FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON ONE INTERESTING CLASS OF PEANO TYPE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES I.

O JEDNEJ ZAUJÍMAVEJ TRIEDE FUNKCIÍ VIAC PREMENNÝCH I.

JOZEF FULIER

ABSTRACT. *This contribution deals with the generalization of the Peano function* $\wp: \wp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0) = 0$; *as a homogenous function of two variables with a degree* $k = 0$ *in case of homogenous functions of n-variables* $(n \geq 2)$ *with a degree* $k \leq 0$. *We will list interesting properties of such functions and prove that these functions are continuous at a point* $[0,0,\dots,0]$.

KEY WORDS: *continuity, limit of a function of several variables*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať zovšeobecnením Peanovej funkcie* $\wp: \wp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0) = 0$; *branej ako homogénna funkcia dvoch premenných stupňa* $k = 0$ *pre prípad homogénnych funkcií n-premenných* $(n \geq 2)$ *stupňa* $k \leq 0$. *Uvedieme zaujímavé vlastnosti takýchto funkcií a dokážeme, že tieto funkcie nie sú spojité v bode* $[0,0,\dots,0]$.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: spojitosť, limita funkcií viac premenných*

CLASSIFICATION: D50, D80, I65

1 Úvodné poznámky

Z hľadiska rozvoja matematickej kultúry a budovania nadhľadu je veľmi dôležité, aby aj učitelia matematiky na základných a stredných školách mali do svojej matematickej prípravy zaradené aj elementy *teórie funkcie viac premenných* (najmä diferenciálny, príp. aj integrálny počet funkcie viac premenných). Je vhodné poznamenať, že *funkcie viac premenných* sa objavili už v čase zrodu matematickej analýzy: najprv v geometrii u *Gottfrieda W. Lebniza* (1646 - 1716) v roku 1694, keď pracoval s krivkami závisiacimi od parametrov a neskôr vo fyzike v roku 1748 u *Jean le Rond d' Alemberta* (1717 - 1783) pri riešení problému *kmitania struny*. V tomto prípade pozícia $u(t,x)$ struny je ozajstnou funkciou priestorovej súradnice x a času t. Ako poznamenávajú *Hairer* a *Wanner* (2008) k dôležitému prielomu v systematickom štúdiu funkcie viacerých premenných došlo v polovici 19. storočia, keď sa dospelo k zdanlivo jednoduchej myšlienke: usporiadaná dvojica čísel (následne aj n-tica čísel) sa začala označovať jediným symbolom, jediným písmenom $[x_1, x_2] =: x, [x_1, x_2, \dots, x_n] =: x$, ktoré sa začali považovať za nové matematické objekty. Boli nazvané rôznymi názvami: *extenzívnymi veličinami*[1] (*extensive Grösse*) *H. Grassmannom* (1844, 1862), „*komplexami*“ (*complexes*) *G. Peanom* (1888) a „*vektormi*“ *W. Hamiltonom* (1853).

V učiteľskom, ale i v neučiteľskom štúdiu na UKF v Nitre sa v predmete *Matematická analýza* 4 zaoberáme aj *limitou* a *spojitosťou* funkcie viacerých premenných. Samotné

[1] Fyzikálna veličina sa nazýva *intenzívna veličina,* ak jej hodnota nezávisí od veľkosti systému (napr. teplota, hustota). Protipólom *intenzívnej veličiny* (antonymom) je *extenzívna veličina*, ktorá od veľkosti systému závisí (napr. objem, hmotnosť). *Extenzívne veličiny* sú spravidla veličinami aditívnymi.

definície týchto pojmov sa na prvý pohľad neveľmi odlišujú od limity a spojitosti funkcie jednej premennej:

Nech $D \subset \mathbb{R}^n, f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, nech $a \in \mathbb{R}^n, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Potom definujeme

1. Nech bod a je hromadným bodom definičného oboru D funkcie f. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťami: $x_k \in D, x_k \neq a$, pre každé $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$; platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

2. Funkcia f je spojitá v bode $a \in D \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťami $x_k \in D$, pre každé $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = a$; platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

Poznamenajme, že zámerne začíname ako prvou, *Heineho definíciou* limity a spojitosti funkcie f v danom bode a, pretože formálne sú temer totožné s jednorozmerným variantom (pre $n = 1$). Formálne odlišnosti sú iba v nových symboloch, vystupujúcich vo dvoch inklúziach $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Študentom pritom zdôrazňujeme, aby sa „nanovo“ neučili nové definície, ale aby si spomenuli na definície „staré“ a v pamäti si ich aktualizovali prostredníctvom nových symbolov v uvedených inklúziách. Je prirodzené, že pri tomto postupe príslušné ekvivalentné *Cauchyho definície* týchto pojmov (s využitím pojmu okolia bodu) sa dokazujú ako matematické vety. Týmto sme sa nezbavili základných problémov s limitou a spojitosťou funkcie viacerých premenných, ale aspoň z časti eliminujeme strach z nepoznaného, najmä u slabších študentov. Prirodzene učiteľ musí mať na pamäti, že praktické zisťovanie limity a spojitosti funkcie viacerých premenných, nie je až tak jednoduché, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. Zložitosť, ktorú nám funkcie viacerých premenných prinášajú máme na začiatku skrytú v rovnakých, (starých) symboloch, ale *s novým obsahom* (o čom sa ľahko presvedčíme, ak prechodom k súradniciam, detailnejšie rozpíšeme príslušné inklúzie a nerovnosti), preto študenti sa musia s touto novou situáciou detailnejšie oboznámiť pri riešení konkrétnych úloh. Pripomenutie si jednostranných limít a jednostrannej spojitosti funkcie jednej premennej môžeme využiť pri zavedení pojmov *limity funkcie n − premenných vzhľadom na množinu* $D_1 \subset D (\subset \mathbb{R}^n)$ (v označení $\lim_{x\to a,\ x\in D} f(x)$) a tiež *spojitosti funkcie vzhľadom* na danú *podmnožinu definičného oboru.* Tieto nové definície dostaneme z vyššie uvedených definícií formálnym nahradením definičného oboru funkcie D jeho podmnožinou D_1, čím nahrádzame *funkciu f jej parciálnou funkciou* s definičným oborom D_1.

Z definície limity (resp. limity vzhľadom na nejakú množinu) funkcie vyplýva (s možnou odvolávkou na *vetu o jednoznačnosti* limity postupnosti), že existencia limity funkcie a ani jej hodnota v danom bode $a \in \mathbb{R}^n$ nezávisia od výberu *parciálnej funkcie* k funkcii f, t.j. od výberu príslušnej podmnožiny D_1 definičného oboru D funkcie f (samozrejme je potrebné, aby bod a bol hromadným bodom tejto podmnožiny D_1). Preto, ak existujú aspoň dve množiny $D_1, D_2 \subset D$ (pričom bod a je hromadným bodom uvedených množín) také, že $\lim_{x\to a,\ x\in D_1} f(x) \neq \lim_{x\to a,\ x\in D_2} f(x)$, potom limita $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje. V tejto súvislosti užitočným a často názorným prípadom bude prípad, ak v istom prstencovom okolí bodu a body podmnožiny D_1 definičného oboru D vytvárajú *krivku K prechádzajúcu bodom a*. V tomto prípade hovoríme o tzv. *limite funkcie f* v bode *a vzhľadom na krivku K*. Väčšinu odlišností a ťažkostí v porovnaní s funkciou jednej premennej (podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ sú predsa len jednoduchšie, resp. naopak sú analyticky ťažko zvládnuteľné) odhalíme už pri funkcii dvoch premenných $f\colon z = f(x, y)$, kde bod $X = [x, y] \in D \subset \mathbb{R}^2$. Nemalou výhodou tohto prípadu je skutočnosť, že spomínané krivky K sú rovinné krivky, napríklad *priamka, kružnica, parabola atď. prechádzajúce bodom* $a = [x_0, y_0]$ a príslušné parciálne funkcie danej funkcie na krivke K i samotnú funkciu f dvoch premenných je ešte možné *vizualizovať* prostredníctvom ich grafov v euklidovskom priestore E_3.

Východiskom pre naše ďalšie úvahy bude pozoruhodná funkcie dvoch premenných tvaru

$$\wp\colon \wp(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad\quad \text{pre } [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

ktorou sa zaoberal vynikajúci taliansky matematik *Giuseppe Peano* [2] v práci *„Annotazioni" al trattato di calcolo del* (*Peano*, 1884). Je vhodné poznamenať, že *Peano*, ako vynikajúci logik, mal veľkú záľubu v objavovaní slabých miest, resp. chybnej argumentácie v dielach svojich rovesníkov i v dielach slávnych matematikov. Je tvorcom celého radu *protipríkladov* (angl. *counterexamples*), z nich najslávnejšia je tzv. *Peanova krivka* (je to pozoruhodná krivka, ktorá *vyplní bezo zvyšku celú časť roviny* – je to prvá známa forma dnešných fraktálov). Zostrojil tiež príklad funkcie, ktorej parciálne derivácie nekomutujú a k dôležitým (možno menej známym je i príklad funkcie $\wp$). Poznamenajme, že *G. Peano* vo svojich *„Poznámkach"* uviedol príklad tejto funkcie ako protipríklad na chybnú argumentáciu *L. A. Cauchyho* (1789-1857) v jeho slávnom diele *Cours d'analyse algébrique* (1821), v ktorom *Cauchy* stotožnil *spojitosť* funkcie $f\colon z = f(x,y)$ s tzv. *oddelenou spojitosťou* funkcie f vzhľadom k obom premenným (t. j. so spojitosťou dvoch funkcií jednej premennej: $g_y(x) = f(x,y), h_x(y) = f(x,y)$).

Peanovu funkciu $\wp$ nájdeme (príp. s nedôležitými modifikáciami – jednu použijeme aj my a označíme ju symbolom $\wp_1$) pravdepodobne v každej učebnici a v každej zbierke úloh z matematickej analýzy, ktoré sa zaoberajú aj funkciami viacerých premenných. V ďalšom si ukážeme, že táto funkcia stojí (resp. môže stáť) v pozadí tvorby ďalších dôležitých protipríkladov, ale aj štandardných úloh, ktoré sa vyskytujú v zbierkach úloh zaoberajúcich sa *limitou* a *spojitosťou funkcie viacerých premenných*.

Uveďme niektoré neštandardné (v zmysle: pozoruhodné či zdanlivo paradoxné) vlastnosti *Peanovej funkcie* $\wp_1 := \frac{1}{2}\wp$.

Základné vlastnosti funkcie $\wp_1\colon \wp_1(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \ \text{pre } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$

Funkcia $\wp_1$ *v bode* $[0,0]$ ***nemá limitu****, preto* ***nie je spojitá, nie je diferencovateľná*** *v tomto bode, napriek tomu, že funkcia* $\wp_1$

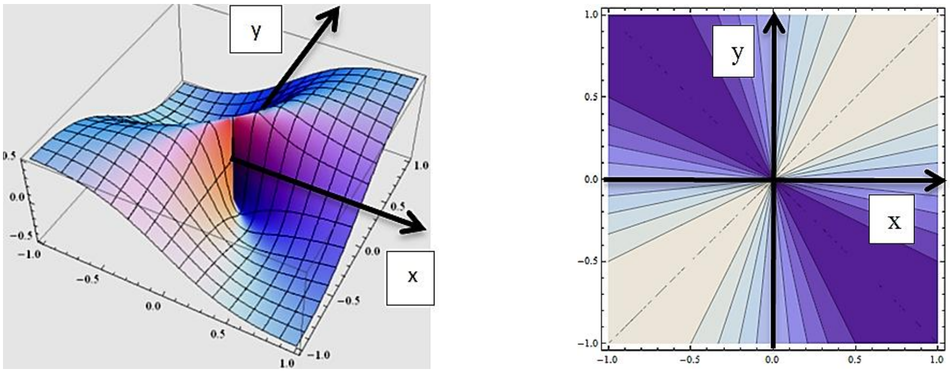
1. *je* ***spojitá*** *(na celej rovine) vzhľadom* ***na premennú*** x *i vzhľadom na* ***premennú*** y*; špeciálne to tiež znamená, že funkcia* $\wp_1$ *je spojitá na súradnicových osiach* $y = 0, x = 0$*;*
2. *je s* výnimkou bodu $[0,0]$ je *konštantnou funkciou vzhľadom na každú priamku prechádzajúcej bodom* $[0,0]$, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii f;
3. *jej obe* ***parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine****, teda aj v bode* $[0,0]$ (v *tomto bode sú však obe tieto parciálne derivácie nespojité*).

[2] *Giuseppe Peano* (1858-1932) bol jedným zo zakladateľov matematickej logiky a významne sa podieľal na vzniku teórie množín. Vytvoril štandardnú axiomatizáciu štruktúry prirodzených čísel, ktorá je známa pod názvom *Peanova aritmetika*. V živote G. Peana sa objavil zaujímavý vzťah so Slovenskom. Totiž keď sa v roku 1897 v Zürichu konal I. *medzinárodný kongres matematikov*, organizačný výbor navrhol, aby hlavné prednášky predniesli Felix Klein, Adolf Hurwitz, Henri Poincaré a Slovák z Liptovského Mikuláša: *Aurel Stodola* (1859-1942), profesor ETH v Zürichu, vynikajúci odborník v odbore parných turbín, ktorého výpočty a konštrukcie dali základ tomuto odvetviu strojárstva. Bohužiaľ, náš rodák, zo zdravotných dôvodov ponuku nemohol prijať (mal mať prednášku *o aplikáciách matematiky*), preto bol o prednášku požiadaný *Giuseppe Peano*, ktorý ponuku prijal a predniesol prednášku o matematickej logike.

Dôkaz uvedených vlastností je jednoduchý. Preto iba v skratke: funkcia $\wp_1$ nie je spojitá v bode [0,0], pretože na každej priamke prechádzajúcej bodom [0,0], s parametrickými rovnicami $x = \alpha t, y = \beta t$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ nadobúda (výnimkou bodu [0,0] iba *konštantné hodnoty* $\wp_1(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ (pozri graf funkcie $\wp_1$ na Obr. 1). To však znamená, že limita parciálnej funkcie závisí od výberu priamky prechádzajúcej začiatkom, preto limita funkcie $\wp_1$ v bode [0,0] neexistuje (konkrétne pre priamku $y = x$ limita parciálnej funkcie pre $x \to 0$ sa rovná hodnote $1 \neq \wp_1(0,0) = 0$). *Iné zdôvodnenie*, prečo funkcia $\wp_1$ nemôže byť v bode [0,0] spojitá: v ľubovoľne malom okolí začiatku súradnicovej sústavy funkcia $\wp_1$ nadobúda všetky funkčné hodnoty dané intervalom s koncovými bodmi $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

S využitím softvéru *Mathematica* je možné prostredníctvom jednoduchých príkazov načrtnúť priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\wp_1$ (svetlejšie časti vrstevnicového grafu prislúchajú väčším funkčným hodnotám):

Plot3D[$x\,y/(x^2+y^2)$, {$x,-1,1$}, {$y,-1,1$}], ContourPlot [$x\,y/(x^2+y^2)$, {$x,-1,1$}, {$y,-1,1$}]).



Obr.1. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\wp_1 : z = \wp_1(x, y)$

V ďalšom sa pokúsime o prostredníctvom *zovšeobecnenia*, ale aj špecifikácie *Peanovej funkcie* $\wp_1$ (tvorbou špeciálnych *zložených funkcií* s hlavnou zložkou $\wp_1$) vytvoriť zaujímavé a dostatočne *všeobecné funkcie*, ktorých špeciálne prípady a naň naviazané problémové úlohy nachádzame aj v náročnejších zbierkach úloh či problémov, či v špecializovaných monografiách, napr. (Kudrjavcev a kol., 2002), (Gelbaum et Olmsted, 1964).

2. Zovšeobecnenia dimenzionálne: *prípad funkcie* n *– premenných*

Vytvoriť podľa dvojrozmerného variantu *Peanovej funkcie* jej n- rozmerný variant je úloha iste veľmi jednoduchá. Stačí totiž položiť

$$P_1 : P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{x_1\, x_2 \dots x_n}{(x_1)^2+(x_2)^2+\dots+(x_n)^2}, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] \neq [0,0,\dots,0]; \\ 0, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] = [0,0,\dots,0]. \end{cases}$$

Pri detailnejšom pohľade na funkcie $\wp_1$ a P_1 ľahko zistíme, že okrem vizuálnej zhody oboch funkcií majú spoločnú zaujímavú vlastnosť: obe tieto funkcie sú homogénnymi funkciami 0 – tého stupňa. Poznamenajme, že funkcia $F: y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa nazýva *homogénnou funkciou stupňa* $k \in R$ *na množine* Ω, ak pre každé $t > 0$ platí $F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre ľubovoľný bod $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \Omega$.
Dá sa preto očakávať, že platí nasledovná veta (doplnená ešte o jeden zaujímavý prípad)

Veta 1. Nech $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ a nech funkcia

$$F: F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n), & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] \neq [0, 0, \dots, 0]; \\ 0, & \text{pre } [x_1, x_2, \dots, x_n] = [0, 0, \dots, 0]; \end{cases}$$

je *homogénnou funkciou stupňa* $k \in R$, $k \leq 0$, pričom $f \neq const$. Nech bod $O = [0, 0, \dots, 0]$ je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f a nech existujú aspoň dva body $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \in D(f)$, pre ktoré $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, pričom bod $t = 0$ je hromadným bodom definičných oborov funkcií $g_\alpha : g_\alpha(t) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t)$, $g_\beta : g_\beta(t) = f(\beta_1 t, \beta_2 t, \dots, \beta_n t)$, kde

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0, \ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2 \neq 0.$$

Potom funkcia F *nie je spojitá* v bode $O = [0, 0, \dots, 0]$.
Špeciálne to znamená, že

1. Pre $k = 0$ je každá *parciálna funkcia* k funkcii f vzhľadom na (*vhodnú*) *priamku prechádzajúcej bodom* $O = [0, 0, \dots, 0]$ v istom *prstencovom okolí* tohto bodu *konštantná,* s konštantou závisiacou od smerového vektora príslušnej priamky, preto $\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ neexistuje, preto funkcia F nie je spojitá v bode $[0, 0, \dots, 0]$.
2. Ak $k < 0$, potom $lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ buď *neexistuje* alebo je *nevlastná*.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady vety.
1. Pre $k = 0$ parciálna funkcia k funkcii f na priamke prechádzajúcou začiatkom súradnicovej sústavy so smerovým vektorom $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, pre ktorý platí $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$, t.j. na množine

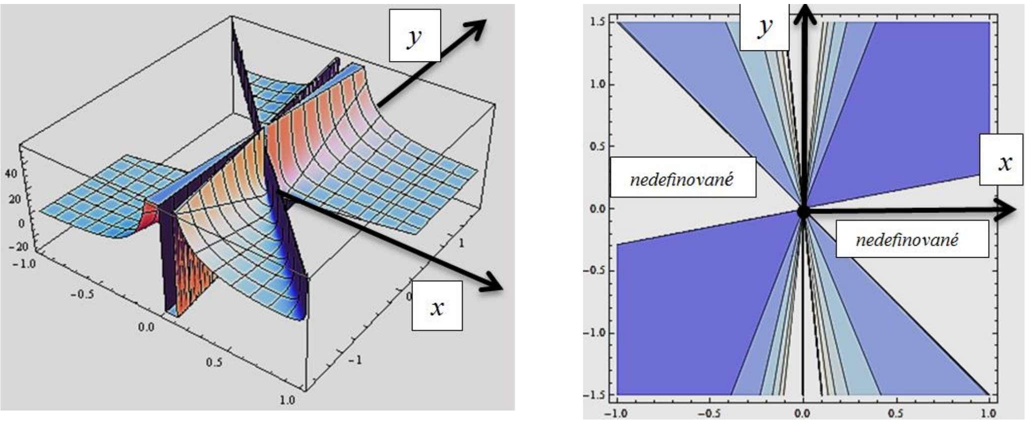
$$D_\alpha := \{[x_1, x_2, \quad \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = \alpha_1 t, x_2 = \alpha_2 t, \dots, x_n = \alpha_n t;\ t \in \mathbb{R}\} \cap D(f)$$

sa rovná $g_\alpha(t) = f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = t^0 f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, teda je konštantnou funkciou nezávisiacou od premennej t. Preto, ak $t = 0$ je hromadným bodom množiny D_α, tak $\lim_{t\to 0} g_\alpha(t) = \lim_{t \to 0} f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Táto limita závisí voľby priamky (resp. od voľby jej smerového vektora α) prechádzajúca začiatkom súradnicovej sústavy a vzhľadom na to, že podľa predpokladu existujú aspoň dve priamky, na ktorých príslušné parciálne funkcie $g_\alpha(t), g_\beta(t)$ k funkcii f majú pre $t \to 0$ rôzne limity, preto $\lim_{[x_1, x_2, \dots, x_n] \to [0,0,\dots,0]} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ neexistuje.
2. V prípade $k < 0$, položme $n := -k > 0$ a vyberme z bodov $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \in D(f)$ ten (nech je to napr. α), pre ktorý je $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Potom pre limitu parciálnej funkcie k funkcii f platí $\lim_{t\to 0} g_\alpha(t) = \lim_{t\to 0} f(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_n t) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) * \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t^n} \neq f(0, 0, \dots, 0) = 0$, pretože posledná limita buď neexistuje alebo je nevlastná.

Príklad 1. Ľahko overíme, že $\frac{\partial \wp_1}{\partial x}, \frac{\partial \wp_1}{\partial y}$ sú homogénne funkcie stupňa $k = -1$, preto nie sú spojité v bode $[0, 0]$.

Príklad 2. Dokážte, že funkcia f: $f(x, y) = \dfrac{x^2 y - 2y^3 \ln\frac{3x+2y}{7y-2x}}{(x^3 + y^2 x) \operatorname{arctg} \frac{2013y^2 - 5x^2}{15xy + y^2}}$ nemá v bode $[0, 0]$ limitu.

Riešenie. Funkcia f nie definovaná na priamkach $x = 0, y = -15x, y = \pm\sqrt{\frac{5}{2013}}x$ a „medzi a na“ priamkach $y = \frac{2}{7}x, y = -\frac{3}{2}x$ čo znamená, že bod $[0, 0]$ je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Funkcie $P(x, y) = x^2 y - 2y^3 \ln\frac{3x+2y}{7y-2x}$, $Q(x, y) = (x^3 + y^2 x)$ artg $\frac{2013y^2 - 5x^2}{15xy + y^2}$ sú homogénne funkcie stupňa 3, preto funkcia f je homogénnou funkciou stupňa 0. Pre limitu



Obr. 2. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie f z príkladu 2.

parciálnej funkcie k funkcii f na priamke $y = kx$ $(x \neq 0)$ ležiacej v definičnom obore funkcie f platí $\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \dfrac{k - 2k^3 \ln \frac{3+2k}{7k-2}}{(1+k^2)\operatorname{arctg} \frac{2013k^2-5}{15k+k^2}}$. Ak zvolíme napríklad $k = 1$ a $k = 2$ dostaneme dve rôzne hodnoty, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$ neexistuje.

Priestorový a vrstevnicový graf funkcie f v dvojrozmernom intervale $J = [-1, 1] \times [-1{,}5\,; 1{,}5]$ načrtnutý systémom *Mathematica* je na Obr. 2.

Literatúra

[1] Cauchy, A.L. (1821). Cours d'analyse algébrique, Oeuvres série 2, vol. III

[2] Eliáš J., Horváth J., Kajan J. (1980) *Zbierka úloh z vyššej matematiky,* Alfa, Bratislava.

[3] Fulier, J. – Vrábel, M. (2007). Diferenciálny počet. Vysokoškolská učebnica. Nitra FPV, UKF 2007, 304 s. ISBN 978-80-8094-132-1

[4] Gelbaum, B.R. – Olmsted, J.M.N. (1964). Counterexamples in Analysis. HOLDEN-DAY, San Francisco, London, Amsterdam. 251 s.

[5] Hairer, E.,- Wanner, G. (2008). Analysis by Its History. Springer 2008. 377 s. ISBN 978-0-387-77031-4

[6] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M. (1961). Matematika II. SVTL Bratislava, 1961, 855s.

[7] Kudrjavcev, L.D - Kutasov, A.D. - Čechlov, V.I. - Šabunin, M.I. (2002). Sbornik zadač po matematičeskomu analizu, Tom 3, Funkcii mnogich peremennych. Nauka 2002, 468 s.

[8] Peano, G. (1884). "Annotazioni" al trattato di calcolo del 1884, Opere scelte I, s. 47-73

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: jfulier@ukf.sk