.primas-project.eu

[4] Chapman, O. (1999). Inservice teacher development in mathematical problem solving. In *Journal of Mathematics Teacher Education.* 1999(2). 2, pp. 121-142.

[5] Dorier, J.L./PRIMAS (2012). *PRIMAS context analysis for the implementation of IBL: international synthesis report*. Available at http://www.primas-project.eu

[6] Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. In *Journal of Education for teaching: International research and pedagogy*. 1989(15).1, pp. 13-33.

[7] Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. In *The Mathematics Educator*. 2003 (13). No. 2, pp. 47-58.

[8] Handal, B., Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. In *Mathematics Education Research Journal*. 2003(15), 1, pp. 59-69.

[9] Hermans, R. et al. (2008). The impact of primary school teachers' educational beliefs on the classroom use of computers. In *Computers & Education*. 2008 (51), pp. 1499-1509.

[10] Kuhs, T.M. and Ball, D.L. (1986) *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions.* East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

[11] Liljedahl, P. (2008). Teachers' beliefs as teachers' knowledge. *In Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI* (Rome, 5-8 March 2008).

[12] Munby, H. (1982). The place of teachers' beliefs in research on teacher thinking and decision making, and an alternative methodology. In *Instructional Science*. 1982(11). 3, pp. 201-225

[13] Murphy, K. et al. (2004). The good teacher and good teaching: comparing beliefs of second-grade students, preservice teachers, and inservice teachers. In *The Journal of Experimental Education*. 2004(72), Iss. 2, pp. 69-92.

[14] Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. In *Review of Educational Research*. 1992(62), pp. 307-332.

[15] Paris, C., Combs, B. (2006). Lived meanings. What teachers mean when they say they are learner-centered. In *Teachers and Teaching: theory and practice*. 2006(12). 5, pp. 571-592.

[16] Pepin, B. 1999. Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: the theory, and what is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany. In *Behind the Rhetoric, the Realities of Teacher Education* (Lisbon, May 28-31 1999).

[17] Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. In *Educational Researcher*(15), 2, pp. 4-14.

[18] Shoenfeld, A.H. (2011). *How We Think. A theory of goal-oriented decision making and its educational application.* New York, NY: Routledge, 2003. 194 p.

Received on April 22, 2013.

Addresses

PaedDr. Janka Melušová, PhD.
PaedDr. Ján Šunderlík, PhD.
doc. PaedDr. Soňa Čeretková, PhD.
Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra,; e-mail: jmelusova@ukf.sk

Acknowledgement

The study was supported by project PRIMAS (FP7/2007-2013), GA n° 244380.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

TASKS OF STEREOMETRY IN TEXTBOOKS AT THE PRIMARY LEVEL OF EDUCATION IN SLOVAKIA AND GERMANY – SECOND VIEW

ÚLOHY ZO STEREOMETRIE V UČEBNÝCH TEXTOCH NA PRIMÁRNOM STUPNI VZDELÁVANIA NA SLOVENSKU A V NEMECKU – POHĽAD DRUHÝ

MAREK MOKRIŠ

ABSTRACT. *Tasks of stereometry advancement geometric concepts of children. The article deals with the identification and categorization tasks of stereometry. Tasks were selected from textbooks, which are used for the second year of the primary level of education in Slovakia and Germany (Land Baden-Württemberg). We show the differences in educational content.*

KEY WORDS: *stereometria, geometrické predstavy, učebné texty, primárne vzdelávanie*

ABSTRAKT. *Úlohy zo stereometrie pomáhajú rozvíjať geometrické predstavy. Príspevok sa venuje identifikácii a kategorizácii úloh zo stereometrie, ktoré sa vyskytujú učebných textoch používaných v druhom ročníku na Slovensku a v Nemecku (spolková krajina Baden-Württemberg). Poukazujeme na rozdiely vo vzdelávacom obsahu a jeho spracovaní.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: stereometry, geometric concepts, textbooks, primary education*

CLASSIFICATION: *D10, G10, G40*

Úvod

Učiteľ na primárnom stupni vzdelávania by mal v rámci predmetu matematika u žiakov rozvíjať aj priestorovú predstavivosť. Podľa O. Šedivého a kol. (2007, s. 2) *stereometria napomáha pri rozvoji stereometrických (geometrických) predstáv. Ako keby existovali isté časové obdobia zvlášť priaznivé pre rozvoj schopnosti priestorového videnia. Ukazuje sa, že prvé takéto obdobie je vo veku 5 až 6 rokov*. Dané vekové obdobie zahŕňa prvý rok povinnej školskej dochádzky na Slovensku. Na základe toho, by mala mať stereometria v školskej matematike veľmi významné postavenie (zvlášť na počiatku primárneho vzdelávania, 1. – 2. ročník základnej školy).

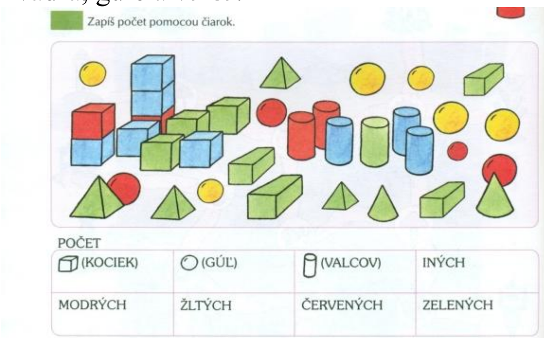
Cieľom článku je identifikovať a kategorizovať úlohy, ktoré sú z oblasti geometrie. Analyzované boli učebné texty, ktoré sú schválené Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky a sú používané v druhom ročníku základnej školy na Slovensku. Obsah učiva matematiky je na Slovensku spracovaný v učebnici [2] a v dvoch pracovných zošitoch (pracovný zošit – 1. časť [3], pracovný zošit – 2. časť [4]). Existujú aj iné učebné texty z matematiky pre žiakov druhého ročníka, ale tie nedisponujú schvaľovacou doložkou. Schvaľovacia doložka by mala zaručovať nielen bezplatnú dostupnosť žiakom, ale aj najvyššiu úroveň kvality. Tieto učebné texty boli porovnávané s učebnicou [5] a pracovným zošitom [6] pre žiakov tej istej vekovej kategórie, ktoré sú používané v spolkovej krajine Baden-Württemberg v Nemecku, ale sú aplikovateľné aj v iných spolkových krajinách (Mathematik für alle).

Elementy stereometrie v učebniciach a pracovných zošitoch v 2. ročníku základnej školy na Slovensku a v Nemecku

V nasledujúcej časti sú uvedené jednotlivé kategórie úloh (zadaní, problémov), ktoré boli identifikované v daných učebných textoch. Z pohľadu stereometrie boli do učebníc a pracovných zošitov na Slovensku aj v Nemecku, určených pre žiakov 2. ročníka, zaradené dve oblasti: oblasť telesa a ich vlastnosti a oblasť stavby z kociek. V nemeckých učebných textoch sa navyše nachádzala aj problematika orientácie v priestore.

Oblasť telesa a ich vlastnosti

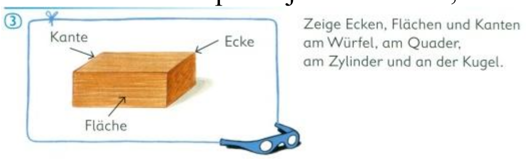
Učebnica pre slovenských žiakov neobsahuje spracovanie problematiky zo stereometrie, tá je začlenená len do pracovných zošitov. V slovenských pracovných zošitoch je len jedna úloha, v ktorej žiaci majú identifikovať počet predmetov daného tvaru (kocka, guľa, valec a predmety iného tvaru). V nemeckej učebnici ide o analogickú problematiku, ktorá je však kontextovo zaradená do reálneho života (identifikácia predmetov daného tvaru vo svojom okolí). Žiaci hľadajú predmety, ktoré maj tvar kocky, kvádra, gule a valca.



Obr. 1 Telesa a ich vlastnosti (zdroj: [3], s. 4)

Obr. 2 Telesa a ich vlastnosti (zdroj: [5], s. 116)

Téma telesá a ich vlastnosti sa v slovenských učebných textoch neprehlbuje (oproti 1. ročníku) o žiaden nový poznatok. V nemeckých učebných textoch pribúdajú vlastnosti priestorových útvarov (vrchol, hrana, stena) a tiež úlohy na identifikáciu priestorového útvaru na základe počtu jeho vrcholov, hrán a stien.



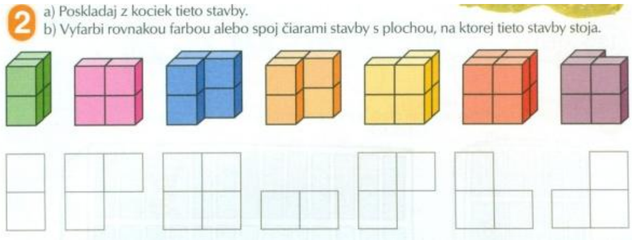
Obr. 3. Vlastnosti telies (zdroj: [5], s. 117)

Obr. 4. Vlastnosti telies (zdroj: [6], s. 58)

Oblasť stavby z kociek

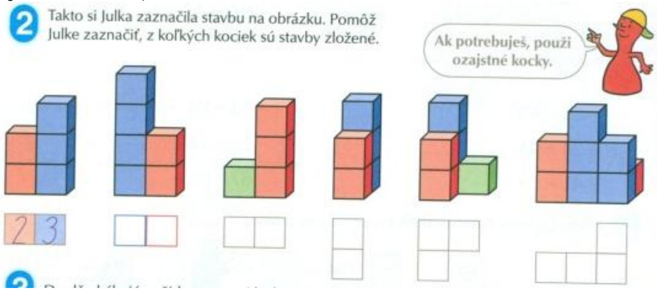
V podmienkach na Slovensku sa žiaci prvýkrát stretávajú s problematikou stavieb z kociek v druhom ročníku (v Nemecku už v prvom ročníku – pozri Mokriš [7]). Úlohy pre žiakov na Slovensku boli zaradené do týchto kategórii:

- postavenie stavby z kociek na základne grafického znázornenia stavby z kociek,



Obr. 5: Stavba z kociek na základe obrázka, zdroj: [4], s. 21

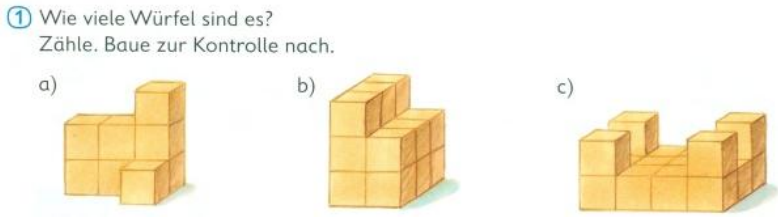
- identifikácia stavebného miesta (zastavanej časti – propedeutika pohľadu na stavbu zhora) a následné určenie počtu kociek použitých pri postavení stavby (propedeutika objemu telesa).



Obr. 6: Stavby z kociek – propedeutika objemu telesa, zdroj: [4], s. 43

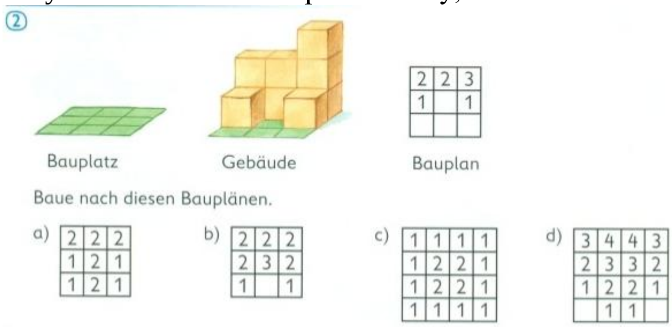
V učebných textoch pre nemeckých žiakoch boli identifikované tieto typy úloh:

- určenie počtu kociek použitých pri stavbe (propedeutika objemu telesa),



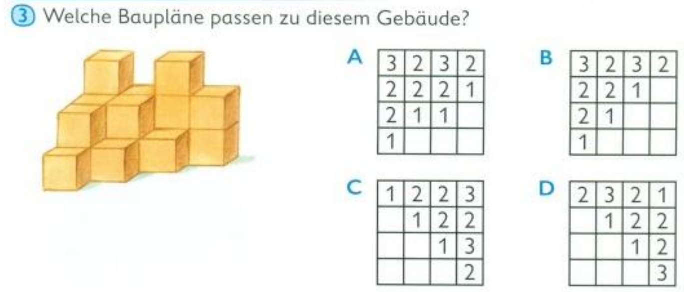
Obr. 7: Stavby z kociek – propedeutika objemu telesa, zdroj: [5], s. 118

- postavenie stavby z kociek na základe plánu stavby,



Obr. 8: Stavba z kociek na základe plánu stavby, zdroj: [5], s. 118

- priradenie plánu stavby k znázornenej stavbe z kociek,

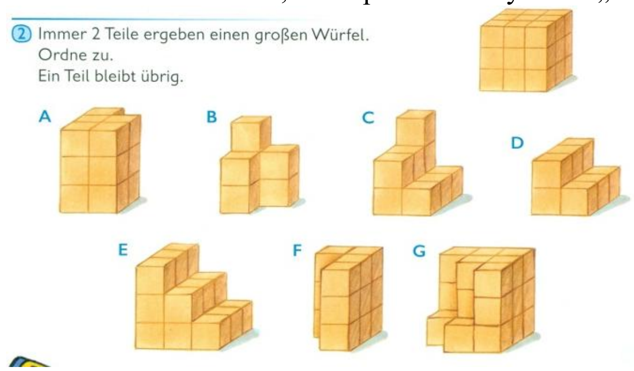


Obr. 9: Priradenie plánu stavby k stavbe z kociek, zdroj: [5], s. 118

- vytvorenie plánu stavby k znázornenej stavbe z kociek,

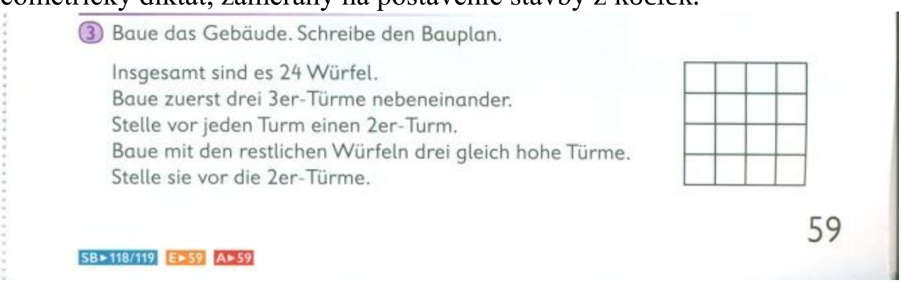
Obr. 10: Vytvorenie plánu stavby z kociek, zdroj: [5], s. 119

- identifikácia dvoch stavieb z kociek, ktoré po zložení vytvoria „veľkú" kocku,



Obr. 11: Stavby z kociek, zdroj: [5], s. 119

- geometrický diktát, zameraný na postavenie stavby z kociek.



Obr. 12: Stavby z kociek – geometrický diktát, zdroj: [6], s. 59

Oblasť orientácia v priestore

Táto téma nebola v slovenských učebných textoch identifikovaná. V nemeckej učebnici a pracovnom zošite sa vyskytovali nasledujúce typy úloh:

- identifikácia pohľadu na stavbu z jednoduchých telies (spredu, sprava, zozadu, zľava, zhora),

Obr. 13: Identifikácia pohľadu na stavbu z telies, zdroj: [6], s. 60

- znázornenie pohľadu na stavbu z jednoduchých telies.

Obr. 14: Znázornenie pohľadu na stavbu z telies, zdroj: [6], s. 60

Záver

Na základe analýzy typov úloh zo stereometrie v učebných textoch na Slovensku i v Nemecku, je možné usúdiť, že pozornosť venovaná rozvoju schopnosti priestorového videnia, je v 2. ročníku na Slovensku nedostatočná. Chýba prehĺbenie poznatkov o základných priestorových útvaroch (kocka, valec, guľa). Žiak v tomto veku (na Slovensku) ešte nemusí poznať teleso kváder, nepozná vlastnosti priestorových útvarov (vrchol, hrana, stena). Štátny vzdelávací program ISCED 1 ([10], s. 5-12) uvádza, že vyučovací proces by mal, okrem kreslenia geometrických tvarov a útvarov, zahŕňať aj manipuláciu s niektorými priestorovými geometrickými útvarmi, budovanie telies z kociek podľa vzoru alebo podľa obrázka, stavbu jednoduchých telies, stavbu telies z kociek podľa vzoru a podľa plánu (obrázka) a kreslenie plánu stavby z kociek. Analýza typov úloh zo stereometrie v učebných textoch v druhom ročníku tomu nenasvedčuje. Porovnanie jednotlivých typov úloh medzi učebnicami a pracovnými zošitmi používanými na Slovensku a v Nemecku, signalizuje, že rozvoj priestorovej predstavivosti 6. – 7. ročných detí na Slovensku je nedostatočný. Presúvanie problematiky práce so stavbami z kociek do vyšších ročníkov, môže mať negatívny vplyv na schopnosť priestorovo vidieť.

Literatúra

[1] Černek, P. (2011). *Matematika pre 2. ročník základných škôl – metodická príručka*. Bratislava: AITEC, 2011. 112 s. ISBN 978-80-89375-68-4

[2] Černek, P. – Bednářová, S. (2011). *Matematika pre 2. ročník základných škôl - učebnica.* Bratislava: AITEC, 2011. 68 s. ISBN 978-80-89375-79-0

[3] Černek, P. – Bednářová, S. (2011). *Matematika pre 2. ročník základných škôl – 1. časť.* Bratislava: AITEC, 2011. 78 s. ISBN 978-80-89375-63-9

[4] Černek, P. – Bednářová, S. (2010). *Matematika pre 2. ročník základných škôl – 2. časť.* Bratislava: AITEC, 2011. 88 s. ISBN 978-80-89375-47-9

[5] Heinze, K. – Manten, U. – Hütten, G. (2011). *Super M. Mathematik für alle. Schülerbuch 2 mit Kartonbeilagen.* Berlin: Cornelsen Verlag, 2011. 128 s. ISBN 978-3-06-081338-4

[6] Heinze, K. – Manten, U. – Hütten, G. (2012). Super M. Mathematik für alle. Arbeitsheft. Berlin: Cornelsen Verlag, 2012. 63 s. ISBN 978-3-06-081342-1

[7] Mokriš, M. (v tlači). Úlohy zo stereometrie v učebných textoch na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku a v Nemecku – pohľad prvý. In *Matematika v primárnej škole – rôzne cesty, rovnaké ciele.* Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou. Prešov.

[8] Šedivý, O. – Pavlovičová, G. – Rumanová, L. – Vallo, D. (2007). *STEREOMETRIA. Umenie vidieť a predstavovať si priestor.* Nitra: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2007, 106 s., ISBN 978-80-8094-180-2

[9] Scholtzová, I. – Mokriš, M. (2010). Geometry in Elementary Teacher Training. In: *Usta ad Albim BOHEMICA.* ISSN 1802-825, 2010, roč. X, č. 1, s. 85 - 90.

[10] ŠVP MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami) PRÍLOHA ISCED 1. Bratislava: ŠPÚ, 2009. 34s. Dostupné na www.statpedu.sk.

Článok prijatý dňa 12. príla 2013:

Adresa autora

Mgr. Marek Mokriš, PhD.
Katedra matematickej edukácie, Pedagogická fakulta, Prešovská univerzita v Prešove, Ulica 17. novembra č. 15, SK – 08001 Prešov; e-mail: marek.mokris@unipo.sk

Poďakovanie

Príspevok je čiastkovým výstupom grantového projektu MŠ SR VEGA 1/1230/12 *Komparatívna analýza vybraných aspektov primárnej matematickej edukácie na Slovensku a v zahraničí v kontexte kurikulárnej transformácie vzdelávania na základných školách a medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

TASKS WITH APPLICATIONS IN THE TEACHING OF LINEAR ALGEBRA

APLIKAČNÉ ÚLOHY VO VYUČOVANÍ LINEÁRNEJ ALGEBRY

DANA ORSZÁGHOVÁ

ABSTRACT. *In the paper we are dealing with one of topics of the theory of mathematics teaching, which is the inclusion of applied tasks into the teaching of mathematical courses. The chapter of linear algebra belongs to mathematical topics that are taught in economics study branches at bachelor's degree study and it has multilateral application in specialized subjects of economics. Presented examples of application tasks confirm that their solution is conditional on combining the knowledge of mathematics and special subjects from the economics area.*

KEY WORDS: *teaching of mathematics, applied tasks, linear algebra*

ABSTRAKT. *V príspevku sa zaoberáme jednou oblasťou teórie vyučovania matematiky, ktorou je zaradenie aplikačných úloh do vyučovania matematických predmetov. K preberaným tematickým celkom z matematiky v ekonomických študijných odboroch na bakalárskom stupni štúdia patria aj kapitoly z lineárnej algebry, ktorá má v ekonómii mnohostranné aplikácie. Prezentované ukážky aplikačných úloh potvrdzujú, že ich riešenie je podmienené spojením vedomostí z matematiky a odborných predmetov z ekonomickej oblasti.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *vyučovanie matematiky, aplikačné úlohy, lineárna algebra*

CLASSIFICATION: *A85, H65, M25*

Úvod

Cieľom vysokoškolskej prípravy budúcich inžinierov – ekonómov je odborné vzdelanie s takými kvalitami, ktoré budú v súlade s nárokmi praxe na ich teoretické a odborné vedomosti, logické myslenie a tvorivé riešenie problémov a praktických úloh. Tok informačných a vzdelávacích zdrojov na bakalárskom stupni štúdia obsahuje vedecké a odborné poznatky z rôznych oblastí. Je potrebné, aby ich študenti vedeli vyhľadať, správne vyhodnotiť a spracovať, získať potrebné vedomosti, ktoré budú vedieť prezentovať a prakticky aplikovať.

Matematika ako veda poskytuje účinné a efektívne nástroje na riešenie úloh s aplikáciami, čím sa mnohokrát stáva nevyhnutnou súčasťou metodického aparátu aj v iných vedných disciplínach a študijných odboroch. Štúdium predmetov ako finančná matematika, poistná matematika, makroekonómia, mikroekonómia, optimálne programovanie a mnohé ďalšie, vyžadujú dobré znalosti matematického aparátu. Teoretické poznatky a matematické metódy sa stávajú pre študentov pochopiteľnejšími vtedy, keď sú spojené s konkrétnou ukážkou aplikácie. Skúsenosti z vyučovania potvrdzujú, že ukážky praktického použitia matematiky patria k motivačným faktorom jej štúdia. Efektívnosť matematického vzdelávania zvyšuje aktivita študentov v procese získavania vedomostí, čím sa zároveň podporuje aj účinnosť rozvoja schopností používať matematický aparát a metódy v aplikačných úlohách.

Matematické modelovanie zákonitostí reálnych situácií vyžaduje schopnosť aplikovať matematické metódy a ich použitie aj v tvorbe počítačových softvérov z matematiky. Tieto požiadavky sú základom pre moderné vzdelanie a ovplyvňujú aj obsah vyučovacích predmetov. Na praktické výpočty a riešenie aplikovaných úloh, prípadne na grafickú interpretáciu získaných výsledkov môžeme použiť rôzne programy a softvéry. Napríklad voľne dostupný matematický softvér GeoGebra v sebe kombinuje a navzájom spája geometriu, algebru a matematickú analýzu [1].

Zaradenie matematických predmetov do študijných programov na fakultách pripravujúcich budúcich bakalárov a inžinierov má dôležité miesto najmä z aspektu použitia matematických metód v aplikačných úlohách. Riešením aplikačných úloh vplývame na:

– motiváciu študentov rozumieť a ovládať teoretické princípy matematiky,
– aktivitu, samostatnosť a tvorivosť študentov,
– schopnosti študentov matematicky zapísať podmienky vyjadrené slovne,
– trvácnosť a systematickosť vedomostí,
– rozvíjanie medzipredmetových vzťahov,
– kvalitu výstupov vzdelávania.

Rôznorodosť ukážok aplikačných úloh umožňuje ku každému tematickému celku priradiť úlohu, ktorá bude spájať matematickú teóriu a jej praktické použitie na riešenie daného problému. Závisí len od učiteľa, či vhodným výberom príkladov s aplikáciami ukáže študentom užitočnú stránku matematiky, prípadne rozšíri prístup študentov k aplikáciám matematických poznatkov aj atraktívnou formou e-vzdelávania [4].

Katedra matematiky na Fakulte ekonomiky a manažmentu (FEM) Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (SPU) v Nitre získala a rieši projekt KEGA 021SPU-4/2011: *Vyučovanie matematiky s aplikáciami - obsahové zmeny v univerzitnom matematickom vzdelávaní* (r. 2011–2013). Plánovaným výstupom projektu je publikácia, v ktorej budú k jednotlivým preberaným matematickým témam uvedené aplikačné úlohy.

Pedagógovia na Katedre matematiky sa vyučovaniu aplikácií systematicky venujú a aplikačné úlohy sú zaradené v publikáciách, ktoré sú určené pre študentov SPU [5], [6]. Okrem toho realizujú pedagogické experimenty a vyhodnocujú úspešnosť študentov pri riešení úloh s aplikáciami [2], [7].

Obsahová náplň tematického celku „Lineárna algebra“

Na FEM SPU sú v 1. ročníku bakalárskeho stupňa štúdia vyučované tieto povinné predmety: Matematika I a Matematika A v zimnom semestri, Matematika II a Matematika B v letnom semestri. Obsahová náplň jednotlivých celkov na seba nadväzuje, preto je náročné pochopiť matematickú nadstavbu bez príslušného základu. Do obsahovej náplne predmetov letného semestra patria tieto tematické okruhy:

– neurčitý integrál funkcie jednej reálnej premennej,
– určitý integrál funkcie jednej reálnej premennej,
– lineárna algebra (vektory, matice, determinanty, sústavy lineárnych rovníc),
– základy teórie pravdepodobnosti.

Podrobnejšie sa budeme zaoberať okruhom „Lineárna algebra“, ktorý obsahuje tieto témy:
Vektory:

– pojem n-rozmerného vektora, operácie s vektormi,
– lineárna kombinácia vektorov,
– lineárna závislosť a nezávislosť vektorov.

Matice:

– pojem matice, typy matíc, operácie s maticami,
– elementárne riadkové (stĺpcové) úpravy matíc,
– hodnosť matice,
– inverzná matica.

Determinanty:

- pojem a vlastnosti determinantu matice,
- výpočet hodnoty determinantu 2. a 3. stupňa,
- rozvoj determinantu 4. stupňa podľa riadku/stĺpca.

Sústavy lineárnych rovníc:

- homogénne a nehomogénne sústavy,
- metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc: Gaussova eliminačná metóda, metóda inverznej matice, metóda determinantov.

Ukážky aplikačných úloh

Úloha 1

Dodávateľská spoločnosť C investovala do výroby produktov V_1, V_2 sumu 15 400 €. Dodávateľská spoločnosť D investovala do výroby rovnakých produktov V_1, V_2 sumu 16 100 €. Dodávateľ C má pri dodávke zisk 20 € a 30 € na jeden výrobok V_1, V_2. Dodávateľ D má pri dodávke zisk 15 € a 40 € na jeden výrobok V_1, V_2. Vypočítajme, pri akej minimálnej produkcii sa dodávateľom vrátia ich investície.

Postup riešenia:

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 40 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C \\ D \end{array} \\ \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} & \end{array} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 15\,400 \\ 16\,100 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C \\ D \end{array} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array}$$

Matica $\boldsymbol{A}$ vyjadruje zisk dodávateľov C, D na jeden výrobok V_1, V_2.
Matica $\boldsymbol{B}$ vyjadruje celkové finančné investície dodávateľov C, D.
V matici $\boldsymbol{X}$ sú neznáme x_1, x_2 – počet výrobkov V_1, V_2, ktorých produkcia zabezpečí dodávateľom návratnosť investícií.
Uvedené matice musia spĺňať rovnicu: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$

Vypočítame inverznú maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$ a pomocou uvedeného vzťahu neznámu maticu $\boldsymbol{X}$:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 15 & 40 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \quad \begin{pmatrix} \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15\,400 \\ 16100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 260 \end{pmatrix} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array}$$

Zistili sme, že minimálna produkcia pre návratnosť investícií je 380 kusov výrobku V_1 a 260 kusov výrobku V_2.

Úloha 2

Podnik vyrába tri druhy výrobkov *V*1, *V*2, *V*3, na ktoré potrebuje suroviny *s*1, *s*2, *s*3. Na vyrobenie jedného výrobku *V*1 potrebuje 20 jednotiek [*j*.] suroviny *s*1, 30 *j*. suroviny *s*2 a 40 *j*. suroviny *s*3. Na výrobu jedného výrobku *V*2 potrebuje 40 *j*. suroviny *s*1, 50 *j*. suroviny *s*2 a 30 *j*. suroviny *s*3. Na výrobu jedného výrobku *V*3 potrebuje 30 *j*. suroviny *s*1, 10 *j*. suroviny *s*2 a 50 *j*. suroviny *s*3. Vypočítajme, koľko kusov výrobkov *V*1, *V*2, *V*3 bolo vyrobených, ak sa pritom spotrebovalo 5500 *j*. suroviny *s*1, 5900 *j*. suroviny *s*2 a 7500 *j*. suroviny *s*3.

Postup riešenia stručne naznačíme.

Spotrebné vektory pre jednotlivé výrobky sú:

(20, 30, 40) pre výrobok *V*1,
(40, 50, 30) pre výrobok *V*2,
(30, 10, 50) pre výrobok *V*3
(5500, 5900, 7500) pre celkovú výrobu.

Z týchto údajov zostavíme sústavu lineárnych rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3, ktorú môžeme riešiť niektorou z uvedených metód (matica sústavy je regulárna).

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 &= 5500 \\ 30x_1 + 50x_2 + 10x_3 &= 5900 \\ 40x_1 + 30x_2 + 50x_3 &= 7500 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 80 \\ x_2 &= 60 \\ x_3 &= 50 \end{aligned}$$

Zistili sme, že z daného množstva surovín *s*1, *s*2, *s*3 možno vyrobiť 80 kusov výrobku *V*1, 60 kusov výrobku *V*2 a 50 kusov výrobku *V*3.

<u>Úloha 3</u>

Letecká spoločnosť poskytuje prepravu tromi druhmi lietadiel a prepravuje tri druhy nákladov. V tabuľke č. 1 je uvedené optimálne prepravné zaťaženie každého druhu lietadla. Predpokladáme, že v daný deň má spoločnosť prepraviť 1100 jednotiek (j.) pošty 1. triedy, 1930 osôb a 460 j. balíkov. Koľko lietadiel jednotlivých druhov na to potrebuje?

	Druh lietadla		
Prepravované jednotky	osobné	nákladné	veľkokapacitné
pošta 1. triedy	100	100	100
osoby	150	20	350
balíky	20	65	35

Tabuľka 1: Optimálne prepravné zaťaženie spoločnosti [3]

Označíme hľadané počty lietadiel: x – počet osobných lietadiel, y – počet nákladných lietadiel, z – počet veľkokapacitných lietadiel. Potom podmienky úlohy môžeme napísať v tvare sústavy troch lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 100x + 100y + 100z &= 1100 \\ 150x + 20y + 350z &= 1930 \\ 20x + 65y + 35z &= 460 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [x, y, z] = [3,4,4]$$

Odpoveď: V daný deň potrebuje letecká spoločnosť na prepravu nákladov 3 osobné, 4 nákladné a 4 veľkokapacitné lietadlá.

Aplikačné úlohy – súčasť matematických predmetov

Z uvedených ukážok úloh a postupov riešenia vidíme, že v aplikácii sa spájajú pojmy a matematické metódy lineárnej algebry s praktickým kontextom ekonomických problémov. Slovné úlohy poskytujú priestor na konkrétne zadania z rôznych oblastí ekonomickej praxe, pričom najprv musíme zadanie analyzovať, zostaviť matematický zápis úlohy a potom použiť príslušnú metódu riešenia. Študenti na prednáškach často žiadajú viac ukážok s aplikáciami, po ich uvedení zistia, že aplikácie sú „nadstavbou" a chcú sa vrátiť k riešeniu úloh s matematickým zadaním.

Súčasné vyučovanie vysokoškolskej matematiky prechádza zmenami, ktoré súvisia aj s uplatňovaním informačných technológií vo vzdelávaní. Štúdium teoretického základu sa minimalizuje a do popredia vystupujú požiadavky na schopnosti študentov aplikovať teóriu a všeobecné metódy matematiky. Platí to aj na fakultách s ekonomickým zameraním, kde prichádza študovať čoraz viac absolventov obchodných akadémií, ktorí sú na strednej škole pripravovaní pre prax. Tento trend postupne prechádza do 1. stupňa vysokoškolského štúdia, kde študenti požadujú praktické návody a vyhýbajú sa štúdiu teoretického základu. To vyžaduje zmeny, aktualizáciu a inováciu v matematických predmetoch vo vzťahu k ich obsahu a používaniu vyučovacích metód, čo môžeme zhrnúť nasledovne:

1. obsah hlavných tém z matematiky aktualizovať a prispôsobiť študijným odborom a programom podľa požiadaviek z odborných katedier a praxe,
2. vybrané témy vyučovať s využitím informačných technológií (napr. vysvetliť princíp matematickej metódy, realizáciu uskutočniť pomocou počítača),
3. matematický aparát priblížiť študentom prostredníctvom aplikačných úloh z rôznych oblastí ekonomickej praxe,
4. úlohami z praxe motivovať záujem študentov o matematiku,
5. inováciou systému a ponuky voliteľných predmetov rozšíriť možnosti štúdia niektorých matematických tém a ich aplikácií podrobnejšie,
6. riešením úloh rozvíjať schopnosti študentov tak, aby smerovali k samostatnej aktívnej činnosti v procese vzdelávania.

Lineárna algebra je zahrnutá na skúške v letnom semestri, preto sme sa rozhodli porovnať študijné výsledky a známky z letného semestra v akademickom roku 2011/2012. Vybrali sme z FEM tieto študijné programy: EKP – Ekonomika podniku, UCT – Účtovníctvo, DŠ – denné štúdium, EXT – externé štúdium. Údaje sú uvedené v tabuľke č. 2. Vo výpočte priemernej známky sme vynechali tých študentov, ktorí neuspeli na skúške. Z údajov v tabuľke vyplýva, že študenti dosiahli na skúške porovnateľné výsledky. Študenti programu Účtovníctvo dosahujú v rámci fakulty najlepšie študijné výsledky, čo platí aj pre známky z matematiky.

	A(1)	**B(1,5)**	**C(2)**	**D(2,5)**	**E(3)**	**Počet študentov**	**Priemerná známka**
EKP - DŠ	11	15	21	12	16	75	2,05
EKP - EXT	2	3	6	3	7	21	1,81
UCT - DŠ	14	7	6	10	2	39	1,73
UCT - EXT	2	1	4	2	3	12	2,13
Spolu	29	26	37	27	28	147	1,997

Tabuľka 2: Študijné výsledky vo vybraných študijných programoch FEM (2011/2012)

Záver/diskusia

V príspevku sme sa zaoberali vyučovaním tematického celku „Lineárna algebra" na FEM SPU v Nitre, pričom sme sa sústredili na aplikačné úlohy so zameraním na ekonomickú oblasť. Bakalárske štúdium v ekonomických študijných programoch je zamerané na prepojenie teórie s praxou, čo sa prejavuje aj v matematike požiadavkami na ukážky praktickej aplikácie matematických postupov a metód. Aplikačné úlohy orientované na ekonómiu vyžadujú ovládanie matematiky a ich spojenie s odbornými poznatkami z ekonomickej oblasti. Aby ich študenti pochopili, musia rozumieť pojmom z oboch oblastí, čo zvyšuje nároky na obsah a metódy výučby matematiky.

V ukážkach aplikačných úloh sme sa sústredili na matematický aparát a metódy lineárnej algebry. Ak správne zvolíme náročnosť úlohy a zaradíme ju do obsahu prednášky alebo cvičenia, tak máme vytvorený prístup k inovácii obsahu a výučby matematiky.

Úspešnosť štúdia matematiky je podmienená aktívnou samostatnou prácou a štúdiom každého študenta. Ďalšou podmienkou sú kvalitné študijné zdroje v tlačenej alebo elektronickej verzii, ktoré budú obsahovať ukážky aplikačných úloh, aby študentom demonštrovali praktické použitie matematiky.

Literatúra

[1] DRÁBEKOVÁ, J. 2011. Vizualizácia riešení vybraných ekonomických úloh pomocou softvéru GeoGebra. In Zborník príspevkov *Teoretická a edukačná transformácia matematického vzdelávania*. Nitra, SPU, 2011, s. 45-50. ISBN 978-80-552-0604-2

[2] GREGÁŇOVÁ, R. 2006. Aplikované úlohy z matematiky na FEM SPU v Nitre. In: Zborník príspevkov z vedeckého seminára s medzinárodnou účasťou *Matematika a jej aplikácie v inžinierskom vzdelávaní 2006* (CD-nosič), Nitra, SPU, s. 61-64, 2006, Slovakia. ISBN 80-8069-708-6

[3] HARSHBARGER, R. – REYNOLDS, J. 1989. *Mathematical Applications*. D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, 1989. 746 p. ISBN 63-551-86

[4] ORSZÁGHOVÁ, D. 2006. Aplikácie matematiky v inžinierskom vzdelávaní. In: *Acta Mathematica 9* – zborník zo IV. nitrianskej matematickej konferencie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2006, edícia Prírodovedec, 386 s. (s.165-170). ISBN 80-8094-036-3

[5] ORSZÁGHOVÁ, D. a kol. 2004. *Aplikované úlohy z matematiky v ekonómii*. Nitra: Vydavateľstvo SPU v Nitre, 2004. ISBN 80-8069-333-1

[6] ORSZÁGHOVÁ, D. a kol. 2010. *Matematika a jej aplikácie*. Nitra, SPU, 2010, s. 376, 1. upravené a doplnené vydanie. ISBN 978-80-552-0479-6

[7] ORSZÁGHOVÁ, D. 2000. Niektoré aplikácie matematiky v ekonómii. In: *Zborník vedeckých prác z riešenia výskumných projektov* (1997-1999). Nitra: SPU, 2000, s. 208 - 211. ISBN 80-7137-759-7

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Trieda A. Hlinku 2, 949 76 Nitra; e-mail: dana.orszaghova@uniag.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 021SPU-4/2011: *Vyučovanie matematiky s aplikáciami - obsahové zmeny v univerzitnom matematickom vzdelávaní* (riešenie v rokoch 2011–2013).

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC CONCEPTIONS ABOUT PYTHAGOREAN THEOREM

ROZVOJ GEOMETRICKÝCH PREDSTÁV O PYTAGOROVEJ VETE

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ[1] – LUCIA RUMANOVÁ – JÚLIA ZÁHORSKÁ

ABSTRACT. *In this paper we present activities and tasks which support increase of understanding of Pythagorean Theorem and its applications in solving mathematical problems. Some of the proofs we use for creation of geometric puzzles. We adapted the use of tasks in the square grid in the mathematical education at primary school. Our aim was to present various possibilities of implementation of graded tasks and activities which lead to discovering and understanding of Pythagorean Theorem.*

KEY WORDS: *geometric conceptions, Pythagorean Theorem, discovering activities*

ABSTRAKT. *V príspevku prezentujeme vybrané aktivity a úlohy podporujúce zvyšovanie porozumenia Pytagorovej vete ako aj jej aplikáciám pri riešení matematických úloh. Z niektorých existujúcich dôkazov Pytagorovej vety sme vytvorili geometrické skladačky a úlohy v štvorcovej sieti, ktoré sme prispôsobili ich využitiu v rámci vyučovania matematiky už na primárnom stupni vzdelávania. Naším cieľom bolo prezentovať rôzne možnosti zavádzania gradovaných úloh a aktivít vedúcich k objaveniu a pochopeniu Pytagorovej vety.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *geometrické predstavy, Pytagorova veta, objavné aktivity*

CLASSIFICATION: *G10, E50*

1 Úvod

Podľa ŠVP ISCED 2 sa v tematickom okruhu Geometria a meranie žiaci na 2. stupni základnej školy v Slovenskej republike zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Téma „*Pytagorova veta, jej odvodenie a použitie pri riešení praktických úloh*" býva v školských vzdelávacích programoch zaradená do deviateho ročníka ZŠ. Žiaci po jej prebratí majú poznať a vymenovať základné prvky pravouhlého trojuholníka (odvesna, prepona, súčet dvoch ostrých uhlov je $90°$); vedieť, pre aký útvar platí Pytagorova veta; poznať a vedieť formuláciu Pytagorovej vety a jej význam. Zapíšu Pytagorovu vetu vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri danom označení strán pravouhlého trojuholníka. Samostatne vyjadrujú a zapisujú zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnou a ($a^2 = c^2 - b^2$) a nad odvesnou b ($b^2 = c^2 - a^2$), vyjadrujú vzťah pre výpočet odvesien a, b ($a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$) alebo ich druhých mocnín. Vypočítajú dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán a samostatne používajú Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.

Propedeutikou Pytagorovej vety môže byť už v nižších ročníkoch ZŠ výpočet obsahu rovinných útvarov v štvorcovej sieti, výpočet obsahov obrazcov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov, a tiež analýza takto vytvorených útvarov. V školskej praxi učitelia často využívajú *geometrické dôkazy* platnosti Pytagorovej vety a motivačne uvádzajú historické

[1] Corresponding author

poznámky. Na túto oblasť sa zameriame aj my v našom príspevku. Uvádzame už známe obrazce a postupy, ktoré sme sa snažili ucelene spracovať a poukázať na ich využitie v školskom vzdelávaní.

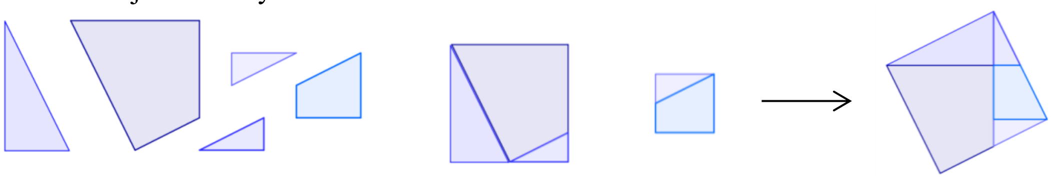
2 Objavujeme vzťahy v Pytagorovej vete

S aktivitami, ktoré neskôr môžeme využiť pri objavovaní a zavádzaní Pytagorovej vety, je vhodné začať už na primárnom stupni vzdelávania. V rámci aktivít s geometrickými skladačkami alebo v štvorcovej sieti môžu žiaci objaviť dôležité vlastnosti a vzťahy. Tie neskôr vedú k hlbšiemu porozumeniu Pytagorovej vete, i keď pri ich realizácii ju ešte nepoznajú. Ďalej uvádzame niektoré takéto aktivity bez použitia Pytagorovej vety, ako aj aplikačné úlohy, v riešeniach ktorých Pytagorovu vetu využívame.

2.1 Manipulačné aktivity s papierom

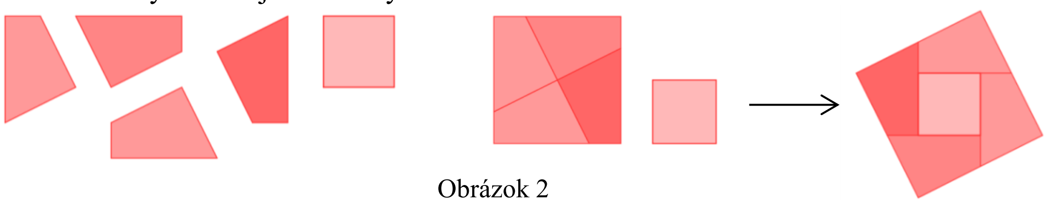
Strihanie a skladanie vhodne vytvorených geometrických obrazcov a skladačiek môže viesť k poznaniu, že ak vieme zložiť z dvoch menších štvorcov jeden veľký štvorec, tak jeho obsah je súčtom obsahov týchto dvoch štvorcov.

A. Z daných častí skladačky zložte najskôr dva menšie štvorce a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



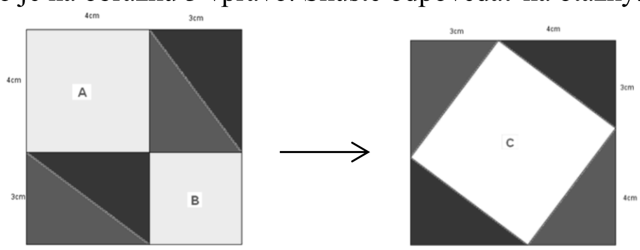
Obrázok 1

B. Z daných častí skladačky zložte k malému štvorcu jeden väčší štvorec a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



Obrázok 2

C. Štvorec na obrázku 3 vľavo rozstrihajte na jednotlivé časti, pričom dĺžka jeho strany je rozdelená na 3cm a 4cm. Potom zo štyroch trojuholníkov ohraničte ďalší štvorec, tak ako je na obrázku 3 vpravo. Skúste odpovedať na otázky.



Obrázok 3

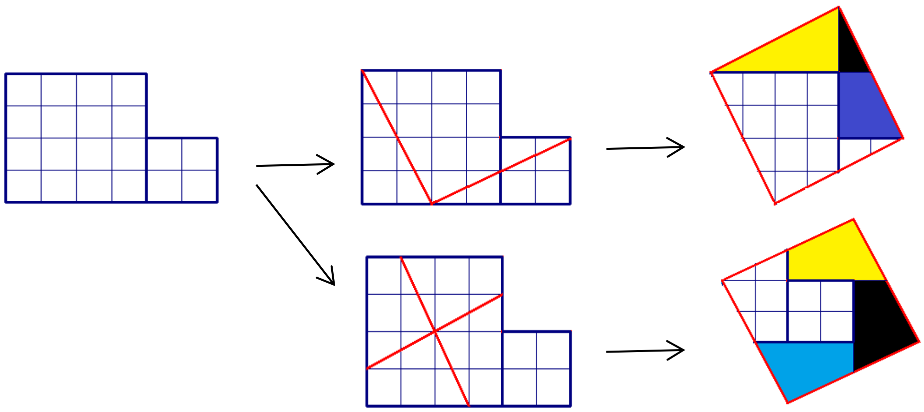
1. Aký je obsah štvorca C, ktorý vznikol?
2. Prečo je dĺžka prepony trojuholníkov 5cm?

D. Nastrihajte si štvorce s rôznymi dĺžkami strán, napríklad od 1cm po 15cm. Zisťujte, ktorými trojicami štvorcov vieme ohraničiť pravouhlý trojuholník (štvorce k sebe prikladajte tak, aby sa dotýkali vrcholmi a ich strany vytvorili pravouhlý trojuholník). Zisťujte dĺžky ich strán, určte ich obsahy a hľadajte vzťah medzi trojicami čísel určujúcich obsahy štvorcov. Nájdete tak trojice čísel: 3,4,5; 6,8,10; 5,12,13; 9,12,15 a ich obsahy tvoria tzv. „*sčítacie rodinky*“.

2.2 Aktivity v štvorcovej sieti

Aktivita 1

Vyššie uvedené aktivity A, B môžeme zadať aj ako úlohy v štvorcovej sieti: rozdeľte daný obrázok dvomi čiarami tak, aby sme zo vzniknutých častí mohli zložiť jeden štvorec.

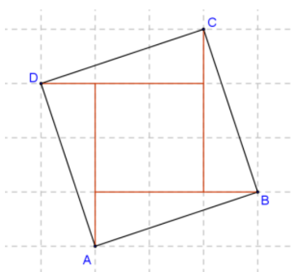


Obrázok 4

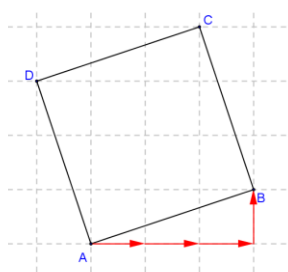
Aktivita 2

V nasledujúcej aktivite na objavenie Pytagorovej vety využijeme ako didaktické prostredie tiež štvorcovú sieť.

Nakreslite ľubovoľný štvorec *ABCD* do štvorcovej siete (obrázku 5) a zistite jeho obsah rozdelením na štyri pravouhlé trojuholníky a štvorec.



Obrázok 5



Obrázok 6: *A*→→→↑ *B*

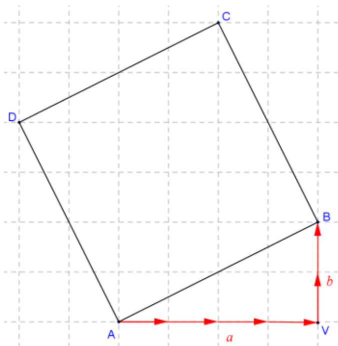
Do aktivity zavedieme šípkový zápis vyjadrujúci pohyb po štvorcovej sieti z bodu *A* do bodu *B* pre zvolený štvorec *ABCD*, napríklad pre štvorec na obrázku 6 je šípkový zápis *A*→→→↑ *B*.

Potom zakresľujte rôzne štvorce do štvorcovej siete, počítajte ich obsahy a výsledky zapisujte do tabuľky. Najskôr si zvoľte strany štvorcov tak, že budete zvyšovať šípky doprava → a šípka hore ↑ bude len jedna. Zisťujte obsahy týchto štvorcov, ktorých stranu ste určili šípkovým zápisom. Postupne zvyšujte šípky doprava → a šípky hore ↑ sú teraz dve, atď. Pokúste sa vyjadriť vzťah medzi obsahom vzniknutého štvorca a počtom šípok doprava a nahor. Nakoniec získate takto vyplnenú tabuľku (tabuľka 1).

→	↑	Obsah štvorca
a	1	a^2+1
a	2	a^2+4
a	3	a^2+9
a	4	a^2+16
a	5	a^2+25
a	b	a^2+b^2

Tabuľka 1: Obsah štvorcov pre *A*→...↑... *B*

Z tabuľky zistíte, že ak máme úsečku *AB* so šípkovým zápisom *A*→...↑... *B*, t. j. zápis obsahuje a šípok doprava a b šípok hore, potom obsah štvorca je a^2+b^2. Všimnite si, že a šípok tvorí jednu odvesnu a b šípok tvorí druhú odvesnu pravouhlého trojuholníka, pričom súčet a^2+b^2 je obsahom štvorca zostrojeného nad preponou tohto pravouhlého trojuholníka.(viac v Pavlovičová G. a kol., 2012, s.39-45).



Obrázok 7

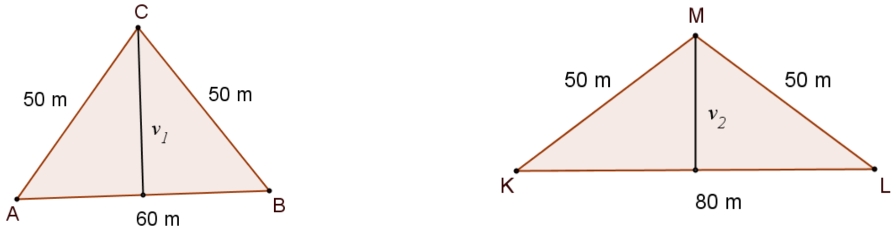
3 Aplikácia Pytagorovej vety v úlohách

Uvádzame ukážky dvoch aplikačných úloh vhodných pre školskú prax. Prvá je ukážka využitia nadobudnutých vedomostí o trojuholníku, jeho vlastnostiach a aplikácie Pytagorovej vety v jej riešení. Druhá úloha poukazuje na možnosti použitia Pytagorovej vety v riešení problému o kružniciach. Využívame tu všeobecné znenie Pytagorovej vety (platí pre všetky navzájom podobné útvary, ktoré sú zostrojené nad stranami trojuholníka).

Úloha 1

Dvaja majitelia pozemkov sa nemohli zhodnúť na tom, kto má väčší pozemok. Oba pozemky mali tvar trojuholníkov. Rozmery prvého pozemku boli $50\,m, 50m, 80m$*; druhý pozemok mal rozmery* $50\,m, 50m, 60m$*. Prvý majiteľ tvrdil, že jeho pozemok má dlhšiu základňu, preto má aj väčšiu výmeru. Druhý bol presvedčený, že na dĺžke základne nezáleží a výmera je rovnaká. Kto z nich mal pravdu?* (Šedivý a kol., 2008)

Riešenie úlohy pozostáva z niekoľkých krokov: 1) V rozbore úlohy načrtneme oba pozemky a konštatujeme, že ide o rovnoramenné trojuholníky s rovnakou dĺžkou ramien, ale rôznou dĺžkou základní.



Obrázok 8

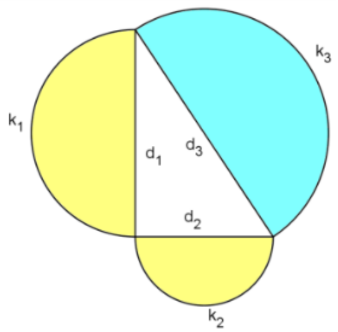
2) Zopakujeme si vlastnosti rovnoramenného trojuholníka a doplníme náčrty o výšky na základne, ktoré rozdelia oba trojuholníky na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. 3) S použitím Pytagorovej vety vypočítame dĺžky znázornených výšok. 4) Po zistení, že znázornené pravouhlé trojuholníky majú zhodné dĺžky strán prijmeme záver, že podľa vety sss sú zhodné.

Pre žiakov je náročné sformulovať záver v znení *„zhodné útvary majú zhodný obsah"*, častejšie dokončia riešenie úlohy výpočtom obsahov obidvoch trojuholníkov „pre istotu". V závere riešenia uvedieme správne sformulovanú slovnú odpoveď.

Úloha 2

Dané sú dve kružnice k_1 (S_1, r_1) a k_2(S_2, r_2). Zostrojte kružnicu k_3, ktorej obsah je súčtom obsahov kružníc k_1 a k_2.

Z rôznych možných riešení úlohy uvádzame aplikáciu Pytagorovej vety. Vzťah medzi obsahmi daných kružníc a hľadanej kružnice je $S_3 = S_1 + S_2$. Po dosadení do vzorca pre výpočet obsahu kruhu dostaneme vzťah pre polomery kružníc: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. Dĺžku polomeru hľadanej kružnice teda vieme zostrojiť ako preponu pravouhlého trojuholníka, ak využijeme nasledovné všeobecné znenie Pytagorovej vety: *Súčet obsahov dvoch podobných útvarov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu útvaru s nimi podobného zostrojeného nad preponou tohto trojuholníka.*[2] Na obrázku 8 prezentujeme tento vzťah analogicky medzi polkruhmi, kde strany trojuholníka tvoria priemery týchto polkruhov.



Obrázok 9

[2] Pôvodné znenie tejto vety uvedené v knihe Euklides: Základy, kniha VI, veta 31; nájdeme aj v knihe Fulier, J. a kol., 2011, s.197.

Záver

Pytagorova veta určite patrí medzi najčastejšie používanú vetu v školskej praxi a je pravdepodobne aj najslávnejšou matematickou vetou vôbec. Je to zároveň veta s najväčším počtom dôkazov, v dostupných zdrojoch sa ich uvádza až okolo 300. Táto geometrická veta je použiteľná aj v praktickom živote. Popísané aktivity v príspevku sú riešiteľné aj pre slabších žiakov, čo môže byť pre nich zároveň silne motivujúce. Motiváciou pre žiakov môžu byť aj konkrétne ukážky využitia všeobecného znenia Pytagorovej vety, prípadne aj historický pohľad na túto vetu.

Literatúra

[1] Fulier, J. a kol. (2011). Nové aspekty reformy matematického vzdelávania. Nitra: FPV UKF, 2011. 241 s. ISBN 978-80-558-0013-4

[2] Jirotková, D.- Kloboučková, J. (2011). Pythagorova věta tvořivě. In: Tvořivosť v počátečním vyučování matematiky. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s. 100-104. ISBN 978-80-7043-992-0

[3] Pavlovičová, G. a kol. (2012). Experimentujeme v elementárnej matematike. Nitra: FPV UKF, 2012. 123 s. ISBN 978-80-558-0126-1

[4] Pavlovičová, G.- Rumanová, L.- Vidermanová, K. (2010). Zábavné úlohy z geometrie. Nitra : FPV UKF, 2010. 90 s. ISBN 978-80-8094-789-7

[5] Šedivý, O. a kol. (2008). Zbierka zaujímavých, zábavných a aplikačných úloh z matematiky. Nitra: FPV UKF, 2008. 140 s. ISBN 978-80-8094-421-6.

[6] Štátny vzdelávací program, Matematika - príloha ISCED 2. Bratislava, 2011. Dostupné: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autorov

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, SK –94974 Nitra;
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk, lrumanova@ukf.sk, jzahorska@ukf.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 007UKF-4/2011 Zvyšovanie kľúčových kompetencií v oblasti matematického a prírodovedného myslenia na primárnom stupni vzdelávania.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

TASKS WITH ELEMENTS OF STATISTICS IN MATHEMATICS OF PRIMARY SCHOOL

ÚLOHY S ELEMENTMI ŠTATISTIKY V MATEMATIKE PRIMÁRNEJ ŠKOLY

ALENA PRÍDAVKOVÁ

ABSTRACT. *The concepts of basic statistic notions are created in children's mind in younger school age. Models of elementary statistic concepts can be presented in mathematical education at primary school. Everyday life situations are basis. Propedeutical mathematical tasks are presented in the article. Constructivist approach in mathematical teaching is applied in the tasks.*

KEY WORDS: *statistics, elementary mathematics, primary school*

ABSTRAKT. *Koncepty základných pojmov štatistiky sú v myslení detí vytvárané už v mladšom školskom veku. Modely elementárnych štatistických pojmov môžu byť prezentované vo vyučovaní matematiky na primárnom stupni vzdelávania. Východiskom sú pritom situácie z každodenného života. V článku sú prezentované úlohy na propedeutiku niektorých elementárnych pojmov matematickej štatistiky, využívajúce konštruktivistický prístup k vyučovaniu.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: štatistika, elementárna matematika, primárna škola*

CLASSIFICATION: *B50, C70, D30*

Úvod

Štatistika je oblasť matematiky, ktorá má svoje zastúpenie v obsahu vyučovacieho predmetu matematika už na primárnom stupni vzdelávania. Pri vytváraní prvotných predstáv o základných pojmoch danej časti matematiky by mal byť aplikovaný konštruktivistický prístup vyučovania, ktorý je založený na procese tvorby vlastných predstáv o abstraktných matematických pojmoch [2]. Využívané sú pritom rozličné druhy reprezentácií na rôznych úrovniach abstrakcie. Spočiatku sa manipuluje s konkrétnymi predmetmi, nasleduje práca s obrázkovým reprezentáciami a postupuje sa až k mentálnym reprezentantom. Uvedený prístup môže pomôcť prekonať obavy učiteľov primárnej školy z učiva zameraného na propedeutiku štatistických pojmov.

Štatistika vo vyučovaní matematiky primárnej školy

Analyzovaný bol vzdelávací obsah matematiky primárnej školy na Slovensku a v Taliansku z pohľadu výskytu elementov učiva spojených so štatistikou.

V štátnom vzdelávacom programe ISCED 1 na Slovensku je učivo, týkajúce sa danej oblasti, zaradené do jedného z piatich tematických okruhov s názvom *Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika.* Výkonový štandard je uvedený v rámci tematického celku *Riešenie aplikačných úloh a úloh rozvíjajúcich špecifické matematické myslenie.* V nasledujúcej časti prezentujeme formulácie odporúčaných cieľov v kontexte spomínanej oblasti matematiky (podľa [1]), uvádzané ako výkonový štandard.

Odporúčaná téma	Odporúčané pojmy	Odporúčaný výkonový štandard
úlohy na zbieranie a zoskupovanie údajov		vytvoriť jednoduchú tabuľku a orientovať sa v nej, urobiť zo získaných a znázornených udalostí jednoduché závery
vytváranie tabuliek z údajov získaných žiakmi	tabuľka, riadok, stĺpec	získavať a zhromažďovať potrebné údaje, zo získaných údajov vedieť zostaviť a prečítať tabuľku
vytváranie stĺpcových diagramov z údajov získaných žiakmi		čítať a nakresliť (vytvoriť) stĺpcový diagram zo získaných údajov
výpočet aritmetického priemeru pre menší počet dát (propedeutika)	aritmetický priemer, stĺpcový diagram, dáta, priemer	vypočítať aritmetický priemer pre menší počet primeraných dát

Tabuľka 1: elementy učiva štatistiky na Slovensku

Výstupy vzdelávania v Taliansku sú formulované vo forme znalostí a zručností. Učivo je rozdelené do piatich tematických okruhov, pričom jeden z nich zahrňuje aj propedeutiku štatistiky. Ide o okruh nazvaný *Údaje a predpovede*. Uvádzame odporúčané znalosti a zručnosti z danej oblasti matematiky, ktoré má žiak zvládnuť v jednotlivých piatich ročníkoch primárneho stupňa vzdelávania (podľa [9]).

Znalosti	Zručnosti
reprezentácia jednoduchých údajov, rôzne druhy ich usporiadania a triedenia	zhromaždí údaje a informácie, zorganizuje ich symbolické (ikonické) reprezentácie
prvky štatistického zisťovania	zhromaždí údaje a informácie, zorganizuje ich symbolické reprezentácie
prvky štatistického zisťovania	kladie otázky v konkrétnych situáciách (skupiny ľudí, vek osôb, povolanie, šport atď.); zozbiera informácie určitého typu, roztriedi informácie podľa druhu; prezentuje dáta vo frekvenčnej tabuľke alebo pomocou grafu, ktorý je primeraný danej situácii; rozozná modus v množstve údajov prezentovaných tabuľkou alebo grafom
symbolické reprezentácie jednoduchých údajov, ich usporiadanie	zhromaždí údaje a informácie, organizuje ich symbolické reprezentácie na úrovni skupiny a/alebo v malých skupinách
analýza a porovnávanie údajov prostredníctvom charakteristík: modus, medián, aritmetický priemer; vyhľadávanie informácií z oficiálnych štatistík	upraví zozbierané údaje, zaznamenávanie kvantitatívnych údajov je rozšírené o kvalitatívny znak; interpretuje údaje použitím štatistických metód; analyzuje a porovnáva súbory na základe charakteristík: modus, medián, aritmetický priemer.

Tabuľka 2: elementy učiva štatistiky v Taliansku

Zbieranie a zoskupovanie údajov je v talianskom vzdelávacom obsahu zastúpené znalosťami v časti *prvky štatistického zisťovania*. Na druhej strane, základné fakty t. j. znalosti z oblasti štatistického zisťovania slovenské kurikulum zahŕňa v témach *vytváranie tabuliek z údajov získaných žiakmi* a *vytváranie stĺpcových diagramov z údajov získaných žiakmi*. V slovenskom štandarde je zaradená téma zameraná na výpočet aritmetického priemeru, zatiaľ čo v Taliansku je priestor venovaný aj pojmom *modus a medián*, presnejšie ich propedeutike.

V Taliansku je vo výstupoch primárneho stupňa matematického vzdelávania kladený dôraz na rôzne reprezentácie pojmov. Aplikuje sa tak konštruktivistický prístup k vyučovaniu danej témy matematiky, ktorý využíva rôzne typy reprezentácií abstraktných pojmov, ako sú napríklad konkrétne objekty, ideogramy (obrázkové znaky), ilustrácie, teda separované modely a nakoniec sú používané univerzálne modely. Na propedeutickej úrovni sú, okrem kvantitatívnych znakov štatistických jednotiek, sprístupnené aj znaky kvalitatívne.

Úlohy na propedeutiku základných pojmov štatistiky

Uvádzame niekoľko námetov z talianskych učebných textov ([5],[6],[7],[8]), ktoré sú zamerané na vytváranie prvotných predstáv o základných pojmoch matematickej štatistiky.

Prvá ukážka je určená žiakom prvého ročníka základnej školy [5] a ide v nej o zaznamenávanie údajov do tabuľky.

Úloha 1: *Učiteľ robil prieskum medzi deťmi, ktoré navštevovali športové kluby.*

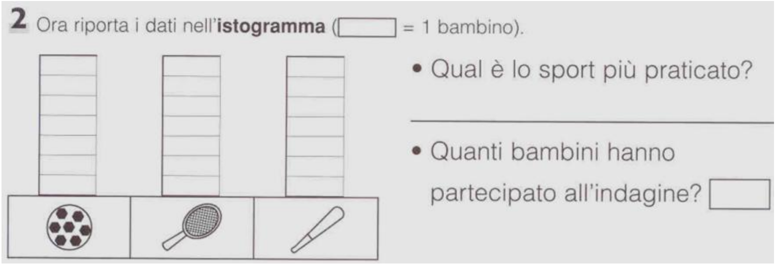
Obrázok 1: zdroj [5]: Romano, 2010, s. 95

Doplň ideogramy (obrázky) ( *= 1 dieťa).*
6 detí trénuje futbal
4 deti hrajú tenis
5 detí hrá baseball

Súčasťou zadania úlohy je aj legenda, využité sú grafické reprezentácie objektov – detí, obrázkové znaky, tzv. ideogramy. Údaje vyjadrujúce počet detí zaoberajúcich sa daným druhom športu sú zaznamenávané do jednoduchej tabuľky, nazvanej „ideogramma“. Prvý riadok tabuľky slúži ako vzor na prezentovanie ďalších údajov. Pracuje sa na nižšej úrovni abstrakcie, manipuluje sa s obrázkovými reprezentáciami. Zo znalostí sa v úlohe vyskytuje reprezentácia jednoduchých údajov a zručnosť zameraná na prezentáciu dát v tabuľke. Žiak má byť schopný orientovať sa v tabuľke, rozlišovať pojmy *riadok* a *stĺpec*.

V nasledujúcej úlohe sa vyskytujú iné reprezentácie objektov, ktoré majú abstraktnejší charakter. Vstupné informácie sú rovnaké ako v úlohe 1.

Úloha 2: *Zaznamenaj údaje do* ***histogramu*** *(▭ = 1 dieťa).*



Obrázok 2: zdroj [5]: Romano, 2010, s. 95

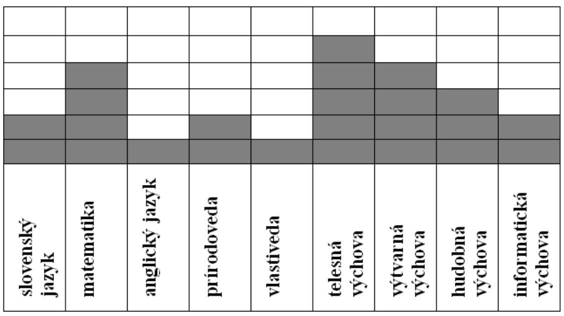
Ktorý športový klub navštevuje najviac detí?
Koľko detí sa zúčastnilo prieskumu?

V úlohe ide o zaznamenávanie údajov do diagramu, ktorý predstavuje histogram. Ten je už vytvorený, žiak vyznačuje príslušné údaje. Súčasťou zadania je aj legenda, ktorá má abstraktnejší charakter v porovnaní s predchádzajúcou úlohou. Aj napriek tomu, že úloha je určená pre žiakov prvého ročníka, je použitý pojem histogram („istogramma“), ako pomenovanie daného typu diagramu. Využíva sa symbolická reprezentácia objektov pomocou univerzálneho modelu (▭). Ide o inú reprezentáciu rovnakej situácie ako v predchádzajúcej úlohe, len na vyššej úrovni abstrakcie. Počet detí zaoberajúcich sa daným druhom športu nie je v diagrame na tejto úrovni vyjadrený prirodzeným číslom.

Ďalšia ukážka sa týka sprístupnenia pojmu *modus*, presnejšie predstavenia jeho podstaty. Využitá je situácia z reálneho života a úloha je určená pre žiakov tretieho ročníka [7].

Úloha 3: *Žiaci v triede sa zhovárali o rôznych predmetoch. Na konci rozhovoru deti povedali, ktorý predmet je ich najobľúbenejší.*

▬ ⟶ 1 študent



Pozoruj údaje v histograme a odpovedaj na otázky.
Koľko žiakov je v triede?
Ktorý z predmetov je najobľúbenejší?

Ktoré predmety sú najmenej obľúbené?
Údaj, ktorý sa opakuje najčastejšie sa nazýva **modus**.
V našom prípade modus je .....

Jedným z cieľov, ktorý sleduje úloha je čítať a interpretovať údaje z diagramu, ako aj rozoznať *modus* v množstve údajov prezentovaných grafom. Prvotná predstava o pojme *modus* je vysvetlená na jednoduchom príklade, na propedeutickej úrovni, ako údaj, ktorý sa opakuje najčastejšie. Využité sú už známe symbolické reprezentácie objektov – v tomto prípade žiakov.

Pojem *medián* je tiež možné žiakom prezentovať na úlohe využívajúcej reálnu situáciu [8], ako je to naznačené v nasledujúcej ukážke.

Úloha 4: *Martin je na dovolenke a chce zistiť medián (strednú hodnotu)počtu kilometrov trás, ktoré prešiel každý deň na jeho skútri. Pomôže vám, ak údaje zapíšete do tabuľky v vzostupnom poradí.*

Pondelok	**636**
Utorok	**525**
Streda	**426**
Štvrtok	**435**
Piatok	**641**
Sobota	**412**
Nedeľa	**389**

389						**641**

MEDIÁN

V úlohe ide o vysvetlenie pojmu *medián*, ako strednej hodnoty zistených hodnôt. V zadaní je naznačené, že je dôležité údaje usporiadať podľa veľkosti vzostupne. Cieľom je upraviť zistené údaje a identifikovať medián ako prostrednú hodnotu.

Situácie podobného charakteru je možné vytvárať a zaradiť do vyučovania aj v konkrétnych skupinách žiakov, kde sú použité hodnoty a údaje vychádzajúce zo skutočných zistení samotných žiakov. Táto skutočnosť má v neposlednom rade aj motivačný charakter, čo je východiskom pri aplikácii konštruktivistického prístupu k vyučovaniu matematiky.

Záver

Matematická štatistika je časť matematiky, ktorá vo veľkej miere využíva situácie z reálneho života. Každý učiteľ by si mal uvedomiť, že s elementárnymi pojmami štatistiky a ich modelmi sa stretávame denne. Projekty, úlohy a činnosti zamerané na zber údajov, ich organizáciu, triedenie a zaznamenávanie rôznymi formami (tabuľkami alebo diagramom) môžu byť súčasťou vyučovania nielen matematiky, ale aj iných predmetov na primárnom stupni vzdelávania. Riešenie úloh s elementmi štatistiky má význam ako z pohľadu rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov, tak aj kľúčových kompetencií, akou je napríklad schopnosť riešiť problémy každodenného života [4].

Literatúra

[1] Bálint, Ľ. et. al (2009). Štátny vzdelávací program matematika (vzdelávacia oblasť: matematika a práca s informáciami). Príloha ISCED 1. Bratislava:, ŠPÚ, 2009. Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced1.pdf

[2] Hejný, M., Kuřina, F. (2001). Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha:, Portál, 2001. 187 s. ISBN 80-7178-581-4

[3] Prídavková, A. (2012). Aritmetika a algebra s didaktikou. Prešov:, PU Pedagogická fakulta, 2012. 191 s. ISBN 978-80-555-0677-7

[4] Štátny vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy v Slovenskej republike. ISCED 1–Primárne vzdelávanie. (2008) (dostupné na http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program-pre-1-stupen-zakladnych-skol-ISCED-1.alej)

[5] Romano, S. (2010). Matematica OK 1. Milano:, Cetem, 2010. 96 s. ISBN 978-88-473-0414-7

[6] Romano, S. (2010). Matematica OK 2. Milano:, Cetem, 2010. 112 s. ISBN 978-88-473-0415-4

[7] Romano, S. (2010). Matematica OK 3. Milano:, Cetem, 2010. 112 s. ISBN 978-88-473-0416-1

[8] Romano, S. (2010). Matematica OK 4. Milano:, Cetem, 2010. 112 s. ISBN 978-88-473-0417-8

[9] http://www.icbernareggio.it/elementari/programmazioni.php#sec

Článok prijatý dňa 12. apríl 2013.

Adresa autora

doc. RNDr. Alena Prídavková, PhD.
Katedra matematickej edukácie, Pedagogická fakulta, Prešovská univerzita v Prešove, ulica 17. novembra č. 15, SK – 080 01 Prešov; e-mail: alena.pridavkova@pf.unipo.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol ako súčasť riešenia grantového projektu VEGA 1/1230/12 s názvom *Komparatívna analýza vybraných aspektov primárnej matematickej edukácie na Slovensku a v zahraničí v kontexte kurikulárnej transformácie vzdelávania na základných školách a medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

GEOMETRY AND MEASUREMENT IN PRIMARY EDUCATION IN SLOVAKIA AND THE REPUBLIC OF IRELAND

GEOMETRIA A MERANIE V PRIMÁRNEJ EDUKÁCII NA SLOVENSKU A V ÍRSKU

IVETA SCHOLTZOVÁ

ABSTRACT. *The comparative survey TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) measures the pupils' mathematical performance in three contents domains. Geometric Shapes and Measures is one such domain. In this paper is presented the comparison, as this issue is included in the curriculum for primary education in Slovakia and Ireland.*

KEY WORDS: *geometry, measurement, primary education*

ABSTRAKT. *V medzinárodnej komparatívnej štúdii TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) sa meranie výkonov žiakov v matematike uskutočňuje v troch obsahových oblastiach. Jednou z nich je obsahová oblasť Geometrické útvary a merania. V príspevku je prezentovaná komparácia, ako je táto problematika začlenená v kurikulárnych dokumentoch pre primárne vzdelávanie na Slovensku a v Írsku.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: geometria, meranie, primárna edukácia*

CLASSIFICATION: *D10, G10, U20*

Úvod

Medzinárodná komparatívna štúdia TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) uvádza tri obsahové oblasti, v ktorých sa uskutočňuje meranie výkonov žiakov: *Number*, *Geometric Shapes and Measures*, *Data Display*. Tieto názvy obsahových oblastí sa v slovenskom prostredí uvádzajú ako: Čísla, Geometrické útvary a merania, Zobrazovanie údajov. Štátny vzdelávací program ISCED 1 pre matematické vzdelávanie [5] vymedzuje päť tematických okruhov: Čísla, premenná a počtové výkony s číslami; Postupnosti, vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy; Geometria a meranie; Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika; Logika, dôvodenie, dôkazy. Kurikulárny dokument pre primárne matematické vzdelávanie v Írskej republike [3] uvádza takýto obsah: *Number*, *Algebra*, *Shape and space*, *Measures*, *Data.* Analýza uvedených zdrojov ukazuje spoločné ale aj niektoré rozdielne aspekty. V štúdii TIMSS je ako preklad pojmu *Measures* uvedené meranie. Slovenskému pojmu meranie by mohol zodpovedať presnejšie v anglickom jazyku pojem *measurement*. Pojem *measures* by do slovenského jazyka bolo možné preložiť ako miery. Takýto preklad sa ponúka, ak je v írskom kurikulárnom dokumente analyzovaný obsah tematického okruhu *Measures*: *Lenght* – dĺžka, *Area* – obsah, *Weight* – hmotnosť, *Capacity* – objem, *Time* – čas, *Money* – peniaze. V kurikulárnych dokumentoch pre primárne matematické vzdelávanie na Slovensku je exaktne uvedené iba meranie dĺžky. Problematika obsahu, času a peňazí sa v matematike vyskytuje iba v podobe úloh. Meranie (čas, teplota, objem, hmotnosť) sa objavuje v obsahu predmetu Prírodoveda [6].

Geometria v primárnej edukácii na Slovensku a v Írsku

Štátny vzdelávací program. Matematika. (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami). Príloha ISCED 1 [5] uvádza geometrické učivo v tematickom okruhu Geometria a meranie. Írsky kurikulárny dokument pre primárne matematické vzdelávanie *Mathematics. Primary School Curriculum* [3] má geometrickú problematiku uvedenú v dvoch častiach *Shape and* space – tvar a priestor, *Measures (Length)* – miery (dĺžka). Obsah v jednotlivých ročníkoch:

Ročník	Slovensko	Írsko
1.	Kreslenie čiar. Rysovanie priamych čiar. Geometrické tvary a útvary – kreslenie. Manipulácia s niektorými priestorovými a rovinnými geometrickými útvarmi.	Orientácia v priestore (medzi, pod, nad, okolo, cez, vľavo, vpravo), pohyb podľa pokynov. Rovinné útvary – štvorec, obdĺžnik, trojuholník, kruh, polkruh – veľkosť, vrcholy, počet a dĺžka strán, skladanie a rozdeľovanie, konštrukcia a rysovanie (šablóny). Rovinné útvary v okolí. Priestorové útvary – kocka, kváder, valec, guľa –hrany, vrcholy, počet a tvar stien. Priestorové útvary v okolí. Vzťahy medzi rovinnými a priestorovými útvarmi. Meranie dĺžky s použitím neštandardných jednotiek, štandardnej jednotky – metra. Riešenie praktických úloh týkajúcich sa dĺžky.
2.	Bod, priamka, polpriamka, úsečka. Rysovanie priamok a úsečiek. Vyznačovanie úsečiek na priamke, polpriamke a na danom geometrickom útvare. Jednotky dĺžky – cm, dm, m. Meranie dĺžky úsečky. Porovnávanie úsečiek podľa ich dĺžky. Budovanie telies z kociek podľa vzoru alebo podľa obrázka. Stavba jednoduchých telies.	Orientácia v priestore – zložitejší pohyb podľa pokynov. Rovinné útvary – štvorec, obdĺžnik, trojuholník, kruh, polkruh, elipsa – porovnávanie, čo je rovnaké/odlišné, skladanie a rozdeľovanie, rysovanie a kreslenie, identifikácia polovice a štvrtiny útvaru. Priestorové útvary – kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ – siete telies. Vzťahy medzi rovinnými a priestorovými útvarmi. Symetria v geometrických útvaroch a v okolí. Uhly – uhly v okolí, uhly vo vrcholoch, pravý uhol (rovinné útvary). Meranie dĺžky s použitím neštandardných jednotiek, štandardných jednotiek – m, cm. Riešenie praktických úloh týkajúcich sa dĺžky. Meranie obsahu s použitím neštandardných jednotiek.

3.	Meranie dĺžky úsečky v mm a v cm. Meranie väčších vzdialeností: približne (napr. krokmi), s presnosťou na metre. Odhad dĺžky: kratšej v cm (mm), dlhšej v metroch. Rysovanie – základné zásady rysovania. Rysovanie priamok a úsečiek. Vyznačovanie úsečiek na priamke a danom geometrickom útvare. Rysovanie rovinných útvarov v štvorcovej sieti. Stavba telies z kociek na základe plánu (obrázka). Kreslenie plánu stavby z kociek.	Rovinné útvary – štvorec, obdĺžnik, trojuholník, kruh, polkruh, elipsa, šesťuholník, nepravidelné útvary – strany, uhly, rovnobežné/nerovnobežné línie, rasovanie a kreslenie. Priestorové útvary – kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ, trojboký hranol, ihlan – počet a tvar stien, počet vrcholov a hrán, schopnosť gúľania, kĺzania, skladania na seba. Konštrukcia priestorových útvarov. Symetrie v okolí, vyznačenie osi súmernosti v rovinných útvaroch. Vertikálne, horizontálne a paralelné línie. Uhol a rotácia, pohyb v smere/proti smeru hodinových ručičiek, uhol väčší/menší/rovnaký ako pravý uhol, pravý uhol v rovinných a priestorových útvaroch. Meranie dĺžky v cm a m, premieňanie jednotiek dĺžky. Meranie obsahu s použitím pravidelných a nepravidelných útvarov.
4.	Rysovanie – základné zásady rysovania. Rysovanie štvorca a obdĺžnika v štvorcovej sieti, pomenovanie vrcholov a strán, dvojíc susedných strán. Obvod štvorca (obdĺžnika) – (len ako súčet veľkosti strán, propedeutika). Súčet a rozdiel dĺžok úsečiek. Násobok dĺžky úsečky. Rysovanie trojuholníka (ľubovoľného a ak sú dané dĺžky strán), pomenovanie jeho vrcholov a strán. Meranie dĺžok strán trojuholníka s presnosťou na cm, na mm. Obvod trojuholníka (len ako súčet veľkosti strán, propedeutika). Rysovanie ľubovoľnej kružnice a kruhu s daným stredom, kružnice a kruhu s daným stredom a polomerom. Vlasnosti kruhu a kružnice. Premieňanie jednotiek dĺžky. Premieňanie zmiešaných jednotiek dĺžky. Stavba telies z kociek podľa vzoru a podľa plánu (obrázka). Kreslenie plánov stavieb z kociek.	Rovinné útvary – rovnostranný, rovnoramenný, rôznostranný trojuholník, rovnobežník, kosoštvorec, päťuholník, osemuholník – strany, uhly, rovnobežné/nerovnobežné línie, rysovanie útvarov. Priestorové útvary – kocka, kváder, valec, guľa, kužeľ, trojboký hranol, ihlan. Konštrukcia priestorových útvarov. Symetrie v okolí, vyznačenie osi súmernosti horizontálnej, vertikálnej, diagonálnej. Šikmé a kolmé línie, uhlopriečky v štvorci. Pretínajúce sa línie/rôznobežky a vznikajúce uhly, ostrý, tupý, pravý uhol, uhol väčší/menší/rovnaký ako pravý uhol. Meranie dĺžky rôznych objektov, použitie vhodnej jednotky a vhodného nástroja na meranie. Zápis dĺžky desatinným číslom resp. zlomkom. Premieňanie jednotiek dĺžky (m, cm, km). Meranie obsahu s použitím pravidelných a nepravidelných útvarov. Použitie štandardných jednotiek obsahu: cm^2, m^2.

Komparatívna analýza obsahu geometrického učiva v primárnej matematickej edukácii na Slovensku a v Írsku ukazuje mnoho spoločných prvkov, ale aj niekoľko rozdielnych aspektov. Detailnejší pohľad prezentuje, čo je v obsahu matematického vzdelávania v Írsku navyše oproti slovenskému:

- Rovinné útvary
  Elipsa; rovnobežné/nerovnobežné línie (strany); rovnostranný, rovnoramenný, rôznostranný trojuholník; rovnobežník, kosoštvorec; uhly v rovinných útvaroch.
- Priestorové útvary
  Kužeľ, trojboký hranol, ihlan; počet a tvar stien, hrany a vrcholy; siete telies.
- Symetria
  (v SR iba na propedeutickej úrovni, v podobe úloh)
  Vertikálne, horizontálne, paralelné, diagonálne línie.
- Uhly
  (pojem uhol nie je v matematike 1. – 4. ročníka základnej školy v SR)
  Uhol pravý, ostrý, tupý. Porovnávanie uhlov s pravým uhlom.
- Meranie dĺžky
  Najprv meter, potom centimeter. Zápis dĺžky desatinným číslom a zlomkom.
- Meranie obsahu
  (v SR iba na propedeutickej úrovni)
  Jednotky obsahu cm^2, m^2.

A naopak, čo sa nachádza v slovenskom primárnom vzdelávaní, ale nie je v írskom:

- Rovinné útvary
  Kružnica, vlastnosti kružnice a kruhu, rysovanie kružníc; úsečka; obvod štvorca, obdĺžnika, trojuholníka; rysovanie trojuholníka (dané dĺžky strán).
- Priestorové útvary
  Stavby z kociek podľa plánu, kreslenie plánov stavieb z kociek.
- Meranie dĺžky
  Jednotky mm, dm.

Záver

Poslednej štúdie TIMSS 2011 sa zúčastnilo 21 krajín Európskej únie a 25 krajín OECD. Výsledky slovenských a írskych žiakov 4. ročníka v medzinárodnom porovnaní boli nasledovné (podľa [4] a [7]:

Krajina	**Priemerná úspešnosť**	**Priemerná úspešnosť v oblasti *Geometric Shapes and Measures***
Írsko	527	520
Priemer krajín OECD	521	–
Priemer krajín EÚ	519	–
Slovensko	507	500
Priemer škály TIMSS	500	–

Írski žiaci dosiahli v matematike štatisticky lepší výsledok ako slovenskí žiaci. Aj v geometrickej oblasti bola priemerná úspešnosť írskych žiakov vyššia ako slovenských žiakov. Analogické boli aj výsledky v obsahových oblastiach Čísla a Zobrazovanie údajov.

Ďalšie zaujímavé informácie určite prinesie aj analýza učebných textov pre primárnu matematickú edukáciu, používaných v Írsku, ktorá bude v budúcnosti realizovaná.

Všetky získané poznatky môžu byť inšpiráciou pre obohatenie matematickej edukácie na 1. stupni základnej školy na Slovensku a tiež pre skvalitnenie pregraduálnej matematickej prípravy učiteľov-elementaristov.

Literatúra

[1] *Irish Education System.* (2013) Dublin: Department of Education and Skills, 2013. Dostupné na internete: http://www.education.ie/en/The-Education-System/.

[2] JELEMENSKÁ, P. (2008). *Výkony žiakov 4. ročníka základnej školy v matematike a v prírodovedných predmetoch. Národná správa z merania TIMSS 2007.* Bratislava: ŠPÚ/NÚCEM, 2008, 47s. Dostupné na internete: http:// www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/timss/publikacie/N%C3%A1rodn%C3%A1_spr%C3%A1va_web.pdf

[3] *Mathematics. Primary School Curriculum.* (1999). Dublin: Published by the Stationery Office, 1999, 127 p. Dostupné na internete: http://www.curriculumonline.ie/en/Primary_School_Curriculum/Mathematics/Mathematics_Curriculum_.pdf

[4] MULLIS, I.V.S., MARTIN, M.O., FOY, P., & ARORA, A. (2012). **TIMSS 2011 International Results in Mathematics.** Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. 504 p. Dostupné na internete: http://timss.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html

[5] *Štátny vzdelávací program. Matematika. (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami). Príloha ISCED 1.* (2009). Bratislava: ŠPÚ, 2009, 34 s. Dostupné na internete:http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced1.pdf

[6] *Štátny vzdelávací program. Prírodoveda. (Vzdelávacia oblasť: Príroda a spoločnosť). Príloha ISCED 1.* (2011). Bratislava: ŠPÚ, 2011, 50 s. Dostupné na internete: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/1stzs/isced1/vzdelavacie_oblasti/prirodoveda_isced1.pdf

[7] *TIMSS* & *PIRLS 2011.* (2012). Bratislava: NÚCEM, 2012. 8 s. Dostupné na internete: http://www.nucem.sk/documents/27/medzinarodne_merania/pirls/tipi_2011/sprava_TiPi.pdf

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autorov

doc. RNDr. Iveta Scholtzová, PhD.
Katedra matematickej edukácie, Pedagogická fakulta, Prešovká univerzita v Prešove, 17. novembra 15, SK – 080 01 Prešov; e-mail: iveta.scholtzova@unipo.sk

Poďakovanie

Príspevok je čiastkovým výstupom grantového projektu VEGA 1/1230/12 *Komparatívna analýza vybraných aspektov primárnej matematickej edukácie na Slovensku a v zahraničí v kontexte kurikulárnej transformácie vzdelávania na ZŠ a medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

INOVATIONS IN PREPARATIONF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

INOVAČNÉ PRÍSTUPY V PRÍPRAVE BUDÚCICH UČITEĽOV MATEMATIKY

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRACT. *Paper deals with using information technologies in preparation future mathematics teachers, application of new teaching/learning procedures on lessons. We briefly describe activities on lessons that could help students obtain betterinterconnection between theoretical and practical knowledge in mathematics and itsdidactics.*

KEYWORDS: *preparation future mathematics teachers, innovations in teaching/learning process.*

ABSTRAKT.*V článku sa venujeme problematike prípravy budúcich učiteľov matematiky, zavádzaniu moderných technológii do vyučovanie a aplikácií moderných učebných postupov priamo na vyučovacích hodinách. Ponúkame stručný opis prednášok a cvičení s aktivitami, ktoré majú budúcim učiteľom matematiky pomôcť k prepojeniu teoretických a praktických znalostí z preberanej problematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ:*príprava budúcich učiteľov, inovačné prístupy k vyučovaniu.*

CLASSIFICATION: *B59*

Úvod

Dlhodobom sa stretávame s požiadavkami modernizácie, informatizácie a humanizácie školstva. O kríze v školstve (a nemáme na mysli finančnú) čítame už viac ako 15 rokov. Na učiteľov kladieme stále viac povinností, zodpovednosti, chceme aby sa vzdelávali, získavali kredity a pod. Vyvstáva potom otázka – to máme našich učiteľov tak slabo pripravených, že ich nútime sa ďalej „chodiť do školy“ a získavať kredity? Na druhej strane, na viacerých blogoch sa dočítame, že dobrý učiteľ sa vzdeláva aj sám, lebo nechce za svojimi študentmi zaostávať. Robí to vo svojom voľnom čase, dobrovoľne. Napr. Kuchtová v [1] píše: *„Správne motivovaný učiteľ nepotrebuje kredity z nepotrebných školení. Bude sa vzdelávať sám, ak chce uspieť a byť úspešný“*. Na to, aby mal učiteľ potrebu sa sám vzdelávať, je potrebného viesť už budúcich učiteľov (a nielen matematiky) k samovzdelávaciu, hľadaniu nových informácii a podnietiť v nich zvedavosť a túžbu získať najnovšie informácie nielen zo svojho odboru.

Na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave sa snažíme práve o vzbudenie potreby samoštúdia u budúcich učiteľov matematiky. Nie vždy sa samozrejme stretneme s pochopením, študenti vždy volia cestu menšieho odporu a minimálnej námahy, čo je častokrát na škodu veci. Bohužiaľ, aj takíto ľudia potom idú učiť – bez záujmu o problematiku, bez záujmu o didaktiku a bez záujmu o čokoľvek, čo sa vyučovania profilových predmetov týka. Samozrejme, stále sa snažíme o inováciu študijných programov, aby študenti, ktorí skončia učiteľské štúdium na našej fakulte mali dostatočne rozvinuté všetky dôležite kompetencie pre vykonávanie učiteľského povolania. [2]

Postupné zmeny vo vyučovaní vybraných predmetov

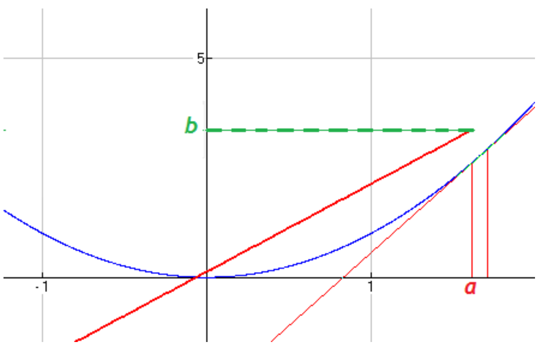
Zmeny vo vyučovaní sme začali robiť postupne, zo semestra na semester, z hodiny na hodinu. Zmeny sa týkali nielen didaktických, ale aj matematických predmetov. Dôvodom bolo ukázať budúcim učiteľom matematiky, že technológie používané vo vyučovaní matematiky neznamenajú pripraviť si zopár snímok v Power Pointe, ale najmä interaktívne využitie dostupných matematických priamo na vyučovacej hodine. Vzhľadom na situáciu nielen v školstve sme volili voľne prístupné softvéry. Študenti dostávali (a stále dostávajú) za úlohu vypracovať projekty na rôzne témy, prípadne použiť softvér na demonštráciu matematického javu. K týmto úlohám je nevyhnutné naštudovať si vo voľnom čase napríklad zaujímavosti z histórie, nájsť v okolí objekty, ktoré možno opísať matematickou funkciou a pod. Prepojenie znalostí z viacerých predmetov vyučovaných na fakulte potom vedie k zaujímavým projektom, ktoré sú prezentované pred spolužiakmi a vyučujúcimi. Bližšie opíšeme niektoré aktivity v príprave budúcich učiteľov matematiky.

Matematická analýza

Predmet, ktorý absolvujú všetci študenti, majúci na vysokej škole aspoň semester matematiky. Výnimkou nie sú ani budúci učitelia matematiky. V matematickej analýze je veľa pojmov, ktoré možno zaviesť veľmi pútavým a do podstaty idúcim spôsobom. Ako ukážku uvedieme pojem derivácie. Definícia derivácie a následné mechanické počítanie derivácie súčinu, podielu funkcií a zložených funkcií bol zvyčajný postup. My sme však po zavedení definície derivácie pokračovali inak – študentom sme zadali gradovanú úlohu (podľa [3]):

- nájsť pomocou definície hodnotu derivácie funkcie v danom bode,
- z definície nájsť dotyčnicu ku grafu funkcie v danom bode,
- nájsť množinu všetkých smerníc dotyčníc ku grafu funkcie vo všetkých bodoch z definičného oboru funkcie

Vo všetkých troch prípadoch sme použili softvér GraphicCalculus. Na obr. 1 je riešenie znázornený priebeh riešenia úlohy: *„Nájdite množinu všetkých bodov* $[a, b]$*, pre ktoré platí:* $a \in D_f$ *funkcie* $y = x^2$*,* b *je hodnotou smernice dotyčnice ku grafu tejto funkcie v bode* a*.“* Program pracoval nasledovne: najskôr sa vypočítala hodnota smernice dotyčnice v danom bode (a), táto hodnota bola následne nanesená ako y-ová súradnica bodu, v ktorom sa dotyčnica zostrojila. Používateľ mohol meniť presnosť, s ktorou program počítal, zmenou hodnoty Δx. Z ukážky vidno, že hodnota Δx bola pomerne vysoká, keďže vznikajúca priamka (ktorej predpis by mal byť $y = 2x$) neprechádza bodom $[0,0]$.



Obrázok 1: hľadanie hodnoty smernice dotyčnice ku $y = x^2$ v bode a

Podobným spôsobom sme pracovali aj s pojmom limita postupnosti a funkcie, integrálom (cez integrálne súčty) a aplikácie derivácie a integrálu. Keďže GraphicCalculus má voľne dostupnú DEMO verziu (http://www.vusoft2.nl/DownloadDemo.htm), využili sme to nielen na hodinách, ale študenti mali možnosť sa s programom pracovať aj doma. Keďže sme vedeli týmto spôsobom nakresliť grafy všetkých dôležitých funkcií a ich derivácii, urobili sme neformálne odvodenie vzorcov pre derivovanie (len pomocou určenia rovnice vzniknutých kriviek v programe), ktoré boli neskôr na prednáške odvodené formálne.

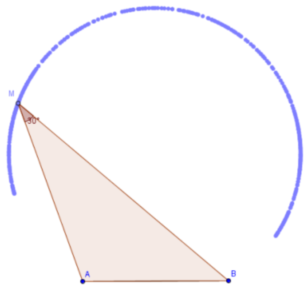
Didaktický seminár zo školskej matematiky

Predmet, na ktorom sa študenti stretávajú s úlohami zo základnejškoly a stredoškolskej matematiky, s cieľom nielen vedieť ich vypočítať (čo by nemal byť problém), ale aj vedieť urobiť rozbor úlohy. Ukážeme použitie ďalších softvérov na dvoch témach z tohto predmetu.

Pôjde o programy GeoGeobra (http://www.geogebra.org/cms/sk/download) a VuStat (http://www.vusoft2.nl/DownloadDemo.htm). Samozrejme, možno použiť aj program GraphicCalculus napr. pri vyučovaní funkcií alebo finančnej matematiky.

Téma 1: Konštrukčné úlohy

Klasické použitie nástroja dynamickej geometrie GeoGebra. Väčšina učiteľov tento program pozná, je zadarmo stiahnuteľný. Veľkou výhodou je, že okrem nakresleného útvaru máme možnosť vidieť aj analytické vyjadrenie objektov (túto možnosť môžeme skryť, alebo ukázať v závislosti od cieľa vyučovacej hodiny). Napr. úloha o množine bodov danej vlastnosti: *„V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte množine všetkých bodov tejto roviny, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom 30°."*

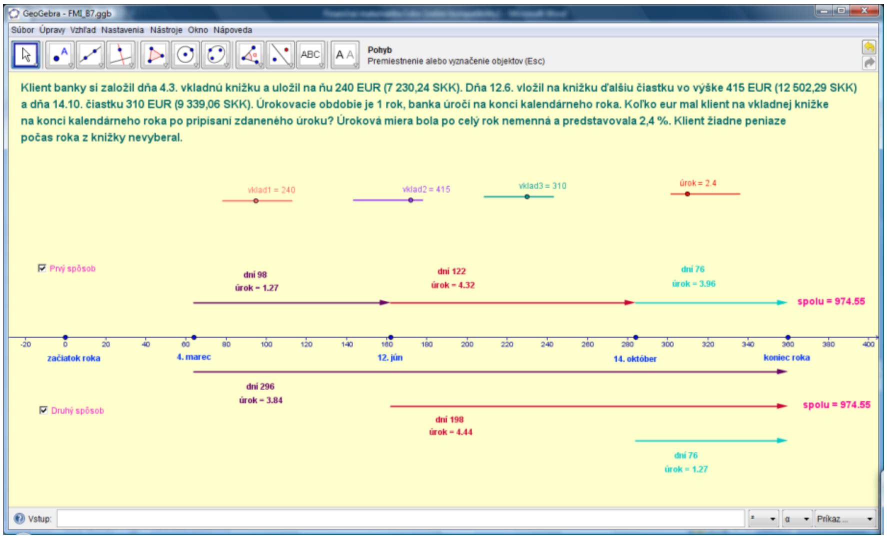


Obrázok 2: množina bodov danej vlastnosti

Zapnutím stopy bodu M v trojuholníku ABM s uhlom veľkosti 30° pri vrchole M vidíme, aký útvar nám vznikol. Otázka je, prečo a ako. Diskusia k úlohám je veľmi dôležitá, snažíme sa viesť budúcich učiteľov matematiky k vecnej argumentácií a objasnení matematických zákonitostí. Samozrejme, na obr. 2 je demonštrované riešenie len v jednej polrovine. Ako a či existuje riešenie aj v druhej polrovine je opäť témou na diskusiu. Samozrejme, študenti si pamätajú, že boli „nejaké veľké a malé kružnice", dôraz sa však snažíme klásť na argumentáciu, že PREČO je to tak. Ďalšie zaujímavé úlohy a aktivity sú opísané v [4].

Téma 2: Finančná matematika

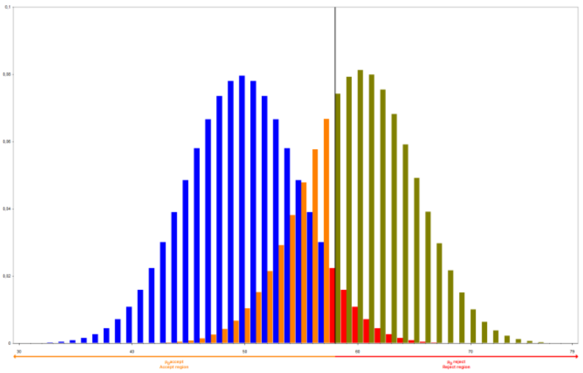
Ukážeme aj negeometrické využitie programu GeoGebra, kde demonštrujeme dva rôzne prístupy k riešeniu danej úlohy. Zadanie úlohy znelo: *„Klient banky si založil dňa 4.3. vkladnú knižku a uložil na ňou 240 EUR. Dňa 12.6. vložil na knižku ďalšiu čiastku vo výške 415 EUR a dňa 14.10. čiastku 310 EUR. Úrokovacie obdobie je 1 rok a banka úročí na konci kalendárneho roka. Koľko EUR mal klient na vkladnej knižke na konci kalendárneho roka po pripísaní zadaného úroku? Úroková miera bola po celý rok nemenná a predstavovala 2,4%. Klient žiadne peniaze počas roka z knižky nevybral.“* Z diskusie so študentmi sme zistili, že práve spôsob úročenia daných bankových produktov (periodicita úročenia a doba úročenia) spôsobujú študentom problémy pri riešení tohto typu úloh. Názorná demonštrácia (obr. 3) prostredníctvom GeoGebry tento problém do určitej miery odstránila. Manipuláciou s posuvníkmi mali študenti zároveň možnosť sledovať vplyv výšky vkladu a doby jeho úročenia na celkový zisk na konci úrokovacieho obdobia. Pri riešení danej úlohy sme okrem názorného vysvetlenia spôsobov úročenia pomocou GeoGebry využívali i MS Excel, v ktorom sme však nepoužívali preddefinované finančné funkcie, túto aplikáciu študenti využívali na urýchlenie výpočtov. [5]



Obrázok 3: Demonštrácia dvoch rôznych spôsobov riešenia úlohy zameranej na úročenie na sporiacich účtoch

Téma 3: Štatistika

Použili sme softvér VuStat, ktorý je zameraný na demonštráciu pravdepodobnostných a štatistických javov. Ukážeme si výstup z programu na príklade: *„Dodávateľ tvrdí, že jeho výrobok vydrží záťaž X. Objednávateľ si chce byť istý, že hovorí pravdu, a preto si vyberie vzorovú zásielku objednaného tovaru. Ten však požadovanú záťaž nevydržal. Má možnosť uspieť v spore s dodávateľom?“* Situáciu sme nasimulovali v spomínanom programe. Stanovili sme si nulovú hypotézu: *dodávateľov výrobok vydrží zaťaž X* a alternatívnu: *dodávateľov výrobok nevydrží zaťaž X.* Program nám výsledok graficky znázornil (obr. 4, vľavo dodávateľ, vpravo objednávateľ), úlohou bolo rozhodnúť o platnosti alternatívnej hypotézy. Na základe zvoleného kritéria nám deliaca čiara určuje, že neplatnosť hodnoty „vľavo“ je menej pravdepodobná, ako neplatnosť hodnoty „vpravo“. Grafy na obr. 4 čítame nasledovne: pravdepodobnosť, že prijmeme alternatívu, keď platí nulová hypotéza je nižšia, ako naopak (podľa prienikov oboch grafov). V tejto situácii sa objednávateľ nemôže sťažovať, bo nie je štatisticky významný rozdiel medzi tým čo dodávateľ deklaruje a reálne dodá.



Obrázok 4: chyba prvého a druhého druhu

Dôležitosť interpretácie výsledku je opäť veľmi dôležitým prvkom. Pre zistenie konkrétnych hodnôt program ponúka možnosť otvorenia dialógového okna s vysvetlením v anglickom jazyku (jazyk závisí od stiahnutej verzie, slovenčina ani čeština zatiaľ nie sú k dispozícii)

Didaktika matematiky

Inovácie prešli aj do na pohľad veľmi teoretického predmetu, akým je didaktika matematiky. Preto sme do vyučovania priamo zaradili projektové vyučovanie, ukážky problem-solving metódy a samozrejme využívanie informačných technológií. Študenti boli nabádaní k vymýšľaniu podobných aktivít v rámci pracovných skupín, kde mohli využiť aj medzi predmetové vzťahy (študenti boli rozdelení vyučujúcim do skupín tak, aby tam bolo zastúpených čo najviac predmetov, napr. matematika, informatika, fyzika, biológia, telesná výchova).

Obrázok 5: ukážka študentského projektu

Študenti dostali zadanú tému projektu, ktorú mali spracovať a následne prezentovať pred spolužiakmi a učiteľmi. Témy sa každý rok menia, zvyčajne však ide o modifikáciu témy „matematika okolo nás“ (obr. 5). Študenti sú rozdelení do minimálne 4-členných skupín, kde sa učia nielen spolupráci a plánovaniu, ale aj vecnej argumentácií, pokiaľ má niekto na spracovanie projektu iný názor. Projekt prezentuje zvyčajne jeden zástupca, výnimkou bol projekt zo školského roku 2010/2011, keď si skupina pripravila divadelné predstavenie. Prínos takéhoto typu vzdelávania vidíme najmä vo využití získaných teoretických vedomostí z prednášky pri praktickom použití. Tým, že všetci študenti sú prítomní pri prezentovaní projektov ostatných skupín, vznikajú nové nápady a podnety, čo mohli ešte urobiť, čo mohli urobiť lepšie a čomu nebolo treba venovať až takú pozornosť.

Záver

Vývoj softvérov napreduje veľkou rýchlosťou. Implementácia nových funkcií do existujúcich programov (či už výučbových, alebo nie) nás na jednej strane núti stále sa vzdelávať, no strane druhej nám to uľahčuje prípravy na vyučovanie. Napr. najnovšia verzia GeoGebry má už zabudované aj nástroje na prácu s finančnou matematikou (a mnohé ďalšie negeometrické funkcie), ktoré umožnia jednoduchšiu prípravu aktivít.

Informačné technológie nám ponúkajú silný potenciál vo vyučovaní matematiky, ak sa použijú rozumne (tj. nie za každú cenu na každú tému). Sami sme mali možnosť overiť si v praxi prínos výučby podporovanej technológiami. Prínos možno zhrnúť do nasledujúcich troch bodov:

- *pozitívne reakcie na formu a obsah vzdelávania* – výroky študentov počas vyučovania, ako aj reakcie v študentskej ankete, kde majú možnosť sa po skončení semestra vyjadriť k náplni a forme konkrétneho predmetu
- *zlepšenie študijných výsledkov* – z priemerne dosahovaných 55% na 75% z priebežného testovania študentov
- *zlepšenie vzťah k predmetu samotnému* – výsledky študentskej ankety poukazujú na zlepšenie o 1 až 2 stupne vzhľadom na dlhodobý priemer hodnotenia predmetu v predchádzajúcich rokoch

V príspevku sme sa pokúsili načrtnúť spôsob prípravy budúcich učiteľov, o ktorom predpokladáme, že bude viesť k aktívnejšiemu využívaniu informačných technológií a nových prístupov k vyučovaniu matematiky na školách. Predpokladaný dopad, okrem osvojenia si vedomostí z odboru, je aj použitie zažitých metód výučby v školskej praxi, otvorenosť pre zmeny v obsahu a forme. Práca s technológiami a používanie inovačných metód môže napomôcť aj ako prevencia pred formálnymi poznatkami, či už u študentov učiteľstva matematiky, alebo neskôr u ich žiakov, resp. študentov na ZŠ, resp. SŠ.

Literatúra

[1] Kuchtová, J. (2011).*Pánu ministrovi Jurzycovi*. [on-line], [marec 2013], dostupné na: http://jaroslavakuchtova.blog.sme.sk/c/272229/Panu-ministrovi-Jurzycovi.html

[2] Uherčíková V. – Vankúš P. (2009). *Inovácia študijných plánov v príprave budúcich učiteľov matematiky za účelom rozšírenia ich kompetencií*. Acta Mathematica, Vol. 12, UKF Nitra, Nitra, s. 263-268. ISBN 978-80-8094-614-2

[3] Slavíčková M. (2009). *Using Graphic Calculus on calculus lessons*. Acta DidacticaUniversitatisComenianae – Mathematics: Issue 9. ComeniusUniversity in Bratislava, 2009, ISBN 978-80-223-2697-1

[4] Kohanová I. – Regecová M. (2010). *Softvér GeoGebra ako nástroj dynamickej matematiky pre sekundárne vzdelávanie*. Symposium on Computer Geometry SCG '2010: Proceedings, Vol. 19. - Bratislava: Slovenská technická univerzita, ISBN 978-80-227-3364-9, S. 66-78

[5] Regecová M., Slavíčková M. (2011). *Dynamický softvér v príprave budúcich učiteľov matematiky*. Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Nitra UKF 2011. str. 46-54. ISBN 978-80-8094-853-5

Článok prijatý dňa 2. mája 2013:

Adresa autora

PaedDr. Mária Slavíčková,PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina., SK – 842 48 Bratislava;
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

Poďakovanie

Článok vznikol za podpory grantu KEGA 091UK-4/2012.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

PROJECT TEACHING IN STATISTICS FOR NON-MATEMATICIANS

PROJEKTOVÉ VYUČOVANIE ŠTATISTIKY PRE NEMATEMATIKOV

EDITA SZABOVÁ

ABSTRACT. *The paper describes the project teaching of statistics for non-matematicians, which was implemented in the summer semester of 2012/2013 in two groups of students of marketing communication and advertising. Final projects were evaluated in terms of processing issues performance, other criteria were visual and textual level of projects, statistical processing (creating tables and graphs) and interpretation.*

KEY WORDS: *project teaching, project themes, non-matematics and statistical level*

ABSTRAKT. *Príspevok popisuje projektové vyučovanie predmetu štatistika pre nematematikov, ktoré bolo realizované v letnom semestri 2012/2013 v dvoch skupinách študentov marketingovej komunikácie a reklamy. Finálne projekty boli hodnotené z hľadiska náročnosti spracovania problematiky, ďalšími kritériami boli vizuálna a textová stránka projektu, štatistické spracovanie (tvorba tabuliek a grafov) a interpretácia.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *projektové vyučovanie, témy projektov, mimomatematické spracovanie projektu, štatistické spracovanie projektu*

CLASSIFICATION: *D40,M10*

Obsahová náplň predmetu Štatistika pre nematematikov 1

Na Univerzite Konštantína Filozofa v Nitre je štatistika súčasťou vysokoškolského vzdelávania budúcich chemikov, biológov, ekológov, psychológov, sociológov, archeológov, marketingových pracovníkov a pedagógov. Okrem študijného programu psychológia je výučba štatistiky zabezpečovaná Katedrou matematiky Fakulty prírodných vied.

V zimnom semestri školského roka 2012/2013 sme realizovali výučbu predmetu Štatistika pre nematematikov 1, ktorý je v študijných programoch marketingová komunikácia a reklama a masmediálne štúdiá s integrovaným vyučovaním francúzskeho jazyka zaradený v študijných plánoch do prvého ročníka bakalárskeho štúdia. Hodinová dotácia predmetu je jedna hodina prednášky a jedna hodina cvičenia týždenne.

Cieľom predmetu je poskytnúť študentom základy štatistiky so zameraním na popisnú štatistiku, jednoduché, intervalové a skupinové triedenie, charakteristiky polohy a variability, korelačnú a regresnú analýzu a najpoužívanejšie parametrické testy. Študenti sa mali naučiť vyhodnocovať štatistické údaje na počítači použitím programu Excel.

Projektové vyučovanie

Vzhľadom na to, že základným cieľom seminárov bolo, aby sa študenti naučili aplikovať teoretické poznatky v praxi predovšetkým v oblasti masmediálnej a marketingovej komunikácie, zvolili sme vyučovanie formou projektového vyučovania. V rámci projektového vyučovania môžu študenti spraviť komplexnú štatistickú analýzu vlastného vybraného problému vrátane úvodu, diskusie o použitých metódach, kritiky predpokladov, analýzy dát a záverov ([1]). Medzi výhody projektového vyučovania patrí to, že je blízke životu, je motivujúce, kreatívne, učí študentov hľadať informácie a selektovať ich, učí študentov navrhovať riešenia, skvalitniť komunikáciu a podobne. Má aj svoje nevýhody, napríklad náročnosť na prípravu či možná nedostatočná úroveň dosiahnutých výsledkov ([1], s. 99). Výsledným projektom mal byť novinový alebo časopisecký článok, resp. poster, v ktorom študenti analyzujú vlastné namerané alebo získané štatistické dáta. Študenti sa rozhodli pracovať nie v skupinách, ale samostatne. Po prvom cvičení si zvolili tému svojho projektu a zhromaždili údaje k ďalšiemu spracovávaniu. Ich domácou úlohou po každom cvičení bolo na svojich údajoch realizovať analýzy, ktoré boli práve vysvetlené na hodinách štatistiky. Študenti svoje domáce úlohy pred nasledujúcim cvičením posielali vyučujúcej na mail. Vyhli sa tým prípadnému zabudnutiu postupov práce v programe Excel a zároveň sme tak kontrolovali plnenie priebežnej práce na projekte. Nevyhnutnú súčasť mailovej komunikácie tvorila spätná väzba a týkala sa najmä technických problémov študentov pri práci s Excelom. Študenti tak pravidelne dopĺňali svoje rozpracované projekty. Počas posledných dvoch týždňov sumarizovali dáta a vytvárali finálny projekt – článok do časopisu po vizuálnej, textovej a, samozrejme, aj štatistickej stránke spolu s interpretáciou zisteného.

Z 39 študentov odovzdalo finálny projekt 27 študentov. 12 študentov odovzdalo iba excelovský súbor s grafmi a tabuľkami bez spracovania do podoby článku. Tieto projekty sme ďalej nehodnotili, keďže nesplnili požiadavky kladené na výsledný projekt.

Študentské projekty a ich hodnotenie

Na základe náročnosti riešeného problému sme projekty zaradili do jednej z piatich skupín. Kritérium bolo nasledovné:

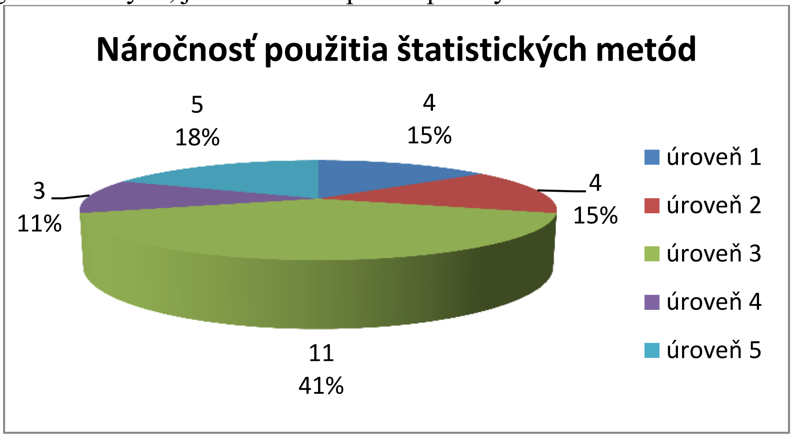
- úroveň 1 – študent sledoval jeden štatistický znak, realizoval ľubovoľnú anketu a sumarizoval údaje jednoduchým spôsobom (napr. výpočet %)
- úroveň 2 – študent triedil údaje jedného štatistického znaku, vytvoril tabuľku rozdelenia početností a graf
- úroveň 3 – študent sledoval jeden štatistický znak, vytvoril tabuľku, graf a vypočítal základné charakteristiky (aritmetický priemer, modus, medián, rozptyl, smerodajnú odchýlku)
- úroveň 4 – študent sledoval dva a viac štatistických znakov a porovnal ich jednoduchým spôsobom (graficky, tabuľkou rozdelenia početností)
- úroveň 5 – študent použil štatistické metódy – korelačnú alebo regresnú analýzu alebo parametrický test.

Študenti sa zaoberali napríklad témami:

- obľúbený sviatok v roku,
- mesiac narodenia,
- obľúbený deň v týždni,
- spôsob dopravy do školy,
- počet mobilov v internátnej izbe,
- počet ľudí v byte,
- ceny čajov,
- ceny doplnkov v sieti H&M,
- počet obyvateľov miest,
- počet priateľov mužov a žien na Facebooku,
- ceny školských potrieb v sieti Tesco a Hypernova,
- veľkosť topánok mužov a žien,
- dĺžka reklamy a počet reklamných blokov v televíziách,

- platy modeliek blondínok a brunetiek,
- závislosť počtu nakrútených filmov hercov od ich veku,
- závislosť počtu vnúčat od veku ženy,
- závislosť počtu strán reklamy od počtu strán časopisov.

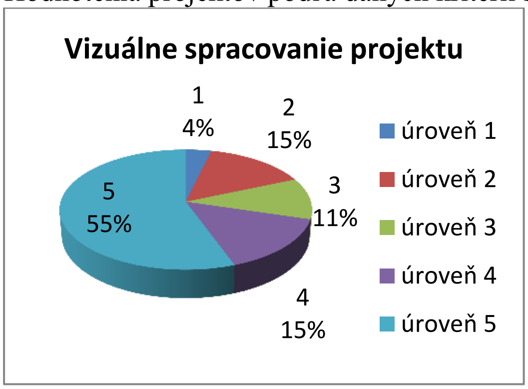
Relatívne početnosti projektov v % v každej úrovni zobrazuje graf 1. Najviac študentov – 41% – sledovalo jeden štatistický znak, vytvorilo tabuľku rozdelenia početností, graf a vypočítalo základné charakteristiky (priemer, modus, medián, rozptyl, smerodajná odchýlka). Iba štyria študenti použili zložitejšie štatistické metódy, napr. korelačnú, regresnú analýzu, jeden študent použil párový t-test.



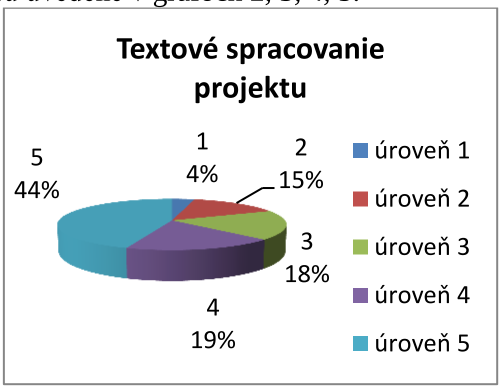
Graf 1

Projekty sme ďalej hodnotili spolu so zamestnancom Katedry masmediálnej komunikácie a reklamy FF UKF na základe toho, do akej miery sú kvalitne spracované z nematematickej stránky – vizuálne spracovanie a textové spracovanie projektu, a z matematickej stránky – štatistické spracovanie (tabuľky, grafy) a interpretácia tabuliek a grafov. Projekt mohol byť v každom kritériu zaradený do jednej z piatich úrovní, kde úroveň 1 znamená najnižšiu kvalitu spracovania a úroveň 5 najvyššiu kvalitu spracovania projektu.

Hodnotenia projektov podľa daných kritérií sú uvedené v grafoch 2, 3, 4, 5.

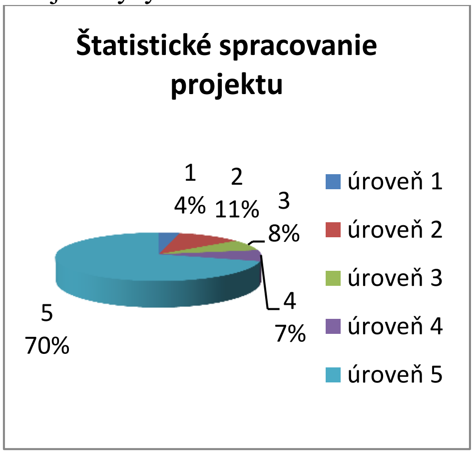


Graf 2

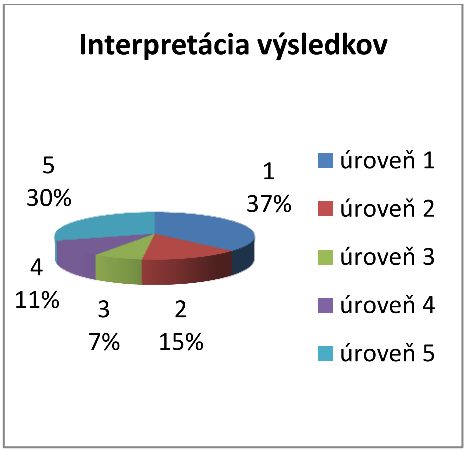


Graf 3

Priemerná úroveň vizuálneho spracovania projektu je 4,03, najčastejšia dosiahnutá úroveň bola 5, kam sme zaradili 55 % projektov. Celkovo boli projekty po vizuálnej stránke na vysokej úrovni. Podobný výsledok sme aj predpokladali vzhľadom na fakt, že projekty tvorili študenti marketingovej komunikácie, ktorí boli prijatí na štúdium po úspešnom absolvovaní talentovej skúšky, ktorá pozostávala z tvorby koláže. Čo sa týka textového spracovania projektov, priemerná úroveň bola 3,85, najčastejšia dosiahnutá úroveň bola 5 (dosiahlo ju 44% projektov). Textové spracovanie bolo o niečo slabšie ako vizuálne spracovanie, čo sa prejavilo aj v tom, že projekty obsahovali menej textu ako obrázkov. Štatistické spracovanie projektov bolo najkvalitnejšie spomedzi všetkých kritérií. Priemerná hodnota úrovne bola 4,296, najčastejšia hodnota úrovne bola 5 (až 77%). Je to zároveň jediná oblasť, v ktorej sme im poskytovali pomoc pri spracovávaní projektu formou mailovej komunikácie alebo počas konzultačných hodín. Študenti si na štatistickom spracovaní dali obzvlášť záležať, keďže podľa ich názoru je práve tvorba tabuliek rozdelenia početností a grafov najdôležitejším cieľom predmetu a náplňou skúšky z neho. Naopak, najslabšou stránkou projektov bola interpretácia tabuliek a grafov. Priemerná úroveň interpretácie je 2,8125, najčastejšou hodnotou úrovne bola 1 (37%) a strednou hodnotou 2. Študenti teda celkovo vedeli svoje dáta kvalitne a prehľadne štatisticky spracovať, nedokázali ich však adekvátne interpretovať, resp. interpretácie nezahrnuli do svojich výsledných projektov, pretože ju nepovažujú za nevyhnutnú časť štatistickej analýzy dát.



Graf 4

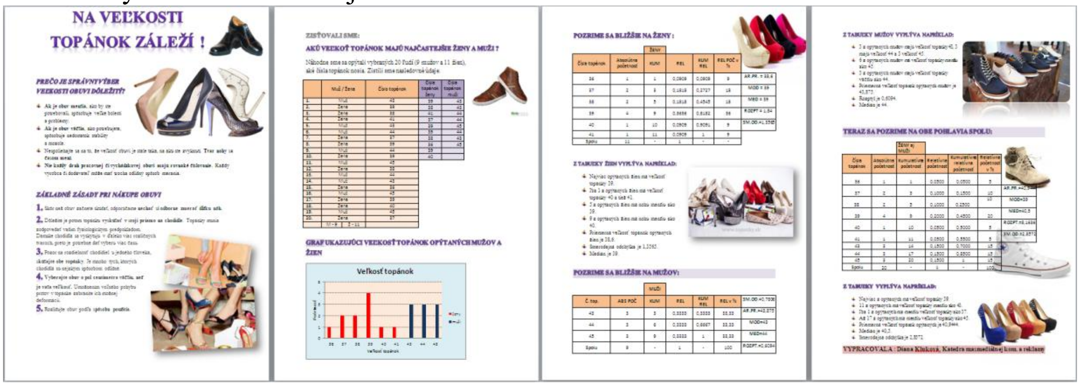


Graf 5

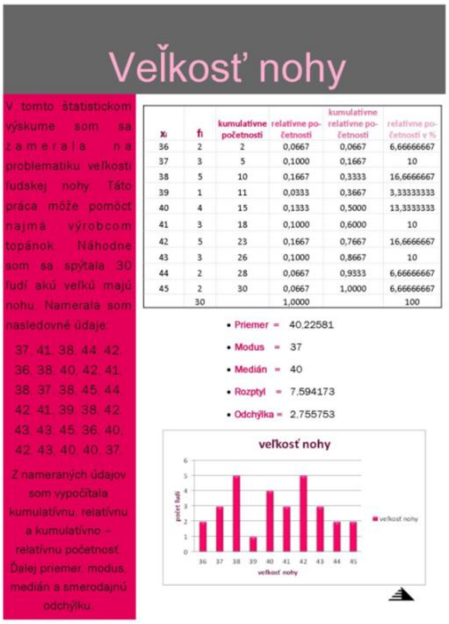
Príklady študentských projektov podľa dosiahnutých úrovní

Uvedieme príklady dvoch projektov, ktoré sa zaoberajú podobnou tematikou, ale líšia sa svojím spracovaním.

Na obrázku 1 je uvedený výstup projektu, v ktorom sa študentka zaoberala veľkosťou topánok. Projekt má charakter časopiseckého alebo internetového článku s rozsahom štyri strany formátu A4. Článok obsahuje titulok, kratšie časti s nematematickým obsahom (*Prečo je správny výber veľkosti obuvi dôležitý?, Základné zásady pri nákupe obuvi*), záchytné body sú zvýraznené tučným písmom. Prechádza plynule do matematickej časti – *Akú veľkosť topánok majú najčastejšie muži a ženy?* Študentka uvádza tabuľku s dvomi stĺpcami – pohlavie a číslo topánok. Tieto údaje následne triedi do tabuľky s dvomi stĺpcami – veľkosť topánok ženy, veľkosť topánok muži, z ktorej zostrojuje základný graf. Následne zostavuje usporiadanú tabuľku rozdelenia početnosti aj s charakteristikami polohy a variability zvlášť pre ženy, potom zvlášť pre mužov a nakoniec pre obe pohlavia spolu. Za každou tabuľkou uvádza 7 bodov, ktoré vyplývajú z tabuľky. Ako jedna z mála študentov interpretuje taktiež kumulatívne početnosti (napr.: *9 z opýtaných žien má nohu menšiu ako 40*). Projekt obsahuje 10 ilustračných obrázkov. Tento projekt je náročnosťou zaradený do úrovne 3, ale kvalita spracovania každá z jeho matematických aj nematematických stránok dosahuje úroveň 5.



Obrázok 1: študentská práca



Obrázok 2 : študentská práca

Projekt na obrázku 2 sa zaoberá podobnou tematikou – veľkosť nohy, jeho spracovanie je takmer úplne odlišné ako spracovanie na obrázku 1. Rozsah projektu je jedna strana A4. Po titulku nasleduje na ľavej strane krátky text o tom, na čo sa zameriava prieskum, počet účastníkov prieskumu a namerané údaje a informácie o tom, aké údaje sa z nich idú zisťovať (*Z nameraných údajov som vypočítala kumulatívnu, relatívnu a kumulatívno-relatívnu početnosť. Ďalej priemer, modus, medián a smerodajnú odchýlku.*). Text na ľavej strane projektu má podobu klasického zadania úlohy na hodine štatistiky, odlišuje sa len použitím prvej osoby singuláru minulého času. Jednou vetou autorka poznamenáva, že *táto práca môže pomôcť najmä výrobcom topánok.* Samotné štatistické spracovanie je uvedené na pravej strane projektu (úroveň náročnosti 3, úroveň štatistického spracovania 5). Chýba akákoľvek interpretácia údajov z tabuľky rozdelenia početností (úroveň interpretácie 1).

Názory študentov na projektové vyučovanie

Na základe dotazníkov sme chceli zistiť, či vôbec mali študenti o tvorbu projektu záujem a ako celkovo hodnotia predmet Štatistika pre nematematikov a prácu v Exceli. Vyberáme niektoré reprezentatívne:

- Domáce úlohy boli kreatívne, naučili sme sa organizovať údaje. Grafy a tabuľky početností by som použila aj v BC práci. Práca v exceli je prehľadná a nenáročná.
- Pochopili sme všetko, čo bolo treba, domáce úlohy boli dobré, pomohli mi pochopiť Excel. Pri výskume v praktickej časti BC práce si viem predstaviť použitie tabuliek a grafov. Práca v Exceli bola nezaujímavá, aj keď potrebná.
- Najprv som si myslela, že hodiny zo štatistiky budú nudné, ale neboli a nebolo to ani veľmi ťažké. Učivo bolo dobre a jednoducho vysvetlené. Na to, že sme mali dosť málo seminárov, tak sme boli na skúšku pripravení dobre. Pomohla nám aj mailová komunikácia a vzorové riešené a vysvetlené príklady. Domácu úlohu – pripraviť projekt – beriem pozitívne, pretože som si mohla precvičiť svoje znalosti. všetko, čo som sa naučila, je podľa mňa užitočné. Vo svojej BC práci by sa dal použiť napr. graf. Určite som sa veľa naučila, ale je toho ešte veľa, čo neviem. Niektoré veci v Exceli sú jednoduché, iné dosť zložité.
- Bavilo ma tvoriť plagát. Naučila som sa nové funkcie použitia Excelu. Program Excel mám rada, zdá sa mi užitočný.

Záver

Projektové vyučovanie sa ukázalo ako vhodný nástroj na vyučovanie štatistiky pre nematematikov v štúdiu marketingovej komunikácie a reklamy. Pri tvorbe projektov prepojili svoju tvorivosť s invenciou a zároveň použili práve naučené vedomosti zo štatistiky. Tvorbou projektov si neustále cvičili zručnosť s prácou v programe Excel. Z dotazníkov, ktoré sme dali študentom na konci semestra, sme zistili, že práca na projekte ich bavila, pretože robili svoju vlastnú prvotnú výskumnú činnosť na probléme, ktorý ich zaujal, čím pre nich štatistika bola predmetom aplikačným, zábavným. Študenti podľa ich názoru získali skúsenosti, ktoré môžu byť prínosnými pri písaní svojich budúcich bakalárskych a diplomových prác či v zamestnaní.

Literatúra

[1] Clint W. Coakley. (1996). Suggestions for Your Nonparametric Statistics Course. In. Journal of Statistics Education, v. 4, n. 2, 1996. dostupné online: http://www.amstat.org/publications/jse/v4n2/coakley.html

[2] Miron Zelina. (2000). Alternatívne školstvo. Bratislava: IRIS, 2000. 260 s. ISBN 80-88778-98-0

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Mgr. Edita Szabová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: edita.szabova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

NEURODIDACTICS AND MATHEMATICS EDUCATION

NEURODIDAKTIKA A VYUČOVANIE MATEMATIKY

ONDREJ ŠEDIVÝ – VILIAM ĎURIŠ

ABSTRACT. *In the introductory section the need for enhancing the efficiency of mathematics education and the role of theory of mathematics education is stressed. Further the neuropedagogy and neurodidactics, which aim to implement the findings from neurology into pedagogical practice, are characterised. Focus in on neurodidactical view to stress as a factor influencing process of learning mathematics. Based on brain-based learning the theoretical considerations for more effective mathematics education are formulated.*

KEY WORDS: *brain, neuropedagogy, neurodidactics, emotion, memory, motivation, stress, effective mathematics education.*

ABSTRAKT. *V úvode príspevku sa zdôrazňuje potreba zvýšenia účinnosti vzdelávania v matematike a úloha teórie vyučovania matematiky. V ďalšom je charakterizovaná neuropedagogika a neurodidaktika, ktorých cieľom je preniesť neurologické objavy do pedagogickej praxe. Zvlášť je rozvedený neurodidaktický pohľad na stres ako faktor ovplyvňujúci proces učenia matematiky. Na základe poznatkov z teórie mozgovokompatibilného vyučovania sú uvedené isté východiská pre účinnejšie vyučovanie matematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: mozog, neuropedagogika, neurodidaktika, emócia, pamäť, motivácia, stres, účinné vyučovanie matematiky.*

CLASSIFICATION: *C 30*

Vyučovanie matematiky a jeho výsledky vyvolávajú záujem širokej verejnosti o túto problematiku. Odborné kruhy reagujú na tento záujem verejnosti a hľadajú cesty na zvýšenie účinnosti vzdelávania v matematike. Rozvojom prechádza Teória vyučovania matematiky ako vedná disciplína. Organizujú sa konferencie, sympózia, medzinárodné výskumné projekty. Predmetom skúmania teórie vyučovania matematiky je konkrétna oblasť ľudskej činnosti, ktorej obsahom, predmetom a cieľom je matematika v jej rozličných úrovniach a v rozličných formách. Teória vyučovania matematiky študuje vzťahy medzi matematikou a človekom.

V roku 2003 Dőffer (Dőffer, W., 2003)[1] charakterizoval teóriu vyučovania matematiky ako vedu:

- o rôznych spôsoboch ako sa učí a „robí" matematika,
- o tom, ako učenie a činnosť v oblasti vyučovania matematiky ovplyvňujú a sú ovplyvňované rôznymi vplyvmi (používaním pomôcok, kalkulátorov, počítačov),
- o rôznej reprezentácii matematických pojmov,
- o rôznych možnostiach organizovania matematickej činnosti.

Najvýznamnejšou udalosťou, ktorá ovplyvnila výskum v teórii vyučovania a tiež samotné vyučovanie matematiky, bol Svetový kongres o vyučovaní matematiky ICME-10 v júli 2004 v Kodani.

[1] In: Čeretková, S. – Šedivý, O.: Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky. Edícia Prírodovedec č. 200, Nitra 2005

Vychádzajúc zo správy, ktorú vydala americká Národná komisia (1970) pre požiadavky v matematike, sa treba sústrediť najmä na tieto vnútorné ciele vyučovania matematiky:

- Zamerať sa na potreby a záujmy jednotlivcov s cieľom pripraviť každého z nich na aktívny súkromný a spoločenský život.
- Rozvinúť osobnosť každého žiaka a posilňovať jeho sebavedomie.
- Podporovať aktivitu žiakov počas vyučovania, odbúravať pasívne nadobúdanie vedomostí.
- Zdôrazňovať matematické myšlienkové postupy v procese riešenia úloh (napr. matematické skúmanie, formulovanie problémov, reprezentáciu, modelovanie) a nezameriavať sa iba na výsledky (obsah, výsledok použitej metódy, uplatnenie zručností).
- Podporovať matematické myslenie a tvorivosť.
- Dať žiakom možnosť identifikovať problém, zaujať k nemu stanovisko, formulovať ho vlastnými slovami a vlastným spôsobom riešiť.
- Pomôcť žiakom pochopiť matematiku a oceniť jej krásu.
- Dovoliť žiakom aplikovať rôzne spôsoby modelovania riešenia.
- Dovoliť žiakom kriticky analyzovať a posudzovať použitie matematiky.
- Vysvetliť žiakom úlohu matematiky v spoločenskom a kultúrnom živote spoločnosti.
- Naučiť žiakov pracovať so súčasnými informačnými technológiami a dostupnou technikou.

Aj keď tieto ciele boli sformulované pred štyridsiatimi rokmi, stále sú aktuálne a škola musí sa snažiť ich plniť.

V snahe zameranej na zefektívnenie vzdelávacieho procesu rozpracúvajú sa také metódy a formy vzdelávania aj v matematike, ktoré majú zabezpečiť kvalitu vzdelávania, ktorá bude zodpovedať súčasnému vedeckému poznaniu.

V mnohých krajinách Európy sa čoraz častejšie hovorí o neuropedagogike a neurodidaktike ako o nových možnostiach vo zvyšovaní účinnosti vo vyučovaní.

Preto aj vo vyučovaní matematiky sa začnime zamýšľať nad využitím týchto myšlienok pri hľadaní optimálnejších výsledkov vo vzdelávaní v matematike.

Najskôr však si pripomeňme, čo je neuropedagogika a neurodidaktika. Existuje viacero pohľadov na definovanie týchto pojmov.

J. P. Sawiński hovorí: *„Neuropedagogika sa zameriava na štruktúru a funkcie mozgu, na zmyslové preferencie, na rozdiely vo fungovaní mozgových hemisfér v kombinácií oka, ucha, skúma vplyv stresu na pamäť, zaoberá sa efektívnosťou učenia. Jej cieľom je preniesť neurologické objavy do pedagogickej práce.“* (Sawiński, J. P., 2005).

Online slovník Wörterbuch ponúka pre neurodidaktiku nasledovnú definíciu: *„Neurodidaktika je spoločný termín pre rôzne na prax orientované prístupy, sleduje rozvíjanie vzdelávacích a pedagogických plánov so zreteľom na dôležité poznatky neurológie, najmä na novšie výskumy mozgu.“* (Wörterbuch, 2009).

Mozgovokompatibilné učenie[2] je učenie založené na tom, ako sú transformované poznatky týkajúce sa štruktúry a funkcií mozgu do výchovnovzdelávacieho procesu. Zaoberá sa napríklad tým, ako pracuje náš mozog vo vzdelávacom procese, aké princípy a stratégie zámerne vyberú učitelia na dosiahnutie výchovnovzdelávacieho cieľa.

[2] E. Petlák a kol.: Neuropedagogika a vyučovanie. UKF 2010, s. 6

Neurovedci a psychológovia sa sústreďujú na mozgové hemisféry. Súčasné vyučovanie sa sústreďuje na ***ľavú hemisféru***, ktorá riadi reč, logické myslenie, matematické operácie, ..., kým ***pravá hemisféra*** riadi emócie, predstavy, tvorivosť, divergentné myslenie, ... a vo vyučovaní je zanedbávaná.

Treba zdôrazniť, že základom mozgu je neurón. Neuróny sú pospájané nervovými vláknami, ktoré prenášajú signály. Čím viac je spojení, tým je mozog pružnejší a ľahšie sa učí, teda čím máme bohatšiu neurálnu sieť, tým ľahšie cez ňu prechádzajú vzruchy a informácie.

I. Turek robí záver: *„Učenie možno definovať ako tvorbu synapsií, t.j. spájania neurónov, a tým tvorbu neurálnych sietí, alebo zmenu spôsobu spojenia neurónov."* (Turek, I., 2008, s. 435).

K vytváraniu neurálnych sietí neprispieva transmitívne vyučovanie, pasívne počúvanie, mechanické učenie, memorovanie, ale aktívna činnosť učiaceho subjektu. K tomu môže poslúžiť problémové a skupinové vyučovanie, tvorivé metódy, atď.

Neurodidaktika sa na pamäť nepozerá ako na „skladište vedomostí", ale predovšetkým ako na „rekonštrukciu informačných blokov", ktoré sú uložené na rôznych miestach v mozgu a prepojené neurálnou sieťou. Treba si uvedomiť, že mozog zabúda to, čo nepovažuje za potrebné, čo sa neaktualizuje. Z toho vyplýva, že k poznatkom sa treba systematicky vracať, pracovať s nimi, aktualizovať ich.

Neurodidaktika veľmi zdôrazňuje potrebu emocionálnosti vo vyučovaní, pri radosti sa vylučujú hormóny, ktoré uľahčujú učenie a blahodárne vplývajú na dlhodobú pamäť, čo zvyšuje účinnosť vzdelávania. Treba pripomenúť aj to, že keď žiak prežíva stres, vylučované hormóny blokujú procesy v mozgu, znižuje sa efektívnosť vyučovania. Ako je to so strachom žiaka? Primeraný strach môže na žiakov pôsobiť kladne, môže ich viesť k zvýšenému výkonu pri učení sa. Problém strachu môže pôsobiť aj negatívne. Ak je žiak pod dlhodobejším tlakom strachu, dochádza k neželanému stresu, čo má za následok zníženie výkonu. Pocit šťastia, radosti žiaka kladne pôsobí na ďalšie učenie, povzbudzuje do ďalšieho učenia a prispieva ku koncentrácii pozornosti.

Vzhľadom na to, že pri vyučovaní matematiky časť žiakov je pod tlakom strachu a z toho vyplývajúceho stresu, budeme väčšiu pozornosť venovať určitým situáciám.

Ako sme už vyššie uviedli, existuje ***„dobrý stres"*** a „negatívna" forma stresu. Dobrý stres (eustres) je stres, ktorý nie je akútny a chronický. Vzniká vtedy, keď sa cítime mierne ohrození a veríme, že situáciu zvládneme. Tento stres zvyšuje naše vnímanie, zväčšuje našu motiváciu a zlepšuje učenie. Dobrý stres vzniká pri učení sa matematiky za nasledujúcich podmienok:

- aktívne chcieť vyriešiť daný problém (danú úlohu),
- mať schopnosť vyriešiť problém,
- uvedomiť si zmysel kontroly nad riešením,
- možnosť myslieťna prípadné možné riešenia problému.

„Negatívna" forma stresu (distres) vzniká vtedy, keď sa cítime ohrození nejakým (fyzickým alebo emocionálnym) nebezpečenstvom, zastrašovaním, ťažkosťami, stratou prestíže, strachom alebo odmietnutím, keď sme v časovej tiesni, atď. Pri učení sa matematiky distres vzniká, keď:

- máme riešiť problém, ktorý nechceme riešiť,
- nevnímame riešenia problémov,
- máme pocit riskovania, ktorý je zapríčinený komplikáciami,
- je stres opakovaný alebo dlhotrvajúci.

Ohrozenia sú definované ako akékoľvek podnety, ktoré v mozgu spôsobia spustenie pocitu strachu, pochybností, obáv alebo celkovej bezmocnosti.

Pri každom type vnímaného ohrozenia mozog robí nasledovné:

- stráca svoju schopnosť správne interpretovať podnety z okolitého prostredia,
- vracia sa k intuitívnym reflexným vzorom správania
- stráca niektorú zo svojich schopností zaradiť, uložiť a dostať sa k informáciám,
- stráca niektorú zo svojich schopností vnímať vzťahy a vzory,
- je menej schopný použiť zručnosti myslenia vyššieho rádu,
- stráca schopnosť uloženia do dlhodobej pamäti.

Mnohí neurovedci vnímajú motiváciu ako prvoradú pri vzdelávaní, od dobrej motivácie závisia výsledky učebnej činnosti žiakov a úspech jedinca vôbec. Motivácia pomáha vytvárať sebadôveru jedinca a napomáha pri seba hodnotení. Spitzer upozorňuje aj na chyby, ktorých sa dopúšťame, napr. časté chválenie najlepších žiakov, zdôrazňuje, že pochvaly sú pre každého. Zdôrazňuje, že motivujúce je aj to, ako učiteľ vyučuje, aký má záujem o svoj predmet a jeho vyučovanie. Upozorňuje, že pre motiváciu nie je rozhodujúce napr. premietanie fólií, rôzne xerokópie alebo premietanie prezentácií Power Pointu, ale rozhodujúce je predmetom zaujatý učiteľ, predmet musí byť centrom pozornosti a nie nejaké kritiky vnášané do učenia (Spitzer, M., 2007, s. 145).

Jednou z ďalších charakteristík mozgovokompatibilného vyučovania je, aby žiaci mali vyučovanie doplňované o modelové situácie z každodenného života. Vnášanie takýchto situácií do vyučovacej praxe si vyžaduje využívať nielen racionálne postupy, ale aj emotívne pôsobenie hravých aktivít, tvorivej dramatiky, či výtvarného prejavu. Toto pôsobenie je oveľa účinnejšie ako bežne zaužívané postupy pri vyučovaní matematiky a takto získané vedomosti sú trvácnejšie. Učiteľ vo svojej práci by mal vytvárať situácie, v ktorých:

- majú žiaci možnosť to, čo sa naučili, priamo a intenzívne prežiť a precítiť,
- aktivizujú prirodzené potreby žiakov a súčasne sú aj uspokojované,
- sa prirodzenou cestou realizujú medzipredmetové vzťahy,
- žiaci pochopia, že sa učia nie pre známky, ale pre život.

Na základe poznatkov z teórie mozgovokompatibilného vyučovania (podľa R. N. Caine a G. Caine, 2008, in Turek, I. s. 446-450) vo vyučovaní matematiky je potrebné si uvedomiť:

- ***Mozog je paralelný procesor*** – naraz môže vykonávať viacej činností – myslí, prežíva emócie, predstavuje si a pod. Pre vyučovanie aj matematiky vyplýva – robiť vyučovanie zaujímavé, rôznymi podnetmi a pomôckami zamestnávať mozog. Efektívne vyučovanie matematiky využíva množstvo vyučovacích stratégií. Tým sa mozog nebude „nudiť“ a bude motivovaný do činnosti.
- ***Do procesu učenia je zapojená celá fyziológia človeka*** – učenie aj matematiky je prirodzený proces, ktorý môže byť niečím brzdený alebo poškodzovaný. Vyučovací proces treba uskutočňovať tak, aby v ňom bolo čo najmenej distresu a iných vplyvov negatívne ovplyvňujúcich činnosť mozgu.
- ***Hľadanie významu (zmyslu) je vrodené*** – pre človeka a jeho mozog sú prirodzené zvedavosť a aktivita, aktivitu mozgu nemožno zastaviť, ale len usmerniť. Vo vyučovaní matematiky treba vytvoriť podmienky pre tvorivosť, objavovanie, kombinovanie, poskytovať obohatené prostredie.

- ***Hľadanie významu sa uskutočňuje prostredníctvom rozpoznávania a generovania vzorových schém*** – pre vyučovanie matematiky z toho vyplýva vyučovať tak, aby učiaci sa videl zmysel učenia, učiteľ matematiky má vytvárať zmysluplné vzorové riešenia a schémy, má orientovať vyučovanie a učenie sa matematike žiadúcim smerom.
- ***Emócie majú zásadný význam pre rozpoznávanie a generovanie schém*** – aj vyučovanie matematiky a učenie sa matematike je ovplyvňovanie emóciami, pocitmi a postojmi.
- ***Mozog spracúva celok a časti súčasne*** – vo vyučovaní matematiky treba využívať spoluprácu obidvoch mozgových pologúľ. Z toho vyplýva, že vysvetľovať alebo inak sprostredkovávať nové učivo v súvislostiach, vyhýbať sa sprostredkúvaniu izolovaných faktov.
- ***Učenie stále zahŕňa vedomé i nevedomé procesy*** – z toho vyplýva, že pre spracovanie informácií je treba zabezpečiť dostatok času. Škoda, že žiaci majú málo času na spracovanie informácií (treba vytvárať v štruktúre vyučovania viac času na spracovávanie informácií).
- ***Ľudia majú najmenej dva druhy pamäti: priestorovú a mechanickú*** – priestorová pamäť je nevyčerpateľná, umožňuje okamžité vybavenie si z pamäti. Vo vyučovaní matematiky je vhodné využívať čo najmenej mechanickú pamäť. Treba umožniť žiakovi využívať logicko-matematickú a priestorovú inteligenciu a jemu vlastný štýl učenia sa. Mozog chápe a pamätá si najlepšie, ak vedomosti z matematiky sú uložené v prirodzenej, priestorovej pamäti. Pre vyučovanie z toho vyplýva, že treba využívať také metódy vyučovania, ktoré sú prirodzené a zapájajú do učenia čo najviac zmyslov.
- ***Každý mozog je unikátny, jedinečný, štruktúra mozgu sa učením mení*** – učenie musí byť rozmanité a dovoľovať tak žiakom vyjadriť svoje preferencie, treba voliť diferencované prístupy, rešpektovať štýly učenia sa žiakov a vychádzať z ich záujmov a skúseností.

Ešte k vyššie uvedenému jedna poznámka k opakovaniu učiva. Pamäť nie je stála – mozog zabúda to, čo nepovažuje za potrebné pre svoje prežitie, to, čo sa neaktivizuje. Z toho vyplýva požiadavka systematicky sa vracať k poznatkom, pripomínať ich, pracovať s nimi, aktivizovať ich. Klasické didaktické poučky nabádajú k tomu, aby sa prebrané učivo čo najskôr upevňovalo, skúšalo. Pohľad neurodidaktiky je zaujímavý v tom, že odporúča istý časový odstup medzi prebraním nového učiva a jeho opakovaním. Zdôvodňuje to tým, že novo naučené učivo potrebuje isté „usadenie", isté začlenenie do systému doterajších vedomostí, a preto skúšanie z nového učiva by nemalo nasledovať na ďalšej vyučovacej jednotke.

Záver

Na vyučovanie matematiky je potrebné pozerať nielen ako na didaktický proces, ale aj ako na proces výrazne ovplyvnený mozgom človeka. Aj keď táto oblasť nie je ešte celkom preskúmaná, napriek tomu je veľmi podnetná, a preto s ňou sa treba oboznamovať a poznatky z neuropedagogiky a neurodidaktiky prenášať do každodennej výchovno-vzdelávacej praxe.

Literatúra

[1] Petlák, E. a kol.: Neuropedagogika a vyučovanie. UKF 2010. ISBN 978-80-8094-744-6.

[2] Trníková, J.: Neurodidaktický pohľad na stres ako faktor ovplyvňujúci proces učenia. In: Neuropedagogika a vyučovanie. UKF 2010. ISBN 978-80-8094-744-6.

[3] Duchovičová, J.: Neurodidaktický a psychodidaktický kontext edukácie. UKF 2010. ISBN 978-80-8094-783-5.

[4] Sawiński, J. P.: Neurodydaktyka - moda czy potrzeba? Kierowanie szkołą 2005, nr 7-8.

[5] Spitzer, M.: Jak się uczy mózg. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN. 2007. ISBN: 978-83-01-15261-1

[6] Caine, R. N., Caine, G. & col.: 12 Brain/Mind Learning Principles in Action : Developing Executive Functions of the Human Brain. Corwin Press 2008. ISBN 978-1-4129-6106-6.

[7] Turek, I.: Didaktika. Bratislava: Iura Edition, ISBN 978-80-8078-198-9.

Článok prijatý dňa 15. apríla 2013.

Adresa autorov

prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK - 949 74 Nitra, e-mail: osedivy@ukf.sk

RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK - 949 74 Nitra, e-mail: vduris@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

TRAINING OF NUCEM ACTIVITY 1.4 AND TEACHERS' OPINIONS ON TEACHING OF RANDOMNESS

ŠKOLENIA AKTIVITY 1.4 NÚCEM A NÁZORY UČITEĽOV NA VYUČOVANIE OBLASTI NÁHODOSŤ

UHRINOVÁ EVA[1] – KÓŠOVÁ MÁRIA - ĽUBOMÍR RYBANSKÝ - VRÁBELOVÁ MARTA

ABSTRACT. *The following contribution gives information about training carried out by realized the National Institute of Certified (NÚCEM) within 1.4 Activity of ESF project called Research of Interventions to Increase Statistical and Financial Literacy of Slovak Pupils at ISCED 2. Training is carried out in cooperation with the Department of Mathematics, Constantine the Philosopher University in Nitra. The contribution also presents results of a questionnaire filled up by the training teachers. The aim of the questionnaire was to assess the level of training and finding the opinion of teachers to teach the randomness.*

KEY WORDS: *NÚCEM, statistical literacy, didactic game, tasks with real-life context*

ABSTRAKT. *Nasledujúci príspevok podáva informácie o zrealizovaných školeniach Národného ústavu certifikovaných meraní vzdelávania v rámci Aktivity 1.4 projektu ESF s názvom Výskum intervencie na zvýšenie štatistickej a finančnej gramotnosti slovenských žiakov na stupni ISCED 2. Školenia sa realizovali v spolupráci s Katedrou matematiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. V príspevku ďalej uvádzame výsledky dotazníka, ktorý vyplnili školení učitelia. Jeho cieľom bolo zhodnotenie úrovne školení a zistenie názorov učiteľov na vyučovanie oblasti náhodnosť.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *NÚCEM, štatistická gramotnosť, didaktická hra, úlohy s kontextom z reálneho života*

CLASSIFICATION: *B50, K70.*

Úvod

Nasledujúci príspevok podáva informácie o zrealizovaných školeniach učiteľov, ktoré organizoval Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania (NÚCEM) v rámci Aktivity 1.4 s názvom *Výskum intervencie na zvýšenie štatistickej a finančnej gramotnosti slovenských žiakov na stupni ISCED 2* v rámci projektu ESF s názvom *Hodnotenie kvality vzdelávania na ZŠ a SŠ v SR v kontexte prebiehajúcej obsahovej reformy vzdelávania* [8]. Tieto školenia učiteľov sa realizovali v spolupráci s Katedrou matematiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre.

V príspevku sa zmieňujeme aj o názoroch učiteľov na vyučovanie oblasti náhodnosť prostredníctvom vyhodnotenia dotazníka, ktorý vypĺňali školení učitelia ZŠ z nitrianskeho, trnavského a trenčianskeho kraja, ktorí sa zúčastnili šiestich školení.

Školenia štatistickej gramotnosti

Projekt ESF *Hodnotenie kvality vzdelávania na ZŠ a SŠ v SR v kontexte prebiehajúcej obsahovej reformy vzdelávania* začal prebiehať v roku 2010. Pred zrealizovanými školeniami bolo náplňou práce NÚCEM-u a regionálnych spolupracovníkov pre oblasť

[1] Corresponding author

náhodnosť z Katedry matematiky Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre pod vedením doc. Vrábelovej vypracovanie rámca štatistickej gramotnosti, tvorba testových úloh pre oblasť náhodnosť, tvorba sady 27 novovytvorených testových úloh pre testovanie štatistickej gramotnosti pre 9. ročník ZŠ, zrealizovanie pilotného testovania (12 škôl, 29 tried, 482 vyplnených testovacích zošitov), vyhodnotenie pilotného testovania, úprava testových úloh na hlavné testovanie, príprava materiálov na školenia učiteľov.

Do školení NÚCEM v rámci spomínanej Aktivity 1.4 bolo zapojených 40 učiteľov matematiky z nitrianskeho, trnavského a trenčianskeho kraja. Oslovenie učiteľov a organizáciu školení mal na starosti NÚCEM, samotné školenia mali na starosti regionálni spolupracovníci z Katedry matematiky UKF. Pre 40 oslovených učiteľov matematiky sa zrealizovalo spolu 6 školení (Obrázok 1).

Obrázok 1: Učitelia na piatom školení

Prvé školenie učiteľov sa konalo 12.10.2012 v Bratislave. V úvode školenia si učitelia prostredníctvom prezentácie *Základné pojmy pravdepodobnosti* zopakovali dôležité pojmy z pravdepodobnosti, stochastický model náhodného pokusu a bolo im vysvetlené ako by mali vyzerať stochastické úlohy v škole. Dozvedeli sa tiež, ako prebieha u detí vnímanie a porozumenie pravdepodobnostných pojmov a zručností ([3], [16]).

Prostredníctvom prezentácie o *Štatistickej gramotnosti* bolo učiteľom vysvetlené, čo znamená byť štatisticky gramotný, čo by mal štatistický gramotný človek vedieť, aké otázky by si mal štatisticky gramotný človek klásť na pochopenie prezentovaných štatistických údajov. Zároveň boli vysvetlené tri oblasti štatistickej gramotnosti: založená na náhode, na korelácii a na klame ([7], [10], [11], [12]).

V prezentácii *Heuristiky* sa učitelia dozvedeli o troch metódach rozhodovania sa v určitých situáciách a to heuristike reprezentatívnosti, dostupnosti, ukotvenia a prispôsobovania. Prostredníctvom nich bol vysvetlený podiel podvedomého rozhodovania sa človeka za určitých okolností, čo výraznou mierou zvyšuje frekvenciu chýb pri (štatistickom) rozhodovaní sa ([5], [6]).

V prezentácii *Hra vo vyučovacom procese* bola učiteľom predostretá jedna z metód vyučovania matematiky a to didaktická hra. Boli im vysvetlené základné prvky didaktickej hry a spôsob zapojenia hry do vyučovania matematiky. Prostredníctvom workshopu sme učiteľom ukázali, ako možno prostredníctvom hry vyučovať náhodnosť a snažili sme sa ich presvedčiť o tom, že vyučovať náhodnosť je potrebné cez zážitok. Učiteľom sme predviedli hry: Športa, Ťahanie guľôčky, Veštiaca Galtonova doska, Nemusíš odpovedať, Hra o desiatku, Hádaj poradie, Steblá, Losovanie pomocou zápaliek [9],[15].

Druhé školenie sa konalo 26.10.2012 v Trnave. Na školení boli prezentované *Teoretické základy tvorby testových úloh*, didaktických testov a o typológii testových úloh ([13]). Ďalší prednáškový blok bol zameraný na *metodiku tvorby* testových úloh a *praktické ukážky postupov* pri tvorbe konkrétnych úloh z oblasti štatistickej gramotnosti, kde sme predostreli učiteľom praktické skúsenosti z vlastnej tvorby testových úloh do pilotného testovania štatistickej gramotnosti. V rámci popoludňajšieho workshopu učitelia vytvorili nové testové úlohy, ktoré budú súčasťou zbierky úloh zo štatistickej gramotnosti pre 9. ročník ZŠ.

Tretie stretnutie sa konalo 23.11.2012 v Nitre. Obsah školenia tvorilo kódovanie testovacích úloh učiteľmi pomocou Kódovacích príručiek štatistickej gramotnosti, ktoré pripravil náš tím.

Najskôr boli učiteľom predostreté inštrukcie ku kódovaniu úloh testových zošitov a potom sa prešlo k samotnému kódovaniu riešení úloh učiteľmi. Kódovanie prebiehalo po klastroch. K niektorým úlohám bolo pripravené kódovacie cvičenie. S kódovaním sme učiteľom pomáhali a riešili sme s nimi problematické odpovede žiakov, najmä tie, ktoré sa týkali zdôvodnenia odpovede.

Ďalšie 4. - 5. dvojdňové školenie sa uskutočnilo 7. - 8. 12.2012 v Trnave. V úvode školenia učitelia prezentovali skúsenosti s vyučovaním zameraným na štatistickú gramotnosť. Väčšina prezentácií sa týkala využitia didaktických hier. Jedna prezentácia bola zameraná na skúsenosti zo seminára, v rámci ktorého žiaci uskutočnili a spracovali vlastný štatistický prieskum.

Ďalej nasledovali prezentácie, ktoré sa týkali *základov štatistického prieskumu* a mali pomôcť učiteľom pri vedení žiakov pri uskutočňovaní a spracovaní štatistického prieskumu v rámci medzinárodnej štatistickej súťaže o najlepší poster. Jednalo sa o prezentácie *Charakteristiky polohy*, *Charakteristiky variability*, *Grafy*, *Plánovanie výskumu a metódy výberu*, *Zber údajov prostredníctvom dotazníka*, *Problémy s používaním informácií*. Podklady na tieto prezentácie tvorila kanadská stránka Štatistika Kanady, kde sa okrem rôznych štatistických informácií o Kanade nachádza aj časť zameraná na vzdelávanie učiteľov a žiakov zo štatistickej gramotnosti [14].

Na záver štvrtého školenia učitelia vyplnili dotazník zameraný na zistenie názorov učiteľov o zrealizovaných školeniach a o vyučovaní oblasti náhodnosť. Dotazník sme ešte v ten deň spracovali a vyhodnotili a na druhý deň sme učiteľov oboznámili s jeho výsledkami.

Ďalej sa učitelia dozvedeli o novej metóde spracovávania testov - *IRT metóde* (Teórii odpovedí na položky*)*, jej výhodách oproti klasickej teórii testov [1], [2]. Touto metódou sa spracovávali aj výsledky pilotného testovania štatistickej gramotnosti, spracovávajú sa ňou testy PISA a NÚCEM má záujem takto spracovávať aj všetky ostatné testovania, ktoré realizuje, napríklad monitory deviatakov.

Šieste školenie sa konalo 15.2.2013 v Nitre. Na školení sa detailne prediskutovali problémy spojené s tvorbou testových úloh z oblasti štatistickej gramotnosti učiteľmi ako aj riešenie problémov pri zapojení sa školských tímov do medzinárodnej štatistickej súťaže Štatistickej gramotnosti.

Učiteľom sme prostredníctvom prezentácie pripomenuli všetky nosné body správne vytvorenej testovej úlohy a zosumarizovali sme opakujúce sa nedostatky (chyby), ktorých sa dopúšťajú učitelia pri ich tvorbe. Čerpali sme už z vytvorených testových úloh učiteľmi (87 testových úloh), ktoré sme predtým kontrolovali a komentovali. Individuálne problémy spojené s tvorbou testových úloh sa riešili v druhej časti školenia. S učiteľmi sme pracovali v pracovných skupinách.

Okrem týchto šiestich školení sa v rámci tohto projektu realizovali aj jednodňové a dvojdňové školenia pre učiteľov matematiky zo zvyšných krajov, kde sme na prezentovanie využili už pripravené materiály z predchádzajúcich školení.

Jednodňové školenia sa konali v rámci seminára *Finančná a štatistická gramotnosť žiakov v kontexte medzinárodných štúdií* v Bratislave (6.11.2012, 33 učiteľov), v Košiciach (7.11.2012, 20 učiteľov) a Žiline (8.11.2012, 23 učiteľov). Na týchto školeniach boli učiteľom prezentované materiály o štatistickej gramotnosti a prostredníctvom workshopu im boli prezentované didaktické hry zamerané na vyučovanie náhodnosti.

Takisto sme sa zúčastnili na dvojdňových školeniach v Banskej Bystrici (8.-9.3. 2013, 14 učiteľov) a Košiciach (15.3.2013, 21 učiteľov). Program školení tvorili základy pravdepodobnosti a štatistiky, štatistická gramotnosť, workshop hry, tvorba testových úloh.

Vyhodnotenie dotazníka

Dotazník vyplnilo spolu 31 učiteľov v rámci 5. školenia Aktivity 1.4. Dotazník bol zameraný na zisťovanie názorov učiteľov na zrealizované školenia, na vyučovanie oblasti náhodnosť prostredníctvom didaktických hier a úloh s reálnym kontextom.

Pri ohodnotení prednášok a workoshopov na päť stupňovej škále sme dostali od učiteľov spätnú väzbu, že väčšina učiteľov bola spokojná s prednáškami a prevažne ich ohodnotili ako veľmi vhodné (Obrázok 2). Zo všetkých prednášok zastáva výraznejšiu pozíciu workshop hry, ktorý mal u učiteľov veľký úspech. Takisto sa učiteľom páčili praktické ukážky tvorby úloh. Naopak, najhoršou známkou ohodnotili učitelia prácu v skupinách, kde mali spolupracovať pri tvorbe úloh s reálnym kontextom.

Obrázok 2: Ohodnotenie vhodnosti prednášok a workshopov (P91 – Základné pojmy pravdepodobnosti, P92 – Štatistická gramotnosť, P93 – Heuristiky, P94 – Workshop hry, P95 – Praktická ukážka tvorby úloh, P96 – Práca v skupinách na tvorbe úloh, P97 – Kódovanie klastrov)

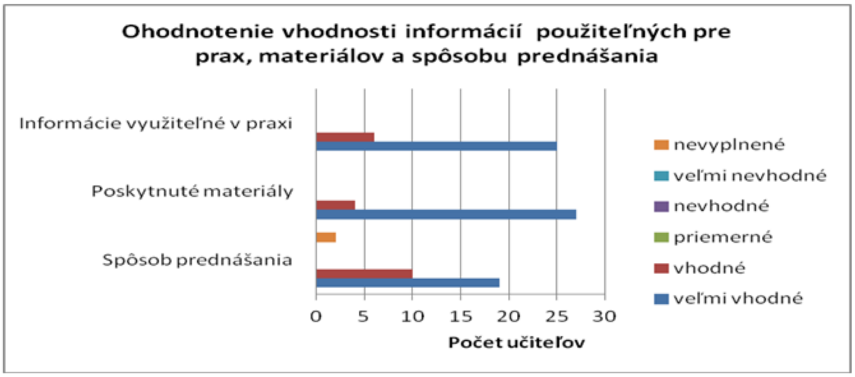
Podobné výsledky môžeme vyčítať aj s kontingenčnej tabuľky, kde sme dali do vzťahu najzaujímavejšiu a najmenej zaujímavú prednášku podľa názoru učiteľov (Obrázok 3).

P26 najviac	**P27 najmenej**								spolu
	P91	P92	P93	P94	P95	P96	P97	9	
P93	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	2
P94	**6**	**1**	**3**	0	0	**2**	**4**	**6**	**22**
P95	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	2
P96	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1
P97	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1
9	0	0	0	**1**	0	0	0	**2**	3
spolu	6	1	3	**2**	1	3	6	**9**	31

Obrázok 3: Kontingenčná tabuľka pre najzaujímavejšiu (P26) a najmenej zaujímavú (P27) prednášku (workshop)

Kódom 9 sme označili nevyplnenú položku. Až 22 učiteľov označilo workshop Hry ako najzaujímavejšiu prednášku. Z nich sa šiestim zdala najmenej zaujímavá prednáška Základné pojmy pravdepodobnosti a takisto šiesti neoznačili žiadnu prednášku ako najmenej zaujímavú. Štyrom z nich sa zdalo byť najmenej zaujímavé kódovanie klastrov. Dvom učiteľom sa však workshop Hry páčil najmenej. Jednému z nich sa najviac páčili Heuristiky a druhý neuviedol prednášku, ktorá sa mu páčila najviac. Zaujímavé je aj, že všetci učitelia, ktorí uviedli ako najmenej zaujímavú prednášku o Základných pojmoch pravdepodobnosti, ale i Heuristikách, uviedli, že sa im najviac páčil workshop Hry.

Spokojnosť učiteľov so školeniami ukazuje aj graf na obrázku 4.



Obrázok 4: Ohodnotenie vhodnosti informácií použiteľných pre prax, materiálov a spôsobu prednášania

Väčšina učiteľov (81%) ohodnotila poskytnuté informácie na školeniach ako veľmi vhodné pre využitie v ich praxi. 87% učiteľov ohodnotilo poskytované materiály na školeniach ako veľmi vhodné a 61 % učiteľov ohodnotilo aj spôsob zvoleného prednášania ako veľmi vhodný (Obrázok 4).

Z položiek, ktoré boli zamerané na didaktické hry, sme sa z odpovedí učiteľov dozvedeli, že všetci považujú použitie didaktických hier vo vyučovaní matematiky za vhodné, prípadne veľmi vhodné (výber odpovede z 5 stupňovej škály).

Čo sa týka konkrétnych didaktických hier, ktoré si učitelia zahrali na workshope, vhodnosť ich zapojenia do vyučovania matematiky znázornili učitelia na päťstupňovej škále, kde 1 bolo najlepšie hodnotenie (Obrázok 5).

Obrázok 5: Vhodnosť zapojenia hier do vyučovania matematiky

Pri všetkých hrách označila väčšina učiteľov na škále jednotku. Najviac vhodná sa učiteľom zdala hra Ťahanie guľôčky, ktorá bola najjednoduchšou z ponúknutých a bola zameraná na odhad pravdepodobnosti prostredníctvom uskutočnenia dostatočného množstva náhodného ťahania guľôčok z vrecúška s vrátením a zapísania týchto výsledkov. Naopak, najmenej vhodná sa zdala učiteľom hra Nemusíš odpovedať, ktorá je modifikovaním Monty Hall paradoxu, teda jej označenie ako najmenej vhodnej môže súvisieť aj s nepochopením tohto paradoxu.

Ďalej sme sa z odpovedí na položky dozvedeli, že 80% učiteľov používa didaktické hry vo vyučovaní matematiky, 14% učiteľov má v pláne vďaka školeniam začať používať didaktické hry.

77,4% učiteľov si myslí, že didaktické hry, ktoré im boli ponúknuté na školeniach, môžu ovplyvniť obľúbenosť matematiky u žiakov (zvyšní učitelia nevedia).

Ostatné položky dotazníka boli zamerané na úlohy s reálnym kontextom pre tematickú oblasť Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika. Tu z výsledkov vyplýva, že takmer všetci učitelia používajú tieto úlohy vo vyučovaní náhodnosti a aj si myslia, že používanie týchto úloh môže byť pre oblasť náhodnosť prínosom.

Zaujímavé je, že 87 % učiteľov nevidí žiaden problém v používaní týchto úloh vo vyučovaní náhodnosti, hoci 81% učiteľov uvádza, že nemajú k dispozícii dostatočné množstvo úloh s reálnym kontextom z oblasti náhodnosť a úplne všetci učitelia by uvítali vytvorenie internetovej stránky, ktorej obsahom by boli úlohy s reálnym kontextom pre vyučovanie oblasti náhodnosť pre všetky ročníky ISCED 2. 65 % učiteľov uvádza, že už vytvorili takýto typ úloh okrem tohto školenia a čo sa týka náročnosti tvorby týchto úloh, jej ohodnotenie na päťstupňovej škále (1 – veľmi jednoduché) dosiahlo priemernú hodnotu 3,7, teda väčšina učiteľov je toho názoru, že tvorba týchto úloh je náročná (Obrázok 6).

Obrázok 6: Náročnosť tvorby úloh s kontextom z reálneho života

Záver

V príspevku podávame informácie o zrealizovaných školeniach NÚCEM zameraných na štatistickú gramotnosť ako aj o výsledkoch dotazníka, ktorý vypĺňali učitelia na piatom školení NÚCEM.

Tím z Katedry matematiky UKF vyškolil spolu 151 učiteľov matematiky z celého Slovenska. Učitelia si odniesli (podľa ich slov z dotazníka) cenné informácie o štatistickej gramotnosti, základoch pravdepodobnosti, štatistiky, o tvorbe úloh s reálnym kontextom, o možnosti vyučovať náhodnosť pomocou hier a nechať tak žiakov zažiť pravdepodobnosť.

V súčasnosti sa tento projekt zameriava na medzinárodnú súťaž Štatistickej gramotnosti (ISLP) [4], ktorá sa koná pod záštitou medzinárodnej asociácie pre štatistické vzdelávanie (IASE) a tvorbu zbierky testových úloh, kde sa budú nachádzať úlohy z testových zošitov z hlavného testovania štatistickej gramotnosti a úloh vytvorených učiteľmi, ktorí sa zúčastnili školení NÚCEM.

Literatúra

[1] BAKER F. B. – The basics of item response theory, Wisconsin, 2001

[2] BOND T. G., Fox Ch. M. Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences, London, 2001

[3] FISHBEIN, E. (1975) *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel

[4] ISLP, 2013 *[2013-03-18]*. *Dostupné na internete:* < http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/islp/home>

[5] KAHNEMANN, Daniel; TVERSKI, Amos (1979) "An Analysis of Decision under Risk," vol. 47, no. 2, (Mar., 1979)

[6] KAHNEMANN, Daniel; TVERSKI, Amos (1982) "On the study of stattistical intuitions," Cognition 11, 123-141.

[7] MLODINOW, L. 2008. Život je jen náhoda – jak náhoda ovlivňuje naše životy. Praha: Slovart, s. r. o., 2009. 246 s. ISBN 978-80-7391-259-8

[8] NÚCEM – Projekt ESF, 2013 *[2013-02-20]*. *Dostupné na internete:* <http://www.nucem.sk/sk/projekt_esf/project/13>

[9] PŁOCKI, A. (2004) Pravdepodobnosť okolo nás: Stochastika v úlohách a problémoch. Ružomberok: Katolícka univerzita

[10] SCHIELD, M. 1999. Statistical Literacy: Thinking critically about statistics. Dostupné na internete (27.4.2011): http://www.statlit.org/pdf/1999SchieldAPDU.pdf

[11] SCHIELD, M. 2001. Three kinds of statistical literacy:what should we teach?. Dostupné na internete (28.4.2011): http://www.statlit.org/PDF/2002SchieldICOTS.pdf

[12] SCHIELD, M. 2005. Statistical prevarication: Telling half truths using statistics. Dostupné na internete (26.4.2011): http://www.statlit.org/pdf/2005SchieldIASE.pdf

[13] SCHINDLER, Radek a kol.: Rukověť autora testových úloh. Praha: Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2006. ISBN 80-239-7111-5 [on-line].

[14] STATISTICS: Power from Data, *[2013-02-20]*. *Dostupné na internete:* http://www.statcan.gc.ca/edu/power-pouvoir/toc-tdm/5214718-eng.htm

[15] UHRINOVÁ, E. (2011). Didaktická hra ako efektívna edukačná metóda. In: Študentská vedecká konferencia Prif UK 2011. Bratislava: UK, 2011. s. 1139-1144. ISBN 978-80-223-3013-8

[16] WAY, Jennifer (2009) The Development of Children’s Reasoning. [Online]. http://www.merga.net.au/documents/RR_way.pdf.

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autorov

PaedDr. Eva Uhrinová, Mgr. Mária Kóšová, RNDr. Ľubomír Rybanský,
Doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Trieda A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: eva.uhrinova@ukf.sk, maria.kosova@ukf.sk, lubomir.rybansky@ukf.sk, mvrabelova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ACTIVE LEARNING OF GEOMETRY THROUGH TOPOGRAPHICAL TASKS

AKTÍVNE UČENIE SA GEOMETRIE PROSTREDNÍCTVOM TOPOGRAFICKÝCH PRÁC

DUŠAN VALLO[1] – KITTI VIDERMANOVÁ

ABSTRACT. *Topographical tasks had their place in the curriculum 20 years ago. Today the time and technical reasons caused that their teaching has disappeared. We think that it is necessary to show to pupils what kind of applications of geometry may they meet in real life and prepare them to solve these problems. So we decided present to our students – future teachers of mathematics the basics of topographical tasks during a workshop. This paper deals with this workshop, the tasks given to students and their solutions.*

KEY WORDS: *active learning, topographical tasks, measurement in landscape, aplications of geometry.*

ABSTRAKT. *Topografické práce mali v minulosti svoje miesto v školskom učive. Dnes sa z časových i technických dôvodov z vyučovania vytratili. Myslíme si, že je potrebné ukázať žiakom, s akými rôznymi aplikáciami geometrie sa môžu v reálnom živote stretnúť a pripraviť ich na riešenie týchto problémov. Preto sme sa rozhodli našim študentom – budúcim učiteľom matematiky predstaviť formou workshopu základy topografických prác. V príspevku popisujeme jeho priebeh – študentom zadané úlohy a ich riešenia.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *aktívne vyučovanie, topografické práce, meranie v teréne, aplikácie geometrie.*

CLASSIFICATION: *B55, G95*

Úvod

Mnohí výskumníci (Kagan, 1992; Lortie, 1975; Thompson, 1984; Huibregtse, Korthagen & Wubbels, 1994) tvrdia, že spôsob, akým boli učení študenti – budúci učitelia v škole v rámci nejakého predmetu, má silný vplyv na ich predstavy o tomto predmete, jeho učení sa a aj ako ho vyučovať. Stofflett and Stoddart (1994) ukázali, že študenti, ktorí sami zažili aktívne učenie sa, viac inklinujú plánovať hodiny takým spôsobom, ktorý umožňuje aktívne nadobúdanie vedomostí. Títo autori zdôrazňujú náročnú úlohu v rámci prípravy budúcich učiteľov - zastaviť kruh „učenie – učenie sa – učenie" (ako nás niekto učil, tak budeme učiť aj my). Keď sa v sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch rozvíjalo *realistické vyučovanie* v Holandsku (z orig. *realistic education*), táto úloha mala najvyššiu prioritu v programe prípravy učiteľov matematiky pre druhý stupeň základných škôl v Utrechte.

Realistické vyučovanie matematiky (z orig. *realistic mathematics education*) nevychádza z abstraktných princípov a pravidiel s cieľom naučiť sa aplikovať ich v konkrétnych situáciách. Zameriava sa na to, aby žiaci matematické vedomosti získali riešením problémov s reálnym kontextom (z reálneho sveta). Nájdením riešenia zadanej úlohy práca žiakov nekončí. Učitelia pomáhajú deťom rozvíjať ich neformálne stratégie do

[1] Corresponding author

viac formálnych prístupov, ktoré potom môžu použiť v iných situáciách (Treffers, 1987).[in: Wubbels, Korthagen & Broekman 1997]

Jednou možnosťou, ako dosiahnuť aktívne nadobúdanie vedomostí z oblasti geometrie je napríklad opätovné zaradenie topografických prác do vyučovania matematiky na základných aj stredných školách. Poznamenávame, že podľa osobných skúseností prvého autora tohto príspevku s výučbou matematiky na základnej škole, ide o učivo, ktoré sa z technických i časových dôvodov takmer vôbec nevyučuje.

V našom príspevku popisujeme workshop, v rámci ktorého sme našich študentov, budúcich učiteľov matematiky, oboznámili so základmi topografických prác. Najskôr si však predstavme topografické práce v školskej matematike. Analyzovali sme ich výskyt v učive v minulosti i dnes.

Topografické práce v minulosti a dnes

Topografické práce sú také úlohy a problémy, ktoré vychádzajú z reálnych potrieb a vyžadujú meranie vzdialeností, vytyčovanie plôch v teréne.

Učebné osnovy z roku 1973 uvádzali v rámci vyučovania matematiky nasledovné témy:

6. ročník: Vytyčovanie priamky a úsečky v teréne – odhad a meranie vzdialeností. Vytyčovanie pravého uhla. Vytyčovanie štvorca, obdĺžnika, áru, prípadne hektára.

7. ročník: Meranie a vytyčovanie uhlov v horizontálnej rovine a trojuholníka v teréne. Prenášanie uhlov – zmeranie neprístupnej vzdialenosti – stanovenie výmery (obsahu) pozemka tvaru štvoruholníka podľa merania v teréne.

9. ročník: Merací stolík, zastaničenie, rajónovanie. Jednoduché prípady pretínania vpred.

V učebných osnovách z roku 1997 boli topografické práce zaradené ako rozširujúce učivo. V učebniciach matematiky pre základné školy autorov O. Šedivý a kol. nachádzame témy a k nim odporučené úlohy:

6. ročník: Meranie vzdialeností. Vytyčovanie úsečiek v teréne. Vytýčenie pravého uhla (s pomocou zámerného kríža).

7. ročník: Vytýčenie pravého uhla bez použitia zámerného kríža. Vytýčenie rovinného obrazca v teréne. Použitie stredovej súmernosti pri meraní vzdialeností.

8. ročník: Meranie vzdialeností (cez prekážky).

9. ročník: Meranie výšok v teréne.

Od roku 2008 platí pre vzdelávanie Štátny vzdelávací program. V jeho prílohe ISCED 2 pre 2. stupeň základných škôl sú zaradené topografické práce do tematického celku Podobnosť trojuholníkov, konkrétne riešenie jednoduchých praktických topografických úloh s využitím vlastnosti podobnosti trojuholníkov. Príloha ISCED 3 pre gymnáziá obsahuje odporúčanie, aby sa využívali aj iné formy vyučovania, ako príklad sú uvedené terénne práce pre meranie. Pri preštudovaní nových učebníc matematiky pre základné a stredné školy (Žabka a kol., Kubáček a kol.) sme nenašli žiadne námety na topografické ani terénne práce.

Výhody zaradenia topografických prác do vyučovania matematiky:

- majú vysoký motivačný faktor – reálne využitie v praxi;
- žiaci si overujú rôzne definície a vzťahy naučené v rámci teórie;
- podpora tvorivej činnosti žiakov;

- vedenie ku kolektívnej práci – deľba práce a dobrá spolupráca členov pracovného kolektívu môže viesť k úspešnému splneniu úlohy;
- učiteľ spozná povahu žiakov a ich pracovnú morálku v kolektíve;
- učiteľ vedie žiakov k šetreniu majetku a jeho ošetrovanie – čistenie pásma, ukladanie pomôcok do škatule, atď.

Priebeh workshopu

Workshop sme zrealizovali v akademickom roku 2011/12 na trávnatej ploche vedľa hlavnej budovy UKF v Nitre. Stretnutia sa zúčastnili študenti 3. ročníka bakalárskeho štúdia učiteľstva matematiky, v celkovom počte 18 študentov.

Úvodom sme študentov nechali riešiť elementárne úlohy zamerané na merania a konštrukcie:

a) odmerať úsečky dĺžok 12 m, 3 m, 5 m a vyznačiť ich pomocou špagátu,
b) predĺžiť danú úsečku vyznačenú špagátom na stanovenú dĺžku,
c) na danej úsečke vymedzenej špagátom určiť stred,
d) zostrojiť z daného bodu mimo úsečky kolmicu a určiť pätu kolmice,
e) zamerať pravý uhol pomocou zámerného kríža (obr. 1),
f) zamerať pravý uhol pomocou pytagorejského trojuholníka so stranami dĺžok 3 m, 4 m a 5 m,
g) odmerať vzdialenosť medzi dvomi vybranými stanovišťami (bodmi), ak sa medzi nimi nachádza prekážka (prekážkou bolo polyfunkčné ihrisko, obr. 2).

Obrázok 1: Zameranie pravého uhla pomocou zámerného kríža

Obrázok 2: Meranie vzdialenosti medzi dvoma stanovišťami cez prekážku

Po takýchto štandardných topografických meraniach, ktoré poslúžili ako „rozcvička“, sme zadali študentom niekoľko náročnejších konštrukčných úloh. Podotýkame, že študenti sa sami rozdelili do troch skupín a v jednotlivých skupinách riešili zadané problémy.

Úloha 1. Vymerajte na zemi rovnoramenný lichobežník so základňami 10 m a 6 m, ktorého rameno bude 5 m.

Riešenie. Študenti odmerali úsečku 10 m dlhú, určili na nej dva body, vzdialené od krajných bodov po 2 m. V týchto bodoch zostrojili pomocou zámerného kríža kolmice (obr. 3). Pytagorovou vetou vypočítali výšku lichobežníka s hodnotou 4,6 m, namerali túto výšku na obe kolmice a vyznačili hranicu lichobežníka pripraveným fóliovým pásom ako naznačuje fotografia na obr. 4.

Obr. 3

Obr. 4

Na našu výzvu vykonali skúšku – odmerali dĺžku kratšej základne a zistili hodnotu rovnú 6 m – jasná kontrola správnosti výpočtu výšky a samotného technického prevedenia konštrukcie. Na koniec sme ich ešte požiadali, aby vypočítali aj obvod lichobežníka. Pri pohľade na vyznačenú „malú“ plochu zostali mierne prekvapení, keď zistili, že obvod je až 26 m.

Úloha 2. Vymerajte na ploche pravidelný šesťuholník s dĺžkou strany 3 m.

Riešenie. Riešenie, ktoré nám prezentovali študenti, nás výrazne prekvapilo. Pomocou špagátu si vytvorili „šablónu“ jedného rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 3 m (obr. 5). Dvaja študenti uchopili tento špagát tak, že ho napli vo vrcholoch (obr. 6) a postupne otáčali o uhol veľkosti 60º do jedného smeru okolo potencionálneho stredu šesťuholníka.

Obr. 5

Obr. 6

Značkovacími kolíkmi určovali pozície jednotlivých vrcholov šesťuholníka. Hranicu útvaru nakoniec vyznačili fóliou (obr. 7).

Obr. 7

Aj v tomto prípade sme ich požiadali o kontrolu – presne odmerať uhlopriečky zameraného šesťuholníka. Trvali sme na tom, aby merali uhlopriečky v opačnom poradí, než konštrukčne vznikali. Pri uhlopriečke, ktorú zostrojili ako poslednú namerali dĺžku 6,12 m, pri druhej bola dĺžka 6,04 m a tretia uhlopriečka mala presnú dĺžku 6 m.

Vysvetlenie bolo zrejmé hneď po meraní. Otáčali základný trojuholník vždy len v jednom smere a chyba narastala. Študenti rýchlo prišli s nápadom, že ak by otáčali základný trojuholník do oboch smerov, chyba by sa minimalizovala.

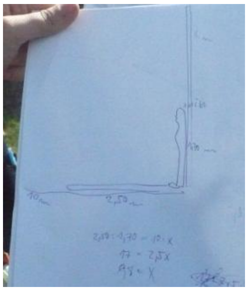
Predpokladáme, že ich postup s jedným základným trojuholníkom ako šablónou bol inšpirovaný vytyčovaním pravého uhla pomocou pytagorejského trojuholníka, t.j úlohou riešenou v úvode hodiny.

Úloha 3. Zistite výšku stožiaru elektrického osvetlenia pri polyfunkčnom ihrisku.

Riešenie. Študentom sme dali návod v podobe nápovede o dĺžke tieňa 1 m pravítka. Realizácia ich riešenia bola však nad očakávania unikátna. K stožiaru sa postavila jedna študentka, ktorá s presnosťou na cm udala svoju výšku, postavila sa k stožiaru a spolužiaci odmerali jej tieň.

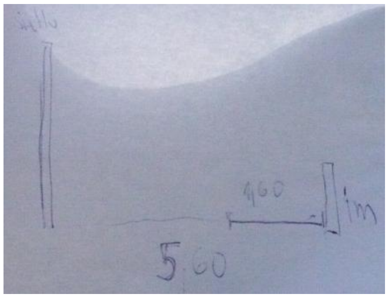
Pomocou jednoduchého výpočtu vyplývajúceho z podobnosti trojuholníkov učili výšku stožiara na 7 m.

Pre kontrolu sme im predviedli určenie výšky stožiara pomocou zrkadla, olovnice a 1 m pravítka. Správnosť výpočtu sa potvrdila.



Obr. 8

Obr. 9



Obr. 10

Úloha 4. Vymerajte na ploche obdĺžnik 15 m x 8 m. Vyznačte na ploche štvorec rovnakého obsahu.

Riešenie. Pomocou meracieho pásma študenti odmerali úsek dlhý 15 m, podľa pyragorejského trojuholníka (obr. 11) určili v krajných bodoch úsečky kolmice, vyznačili špagátom a na nich odmerali 8 m dlhé úsečky.

Obr. 11

Kvôli kontrole sme ich požiadali, aby:

a) odmerali stranu rovnobežnú s 15 m dlhým úsekom,

b) Pytagorovou vetou vypočítali dĺžku uhlopriečky a obe uhlopriečky aj odmerali.

Meraním rovnobežnej strany zistili, že je dĺžka je 15,75 m a teda nejde o obdĺžnik. Tým sme ich upozornili, že použitie pytagorejského trojuholníka s obvodom 12 m môže pri dlhších úsečkách meraných na „kolmici“ viesť ku nepresnostiam.

Pomocou Pytagorovej vety zistili, že uhlopriečka má dĺžku 17 m, premeraním oboch rozmerov a ich následnou úpravou určili plochu požadovaných rozmerov.

Následná premena na rovnoplochý štvorec bola realizovaná pomocou Euklidovej vety o výške. Po teoretickej stránke študenti problém zvládli hravo, dokonca s najväčším záujmom sa stretla konštrukcia Tálesovej polkružnice - jeden študent držal meracie pásmo na dĺžke 11,5 m a druhý študent držal koniec pásma a „kráčal po polkružnici“ (obr. 12).

Obr. 12

Po určení vrcholov štvorca študenti oba útvary vyznačili vymedzovacou fóliou (obr. 13). Študentov prekvapilo, že hoci majú oba útvary rovnakú plochu, obdĺžnik pôsobí opticky ako väčší pozemok.

Obr. 13

Záver

Topografické práce a merania priamo v teréne ponúkajú študentom, resp. žiakom priamu spätnú väzbu o geometrickom učive, jeho podstate a význame. Z pozorovaných situácií sme zistili, že tvorivosť a logické riešenie problémov je zo strany študentov podporené hravosťou, motiváciou a snahou problém vyriešiť. Úlohy, ktoré sme im zadávali vychádzali z reálneho života, ako napr. určenie plochy altánku, záhrady, oplotenie pozemku, určenie výšky budovy, atď.

Záujem, s akým sa stretol priebeh workshopu, bol aj pre nás, vyučujúcich, značne prekvapivý. Študenti, ktorí sa workshopu zúčastnili, sa podľa ich slov počas predchádzajúceho štúdia nikdy predtým nestretli s topografickými prácami, ale po jeho ukončení povedali, že ak raz učiť budú, určite ich zaradia. Veď škola má pripraviť žiakov najmä na riešenie problémov vychádzajúcich z reálneho života.

Na záver by sme ešte podotkli, že po workshope sa názory a reakcie študentov na jeho priebeh objavili aj na sociálnej sieti. Študenti uploadovali svoje fotky z workshopu a pochvaľovali si výborné hodiny. Jedna študentka nám napísala: „*Úlohy boli zaujímavé,* *aktivizovali študentov, vytvorili priestor pre praktické a tvorivé myslenie, pozitívna atmosféra, utuženie kolektívu. Zvýraznenie praktickej stránky matematiky. Dúfam, že sa mi jedného dňa podarí pripraviť takúto hodinu a uskutočniť ju s mojimi budúcimi žiakmi.*“

Literatúra

[1] Bendl, J. – Mašín, Z. (1973) Metodický návod k použití topografické soupravy. Praha: Komenius N. P., 1973. 28 s.

[2] Kohanová, I. – Slavíčková, M. (2009) Development of Pedagogical Content Knowledge in Preparation of Future Mathematics´ Teachers. In: Cernák, I. et al (ed.) IMEM 2009, proceedings of the international congress on interdisciplinary relationships in the theory and practise of informatics, management, economics and mathematics, Spišská Kapitula, Slovakia, September 9-11, 2009. Ružomberok: Catholic University in Ružomberok, 2009. ISBN 978-80-8084-471-4/pbk. P. 572-581.

[3] Laššáková, V. – Vankúš, P. (2011) Výchovný aspekt kontextových matematických úloh. In: Šedivý, O. a kol. (ed.) Zborník vedeckých príspevkov z IX. nitrianskej matematickej konferencie. Nitra: UKF v Nitre, 2011: ISBN 978-80-8094-958-7. S. 131-135

[4] Majovská, R. – Fridrich, V. (2009) Zpřístupnení ICT ve výuce matematiky. In: Žilková, K. (ed.) Potenciál prostredia IKT v školskej matematike I. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2009. ISBN 978-80-223-2754-1. S. 29-43.

[5] Šedivý, O. a kol. (1999) Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 1999. 144 s. ISBN 80-08-02678-2

[6] Šedivý, O. a kol. (2000) Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 2000. 160 s. ISBN 80-08-02680-4

[7] Šedivý, O. a kol. (2001) Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 2001. 160 s. ISBN 80-08-03032-1

[8] Šedivý, O. a kol. (2004) Matematika pre 9. ročník základných škôl, 2. časť. Druhé vydanie. Bratislava: SPN, 2004. 144 s. ISBN 80-10-00397-2

[9] Štátny vzdelávací program MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 2 (2010) [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf

[10] Štátny vzdelávací program MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 3A. [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www.Statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf

[11] Učebné osnovy Matematika pre 5. až 9. ročník základnej školy. (1997) [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www2.statpedu.sk/buxus/docs/Pedagogicke_dokumenty/zakladne_skoly/osnovy/UO_matematika_5-9_ZS.pdf

[12] Wubbels, T. – Korthagen, F. – Broekman, H. (1997) Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics, vol. 32/1997, Issue 1, ISSN 1573-0816 (online). P. 1 – 8.

Článok prijatý dňa 28. apríla 2013.

Adresa autorov

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: dvallo@ukf.sk

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: kvidermanova@ukf.sk

Poďakovanie

Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu KEGA 038UKF-4/2011: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ANALYSIS OF THE WINNING STRATEGY OF THE GAME ENADES AS A TASK FOR PUPILS

PETER VANKÚŠ

ABSTRACT. *In this paper we will deal with the mathematical didactical game Enades. Analysis of its winning strategy is task that can be solved with student during mathematics education at secondary schools and also at the universities. In the paper we will introduce the game, analysis of the strategy of two versions of this game and also our experience from using this activity in the education in the preparation of future mathematics teachers.*

KEY WORDS: *mathematics education, didactical game, winning strategy*

ABSTRAKT. *V článku sa zaoberáme matematickou didaktickou hrou Enády. Analýza výhernej stratégie tejto hry je úloha, ktorá môže byť riešená v rámci matematického vzdelávania na druhom stupni základnej školy, na strednej škole ale aj na vysokej škole. V článku predstavíme hru, analýzu výherných stratégií dvoch verzií hry a tiež naše skúsenosti z používania tejto aktivity v rámci prípravy budúcich učiteľov matematiky.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: matematické vzdelávanie, didaktická hra, výherná stratégia*

CLASSIFICATION: *D40, A20, E30*

Introduction

The game is activity that is attractive for a majority of pupils and also a lot of adults. Attractiveness and motivational impetus of the game are used also in the mathematics education (Burjan and Burjanová, 1991; Kohanová, 2010; Pavlovičová and Švecová, 2009; Pavlovičová et all, 2012; Slavíčková, 2008; Vallo, Záhorská and Ďuriš, 2011; Vallo and Šedivý, 2012; Vidermanová and Uhrinová, 2011). The game used by this way we call didactical game or mathematical didactical game.

In our paper we will introduce a game from our book *Didaktické hry v matematike* (Didactical games in mathematics; Vankúš, 2012). This book is dealing with the problematic of mathematical didactical games. It is accessible for free at the address http://www.comae.sk/didaktickehry.pdf, therefore is available for the teachers community. The important part of the book is collection of 30 didactical games designed for various thematic areas of the secondary school mathematics education.

The game *Enades* from this collection is the content of our paper. We will describe brief analysis of its winning strategy as a task for pupils. We will also speak about our experience of using this activity in the preparation of future mathematics teachers.

This paper is meant to be motivation for readers to use analysis of winning strategy of didactical games as activity in mathematics education.

Mathematical didactical game Enades

In this chapter we will present two versions of the game Enades. They are different just in the rules so all other things in the game description are the same for both versions. First we will give some basic information about the didactical game Enades applicable for secondary school mathematics:

Thematic area: This game is suitable for the thematic area of Powers and Roots.

Educational targets: To practice determining the powers of some numbers by heart. To get feedback on pupils' knowledge from the subject matter. The game develops pupils' combinatorial and strategic thinking.

Game environment: Pupils and the teacher: Pairs of pupils at desks play. The teacher has an organizational and controlling role.

Material environment: Sheet of paper for each pair.

Game duration: 5 -10 min

Benefits of the game: Active work of the class, inner motivation of pupils through competitiveness. The pupils' mutual cross-checking eases the load on the teacher.

Game rules: First we will present the version of the game Enades as published in book (Vankúš, 2006, p. 45). Then we will present the version from the book (Vankúš, 2012, p. 119).

Enades version 1 (Vankúš, 2006, p. 45)

Game procedure: The players deduct any powers of 2, 3 or 5 with an exponent of a non-negative integer from an initial number n (e.g. $n = 100$). Both players take turns and write down the status of the game on the sheet of paper. The player who gets 0 in his/her turn wins. In the following game, the pupils will change the order in which they started the previous game. Players play more games. The lowest number is 2 to make sure that each player has started the same number of games. Pupils will put down the mutual score and submit the record to the teacher. Both the winner and the loser will get a certain number of points for the activity for each game (e.g. 3 points for the winner, 1 point for the loser). A sample game – see figure 1.

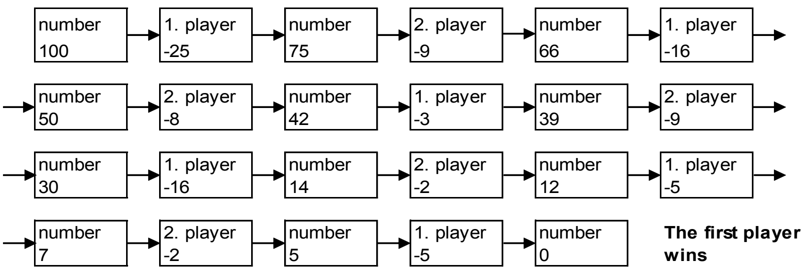


Figure 1: A sample Enades game

Enades version 2 (Vankúš, 2012, p. 115)

Game procedure: In the second version of the game the players deduct any powers of 2, 3 or 5 with an exponent of a positive integer from an initial number n (e.g. $n = 100$). Both players take turns and write down the status of the game on the sheet of paper. The player who gets 0 or 1 in his/her turn wins. All other things are the same as in version 1.

So the differences between the versions are that in version 1 we use non-negative integers as powers, in version 2 we use positive integers. So in version 1 we can also deduct number 1, which we get when we power any number by 0. Winning condition in version 1 is to get 0; in version 2 winning numbers are 0 and 1.

Analysis of the game winning strategy

Before the analysis of the game we let pupils play few games to better understand game mechanics. Just after they played some games we can start with the analysis. Analysis of the game winning strategy differs for version 1 and version 2 of the game, so we will briefly describe them separately.

Winning strategy Enades version 1

Pupils will find out, that some positions in this game are winning and some are losing after some thinking during the playing of the game. Because the winning final position is 0, any number from which we can get to 0 is winning. So, all the non-negative integer powers of 2, 3 and 5 are winning positions. So they are numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 25, 32, 64 and 81.

We can see that all numbers from 1 to 5 are winning positions. When the player is on the number 6, any possible move he/she makes will put the next player on one of these winning positions. So the number 6 is losing position. Any number from which we can get to the number 6 by deducting non-negative integer power of 2, 3 and 5 is again winning position. Let us depict the table with the new winning positions added – see figure 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figure 2: An analysis of winning strategy Enades v. 1

As we can see new losing position is 12. Pupils will soon find out that the next losing position will be 18, 24, and so on. This fact is easy to notice, just looking on some numbers those we can use in the game: 1, 2, 3, 4, 5, 8 and 9. We can see that just 6 and 7 are the numbers from 1 to 10 those are not powers we can deduct in the game. But we can go from 7 to 6 by subtracting 1. So just every number divisible by 6 can be losing position in the game Enades version 1. Any other power we can use in the game is not divisible by 6, so all number divisible by 6 will be the losing positions. So the winning strategy for the first player in the game will be to start e.g. with subtracting 4 to get to 96. That is losing position. Now when second players moves we again do the move so he/she will be on the nearest losing position – number divisible by 6. By this way the first player will win.

Winning strategy Enades version 2

The process of analysis of the winning strategy is the same as for version 1. We will try to find the winning and losing positions. In this version of the game we cannot subtract 1. Initial winning positions are 0 and 1. Any number from those we can get to 0 or 1 by subtracting available powers will be winning position. So they are numbers: 1–6, 8–10, 16, 17, 25–28, 32, 33, 64, 65, 81 and 82.

We can see that in this version the first losing position is number 7. The new winning positions we get by adding all available powers to number 7. Then we get the next losing position, number 13. And so on we can apply this procedure to get all the losing positions in the game. The final table with all the losing positions is in the figure 3.

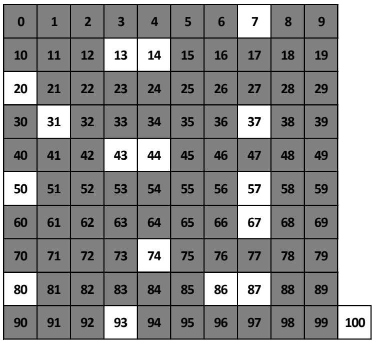


Figure 3: All losing positions, Enades v. 2

In this case the losing positions are not to be found as easy as in version 1. It is because more difficult mechanics of this version of the game. The winning strategy in this version is for the second player, because the initial number 100 is the losing position. After the first move the second player subtracts number so that he/she gets the losing position number. Then he/she after every move of the first player just subtract some of available powers so that he/she gets losing position number. So the first player is after each round in the losing position and he/she loses the game.

Experience from analysing the games with the future mathematics teachers

We have tried to make this activity with the future mathematics teachers those were in the bachelor degree of their study. They had to analyse nine mathematical didactical games: 3D Noughts and Crosses, Bard, Dim, Enades, Snake, Powers, Letter 'L' Travelling, Number of Divisors and Equations (Vankúš, 2012). They had to find the answers to these questions:

1. Has in the game advantage the first player or the second player? Why?
2. Is there a strategy to make a draw for any of players? What is it?
3. Is there a winning strategy for any players? What is it?

They got also additional instructions: The answers on these questions explain and illustrate on concrete examples. If it is difficult to find the answers, try to take smaller game board or fewer objects in the game. Write the answers to the questions for your board dimension or your fewer objects and state also that dimension or number of objects.

The activity was team work; there were 2 teams of 5 members. They had 4 hours for the activity. We will now speak about their result more in detail.

The first group for the question 1 stated concrete scores of two players. So they started their argumentation with examples from games. Further they used in argumentation for this question more mathematically based facts as for game 3D Noughts and Crosses: "Nor the first or second player has the advantage. There are 4^3 possibilities so the chance to win is equal." Or for the game Bard the first team wrote: "The advantage from the first move is compensated by the fact that first player needs to make the numbers divisible by 3 so he has just one third of numbers available. So there is no advantage for the first neither for the second player. What matter is the numbers they use at the beginning and how they use them." The most exact answer had the first group for the question 1 for the game Equations: "The advantage is given by the number of equations. For the odd number the second player wins, for the even number wins the first player."

The second group used for the question 1 also some observation-based arguments. For the game 3D Noughts and Crosses they wrote: "It comes from our observation that the first player has the advantage. When he/she plays optimal he/she wins." For the game Powers they used incomplete analysis: "The second player has the advantage. We tried almost all possible first moves looking if the second player could win and he can win in all of them."

The question 2 about the draw strategy was reduced by students from both teams just to the question if the draw can be in the games or not. They all gave correct answers to this modified question except for the second group for the game 3D Noughts and Crosses, where they answered that there is no possible draw but the correct answer is that draw is possible in this game. The argumentation for this question was usually simple, they just answered yes or no or used logical argument as the first group for the game Powers: "The draw is not possible. Just one player can come to the negative value as the first."

The question 3 about the winning strategy was the most difficult. The groups wrote some strategies those were just playing tips e.g. for the game 3D Noughts and Crosses the second team stated: "The strategy is to start moves in the middle, then we have more possibilities to win and the second player cannot defend all of them." or for the game Snake the first group wrote: "The strategy is to take as much space as possible and to make for the opponent impossible to place his/her snake in the game board." But some answers were very nice and mathematics based. The second group for the game Bard said: "The first player puts 3 to the middle and then he/she just controls the divisibility. The game we can analyze more easy when we use instead of original number 1,…,9 just their remnants after division by 3, so we use just number 0, 1 and 2, each three times." At the end of the activity the first groups did good analysis of the tactics of the games 3D Noughts and Crosses, Bard, Dim and Number of Divisors and found exact strategy of the game Equations. The second group did good analysis of the tactics of the games 3D Noughts and Crosses, Bard and found exact strategy for the games Dim and Enades. After the activity we discussed the answers with the students and we spoke about their good or false results.

The activity was very successful; both teams managed to find some nice answers with good argumentation. They liked the activity and found it good to get know selected mathematical didactical games that can be useful for their teaching practice.

Conclusion

In our paper we dealt with mathematical didactical game Enades. We discussed two versions of this game and found the winning strategy for both. Then we wrote about the analysis of the games strategy as the activity for future mathematics students. We described our experience from this activity and their results and feedback.

References

[1] Burjan, V., Burjanová, Ľ. (1991). Matematické hry. Bratislava: Pytagoras, 1991. 112 p., ISBN 80-85409-00-3

[2] Kohanová, I. (2010). Metóda problem solving v príprave budúcich učiteľov matematiky. In: Acta Mathematica 13. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2010. pp. 127-132, ISBN 978-80-8094-781-1

[3] Pavlovičová, G., Švecová, V. (2009). Pracovné dielne z geometrie. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2009. 102 p., ISBN 978-80-8094-566-4

[4] Pavlovičová, G., Čeretková, S., Melušová, J., Rumanová, L., Sovičová, M., Šunderlík, J. (2012). Experimentujeme v elementárnej matematike. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. 122 p., ISBN 978-80-558-0126-1

[5] Slavíčková, M. (2008). Experimental teaching of arithmetic by using computers. Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic. In: Proceedings ICME 11 Topic Study Group 10. Leuven: University of Leuven, 2008. pp. 103-111, ISBN 978-90-807827-4-7

[6] Vallo, D., Záhorská, J., Ďuriš, V. (2011). Objavujeme sieť štvorstena. In: Acta Mathematica 14. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2011, pp. 231-236, ISBN 978-80-8094-958-7

[7] Vallo, D., Šedivý, O. (2012). Siete kocky - aké a koľko? In: Nové trendy výučby stereometrie v príprave budúcich učiteľov matematiky. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. pp. 6-13, ISBN 978-80-558-0047-9

[8] Vankúš, P. (2006). Zbierka didaktických hier určených na integráciu do vyučovania matematiky na druhom stupni základnej školy. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2006. [online]. Dostupné na internete: http://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/vankus/zbierka.pdf, [28. 03. 2013]

[9] Vankúš, P. (2012). Didaktické hry v matematike. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2012. 144 p., ISBN 978-80-8147-002-8

[10] Vidermanová, K., Uhrinová, E. (2011). Počítač a didaktické hry. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2012. 100 p., ISBN 978-80-558-0035-6

Received on April 25, 2013.

Address

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave, SK – 842 48 Bratislava, e-mail: peter.vankus@gmail.com

Acknowledgement

Príspevok vznikol z podporov grantu KEGA č. 091UK-4/2012 Rozvoj matematickej kultúry riešením úloh bežnej praxe.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ZÁŽITKOVÉ VYUČOVANIE V MATEMATIKE

EXPERIENTIAL EDUCATION IN MATHEMATICS

ZUZANA VITÉZOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok sa zaoberá metódou zážitkového vyučovania (s dôrazom na vyučovanie matematiky), ktorá patrí medzi nové edukačné metódy. Pokúša sa ukázať niekoľko definícií zážitkovej pedagogiky a zážitkového vyučovania a z nich vybrať spoločné závery. V článku uvádzame ukážky zážitkového vyučovania v matematike.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: zážitková pedagogika, zážitkové vyučovanie, zážitok, zážitkové vyučovanie v matematike*

ABSTRACT. *The paper deals the experiential education method (with emphasis on the mathematics education), which is ranked among the new education methods. It tries to show several definitions of the experiential pedagogy and experiential education and to put out common conclusion. In the paper we show samples of the experiential learning in the mathematics.*

KEY WORDS: *experiential pedagogy, experiential education, experience, experiential education in mathematics*

CLASSIFICATION: *A30, D40*

Úvod

„Povedz mi a ja zabudnem. Ukáž mi a ja si možno zapamätám. Zapoj ma a ja pochopím." hovorí jedno čínske príslovie.

Nevyhnutnou podmienkou existencie človeka je učenie sa. No keďže si tento proces vyžaduje niekedy veľa času, námahy a trpezlivosti, nemusí ho mať každý žiak rád. Vo vyučovaní matematiky sa s týmto problémom stretávame pomerne často. Napriek tomu je možné dosiahnuť, aby mal človek z učenia sa radosť. Veď už malé dieťa sa pri spontánnej hre učí a pritom ho toto učenie baví. Ani si možno neuvedomí, že sa učí napríklad matematiku.

Tým, čo sa snaží žiakom pomôcť, prekonať strach zo školy, nechuť k učeniu sa a nadobudnúť radosť, je zážitková pedagogika. Na základe zážitku vedie žiakov k aktívnemu získavaniu vedomostí a poznatkov. Okrem toho ich podporuje vo vyjadrovaní vlastného názoru, myšlienok a emócií, napomáha im rešpektovať názory iných, učí ich tolerancii a spolupráci.

Zážitková pedagogika a zážitkové vyučovanie

Pojmy zážitkové vyučovanie a zážitková pedagogika sú pomerne nové a nie sú zaradené do súboru pedagogických disciplín. Napriek dôkladnému hľadaniu v literatúre, ktorá sa venuje teoretickým poznatkom o didaktike a jej disciplínach, nebolo možné nájsť medzi pedagogickými disciplínami zážitkovú pedagogiku. Průcha [6] vo svojom *Přehlede pedagogiky* uvádza niekoľko členení pedagogických vied. Napríklad podľa použitých metód rozlišuje filozofiu výchovy, sociológiu výchovy, pedagogickú diagnostiku a špeciálnu pedagogiku. Z hľadiska predmetu skúmania pedagogiku rozdeľuje na všeobecnú pedagogiku, všeobecnú didaktiku, technológiu vzdelávania či predmetové didaktiky. Ďalej sa u neho spomína rozdelenie podľa druhov škôl alebo úrovne vzdelania a podľa typu edukačného prostredia.

Dagmar Čábalová [7] delí pedagogické disciplíny na základné, hraničné a aplikované. Medzi základné zaraďuje všeobecnú pedagogiku, teóriu výchovy, komparatívnu pedagogiku, metodológiu pedagogiky a špeciálnu pedagogiku. Medzi hraničné patria podľa nej napríklad pedagogická psychológia, sociálna pedagogika, sociológia výchovy či kybernetická pedagogika. Aplikované pedagogické disciplíny člení podľa vývoja ľudského jedinca, podľa výchovnej inštitúcie a podľa realizácie výchovy a vzdelávania.

Ani jeden autor vo svojom členení však nespomína zážitkovú pedagogiku. Aj preto sa definícia zážitkovej pedagogiky neustále vyvíja a hľadá svoje špecifiká. Absencia jednoznačnej definície zážitkovej pedagogiky sa prejavuje aj tým, že sa využíva množstvo iných pomenovaní. Skôr sa hovorí o metóde výchovy zážitkom, výchovy dobrodružstvom, zážitkovej výchovy. Zrejme to súvisí s prekladom pomenovaní pedagogických smerov používaných v zahraničí, ako napr. adventure education či environmental education. [1] V aplikácii zážitkovej pedagogiky sa uplatňujú a prelínajú viaceré pedagogické smery. Inšpiruje sa globálnou, waldorfskou pedagogikou, ale aj klasickým školstvom, športmi alebo umeleckou činnosťou. [2]

Rôzne prístupy k definícii

V literatúre a časopisoch možno nájsť niekoľko rôznych prístupov ku charakteristike zážitkovej pedagogiky a zážitkového vyučovania. Všetky sa od seba niečím líšia, no možno v nich nájsť aj spoločné črty.

Emília Kratochvílová [3] chápe pedagogiku zážitku ako *„teóriu a metodiku výchovy zážitkom, ktorá sleduje ciele intenzívneho celostného rozvoja osobnosti. Využíva špecifický obsah, formy, metódy a prostriedky výchovy, ktoré sú založené na osobných zážitkoch a získaných skúsenostiach.“*

Jirásek [1] rozumie pod pojmom zážitková pedagogika *„teoretické uchopenie a analýzu takých výchovných procesov, ktoré pracujú s navodzovaním, rozborom a reflexiou zážitkových udalostí za účelom získania skúseností, ktoré sa dajú preniesť do ďalšieho života.“*

Podľa Hanuša [4] je možné zážitkovú pedagogiku chápať aj ako teóriu výchovy k prežívaniu.

Asociácia zážitkovej pedagogiky (AEE – Association for experiential education) charakterizuje zážitkovú pedagogiku ako proces, v ktorom učiaci sa získava prostredníctvom priameho zážitku vedomosti, zručnosti a hodnoty.

Nemecký sociológ Willy Klawe a psychológ Wolfgang Bräuer [5] tvrdia, že základným pojmom zážitkovej pedagogiky je zážitok, ktorý vnímajú ako pedagogické médium. Tento zážitok predstavuje niečo neznáme, dobrodružné, potenciálne nebezpečné, ale napínavé, a teda predstavuje protiklad k všednému dňu.

Štefan Švec [8] vo svojom *Anglicko-slovenskom lexikóne pedagogiky a andragogiky* uvádza, že ide o vzdelávanie založené na skúsenostiach a zážitkoch.

Hanuš a Chytilová [4] vidia nasledovné charakteristiky zážitkovej pedagogiky:

- zakotvenie zážitku do širších súvislostí
- znalosť a analýza navodzovaných situácií
- cielené vyvolanie zámerného zážitku
- spracovanie zážitku
- prevedenie do skúsenosti

Medzi prvky zážitkovej pedagogiky Chytilová a Hanuš [4] zaraďujú učiteľa/inštruktora, okamžitú, dôslednú aplikáciu poznatku a čas pre reflexiu a spätnú väzbu. Podľa Kapšovej [4] sú v zážitkovej pedagogike spojené zážitok, vnímavosť, poznanie a správanie, a pokúša sa zapojiť tiež emócie, predstavivosť, fyzické telo a intelekt. Tvrdí, že pedagogický zážitok spočíva v sebareflexii, teda pre nadobudnutie poznatku sú potrebné okrem samotnej aktivity aj reflexia a upevnenie si nadobudnutého poznatku alebo skúsenosti.

Zážitkové vyučovanie v matematike

Zážitkové vyučovanie zahrňuje v sebe široké spektrum vyučovacích metód a foriem. Uplatňuje sa tu tak samostatná ako aj skupinová práca, využívajú sa matematické hry, projekty, hádanky, exkurzie. Dôležité však je, aby žiaci vedeli, prečo sú zapojení do danej aktivity. [11]

Zapojiť myšlienku zážitkového vyučovania o aktívnom učení sa žiakov do matematiky je ťažké, pretože matematika je abstraktná veda. Autori Hartshorn a Borenová vo svojom článku *Experiential Learning of Mathematics: Using Manipulatives* považujú za jednu z možností zaradenia zážitkového vyučovania do matematiky používanie predmetov, ktorými môžu žiaci počas hodiny manipulovať. Myslia tým nielen s modelmi telies, ako sú kocka, ihlan a podobne, ale aj manipuláciu s predmetmi ako sú žetóny, hracie kocky, rôzne stavebnice. [12]

Spojeniu matematiky, zážitkového vyučovania a medzipredmetových vzťahov sa na Slovensku venovalo len niekoľko záverečných prác, kde sa zameriavali autori na iné predmety, nie na matematiku. V Českej Republike bola na Univerzite v Olomouci napísaná diplomová práca [9] k tejto téme. Jej autor sa pokúsil využiť zážitkové vyučovanie vo vyučovaní matematiky v prvom ročníku osemročných gymnázií. Vytvoril sadu piatich pohybových aktivít súvisiacich s učivom o osovej súmernosti. Pri realizácii svojho výskumu použil štyri metódy: testy (pretest a posttesty), experiment, pozorovanie a anketu na zistenie spätnej väzby od žiakov.

Ako príklad zo spomínanej diplomovej práce uvedieme hru hádzanie papierovou guľou, ktorá bola využitá v experimente. Ku hre je potrebná papierová guľa pre každého. Možno ju hrať v triede. Na začiatok učiteľ určí os súmernosti, podľa ktorej hráči hádžu papierovú guľu z miesta vzoru na miesto obrazu. Hádžu len tí, ktorí majú komu hádzať. Nehádže sa o stenu ani na prázdne miesto. Hráči sa kontrolujú navzájom.

Autor celej diplomovej práce a experimentu vyvodil počas svojej výskumnej práce niekoľko záverov týkajúcich sa nielen výsledkov experimentu, ale aj zážitkového vyučovania a prípravy s ním spojenej. Posttest II ukázal, že z hľadiska uchovania si stálych vedomostí dopadli výrazne lepšie žiaci z experimentálnej skupiny. Z výsledkov ankety vyplynulo, že respondentov dané pohybové aktivity počas hodín venovaných osovej súmernosti bavili a uvítali by ich aj častejšie.

Návrhy využitia zážitkového vyučovania v matematike

Ďalšou možnosťou, ktorá sa v zážitkovom vyučovaní využíva, sú skupinové súťaže na vyučovacej hodine, pri ktorých sa rozvíjajú u žiakov vzájomné vzťahy a spolupráca. Napríklad hra *Milionár* na hodine matematiky. Žiakov je možné rozdeliť na dva alebo viac tímov (je možné ich rozdeliť napríklad na chlapcov a dievčatá). Ku každej z pripravených otázok dostanú tri alebo štyri možnosti. Za každú správnu odpoveď získajú bod. Vyhráva tím, ktorý získa najviac bodov. Táto forma je vhodná hlavne na opakovanie a upevnenie matematického učiva.

Podobne sa dajú využiť matematické hádanky, ktoré v sebe ukrývajú matematický algoritmus. Takéto hádanky majú nielen zábavnú funkciu, ale tiež motivujú žiakov k odhaľovaniu zákonitostí, ktoré v danej hádanke platia. Ako príklad uvedieme jednu z hádaniek, ktoré boli využité na Vedeckom jarmoku v obchodnom centre Mlyny v Nitre v roku 2012. Zadanie je nasledovné:

- Mysli si ľubovoľné jednociferné číslo okrem nuly.
- Vynásob ho číslom 9.
- Sčítaj číslice čísla, ktoré si dostal.
- Od výsledku odčítaj číslo 5.
- Povedz si v duchu abecedu (A, B, C, D, E, F, ...) a na písmeno, ktoré sa v abecede nachádza na pozícii čísla, ktoré ti vyšlo v kroku 4, si pomysli názov štátu v Európe.
- Na nasledujúce písmeno v abecede si pomysli dopravný prostriedok.
- Na nasledujúce písmeno si pomysli farbu.
- V poslednom kroku sa už ten, kto dáva hádanku zahrá na jasnovidca a opýta sa: „Prečo si myslíš, že v Dánsku jazdia fialové električky?

Takáto hádanka by mala vzbudiť u žiakov zvedavosť a záujem o postup alebo princíp, ako zadávateľ hádanky prišiel na to, čo hádačom vyšlo.

Zaujímavou možnosťou, ako žiaci môžu „zažiť“ matematiku je, aby si žiaci naplánovali výlet alebo exkurziu. V prvom rade sa musia spoločne rozhodnúť, aké miesto by radi navštívili. Ich prvou úlohou je zisťovanie a prepočítavanie, koľko finančných prostriedkov budú potrebovať na daný výlet. Pritom musia zohľadniť niekoľko premenných, ako sú trvanie výletu (či idú na jeden deň alebo na dlhšiu dobu), počet osôb, doprava a podobne. Následne musia vymyslieť, ako si dané peniaze zarobia, pričom výber aktivít je len na nich. Už tu začína aktívne učenie sa, pretože úlohy vychádzajú z bežného života žiakov a sú s ním spojené.

Počas výletu alebo exkurzie môžu tiež riešiť matematické úlohy a problémy týkajúce sa rôznych oblastí matematiky:

1. Grafy a vzťahy: Žiaci môžu dostať zadanie, aby nakreslili graf, ktorý bude znázorňovať, množstvo peňazí zarobených v priebehu hodiny (minúty) za predané predmety a mali by dokázať pracovať s grafom.

2. Pomery a percentá: Počas výletu môžu medzi ľuďmi robiť anketu a pýtať sa napríklad na to, ako dlho už na žiakmi zvolenom mieste žijú. Úlohou žiakov by bolo ukázať pomer ľudí, ktorí v danej lokalite žijú viac ako dvadsať rokov a ktorí menej ako dvadsať rokov. Výber anketovej otázky závisí od voľby miesta. Je možné žiakov rozdeliť na niekoľko skupín a každej skupine prideliť inú anketovú otázku. Výstupom tejto úlohy by mohla byť krátka prezentácia vo forme tabuľky alebo grafu na základe získaných odpovedí.

3. Rýchlosť: Ak sa nachádzajú žiaci v prírode alebo na mieste, kde nejazdia autá, možno odhadnúť napríklad vzdialenosť 250 metrov pozdĺž rieky alebo chodníka. Úlohou žiakov je, aby si zvolili nejaký druh pohybu, okrem obyčajnej chôdze a behu (napr. štvornožky) a vyjadrili rýchlosť, akou prešli danú dráhu v metroch za minútu.

4. Mierka (meranie): Úloha žiakov spočíva v hľadaní podobných objektov, ktoré si majú nakresliť. Následne majú odhadnúť mierku zmenšenia alebo zväčšenia jedného objektu v porovnaní s druhým. Taktiež môžu počítať alebo odhadnúť plošný obsah nájdených a nakreslených objektov a porovnávať ich.

Po návrate z externého prostredia do triedy by mali žiaci diskutovať o tom, čo sa počas výletu naučili, aké informácie zozbierali, ako postupovali pri riešení úloh, ktoré im boli zadané. Môžu si zodpovedať otázku, prečo tak postupovali a či to bol jediný spôsob, ako sa dostať k výsledku.

Záver

Zážitková pedagogika a zážitkové vyučovanie nie sú jednoznačne definované a nie sú zaradené medzi pedagogické vedy. Každý autor ich definuje a chápe trochu inak. Napriek tomu je však možné vo všetkých definíciách nájsť niekoľko zhodných čŕt. Vo všeobecnosti tvorí základ zážitkovej pedagogiky vlastná aktivita, cez ktorú žiak alebo vychovávaný získava zážitky, ktoré sa využívajú na učenie a rozvoj osobnosti. Do aktivity je zapojený človek fyzicky, intelektuálne a aj emočne. Takýto spôsob získavania poznatkov a skúseností je dynamickejší. Čím je aktivita fyzicky či psychicky náročnejšia a vyžaduje si viac energie, tým je zážitok intenzívnejší, zapamätateľnejší a využiteľný pre výučbu. Dôležitou je však aj reflexia a upevnenie získaného poznatku, zvlášť vo vyučovaní matematiky. Okrem vedomostí sa u žiakov rozvíja aj osobnosť, a to v oblasti spolupráce, komunikačných zručností, riešenia problémov a konfliktov, socializácie a sociálnych zručností. Napriek tomu, že matematika je veda abstraktná, je možné aj tu využiť metódy zážitkového vyučovania. Alternatív a možností je hneď niekoľko. Záleží pri tom len na vyučujúcom, akú metódu a prístup si zvolí. Veď už samotná manipulácia s predmetmi, ako sú modely telies, či objekty každodenného života nachádzajúce sa v triede, v sebe nesie istý zážitok u žiakov. Ako ďalšia možnosť sa naskytujú matematické hry a hlavolamy využívané vo vyučovaní matematiky alebo matematická exkurzia.

Literatúra:

[1] Jirásek, I. (2004). Vymezení pojmu zážitková pedagogika. In: Gymnasion, 2004, č.1, s. 6-16

[2] Kapšová, J. (2008). Zážitková pedagogika. In: Zoom – m: zaostrené na mladých. Bratislava: Rada mládeže Slovenska, 2008. S. 4 – 6. ISSN 1336–4340

[3] Kratochvílová, E. (2010). Pedagogika voľného času. Bratislava: Veda, 2010. 356 s. ISBN 978-80-808-2330-6

[4] Hanuš, R. – Chytilová, L. (2009). Zážitkově pedagogické učení. Praha: Grada Publishing, 2009. 192 s.. ISBN 978-80-247-2816-2

[5] Klawe, W. – Bräuer, W. (1998). Erlebnispädagogik zwischen Alltag und Alaska: Praxis und Perspektiven der Erlebnispädagogik in den Hilfen zur Erziehung. Mníchov: Juventa Verlag, 1998. 208 s. ISBN 3-7799-1391-7

[6] Průcha, J. (2006). Přehled pedagogiky. Praha: Portál, 2006. 272 s. ISBN 80-7178-944-5

[7] Čábalová, D. (2011). Pedagogika. Praha: Grada Publishing, 2011. 271 s. ISBN 978-80-247-2993-0

[8] Švec, Š. (2008). Anglicko-slovenský lexikón pedagogiky a andragogiky. Iris, 2008. 323 s. ISBN 978-80-89256-21-1

[9] Marek, J. (2011). Využití zážitkové pedagogiky při výuce matematiky (Diplomová práca). Olomouc, 2011. 106 s.

[10] http://www.aee.org/about/whatIsEE

[11] Wurdinger, S. D. 2005. Using experiential learning in the classroom: practical ideas for all educators. Lanham, Md.: ScarecrowEducation, 2005.

[12] Hartshorn, R. – Boren, S. (1990). Experiential Learning of Mathematics: Using Manipulatives. ERIC Digest, 1990. 7 s. Dostupné na internete: http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED321967.pdf

[13] Ingwalson, G. (2010). Exploring Experiential Learning. In: The Researcher, 2010, Vol. 23(1), s. 30 – 40. Dostupné na internete: http://www.nrmera.org/PDF/Researcher/Researcherv23n1Ingwalson.pdf

Článok prijatý dňa 24. apríla 2013.

Adresa autorov:

Mgr. Zuzana Vitézová
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK - 949 01 Nitra, e-mail: zuzana.vitezova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

EXPRESSIONS WITH VARIABLES AND EQUATIONS IN ELEMENTARY SCHOOL THROUGH SOLVING OF REAL-LIFE PROBLEMS

VÝRAZY S PREMENNOU A ROVNICE NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE PROSTREDNÍCTVOM RIEŠENIA PROBLÉMOV BEŽNÉHO ŽIVOTA

PETER VRÁBEL[1] – MONIKA KRČMÁROVÁ – ANNA HREŠKOVÁ

ABSTRACT. *The article is focused on a research of appropriate procedures in introduction of concepts of variable, expression with variable and equation in elementary school. Problem situations with real-life context whose mathematical models are created with help of the concepts mentioned are formulated.*

KEY WORDS: *variable, expression with variable, equation, problem based task*

ABSTRAKT. *Článok je zameraný na skúmanie vhodných postupov zavedenia pojmov premenná, výraz s premennou, rovnica na základnej škole. Formulujú sa také problémové situácie bežného života, ktorých matematické modely sú vytvorené pomocou uvedených pojmov.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: premenná, výraz s premennou, rovnica, problémová úloha*

CLASSIFICATION: *C70, D40, D50, U40*

Introduction

Teaching of mathematics should lead to building the relationship between mathematics and reality, to gaining experience with mathematization of a real-life situation and with creating of mathematical models. Not very impressing results of Slovak pupils' assessment in international PISA measurements and the new state educational program encourage mathematical education from elementary school to be more oriented on development of knowledge and skills in solving of real-life situation problems, which need to be imposed and formulated. These requirements are quite well met by the latest mathematical textbooks for grades 5 – 8 by authors J. Žabka, P. Černek [5]. However, there is never enough of good and interesting practical problems. Therefore it is necessary to create collections of such problems, proven and taught in real elementary school conditions ([1],[2],[3]). Such problems are then widely applied in integration in the mathematical education process. This contribution is oriented on formulation of such real-life context problem situations whose mathematical models are created using concepts of variable, expression with variable, equation.

Expression with Variable and Equation with the Unknown in Elementary School

The concept of expression with variable is more-less used only in elementary school in propaedeutics of dependencies (functions) and equations with one unknown. As such, it is not featured in mathematical terminologies ([4]). But the truth is it is connected with functions. This concept is systematically prepared with use of the concept of expression with variable and dependency of two values. The concept of expression with variable is

[1]Corresponding author

formed through problems (tasks) with comparing, containing phrases: “several more”, “several less”, “several times more”, “several times less”. Investigation in such problems leads to formal expressions with variable, e.g. $2+d; 4-T; 5x; 21Y; 3{,}7+1{,}5x,$ where after substitution of a variable (d, T, x, Y) with a number we get a numerical expression, i.e. a problem to calculate. The result of this computation is called value of expression for a selected value, which we are looking for. Expressions with variable are then used to express the relation (dependency) between two variables (values). For example the notation

$$b = 2 + d, \text{ respectively } y = 3{,}7 + 1{,}5x$$

represents the dependency between values b and d, respectively y and x. The letter b respectively y may be seen as (mainly in initial simple tasks) as a name of expression $2+d$, respectively $3{,}7+1{,}5x$. Often we want the value of expression to fulfill some requirement, e.g. to equal some previously given number. This is common when solving real-life situations, where we want the result to meet “our expectations”. This is how we come to the concept of equation, where the variable “becomes” the unknown. In general, we search for such number (numbers) that after substituting this number (numbers) in the equation two expressions with the same variable have the same value. Thus we search for an unknown number (numbers) with the said property. But now we already arrive to operations with expressions, equivalent modifications of equations.

Real-Life Context Problems with Models with Variable

Learning and teaching of mathematics can be made more attractive with the option of solving real problems with real-life context. This may result in positive attitude of pupils toward solving if such problem situations, as they may have already encountered or probably will encounter similar situations. This paragraph contains examples of such problem based tasks leading to creation of a simple mathematical model using expressions with variable.

Car Consumption

Cars have different average fuel consumption when driving in a city and when driving outside the city. For example Škoda Fabia has a quoted average extra urban consumption of 5,6 liters of fuel per 100 km and an urban consumption of 9,6 liters per 100 km.

Task 1. Fill in the following table of the average fuel consumption, if we are driving Fabia only in urban traffic.

km	50	100	150	215	x
consumption		9,6			

[$9{,}6 \cdot \frac{1}{2} = 9{,}6 \cdot 0{,}5 = 4{,}8;$ $9{,}6 \cdot \frac{3}{2} = 9{,}6 \cdot 1{,}5 = 14{,}4;$ $9{,}6 \cdot \frac{215}{100} = 9{,}6 \cdot 2{,}15 = 20{,}64;$ $9{,}6 \cdot \frac{x}{100}$]

Task 2. Mr. Rosina drove 1 000 km per month, while x km in the extra urban traffic. Let S denote the overall fuel consumption in liters per month. Depending on x, how many liters of fuel were consumed? State S as an expression with a variable x.
[Extra urban consumption = $5{,}6 \cdot \frac{x}{100}$; urban consumption = $9{,}6 \cdot \frac{1000-x}{100}$; consumption per month = $S = 5{,}6 \cdot \frac{x}{100} + 9{,}6 \cdot \frac{1000-x}{100}$.]

On Sale

Shops often offer their stocks on so called *sales.*

The advertising leaflet of MODERNA shop included among other things the offer that if a total price of a purchase is at least 250 euro you will get a 40% discount. There was no discount on purchases under 250 euros.

Mrs. Mercantile originally intended to make a purchase worth 75 euro. However, the 40% discount attracted her. She agreed with her friend Mrs. Coin that they would merge their finances. Mrs. Mercantile put in their collective funds 90 euro, Mrs. Coin 60 euro and they made their purchase together.

Task 1. Did the combined 150 euro funds of Mrs. Mercantile and Mrs. Coin suffice the combined purchase worth 250 euro with the discount?

Task 2. If both friends bought merchandise costing 125 euro, what discount in % had in reality Mr. Coin with regard to her 60 euro contribution to the collective fund?

[Mrs. Coin saved 125 – 60 = 65 euro. Pupils can count % from 125:
1% of 125 equals the number $\frac{125}{100}$, so 1,25; 50% of 125 equals $\frac{125}{100} \cdot 50$, so 62,5;
52% of 125 equals $\frac{125}{100} \cdot 52$, so 65; x % of 125 equals $\frac{125}{100} \cdot x$. We may also think like this: 1% of 125 is 1,25; then 65 is $\frac{65}{1{,}25}$ percent of 125 and $\frac{65}{1{,}25} = 52$.]

Task 3. How should Mrs. Mercantile and Mrs. Coin fairly compensate, if both friends bought merchandise costing 125 euro and a criterion for a fair compensation is that the offered discounts (achieved benefits) of both friends will be at the same ratio as the sums of money added, namely 3:2.

[Both had a 125·0,4 = 50 euro discount. Mrs. Coin will give Mrs. Mercantile a sum so that their collectively saved money is in a ratio 3:2.

Mrs. Coin will give Mrs. Mercantile	5 euro	10 euro	x euro
Saved money of Mrs. Mercantile	55	60	50+x
Saved money of Mrs. Coin	45	40	50-x
Saved money ratio	$55:45 = 11:9$	$60:40 = 3:2$	(50+x):(50-x)

Mrs. Coin will give Mrs. Mercantile 10 euro as compensation, what could have been guessed.]

Didactic note. The way of compensation in the task 3 was proposed and enforced by Mrs. Coin. The easiest fair way of compensation considering the purchase would be to contribute to their collective funds with the same amount of money. This would be achieved if Mrs. Coin gave Mrs. Mercantile 15 euro. The truth was that Mrs. Coin did not want to join this action. Therefore Mrs. Mercantile persuaded her by offering her to share the money in a way Mrs. Coin would propose. Mrs. Coin was a walking calculator. The way of compensation may be left upon pupils' discussions as part of task 4.

Saving

Banks offer a variety of interest-bearing financial products with different penalties for early deposit withdrawals. If the financial market is stable, the interest rate of deposit with a longer notice period is usually higher. However, the disadvantage is the longer commitment period.

Bank A provides a 3% interest rate with annual term deposit. In case of early deposit withdrawal up to 80 days since the deposit opening no interest is given, and in case of 80 days earlier withdrawal interests from the withdrawn sum are reduced by 80 days. Bank B offers an interest rate of 4% for annual term deposit. In case of earlier withdrawal the interest rates of the withdrawn sum changes in the following way:

Period of deposit from- to (number of days) interest rate

0 - 29	0,00%
30 - 89	0,50%
90 - 179	1,00%
180 – 269	1,50%
270 – 364	2,00%
365	4 %.

Task 1. Calculate the interests in banks A, B after every 60 days and after a year from the deposited sum of 10 000 euro.

[In the bank A, the interest per day equals $\frac{300}{365} = 0{,}8219$ euro and per *x* days equals (*x*-80).0,8219 euro except the withdrawals after 60 days and 1 year . In the bank B the interest depends not only on the number of interest-bearing days, which is not decreasing, but also on the changing interest rate.]

x	60	120	180	240	300	360	365
A	0	32,88	82,19	131,50	180,82	230,13	300
B	8,22	32,88	73,97	98,63	164,38	197,26	400

Task 2. Express the difference between interests in the bank A and in the bank B depending on the number of days since the deposit of 10 000 euro from 90 days to 179 days. Decide about the profitability of making a deposit in both banks for 90 and 179 days.

[Interest in the bank A after x days equals $(x-80)\cdot 0{,}8219$ euro, while we can substitute x with a random number from 90 to 179. Interest rate in the bank B for the deposit period 90 – 179 days is unchanged and equals 1%. Therefore interest rate in the bank B for every interest-bearing day equals $\frac{100}{365}$ eur $=$ 0,2739 eur.

After x days the interest in this bank equals $x\cdot\ 0{,}2739$ euro, while we can substitute x with a random number from 90 to 179. The difference between interests in the bank A and the bank B depending on the number of days of deposit input from 90 to 179 days is expressed by the expression $(x-80)\cdot 0{,}8219 - x\cdot 0{,}2739$. If $x = 90$, the difference equals $8{,}22 - 24{,}65 = -16{,}43$. That means, in case of withdrawal of the deposit after 90 days, it is more beneficial to have the deposit in the bank B. If $x = 179$ then the difference equals

$$(179-80)\cdot 0{,}8219 - 179\cdot 0{,}2739 = 32{,}34.$$

So in the case of withdrawal of the deposit after 179 days it is more beneficial to have the deposit in the bank A.]

The „Clever" School

The primary School on the Clever street is famous for its talented pupils. This year there are also interesting numbers of pupils in classes at the lower grade. There are two classes at grade 1: IA and IB, and one class at each one of grades 2, 3 and 4. There are 16 pupils in the I.A class, 7 boys and 9 girls, and 24 pupils in the class at grade 2.

Task 1. We know that if four pupils from the I.A class would move to the I.B, it would be exactly two times fewer pupils in the I.A than in the I.B. What is the number of pupils in the I.B?

[There is intentionally given unnecessary information (7 boys and 9 girls in the I.A). If we denote by *x* the number of students in the I.B, the task leads to an equation $12.2 = x + 4$, where we get the solution $x = 20$. However, beware of the false equations $\frac{12}{2} = x + 4$, or $12 = 2.(x + 4)$, which often appear in pupils´ solutions. This task can be also easily solved by judgment.]

Task 2. The sum of pupils in the I.B and the I.A reduced by the proportion of pupils in I.A and the smallest even-integer indicates the number of pupils in the grade 3 class. What is the number of pupils in the third class?

[Since the smallest even integer is 2, the number of students in the grade 3 class is $(16 + 20) - (16/2) = 28$.]

Task 3. We know that the total number of grade 3 and grade 2 pupils is 16 more than the number of all first graders. Furthermore, if 5 boys and 3 girls from fourth grade would not come to school, there will be just as many fourth graders as pupils in the grade 2. What´s the number of pupils in the grade 2 a what´s the number of pupils in the grade 4?

[Let *x* denote the number of pupils in the second grade. We solve the equation $x + 28 = (16 + 20) + 16$, where *x* is 24. Let´s find out what is the number of fourth graders. The information "If 5 boys and 3 girls from fourth grade would not come to school ..." is irrelevant, dividing students into boys and girls is not important. Let *x* denote the number of pupils in the fourth grade. Eight of them will not attend school, so we solve the equation $x - 8 = 24$, where *x* is 32, which is the number of fourth graders.

Task 4. Let *x* be the number of students in the class I.A. Express the number of all pupils in the grades (1-4) (and simplify it).

[Number of pupils for each class is: 16 (I.A), 20 (I.B), 24 (2.), 28 (3.), 32 (4.). Every "following" class has 4 more pupils than the "previous" class (each number of students represents one member of arithmetic progression with difference of 4), so the number of all pupils is $x + (x + 4) + (x + 8) + (x + 12) + (x + 16) = 5x + 40$.]

Task 5. Now let *x* be the number of students in the second grade. Express the number of all pupils in the grades (1-4).

Computing with Temperatures

Absolute zero is the theoretically lowest possible temperature, at which all motion ceases and at the same time it is the null point of the Kelvin scale. In Celsius scale, which is more commonly used in Slovakia, the absolute zero has the value approximately -273,16 °C. Another scale, mostly used in the USA, is the Fahrenheit scale. A German physicist Fahrenheit took as the null point of this scale, i.e. 0°F, the lowest temperature he was able to measure during his experiment in 1724.

When converting units of these scales we use the following equations, where K denotes temperature in Kelvins, °F in Fahrenheit and °C in Celsius:

$$K = 273 + {}^{\circ}C$$

$${}^{\circ}F = \frac{9}{5}{}^{\circ}C + 32$$

Task 1. Three friends – Joe, Erica and Matt were given a physics homework to measure the outside temperature ten-times per day and to compute the average temperature for that day according to the measured data. To make this task more interesting, each one of them measured the temperature using a different scale. As it was a cold day in January, Joe measured the average temperature -8°C, Erica got as a result 264 K and Matt, who measured the temperature in Fahrenheit, got the average temperature of 14°F. What average temperatures did each one of these three pupils measured on the Celsius scale?

[Joe measured -8°C, so this result doesn't need further editing. Erica got the value 264 K. If we denote the resulting number of Celsius degrees by x, from the given equations we get: $264 = 273 + x$, and from this equation it is easy to find that $-9 = x$. So Erica measured $-9°C$ as the average temperature. Matt's result also require to be converted into Celsius scale, we obtain the equation $14 = \frac{9}{5}x + 32$, after the modification we have $-18 = \frac{9}{5}x$, and from this we get $-10 = x$. Thus Matt's average measured temperature equals -10°C.]

References

[1] László, B. et al.: *Matematika (metodická príručka pre učiteľov 5. ročníka)*(Mathematics – Methodical Handbook for 5. Grade Teachers). FCES CPU Nitra (2011), ISBN 978-80-8094-972-3, 83 pp. ISBN 978-80-8094-972-3. In Slovak.

[2] László, B. et al.: *Matematika (Zvyšovanie kľučových matematických kompetencií, zbierka problémových situácií pre 6. ročník základných škôl*) *(Mathematics – Increasing the Key Mathematical Competencies, Collection of Problem Situations for Grade 6)*. FCES CPU Nitra (2012), CD, ISBN 978-80-558-0030-1. In Slovak.

[3] László, B. et al.: *Matematika (Zvyšovanie kľučových matematických kompetencií, zbierka problémových situácií pre 7. ročník základných škôl) (Mathematics – Increasing the Key Mathematical Competencies, Collection of Problem Situations for Grade 7).* FCES CPU Nitra (2013), CD, ISBN 978-80-558-0248-0. In Slovak.

[4] Medek, V. et al.: *Matematická terminológia (Mathematical Terminology).* SPN, Bratislava (1975). In Slovak.

[5] Žabka, J. – Černek, P.: *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. Ročník gymnázií s osemročným štúdiom (1. časť) (Mathematics for Grade 8 and Grade 3 of 8-year*

Study Grammar Schools, Part 1) Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava (2011), ISBN 978-80-8120-107-3. In Slovak.

Received on April 18, 2013.

Addresses

Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
Mgr. Monika Krčmárová
Mgr. Anna Hrešková
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, 94974 Nitra;
e-mail: pvrabel@ukf.sk, monika.krcmarova@ukf.sk, anna.hreskova@ukf.sk

Acknowledgement

This contribution was prepared with support of the Slovak Ministry of Education grant project No. 015 UKF – 4/2012 "Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií II" (*Increasing the Key Mathematical Competencies II).*

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

I – CONVERGENCE AND I - CONTINUITY OF THE FUZZY NUMBER-VALUED FUNCTIONS

I – KONVERGENCIA A I – SPOJITOSŤ FUNKCIÍ S HODNOTAMI VO FUZZY ČÍSLACH

PETER VRÁBEL – MARTA VRÁBELOVÁ

ABSTRACT. *In this paper we study a convergence and continuity of the fuzzy number-valued functions with respect to an ideal. We prove some basic properties this convergence and continuity.*

KEY WORDS: *fuzzy number, I-convergence, I-continuity*

ABSTRAKT. *Tento článok pojednáva o konvergencii a spojitosti funkcií s hodnotami vo fuzzy číslach vzhľadom na nejaký ideál. V článku sú dokázané základné vlastnosti takejto konvergencie a spojitosti.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *fuzzy číslo, I-konvergencia, I-spojitosť*

CLASSIFICATION: *26A03 26A15, 54A20, 03E72, I19*

Introduction

I-convergence and *I*-continuity of the real-valued functions was defined by T. Šalát, P. Kostyrko and W. Wilczyński in [2]. It is possible find further results and some generalizations of this problem in papers [1], [3], [5]. We generalize *I*-convergence and *I*-continuity for the fuzzy number-valued functions. The fuzzy set-valued mappings are studied in various settings in the last few years. For example the integrals of fuzzy set-valued mappings have applications in mathematical economics and optimal control theory.

I-convergence of fuzzy numbers

In this section we deal with the structure of fuzzy numbers and its *I*-convergence.

Definition 1. The fuzzy number is any function $u: R \to [0,1]$, where *R* is the set of real numbers, satisfying the following conditions:

(1) there exists $x_0 \in R$ such that $u(x_0) = 1$,

(2) the $\alpha -$cut set $(u)^\alpha = \{x \in R; u(x) \geq \alpha\}$ is convex for every $\alpha \in (0,1]$,

(3) u is upper semi-continuous, i.e. any α - cut $(u)^\alpha$ is a closed subset of R,

(4) the support $\overline{\{x \in R; u(x) > 0\}}$ of the function u is a compact set.

The set of fuzzy numbers we denote *E*. The set of real numbers can be embedded into *E*; the real number *z* is identified with the fuzzy number $\bar{z} = \chi_{\{z\}}$, i.e. with the function

$$\chi_{\{z\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = z \\ 0, & x \neq z. \end{cases}$$

For the proof of the following lemma see [4].

Lemma 2. If $u \in E$ then

(a) $(u)^{\alpha}$ is a closed interval for every $\alpha \in (0,1]$,

(b) $(u)^{\alpha_2} \subset (u)^{\alpha_1}$ whenever $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$,

(c) if $\alpha_n \uparrow \alpha$, then $\bigcap_{n=1}^{\infty} (u)^{\alpha_n} = (u)^{\alpha}$.

Conversely, if system of intervals $\{(M)^{\alpha}; \alpha \in [0,1]\}$ fulfills (a) – (c), then there exists a unique $u \in E$ such that $(u)^{\alpha} = (M)^{\alpha}$ for every $\alpha \in (0,1]$.

The sum of fuzzy numbers u, v is a fuzzy number z such that

$$z = u + v \iff (z)^{\alpha} = (u)^{\alpha} + (v)^{\alpha}$$

for every $\alpha \in (0,1]$, where the sum of intervals $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$.

The partial ordering on the set E is defined in the following way

$$u \le v \iff (u^{\alpha}) \le (v)^{\alpha}$$

for every $\alpha \in (0,1]$, where $[a,b] \le [c,d] \iff (a \le c \wedge b \le d)$.

The Hausdorff distance d of closed possibly degenerate intervals is defined by equation

$$d([a,b],[c,d]) = \max\{|c-a|, |d-b|\}.$$

We can define the metric $D : E \times E \to [0,\infty)$,

$$D(u,v) = \sup\{d((u)^{\alpha},(v)^{\alpha}); \alpha \in (0,1]\}.$$

Then (E, D) is a complete metric space. The following properties of the metric D can be found in [6]:

(i) $D(u+w, v+w) = D(u,v)$ for all $u, v, w \in E$,

(ii) $D(u+v, \mathrm{w}+z) \le D(u,w) + D(v,\mathrm{z})$ for all $u, v, w, z \in E$,

(iii) $D(u+v, \overline{0}) \le D(u,\overline{0}) + D(v,\overline{0})$ for all $u, v \in E$,

(iv) $D(u+v, \mathrm{w}) \le D(u,w) + D(v,\overline{0})$ for all $u, v, w \in E$.

The product of fuzzy numbers u, v is a fuzzy number z such that

$$z = u \cdot v \Leftrightarrow (z)^{\alpha} = (u)^{\alpha} \cdot (v)^{\alpha} \text{ for every } \alpha \in (0,1],$$

where the product of intervals $[a,b] \cdot [c,d] = \{xy; x \in [a,b] \wedge y \in [c,d]\}$. The absolute value of a fuzzy number u is a fuzzy number $|u|$ such that $(|u|)^{\alpha} = |(u)^{\alpha}|$ for every $\alpha \in (0,1]$, where $|[a,b]| = \{|x|; x \in [a,b]\}$.

For any intervals $[a,b], [c,d], [e,f]$

$$d([a,b] \cdot [e,f], [c,d] \cdot [e,f]) \le \max\{|e|,|f|\}. d([a,b] \cdot [c,d]).$$

Let $u, v, z \in E$ and let $|z| \leq K$, $K \in R^+$. Then for every $\alpha \in (0,1]$ $(|z|)^\alpha \subseteq [0, K]$ and

$$d((uz)^\alpha, (vz)^\alpha) \leq d((Ku)^\alpha, (Kv)^\alpha) = Kd((u)^\alpha, v^\alpha),$$

consequently $D(uz, vz) \leq KD(u, v)$.

Lemma 3. If a sequence $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ of fuzzy numbers converges in metric space (E, D) to $u \in E$, then there is $K \in R$ such that $u_n \leq K$ for every $n \in N$.

Proof. There is $m \in N$ such that $D(u_n, u) < 1$ for any $\in N, m < n$. Denote

$$(u_n)^\alpha = \left[a_n^{(\alpha)}, b_n^{(\alpha)}\right], u^{(\alpha)} = \left[a^{(\alpha)}, b^{(\alpha)}\right],\ n \in N.$$

For any $\alpha \in (0,1]$ we have

$$\left|b_n^{(\alpha)} - b^{(\alpha)}\right| \leq d((u_n)^\alpha, (u)^\alpha) \leq\ D(u_n, u) < 1, m < n.$$

Put

$$L = \sup\left\{\max\left\{b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}, \cdots, b_m^{(\alpha)}\right\};\ \ \alpha \in (0,1]\right\}, M = \sup\left\{b^{(\alpha)} + 1; \alpha \in (0,1]\right\}.$$

The number K, $K = \max\{L, M\}$, is searched number.

I-convergence of a sequence of fuzzy numbers is defined by notion admissible ideal I of sets of natural numbers.

Set I, $I \subseteq P(N)$, where $P(N)$ is system of all subsets of N, are called ideal, if satisfies conditions:

1^0 for any $A \in I, B \in I$ also $A \cup B \in I$;

2^0 if $A \in I$ and $B \subseteq A$, then $B \in I$;

3^0 every finite subset of N belongs to I;

4^0 $N \notin I$.

Let N_p denote the set of all even natural numbers. Let $I_1 = \{A \in P(N); A \text{ is finite}\}$, $I_2 = I_1 \cup \left\{A \in P(N);\ \exists B \in P\left(N_p\right) \exists C \in I_1\ \ A = B \cup C \text{ and } B \text{ is infinite}\right\}$. Then I_1, I_2 are examples of admissible ideals.

It is suitable to use also the notion of the filter which is determined by an ideal I, i. e. $\mathcal{F}(I) = \ \{X \in P(N);\ \exists\ A \in I\ X = N - A\}$.

Next assertions about an ideal I are evident:

5^0 if $A \in I$, then $N - A \notin I$,

6^0 if $A \in I$, then $N - A$ is infinite.

Definition 4. A sequence $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ of fuzzy numbers is said to converge to u with respect to the ideal I (we write $I -\ \lim_{n\to\infty} u_n = u$) if

$$A(\varepsilon) = \{n \in N; D(u_n, u) \geq \varepsilon\} \in I$$

for each $\varepsilon > 0$.

Any sequence $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ of fuzzy numbers has at most one I-limit. If u, v are I-limit this sequence, then for every $\varepsilon > 0$

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \{n \in N;\ D(u_n, u) \geq \varepsilon\} \in I, B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \{n \in N;\ D(u_n, v) \geq \varepsilon\} \in I,$$

$$C = A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in I, N - C \neq \emptyset.$$

For any $x \in N - C$

$$0 \leq D(u,v) \leq D(u,u_n) + D(u_n,v) < \varepsilon.$$

So $D(u,v) = 0$ and $u = v$.

A fuzzy number u is called the limit point of a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ of fuzzy numbers, if u is limit of some its subsequence, i.e. $I_1 - \lim_{n\to\infty} u_{k_n} = u$, where $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an increasing sequence of natural numbers.

Proposition 5. Let $I - \lim_{n\to\infty} u_n = u$. Then u is a limit point of the sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proof. For any $n \in N$ the set $\left\{k \in N;\ D(u_k,u) < \frac{1}{n}\right\}$ is infinite. There is an increasing sequence of natural numbers $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $D(u_{k_n},u) < \frac{1}{n}$ for every $n \in N$. It is evident that $I_1 - \lim_{n\to\infty} u_{k_n} = u$. So u is a limit point of a sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposition 6. If $I - \lim_{n\to\infty} u_n = u$ and $I - \lim_{n\to\infty} v_n = v$, then

$$I - \lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = u + v.$$

Proof. Denote us

$$A(\varepsilon) = \{n \in N; D(u_n + v_n, u + v) \geq \varepsilon\},$$

$$A_1\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in N; D(u_n,u) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}, A_2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in N; D(v_n,v) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

for any $\varepsilon > 0$. Obviously $A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in I$.
For any $n \in N$ $D(u_n + v_n, u + v) \leq D(u_n,u) + D(v_n,v)$ (see (ii)).
The following implication is true

$$\left(n \notin A_1\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \wedge n \notin A_2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \Rightarrow n \notin A(\varepsilon),$$

or otherwise equivalently

$$n \in A(\varepsilon) \Rightarrow \left(n \in A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \vee n \in A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

accordingly $A(\varepsilon) \subseteq A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cup A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in I$, consequently $A(\varepsilon) \in I$.

Proposition 7. If $I - \lim_{n\to\infty} u_n = u$ and $I - \lim_{n\to\infty} v_n = v$, then

$$I - \lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = uv.$$

Proof. For any $\in N$ $D(u_n v_n, uv) \leq D(u_n v_n, u v_n) + D(u v_n, uv)$. By lemma 3 we obtain $K, L \in R^+$ such that $|u| \leq L$ and $|v_n| \leq K$ for every $n \in B \in \mathcal{F}(I)$. Let $\varepsilon > 0$. The sets $M_1 = \left\{n \in N; D(u_n,u) < \frac{\varepsilon}{2K}\right\}$, $M_2 = \left\{n \in N; D(v_n,v) < \frac{\varepsilon}{2L}\right\}$ belong to $\mathcal{F}(I)$. Evidently $M_1 \cap M_2 \cap B \in \mathcal{F}(I)$. So for any $n \in M_1 \cap M_2 \cap B$ we obtain

$$D(u_n v_n, uv) \leq D(Ku_n, Ku) + D(Lv_n, Lv) =$$

$$KD(u_n,u) + LD(v_n,v) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Hence $\{n \in N; D(u_n v_n, uv) \geq \varepsilon\} \in I$ and so $I - \lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = uv$.

I-continuity of the fuzzy number-valued functions

It is possible to define I-convergence of sequences in any topological space. Let $(X,\mathcal{T})$ be a topology space with topology $\mathcal{T}$ and let I be an admissible ideal.

Definition 8. A sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of points from X is said to converge to x with respect to the ideal I (we write $I-\lim_{n\to\infty} x_n = x$) if

$$A(T) = \{n \in N;\ x_n \notin T\} \in I$$

for any $T \in \mathcal{T}, x \in T$.

We will consider functions $f: X \to E$, where $(X,\mathcal{T})$ is a topology space and E is the set of fuzzy numbers.

Definition 9. Let I_1 and I_2 be admissible ideals. A function $f: X \to E$ is said to be (I_1, I_2)-continuous at x_0, $x_0 \in X$, if

$$I_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow I_2 - \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

holds for every sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of points from X.

Proposition 10. If functions f, g are (I_1, I_2)- continuous at x_0, then $f+g$ is (I_1, I_2)-continuous at x_0.

Proof. Let $I_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $A_{f+g}(\varepsilon) = \{n \in N; D((f+g)(x_n), (f+g)(x_0)) \geq \varepsilon\}$, $A_f = \left\{n \in N; D(f(x_n), f(x_0)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, $A_g = \left\{n \in N; D(g(x_n), g(x_0)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ for any $\varepsilon > 0$. For any $n \in N$

$$D((f+g)(x_n), (f+g)(x_0)) = D(f(x_n) + g(x_n), f(x_0) + g(x_0)) \leq$$
$$D(f(x_n), f(x_0)) + D(g(x_n), g(x_0)).$$

By proposition 5 $A_{f+g}(\varepsilon) \subseteq A_f \cup A_g \in I_2$, consequently $A(\varepsilon) \in I_2$.

Proposition 11. If functions f, g are (I_1, I_2)- continuous at x_0, then $f \cdot g$ is (I_1, I_2)-continuous at x_0.

Proof. Let $I_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. By lemma 3 we obtain $K, L \in R^+$ such that $|f(x_0)| \leq L$ $|g(x_n)| \leq K$ for every $n \in B \in \mathcal{F}(I_2)$. Let $\varepsilon > 0$. The sets

$$M_1 = \left\{n \in N; D(f(x_n), f(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2K}\right\}, M_2 = \left\{n \in N; D(g(x_n), g(x_0)) < \tfrac{\varepsilon}{2L}\right\}$$

belong to $\mathcal{F}(I_2)$. So for any $n \in M_1 \cap M_2 \cap B \in \mathcal{F}(I_2)$ we obtain

$$D((f\cdot g)(x_n), (f\cdot g)(x_0)) = D(f(x_n)g(x_n), f(x_0)g(x_0)) \leq$$
$$D(f(x_n)g(x_n), f(x_0)g(x_n)) + D(f(x_0)g(x_n), f(x_0)g(x_0)) \leq$$
$$K\, D(f(x_n), f(x_0)) + LD(g(x_n), g(x_0)) < \varepsilon.$$

Hence $\left\{n \in N; D\big(f(x_n)g(x_n), f(x_0)g(x_0)\big) \geq \varepsilon\right\} \in I_2$ and so $I_2 - \lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = f(x_0)g(x_0)$.

References

[1] Boccuto, A. – Dimitriou, X. - Papanastassiou, N. - Wilczyński, W: *Modes of ideal continuity and the additive property in Riesz space setting,* Journal of Applied Analysis, to appear.

[2] Kostyrko, P. – Šalát, T. - Wilczyński, W: *I-convergence,* Real Anal. Exchance 26 (2000/2001), 669-685.

[3] Kostyrko, P. – Mačaj, M. - Šalát, T. – Sleziak, M.: *I-convergence and extremal I-limit points,* Math. Slovaca 55(4) (2005), 443-464.

[4] Riečan, B. – Neubrunn, T.: *Integral, measure and ordering*, Kluwer Academic Publisher, Dordrech, 1997, ISBN 0-7923-4566-5.

[5] Šalát, T. – Tripathy, B.C. – Ziman, M.: *On some properties of I-convergence,* Tatra Mt. Math. Publ. 28(2) (2004), 274-

[6] Wu Congxin - Gong Zengtai: *On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions*, Fuzzy Sets and Systems 120, (2001), 523-532.

Received on April 12, 2013.

Addresses

Doc. RNDr. Peter Vrábel, CSc.
Doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.
Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Trieda A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra
e-mail: pvrabel@ukf.sk, mvrabelova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

HOW TO MISUSE L'HÔPITAL'S RULE 2

AKO NA L'HOSPITALA 2

MICHAL ZÁKOPČAN

ABSTRACT. *The article refers to works [1], [2], in which there are created such limits of types „0/0" or „∞/∞", which are not solvable by L'Hôpital's rule, as a motivation for students of Mathematical analysis to learn elementary techniques. The article is an extension and an adding of the works [1], [2].*

KEY WORDS: *L'Hôpital's rule, limit of a function, differential equation*

ABSTRAKT. *Článok vychádza z prác [1], [2], ktoré sa zaoberali vytváraním takých limít typu „0/0" alebo „∞/∞", ktoré nie sú riešiteľné l'Hospitalovým pravidlom, čím sa poskytuje motivácia pre študentov matematickej analýzy učiť sa elementárne postupy. Článok tieto práce ďalej dopĺňa a rozširuje.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *l'Hospitalovo pravidlo, limita funkcie, diferenciálna rovnica*

CLASSIFICATION: *D55*

Úvod

Tento článok priamo nadväzuje na práce [1] a [2], dopĺňa ich a ďalej rozširuje. V oboch týchto prácach sa hľadajú príklady limít, vo výpočte ktorých je použitie l'Hospitalovho pravidla skôr na škodu, hoci je možné a oprávnené použiť ho. Ide o príklady limít typu „$0/0$" alebo „∞/∞", ktoré sú zväčša jednoducho riešiteľné za pomoci elementárnych úprav. Tým sa chce študentom matematickej analýzy zdôvodniť potreba ovládania výpočtu limít elementárnymi postupmi.

Práca [2] tiež obsahuje príklady limít, v ktorých je možné a vhodné použiť l'Hospitalovo pravidlo v prvom kroku, no v nasledujúcich krokoch je opäť potrebné vrátiť sa k elementárnym úpravám, pretože ďalším použitím l'Hospitalovho pravidla sa dostávame k zacykleniu. Tento článok ponúka rozšírenie aj v tomto smere.

Ako oklamať l'Hospitala druhýkrát

V prvej časti práce sa vráťme k článku [1]. Autor v ňom na nájdenie vhodných limít $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ vychádza zo vzťahu:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{g(x)}{f(x)},$$

z ktorého sa dá odvodiť diferenciálna rovnica:

$$f(x)f'(x)\,dx=g(x)g'(x)\,dx.$$

Potom pre ľubovoľnú funkciu f spĺňajúcu predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo volí funkciu g tak, aby platilo:

$$g(x) = \pm\sqrt{f^2(x) + c},$$

kde c je vhodná reálna konštanta. Ďalej stačí pracovať s $g(x) = \sqrt{f^2(x) + c}$.

Ako ďalej ukážeme, funkciu g môžeme hľadať aj v nasledujúcom všeobecnejšom tvare:

$$g(x) = \sqrt[n]{f^n(x) + c}, \tag{1}$$

kde $n \geq 2$ je ľubovoľné prirodzené číslo. Skutočne potom dvakrát aplikujúc l'Hospitalovo pravidlo dostávame:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\frac{1}{n}[f^n(x)+c]^{((1-n)/n)}nf^{n-1}(x)f'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g^{n-1}(x)}{f^{n-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{(n-1)}{n}nf^{n-1}(x)f'(x)}{(n-1)g(x)f^{n-2}(x)f'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pozrime sa, ako to vyzerá v konkrétnej úlohe. Nech napr. $f(x) = e^x$, $c = 10$, $n = 4$ a $x \to \infty$. Riešme nasledujúcu úlohu najprv pomocou l'Hospitalovho pravidla:

Úloha 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x}+10}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{[e^{4x}+10]^{-3/4}e^{4x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{[e^{4x}+10]^{3/4}}{e^{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{[e^{4x}+10]^{-1/4}e^{4x}}{e^{3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x}+10}}$$

a teraz jednoduchými úpravami, napríklad takto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x}+10}} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{4x}}{e^{4x}+10}\right]^{1/4} = \lim_{x\to\infty}\left[1 - \frac{10}{e^{4x}+10}\right]^{1/4} = 1.$$

Prirodzene miesto voľby funkcie g v tvare (1) by sme mohli voliť nasledujúcim spôsobom:

$$g(x) = [f^p(x) + c]^{1/p},$$

kde $p > 1$ je ľubovoľné reálne číslo. Nič sa tým na našich predchádzajúcich úvahách nemení a vyššie uvedené odvodenie platí aj v tomto prípade.

Ďalšie zovšeobecnenia

V článku [2] bolo ukázané, že ak pre ľubovoľnú funkciu f spĺňajúcu predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo zvolíme funkciu $g(x) = \left(\frac{m+1}{n+1}f^{n+1}(x) + c\right)^{\frac{1}{m+1}}$, kde m, n sú prirodzené čísla a c je vhodná konštanta taká, že limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ je typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, pričom g spĺňa predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo, tak platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{g^m(x)}{f^n(x)}.$$

Dôsledkom toho je, že použitím l'Hospitalovho pravidla na riešenie $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ dvakrát za sebou prichádza opätovne k zacykleniu.

Zovšeobecnenie v tomto prípade je nasledovné. Voľme pre toto f funkciu g ako:

$$g(x) = [f^p(x) + c]^q,$$

kde $p > 1$ a $q \in (0,1)$ sú reálne čísla a konštantu c volíme tak, aby daná limita bola typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, pričom g spĺňa predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo.

Ukážeme, že po dvojnásobnom použití l'Hospitalovho pravidla nastane zacyklenie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{pq[f^p(x)+c]^{q-1}f^{p-1}(x)f'(x)} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{[f^p(x)+c]^{1-q}}{pqf^{p-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(1-q)p[f^p(x)+c]^{(-q)}f^{p-1}(x)f'(x)}{pq(p-1)f^{p-2}(x)f'(x)} = \\ &= \frac{(1-q)}{q(p-1)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Ako aj v predchádzajúcom platí, že na rozdiel od počítania l'Hospitalovým pravidlom vedú elementárne postupy rýchlo k výsledku. Stačí preniesť čitateľa do menovateľa menovateľa a vojsť pod q-tu mocninu.

Nech napr. $p = \pi$ a $q = 1/3$, nech ďalej $f(x) = \ln x$, $c = 5$ a $x \to \infty$. Riešme nasledujúcu úlohu l'Hospitalovým pravidlom:

Úloha 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi+5]^{1/3}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{\pi}{x}[(\ln x)^\pi+5]^{-2/3}(\ln x)^{\pi-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3[(\ln x)^\pi+5]^{2/3}}{\pi(\ln x)^{\pi-1}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\pi[(\ln x)^\pi+5]^{-1/3}(\ln x)^{\pi-1}\frac{1}{x}}{\pi(\pi-1)(\ln x)^{\pi-2}\frac{1}{x}} = \frac{2}{(\pi-1)}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi+5]^{1/3}}\end{aligned}$$

Vidíme, že prišlo k zacykleniu. Na druhej strane skúsme riešiť túto úlohu elementárnymi postupmi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi+5]^{1/3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{(\ln x)^\pi+1}{(\ln x)^3}\right]^{1/3}} = 0,$$

kde sme využili, že podiel $1/(\ln x)^3$ ide k 0 pre $x \to \infty$ a $(\ln x)^{\pi-3}$ ide do ∞ pre $x \to \infty$.

Znovu o krok späť

Nakoniec sa budeme venovať rozšíreniu poslednej časti práce [2]. V nej sme sa oboznámili s úlohami na výpočet limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, v ktorých použitie l'Hospitalovho pravidla má oprávnenie v prvom kroku, ale ďalej si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Zvlášť veľmi vďačná bola:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt{c}\left(x-\ln\left(\sqrt{c}+\sqrt{e^{2x}+c}\right)\right)+\sqrt{e^{2x}+c}}, \tag{2}$$

kde c je ľubovoľná kladná reálna konštanta. Úloha (2) vznikla integrovaním čitateľa aj menovateľa v nasledujúcej limite z práce [1]:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+c}},$$

ktorú veľmi ľahko vypočítame elementárnymi postupmi, ale pri opätovnom použití l'Hospitalovho pravidla dôjde k zacykleniu.

Takto však môžeme postupovať aj pri ďalších limitách z práce [1]. Ako prvé budeme skúmať limity:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{\sqrt{x^{2m}+c}},$$

kde m je nejaké prirodzené číslo a c je nenulová konštanta.

Na začiatok vezmime to najľahšie, tj. prípad, keď $m=1$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}. \tag{3}$$

Potom hľadaná limita je:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+d}{x\sqrt{x^2+c}+c\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)}, \tag{4}$$

kde d je nejaká konštanta. V prípade, že c je kladná konštanta, hneď vidíme, že ide o limitu typu „∞/∞“. V prípade, že c je záporná konštanta, bolo by vhodné ukázať, že tomu tak tiež je. Na to stačí ukázať, že menovateľ ide do ∞, ak $x\to\infty$. Ukážeme to. Vyjmime výraz $x\sqrt{x^2+c}$ pred zátvorku, dostaneme:

$$x\sqrt{x^2+c}\left(1+c\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)}{x\sqrt{x^2+c}}\right).$$

Ďalej ukážeme, že podiel $\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)}{x\sqrt{x^2+c}}$ ide k 0 pre $x\to\infty$. Pomôžeme si l'Hospitalovým pravidlom:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)}{x\sqrt{x^2+c}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\frac{x+\sqrt{x^2+c}}{\sqrt{x^2+c}}}{\frac{2x^2+c}{\sqrt{x^2+c}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2+c}=0.$$

A teda menovateľ z limity (4) naozaj ide do ∞, ak $x\to\infty$.

Výraz $\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$, z ktorého počítame limitu (3) pre $x \to \infty$ sa dá upraviť na tvar $\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+c}}$. Integrovať menovateľ $x\sqrt{x^2+c}$ je jednoduchšie než $\sqrt{x^2+c}$. Učiňme tak. Dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3}, \tag{5}$$

kde d je nejaká konštanta. Použitím l'Hospitalovho pravidla na limitu (5) prejdeme znovu k limite (3). Limita (5) má navyše oproti limite (4) úspornejší zápis a na prvý pohľad je pre študentov ľahšie „stráviteľná“. Inými slovami neodradzuje ich od počítania, ako by tomu mohlo byť v prípade limity (4). A ako bonus ide veľmi ľahko vypočítať aj elementárnymi postupmi hneď od začiatku a nie je potrebné derivovať.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2+c}}{x}\right)^3} + 0 =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{3/2}} = 1.$$

Pre $m > 1$ môžeme postupovať rovnako ako v predošlom a využiť postup, v ktorom výraz $\frac{x^m}{\sqrt{x^{2m}+c}}$ najprv upravíme na tvar $\frac{x^{2m-1}}{x^{m-1}\sqrt{x^{2m}+c}}$ alebo na tvar $\frac{x^{3m-1}}{x^{2m-1}\sqrt{x^{2m}+c}}$ a potom integrujeme čitateľ aj menovateľ. Napríklad pre $m = 2$ dostaneme po zintegrovaní limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+d}{x^2\sqrt{x^4+c} + c\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+c}\right)}, \tag{6}$$

resp. limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6+d}{\left(\sqrt{x^4+c}\right)^3}, \tag{7}$$

kde v oboch prípadoch d je nejaká konštanta. Aj tu vidíme, že limitu (7) možno rýchlo a ľahko vypočítať elementárnymi postupmi hneď od začiatku.

Ešte napíšme všeobecný tvar limít (4), (5), (6) a (7) pre ľubovoľné prirodzené číslo m. Zovšeobecnená verzia limít (4) a (6) teda bude:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2m}+d}{x^m\sqrt{x^{2m}+c} + c\ln\left(x^m+\sqrt{x^{2m}+c}\right)}.$$

Zovšeobecnená verzia limít (5) a (7) potom bude:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3m}+d}{\left(\sqrt{x^{2m}+c}\right)^3}.$$

Z limít uvedených v práci [1] možno predošlý postup zopakovať aj pre nasledujúcu limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x + c}}. \tag{8}$$

Rozšírme zlomok $\frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x+c}}$ v limite (8) výrazom $\frac{1/x}{1/x}$ a zintegrujme čitateľa aj menovateľa zvlášť, dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x + d}{\sqrt{\ln^2 x + c}\ln x + c\ln\left(\ln x + \sqrt{\ln^2 x + c}\right)},$$

kde opäť d je ľubovoľná konštanta.

Záver

Tento článok je doplnením a rozšírením prác [1], [2]. Podarilo sa nám v ňom nájsť ďalšie príklady limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, v ktorých je síce možné l'Hospitalovo pravidlo použiť, no k výsledku sa s jeho pomocou nedopracujeme, resp. nájsť také limity, pri riešeniach ktorých je oprávnené a vhodné jeho použitie v prvom kroku, ale v ďalších si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Uvedené príklady a úlohy je možné uvádzať študentom na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy ako demonštráciu nutnosti ovládania elementárnych postupov na výpočet limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“.

Literatúra

[1] Varga, M.: Ako oklamať l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 12, UKF, Nitra, 2009. Strany 275-278. ISBN 80-8094-614-2

[2] Zákopčan, M.: Ako na l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 15, UKF, Nitra, 2012. Strany 197-202. ISBN 978-80-558-0135-3

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autora

Mgr. Michal Zákopčan, PhD.
Oddelenie matematiky Ústavu informatiky a matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Slovenská technická univerzita, Ilkovičova 3, SK – 812 19 Bratislava;
e-mail: michal.zakopcan@stuba.sk

Poďakovanie

Článok vznikol vďaka podpore z grantu VEGA č. 1/0426/12 Ministerstva školstva Slovenskej republiky.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

IMPORTANT GEOGEBRA ATTRIBUTES FROM MATHEMATICS TEACHERS PERSPECTIVE

VÝZNAMNÉ ATRIBÚTY SYSTÉMU GEOGEBRA Z POHĽADU UČITEĽOV MATEMATIKY

KATARÍNA ŽILKOVÁ

ABSTRACT. *The degree and method of using dynamic geometry systems in the process of teaching mathematics depends on math teachers´ attitudes and their willingness to integrate DGS into the educational process. The contribution describes the results of research, which was aimed to find out how mathematics teachers rate GeoGebra system, which tools they use the most and also how they use GeoGebra system in the process of teaching mathematics and in which mathematical topics they integrate GeoGebra system into mathematics education.*

KEY WORDS: *GeoGebra, math education, research*

ABSTRAKT. *Miera a spôsob využívania dynamických geometrických systémov vo vyučovaní matematiky je závislá od postojov učiteľov matematiky a ich ochoty integrovať DGS do edukačného procesu. Príspevok opisuje výsledky výskumu, ktorého cieľom bolo zistiť, ako hodnotia učitelia matematiky systém GeoGebra, ktoré užívateľské nástroje využívajú najčastejšie, ako využívajú systém GeoGebra vo vyučovaní matematiky, a v ktorých matematických témach integrujú systém GeoGebra do matematického vzdelávania.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: GeoGebra, matematické vzdelávanie, výskum*

CLASSIFICATION: *B50, U50, R20*

Úvod

V súčasnej dobe existuje pomerne veľa štúdií, ktoré opisujú význam dynamických geometrických systémov (DGS) v oblasti matematického vzdelávania (Karatas, 2011; Kokol-Voljc, 2007; Sour-Lavergne, Jahn, Trgalova, 2011, atď.). Výskumy zväčša potvrdzujú, že samotný prístup učiteľov matematiky k technológiám nie je postačujúci na úspešnú a efektívnu integráciu digitálnych technológií do vzdelávacieho procesu. Podľa niektorých odborníkov (Hohenwarter, M., Jarvis, D., Lavicza, Zs. 2009) sú jedným z najdôležitejších faktorov na zvýšenie snahy a ochoty učiteľov integrovať technológie do svojej výučby najmä primerané a priebežné školenia a tiež vzájomná kolegiálna podpora. Jedným z najväčších vzdelávacích projektov, ktoré umožnili slovenským učiteľom (nielen) matematiky získať nový pohľad na vzdelávanie prostredníctvom digitálnych technológií je projekt s názvom Modernizácia vzdelávacieho procesu na základných a stredných školách. V tomto kontexte sa vynára otázka, aká je efektivita projektov podobného typu? Tiež by bolo zaujímavé zistiť, či sa aj na Slovensku potvrdí hypotéza o tom, že školenia učiteľov z oblasti modernizačných trendov vo vzdelávaní majú významný vplyv na ich ďalšie pedagogické pôsobenie. Potrebnými údajmi a podkladmi na vyhodnotenie výskumných otázok podobného typu so všeobecnou platnosťou pre podmienky Slovenska disponujú riešitelia a zadávateľ uvedeného projektu. Vzhľadom na mimoriadne zaujímavú tému sme sa podujali riešiť aspoň parciálny problém, ktorý sa týka miery využívania dynamických geometrických systémov v matematickom vzdelávaní na základných a stredných školách.

Niektoré výsledky výskumu o zisťovaní vplyvu školiacich aktivít (určených pre učiteľov matematiky) na mieru využívania dynamických geometrických systémov vo vyučovaní matematiky sú už publikované (Žilková, 2013) a v zásade potvrdzujú aj vyššie uvedené výsledky zo zahraničia.

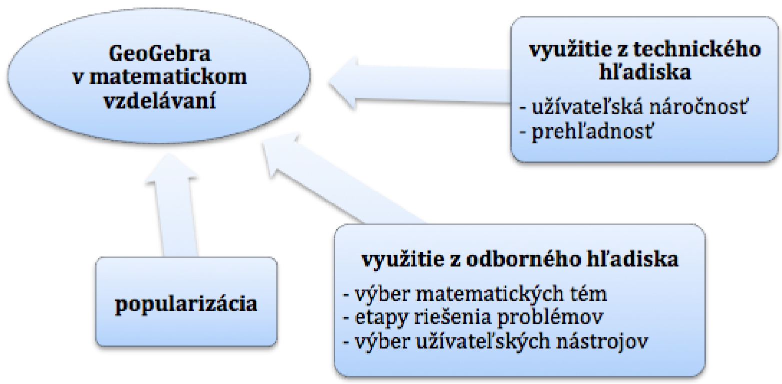
V tomto príspevku sa zameriame na opis výsledkov a zistení z oblasti využívania DGS GeoGebra, pretože po školiacich aktivitách významne stúpla miera využívania uvedeného softvéru v matematickom vzdelávaní.

GeoGebra vo vyučovaní matematiky – výskumné otázky

Vzhľadom na potvrdenie hypotézy o preferenciách systému GeoGebra pred inými dynamickými geometrickými systémami absolventami školenia sme jednu časť dotazníka venovali položkám, ktorých cieľom bolo hľadať odpovede na otázky:

1. Ako hodnotia učitelia matematiky technické a užívateľské atribúty systému GeoGebra, a ktoré atribúty systému GeoGebra považujú učitelia matematiky za benefity systému?
2. Ako, kde a ako často využívajú učitelia systém GeoGebra vo vyučovaní matematiky?
3. Ktoré z konštrukčných nástrojov z ponuky systému GeoGebra sú najviac využívané v matematickom vzdelávaní a s akou frekvenciou?

Ako exploračnú metódu vedeckého skúmania sme použili elektronický (web) dotazník s názvom „Dynamické geometrické systémy v matematickej edukácii“. Dotazník bol koncipovaný do štyroch oblastí (okrem štandardných štrukturálnych súčastí), pričom posledná oblasť s názvom „Geogebra vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách“ mapovala názory a skúsenosti relevantné pre odpovedanie vyššie formulovaných otázok. Štruktúra tejto časti dotazníka je znázornená na obrázku 1.



Obrázok 1: Štruktúra časti elektronického dotazníka o DGS GeoGebra

Zber údajov

Na vyplnenie dotazníka boli oslovení frekventanti školenia Modernizácie vzdelávacieho procesu na základných a stredných školách, ktorí absolvovali školenie z oblasti dynamických geometrických systémov vo vyučovaní matematiky. Proces získavania respondentov prebiehal prostredníctvom lektorov, ktorí garantovali a zabezpečovali priebeh školiacich aktivít a boli ochotní rozposlať informáciu o prebiehajúcom výskume svojim frekventantom. Išlo o frekventantov školení lokalizovaných po celom Slovensku, ale najviac oslovených respondentov bolo zo západného Slovenska. Zber údajov prebiehal od 26. mája 2012 do 14. septembra 2012. Vyplnených a korektne odoslaných bolo 96 dotazníkov. Vzhľadom na spôsob získavania respondentov (respondenti boli oslovovaní mailovou komunikáciou) nie je možné presne vyhodnotiť návratnosť dotazníkov. Na základe získaných údajov od lektorov (počet rozposlaných žiadostí o vyplnenie dotazníka) je však možné odhadovať návratnosť elektronického dotazníka na úrovni 56%. Uvedomujeme si, že generalizácia výsledkov výskumu nie je v kontexte podmienok Slovenska možná, najmä z dôvodov uskutočnenia dostupného výberu respondentov, a tiež so zreteľom na ďalšie nevýhody použitia elektronického dotazníka. Napriek uvedenému sú niektoré zistenia a výsledky zaujímavé.

O štruktúre respondentov (vek, vzdelanie, počet rokov praxe a pod.) sa čitateľ môže dozvedieť zo spomínanej publikácie (Žilková, 2013).

Hodnotenie technických a užívateľských atribútov systému GeoGebra podľa učiteľov matematiky

Napriek tomu, že bolo administrovaných 96 dotazníkov, po dôkladnejšej analýze sme vyradili 9 dotazníkov z dôvodu odhalenia tzv. lživých odpovedí. Preto výskumný súbor po redukcii má rozsah 87 respondentov. Jeden respondent sa k systému GeoGebra nevyjadroval, i keď bola v ponuke možnosť „neviem sa vyjadriť“. Preto je vyhodnotenie realizované na vzorke 86 respondentov. V tabuľkách 1 a 2 sú zhrnuté získané údaje o názoroch na užívateľskú náročnosť a prehľadnosť ponuky konštrukčných nástrojov systému GeoGebra.

užívateľská náročnosť	počet respondentov
jednoduchý	24
viac jednoduchý ako náročný	43
viac náročný ako jednoduchý	14
náročný	1
neviem sa vyjadriť	4
spolu	**86**

prehľadnosť užívateľských nástrojov	počet respondentov
prehľadný	36
viac prehľadný ako neprehľadný	41
viac neprehľadný ako prehľadný	4
neprehľadný	0
neviem sa vyjadriť	5
spolu	**86**

Tabuľka 1 (vľavo): Výsledky o názoroch respondentov na užívateľskú náročnosť systému GeoGebra

Tabuľka 2 (vpravo): Výsledky o názoroch respondentov na prehľadnosť konštrukčných nástrojov system GeoGebra

Z uvedeného vyplýva, že 78% respondentov uviedlo, že Geogebra je z užívateľského hľadiska jednoduchá alebo viac jednoduchá ako náročná. Zároveň až 90% respondentov uviedlo, že ponuka konštrukčných nástrojov je prehľadná alebo viac prehľadná ako neprehľadná. Z uvedeného môžeme považovať systém GeoGebra za „userfriendly“.

Respondenti mali možnosť definovať atribúty systému GeoGebra, ktoré podľa ich názoru považujú za jeho prednosti. Najčastejšie boli uvádzané nasledujúce benefity: názornosť, prehľadnosť, jednoduchosť, ľahké ovládanie. Okrem nich sa najčastejšie vyskytli charakteristiky, ktoré uvádzame v poradí od najpočetnejších: voľne dostupný softvér, dynamickosť, interaktivita, možnosť vidieť algebraický zápis aj geometrickú formu útvarov a možnosť grafickej (estetickej) úpravy virtuálnych výkresov.

Spôsob, témy a etapy využitia systému GeoGebra vo vyučovaní matematiky

K položke mapujúcej spôsob využívania GeoGebry v príprave a vo vyučovaní matematiky sa vyjadrilo 57 respondentov a výsledky sú uvedené v tabuľke 3. Otázka bola koncipovaná ako zatvorená položka formou viacnásobného výberu. Početnosť odpovedí na jednotlivé ponúkané možnosti je pomerne vyrovnaná, avšak za zaujímavé zistenie, ktoré sa ukázalo aj v iných častiach dotazníka, môžeme považovať preferenciu učiteľov matematiky vytvárať si vlastné - autorské virtuálne výkresy (či už vo forme ggb súborov alebo html appletov) pred používaním dostupných (vytvorených) produktov iných autorov.

spôsob využitia v príprave a vo vyučovaní matematiky	počet respondentov	percentuálne vyjadrenie
tvorba vlastných appletov (html súborov)	33	58%
tvorba vlastných výkresov (ggb súborov)	36	63%
využívanie appletov iných autorov (html súborov)	30	53%
využívanie ggb súborov iných autorov	22	39%
aktívna práca žiakov na hodine s GeoGebrou	33	58%
tvorba a prezentácia výkresov prostredníctvom dataprojektora	37	65%
tvorba a prezentácia výkresov prostredníctvom interaktívnej tabule	30	53%
iné	1	2%

Tabuľka 3: Spôsoby využívania systému GeoGebra v príprave a vo vyučovaní matematiky podľa názorov respondentov

Z hľadiska výberu matematických tém, k položke formulovanej: „Vyberte témy, v ktorých využívate systéme GeoGebra pri vyučovaní matematiky", najčastejšie respondenti vyberali možnosti konštrukčná geometria v rovine a funkcie a grafy. Percentuálne vyjadrenie je uvedené v tabuľke 4, pričom celkový počet respondentov, ktorí sa k uvedenej otázke vyjadrili je tak ako v predchádzajúcom prípade 57.

matematická téma	počet respondentov	percentuálne vyjadrenie
konštrukčná geometria v rovine	41	72%
funkcie a grafy	40	70%
analytická geometria v rovine	26	46%
výpočtová geometria (určovanie dĺžok, obsahov, ...)	24	42%
stereometria	19	33%
algebra	9	16%
aritmetika	4	7%
základy diferenciálneho a integrálneho počtu	4	7%
kombinatorika	2	4%
pravdepodobnosť a štatistika	2	4%
iné	1	2%

Tabuľka 4: Matematické témy, v ktorých respondenti využívajú systém GeoGebra

Počty odpovedí v ponúknutých možnostiach na otázku: „V ktorej etape riešenia matematických úloh využívajú učitelia matematiky systém GeoGebra“ boli pomerne vyrovnané, a teda podľa ich vyjadrení využívajú systém aj vo fáze náčrtu, rozboru, v samotnom riešení, a tiež v diskusii o počte riešení úlohy. Podrobnejšie informácie o frekvencii využívania GeoGebry v jednotlivých fázach nebudeme v tomto príspevku uvádzať nielen z dôvodu obmedzeného rozsahu príspevku, ale aj z hľadiska získaných výsledkov, pretože vo všetkých položkách respondenti vyznačili časté využívanie.

Frekvencia využívania konštrukčných nástrojov z ponuky systému GeoGebra

Frekvenciu využívania jednotlivých konštrukčných nástrojov sme skúmali formou posudzovacích trojstupňových slovných škál. V tabuľke 5 sú uvedené výsledky zistení pre vymedzené nástroje systému GeoGebra, pričom percentuálne vyjadrenie je v závislosti od počtu respondentov, ktorí sa k danej položke vyjadrili. Iné výsledky by sme získali vzhľadom na celkový počet respondentov, ktorí sa výskumu zúčastnili. Tieto údaje však presahujú rámec príspevku, preto ich neuvádzame.

frekvencia využitia nástrojov systému GeoGebra	nikdy	niekedy	často
bežné nástroje (bod, priamka, ...)	0%	11%	89%
prehrávanie krokov konštrukcie	12%	54%	33%
zobrazenie postupu konštrukcie	5%	68%	27%
tabuľka v GeoGebre	33%	53%	15%
algebraické okno	10%	54%	37%
príkazový riadok	7%	57%	35%
podmienka na ukázanie objektu	23%	57%	21%
zobrazenie stopy bodov	15%	61%	24%
posuvník	2%	44%	55%
začiarkavacie políčko na zobrazenie alebo skrytie objektov	15%	39%	46%
animácie	11%	49%	40%
množina bodov s danou vlastnosťou	17%	48%	35%
dynamické farby	23%	42%	36%
grafické úpravy vlastností objektov (farba, štýl a pod.)	6%	38%	57%

Tabuľka 5: Miera využívania nástrojov systému GeoGebra učiteľmi matematiky

Možnosť „nikdy“ (vo význame nikdy nepoužívam) najčatejšie uviedli respondenti pri nástrojoch: tabuľka v GeoGebre, podmienka na ukázanie objektu a dynamické farby. Posledné dve možnosti nie sú pre nás veľkým prekvapením, pretože uvedené nástroje majú skôr informatický základ a ich využitie si vyžaduje isté informatické, či algoritmické zručnosti. Domnievame sa, že nevyužívanie tabuliek v systéme GeoGebra môže byť spôsobené jednak tým, že je to pomerne nový nástroj v ponuke systému, ale aj tým, že uvedený nástroj ponúka možnosti analogické so systémom MS Excel, ktorý má zrejme u nás väčšiu tradíciu. Zdôvodnenie by si však vyžadovalo hlbšiu analýzu a ďalšie vstupné údaje. Nie je prekvapujúce, že za najčastejšie využívané nástroje boli označené bežné nástroje z hlavnej ponuky systému a možnosť ich grafického formátovania na celkovú úpravu virtuálneho výkresu. Ďalšie v poradí najčastejšie využívané nástroje boli respondentmi vybrané posuvník, začiarkavacie políčko na zobrazenie alebo skrytie objektov a animácie, čo považujeme za vyššiu úroveň používania systému GeoGebra, ktorá vedie k využívaniu predností systému z hľadiska zvyšovania miery dynamiky a interaktivity virtuálnych výkresov.

Záver

Cieľom príspevku bolo opísať výsledky získané z elektronických dotazníkov respondentov, ktorí absolvovali školenia v oblasti využívania a integrácie dynamických geometrických systémov do matematického vzdelávania na základných a stredných školách. Zaujímali nás názory učiteľov matematiky na prednosti dynamického systému GeoGebra, opísali sme ako hodnotia učitelia matematiky technické a užívateľské atribúty systému GeoGebra. Zámerom bolo tiež identifikovať matematické témy, v ktorých učitelia matematiky najčastejšie využívajú systém GeoGebra v príprave vyučovacích hodín alebo priamo vo vyučovaní matematiky. Analyzovali sme mieru využívania vybraných konštrukčných nástrojov z ponuky systému GeoGebra pri tvorbe virtuálnych výkresov alebo v ich využívaní v matematickej edukácii.
Systém GeoGebra sme vybrali z dôvodu, že závery zo širšie koncipovaného webového dotazníka ukázali, že učitelia matematiky preferujú DGS GeoGebra pred ostatnými dynamickými geometrickými systémami. Potešiteľnou skutočnosťou je, že väčšina respondentov (na úrovni 74% z aktívne využívajúcich systém GeoGebra vo vyučovaní matematiky) sa podieľa na popularizácii systému GeoGebra medzi svojimi žiakmi formou tvorby vlastných appletov a ich poskytnutím na žiacke experimentovanie; 68% respondentov popularizuje GeoGebru medzi svojimi kolegami - učiteľmi a 9% učiteľov využívajúcich GeoGebru zverejňuje vlastné dynamické interaktívne applety prostredníctvom webových stránok, čím prispieva k ďalšiemu šíreniu modernizačných metód vo vyučovaní matematiky.
Je zrejmé, že oblasť integrácie digitálnych technológií do matematického vzdelávania bude predmetom nielen ďalších overovaní, ale bude podliehať neustálym inováciám. Preto školenia učiteľov matematiky v uvedenej oblasti z uvedených i ďalších dôvodov považujeme za prínosné, ale aj žiaduce.

Literatúra

[1] BRESTENSKÁ, B., KABÁTOVÁ, M., KALAŠ, I., MIKOLAJOVÁ, K., PEKÁROVÁ, J., SZARKA, K., VANÍČEK, J. (2010). Premena školy s využitím IKT. Elfa: Košice.

[2] HANZEL, P. (2007). Dynamické prvky vo vyučovaní geometrie. In: Matematika 3. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2007. S. 101-110.

[3] HOHENWARTER, M., JARVIS, D., LAVICZA, ZS. (2009). Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. In: The International Journal for Technology in Mathematics Education. Volume 16, Number 2, p. 83-87.

[4] KARATAS, I. (2011). Experiences of Student Mathematics Teachers in Computers-Based Mathematics Learning Environment, International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Dostupné na http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/.

[5] KOREŇOVÁ, L. (2011). Konštruktivistický prístup vo vyučovaní geometrie v prostredí GeoGebra. In: Užití počítaču ve výuce matematiky. Volume 5., Number 1, p. 201-207.

[6] KOKOL-VOLJC, V. (2007). Use of mathematical software in pre-service teacher training: the case of DGS. BSRLM Proceedings, Volume 27, Number 3.

[7] LUKÁČ, S. a kol. (2010). Využitie IKT v predmete Matematika pre stredné školy. Elfa: Košice.

[8] MAJERČÍKOVÁ, J. (2012). Rodina s predškolákom. Výskum rodín s deťmi predškolského veku. Bratislava: UK v Bratislave, 2012. 124 s.

[9] SEMANIŠINOVÁ, I. a kol. (2010). Využitie IKT v predmete Matematika pre základné školy. Elfa: Košice.

[10] SOURY-LAVERGNE, S., JAHN, A. P., TRGILOVA, J. (2011). I2Geo quality assessment process: a tool for teacher professional development? In: The Electronic Journal of Mathematics & Technology, Volume 5, Number 3.

[11] ŠEDIVÝ O., VALLO D., VIDERMANOVÁ K. [ed.]. (2011). Nové trendy v teórii vyučovania matematiky. Dynamický softvér vo vyučovani : zborník vedeckých prác z vedeckého seminára konaného 1. decembra 2010 na KM FPV UKF v Nitre. Nitra: UKF, 2011. 100 s.

[12] ŽILKOVÁ, K. (2013). Vplyv vzdelávania učiteľov na mieru využívania dynamických geometrických systémov v matematickej edukácii. Žilina: ŽU, 2013. (v tlači).

Článok prijatý dňa 17. apríla 2013:

Adresa autorov

doc. PaedDr. Katarína Žilková, PhD.
Ústav pedagogických vied a štúdií, Katedra preprimárnej a primárnej edukácie, Pedagogická fakulta, Univerzita Komenského, Račianska č. 59, SK 813 34 Bratislava;
e-mail: katarina@zilka.sk

Poďakovanie

Zistiť uvedené i ďalšie výsledky umožnilo realizovanie projektu Modernizácia vzdelávacieho procesu na základných a stredných školách a spolupráca s lektormi matematiky v rámci uvedeného projektu. Predložený príspevok bol vypracovaný ako súčasť projektu MŠ SR KEGA 028UK-4/2011 s názvom Manipulačné a virtuálne modelovanie v príprave učiteľov pre primárne matematické vzdelávanie.

Posterová sekcia

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SPACE IMAGINATION IN PRE-SCHOOL EDUCATION

PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ V PREDŠKOLSKOM VEKU

VIERA UHERČÍKOVÁ

ABSTRACT. *In this paper we want to inform about successful training for teachers and managers of kindergartens: Orientation in space and space imagination in pre-school education. We want to discuss importance of this theme and mathematics at all in pre-school education and the need to link it with next step of education.*

KEY WORDS: *orientation in space, space imagination, geometry, pre-school age*

ABSTRAKT. *V rámci príspevku chceme informovať o prebiehajúcom úspešnom vzdelávaní na tému Orientácia v priestore a priestorová predstavivosť v predprimárnom vzdelávaní pre učiteľky a riaditeľky materských škôl. Chceme poukázať na význam uvedenej tematiky a matematiky vôbec v predškolskom vzdelávaní a potrebu nadväznosti na ďalšom stupni vzdelávania.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *orientácia v priestore, priestorová predstavivosť, geometria, predškolský vek*

CLASSIFICATION: *G10, G11, G19*

Rozvíjanie priestorovej predstavivosti v predškolskom veku

Rozvíjanie priestorovej predstavivosti vplýva na rozvoj osobnosti detí, súvisí s úspešnosťou v spoločnosti, ako aj s riešením praktických úloh v bežných situáciách každodenného života. Osobitnú úlohu zohráva v matematike, menovite v geometrii. Riešenie zaujímavých úloh na rozvíjanie priestorovej predstavivosti ponúka dosiahnuť lepšie výsledky v geometrii, riešenie geometrických úloh zlepšuje priestorovú predstavivosť. S jej rozvíjaním je potrebné začať čím skôr, už v predškolskom veku. Veľmi vhodné sú hry so stavebnicami, s kockami a pod. Aj vo vyšších vekových kategóriách dosahujú v geometrii významne lepšie výsledky tí žiaci a študenti, ktorí sa od útleho veku zaoberali spomenutými typmi hier. V príspevku chceme uviesť ukážky úspešných záverečných prác frekventantiek kontinuálneho vzdelávania Orientácia v priestore a priestorová predstavivosť v predprimárnom vzdelávaní a poukázať na potrebu nadväznosti v rámci tejto tematiky na ďalšom stupni vzdelávania

Adresa autorov - Adresses

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
KAGDM, FMFI UK v Bratislave, Mlynská dolina, SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com

Poďakovanie - Acknowledgement

Príspevok vznikov v rámci grantu KEGA č. 057UK-4/2011.

OBSAH

JINDŘICH BEČVÁŘ: Teorie reálných čísel – od Eudoxa k Dedekindovi 3
GERGELY WINTSCHE: Games and Probabilities 15
EVA BARCÍKOVÁ: Využitie separovaných modelov k vytváraniu základných geometrických poznatkov 17
JAROSLAV BERÁNEK, JAN CHVALINA: Řešitelnost grup lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu 23
MARTIN BILLICH: Kužeľosečky v riešení úloh o dotykoch 31
ANTONIO BOCCUTO, XENOFON DIMITRIOU: Limit Theorems for Topological Group-valued Measures with Respect to Filter Convergence 37
KRISTÍNA CAFIKOVÁ, MICHAELA REICHELOVÁ: Fermiho úloha riešená pomocou vyučovacej metódy Placemat 44
SOŇA ČERETKOVÁ: Mathematics B-day in Slovakia 50
JANKA DRÁBEKOVÁ: GeoGebra ako prostriedok vizualizácie riešení aplikačných úloh 56
JOZEF FULIER: O jednej zaujímavej triede funkcií viac premenných I. 62
JOZEF FULIER: O jednej zaujímavej triede funkcií viac premenných II. 68
MONIKA KRČMÁROVÁ: Využitie niektorých historických metód riešenia lineárnych rovníc vo vyučovaní matematiky 76
RADOMÍRA GREGÁŇOVÁ: Financial Mathematics in Electronic Study Materials 82
JOZEF HVORECKÝ: Explicitné a tacitné matematické znalosti.................................... 88
JOANNA JURECZKO: Using Graphic Display Calculator in Solving Some Problems Concerning Calculus 93
MICHAELA KLEPANCOVÁ, MAREK VARGA: O jednom odhade čísla π 99
MÁRIA KMEŤOVÁ: Druhé geometrické okno v programe GeoGebra 105
IVETA KOHANOVÁ: Matematika globálne 111
LÝDIA KONTROVÁ, IVANA POBOČÍKOVÁ: Solving Linear Differential Equations in Matlab 118
MÁRIA KÓŠOVÁ, EDITA SZABOVÁ, EVA UHRINOVÁ: Štatistické spracovanie výsedkov výstupného testu pre 7. ročník ZŠ projektu Kega 015 UKF – 4/2012 124
RENÁTA KUNOVÁ: Rôzne postupy riešenia vybranej úlohy z maturitného testu 131
LUKÁŠ LEDNICKÝ: Hranovo supermagické úplné ohodnotenie niektorých tried grafov 137
RENATA MAJOVSKÁ: Mind Maps as a Tool for Enlarging Mathematical Literacy 142
JANKA MELUŠOVÁ, JÁN ŠUNDERLÍK, SOŇA ČERETKOVÁ: Identification of Mathematics´ Teachers Beliefs Connected to Inquiry-Based Learning 149
MAREK MOKRIŠ: Úlohy zo stereometrie v učebných textoch na primárnom stupni vzdelávania na Slovensku a v Nemecku – pohľad druhý 155
DANA ORSZÁGHOVÁ: Aplikačné úlohy vo vyučovaní lineárnej algebry 161
GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, LUCIA RUMANOVÁ, JÚLIA ZÁHORSKÁ: Rozvoj geometrických predstáv o Pytagorovej vete 167

ALENA PRÍDAVKOVÁ: Úlohy s elementmi štatistiky v matematike primárnej školy .. 173
IVETA SCHOLTZOVÁ: Geometria a meranie v primárnej edukácii na Slovensku a v Írsku ... 179
MÁRIA SLAVÍČKOVÁ: Inovačné prístupy v príprave budúcich učiteľov matematiky . 184
EDITA SZABOVÁ: Projektové vyučovanie štatistiky pre nematematikov ... 191
ONDREJ ŠEDIVÝ, VILIAM ĎURIŠ: Neurodidaktika a vyučovanie matematiky ... 197
EVA UHRINOVÁ, MÁRIA KÓŠOVÁ, ĽUBOMÍR RYBANSKÝ, MARTA VRÁBELOVÁ: Školenia aktivity 1.4 NÚCEM a názory učiteľov na vyučovanie oblasti náhodnosť ... 203
DUŠAN VALLO, KITTI VIDERMANOVÁ: Aktívne učenie sa geometrie prostredníctvom topografických prác ... 210
PETER VANKÚŠ: Analysis of the Winning Strategy of the Game Enades as a Task for Pupils ... 218
ZUZANA VITÉZOVÁ: Zážitkové vyučovanie v matematike ... 224
PETER VRÁBEL, MONIKA KRČMÁROVÁ, ANNA HREŠKOVÁ: Výrazy s premennou a rovnice na základnej škole prostredníctvom riešenia problémov bežného života 230
PETER VRÁBEL, MARTA VRÁBELOVÁ: I – Convergence and I – Continuity of the Fuzzy Number-Valued Functions ... 237
MICHAL ZÁKOPČAN: Ako na L'Hospitala 2 ... 243
KATARÍNA ŽILKOVÁ: Významné atribúty systému GeoGebra z pohľadu učiteľov matematiky ... 249

Posterová sekcia

VIERA UHERČÍKOVÁ: Priestorová predstavivosť v predškolskom veku... 259

Názov:	Acta Mathematica 16
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Zostavovatelia:	prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
	RNDr. Dušan Vallo, PhD.
	RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Rok vydania:	2013
Poradie vydania:	prvé
Počet strán:	264
Počet výtlačkov:	100 ks

ISBN 978-80-558-0365-4

EAN 9788055803654