FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON ONE INTERESTING CLASS OF PEANO TYPE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES II.

O JEDNEJ ZAUJÍMAVEJ TRIEDE FUNKCIÍ VIAC PREMENNÝCH II.

JOZEF FULIER

ABSTRACT. *This contribution discusses a limit and continuity of two composite functions of the form* $F(x,y)=\frac{yg(x)}{y^2+g^2(x)}, F(0,0)=0, respectively\ f(x)=\frac{g(x)h(x)}{g^2(x)+h^2(x)}$, *which are associated with Peano function* $\wp\colon \wp(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0)=0$ *in case that* $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.

KEY WORDS: : *continuity, limit of a function of several variables*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať limitou a spojitosťou dvoch zložených funkcií tvaru* $F(x,y)=\frac{yg(x)}{y^2+g^2(x)}, F(0,0)=0, resp.\ f(x)=\frac{g(x)h(x)}{g^2(x)+h^2(x)}$, *ktoré súvisia s Peanovou funkciou* $\wp\colon \wp(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $\wp(0,0)=0$ *za predpokladov, že* $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *limita, spojitosť funkcie viac premenných*

CLASSIFICATION: D50, D80, I65

1 Úvodné poznámky

Tento článok je bezprostredným pokračovaním práce, v ktorej sme sa zaoberali limitou a spojitosťou funkcie, ktorú sme pracovne nazvali *Peanovou funkciou* a označili sme ju symbolom $\wp_1$ na počesť vynikajúceho talianskeho matematika *Guiseppe Peana* (1858 - 1932), ktorý v práci (Peano, 1884) zostrojil funkciu $\wp=2\wp_1$ s pozoruhodnými vlastnosťami. Funkciu $\wp_1$ sme definovali nasledovne

$$\wp_1\colon \wp_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{pre } [x,y]\neq[0,0];\\ 0, \qquad \text{pre } [x,y]=[0,0].\end{cases}$$

V prvej časti sme sa zaoberali jedným z možných zovšeobecnení *Peanovej funkcie* $\wp_1$ (ako funkcie dvoch premenných), zovšeobecnením pre prípad funkcie $n-$ premenných.
V tejto časti zostaneme v dvojrozmernom prípade, pričom budeme využívať v podstate iba *Peanovu funkciu* $\wp_1$ a operáciu skladania. Dokážeme niekoľko všeobecných tvrdení, z ktorých bezprostredne vyplývajú pozoruhodné vlastnosti istých funkcií, s ktorými sa stretávame v náročnejších zbierkach úloh a problémov z matematickej analýzy, či dokonca ako protipríklady, napríklad vo vynikajúcej monografii *Counterexamples in Analysis* (Gelbaum et Olmsted, 1964).

Keďže *Peanova funkcia* $\wp_1$ bude bazálnou pre naše ďalšie úvahy, sformulujme opätovne jej základné vlastnosti.

Základné vlastnosti funkcie $\wp_1: z = \wp_1(x,y)$
Funkcia $\boldsymbol{\wp_1}$ *v bode* $[0,0]$ ***nemá limitu****, preto* ***nie je spojitá, nie je diferencovateľná*** *v tomto bode, napriek tomu, že funkcia* $\boldsymbol{\wp_1}$

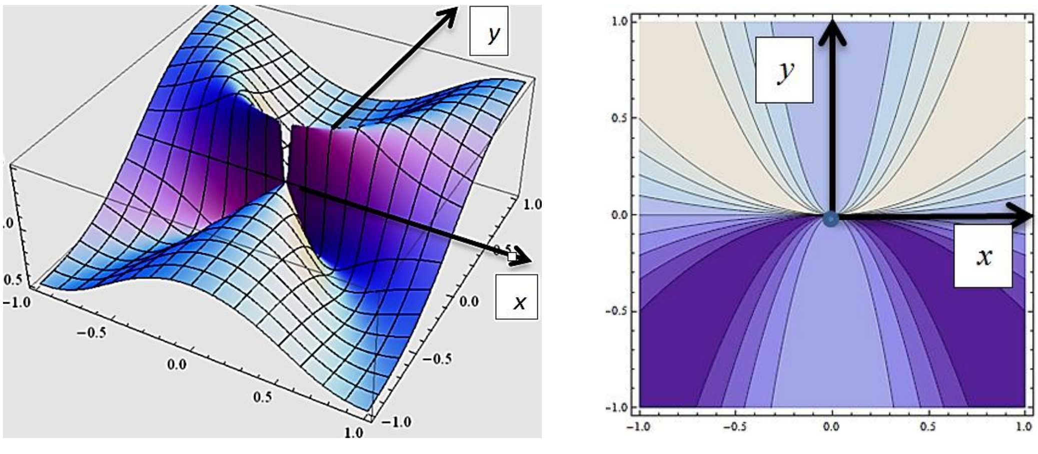
4. *je* ***spojitá*** *v bode* $[0,0]$ (*i na celej rovine*) *vzhľadom* ***na premennú*** $\boldsymbol{x}$ *i vzhľadom na* ***premennú*** $\boldsymbol{y}$*; špeciálne to tiež znamená, že funkcia* $\boldsymbol{\wp_1}$ *je spojitá na súradnicových osiach* $y = 0, x = 0$*;*
5. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú priamku prechádzajúcej bodom* $[0,0]$, *je s výnimkou tohto bodu* ***konštantná****, s konštantou závisiacou od smerového vektora príslušnej priamky, preto v bode* $[0,0]$ ***existujú vlastné limity*** *každej z týchto parciálnych funkcií funkcie* $\boldsymbol{\wp_1}$;
6. *jej obe* ***parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine****, teda aj v bode* $[0,0]$.

2. Zovšeobecnenia – využitie zloženej funkcie s hlavnou zložkou $\wp_1$

Prvý príklad, ktorým uvedieme celú problematiku je funkcia tvaru $f_2: f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, \text{ pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$, ktorým sa vo forme protipríkladu v základných kurzoch matematickej analýzy dokazuje, že pre existenciu limity $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ nepostačuje, aby *existovali* a *rovnali sa* navzájom *všetky limity* parciálnych funkcií k funkcii *na priamkach* prechádzajúcich bodom $[0,0]$. Napriek tomu, že ide o známu úlohu (či protipríklad) a mal by ju poznať každý absolvent učiteľského štúdia matematiky, opätovne sformulujme kľúčové vlastnosti aj funkcie f_2.

Príklad B. (pozri napr. (Fulier et Vrábel, 2007), (Gelbaum et Olmsted, 1964)). Dokážte, že funkcia $f_2: f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y)$ v bode $[0,0]$ *nemá limitu*, preto *nie je spojitá, nie je diferencovateľná* v tomto bode, napriek tomu, že pre funkciu f_2 platí

1. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú priamku prechádzajúcej bodom* $[0,0]$) *je spojitá v bode* $[0,0]$ (*samozrejme aj v ostatných bodoch príslušnej priamky)*;
2. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom na ľubovoľnú parabolu* tvaru $y = Ax^2 (A \in \mathbb{R})$ je, *s* výnimkou bodu $[0,0]$, je *konštantnou funkciou s konštantou rovnou číslu* $\frac{A}{1+A^2}$, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii f_2;
3. *jej obe parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine, teda aj v bode* $[0,0]$.

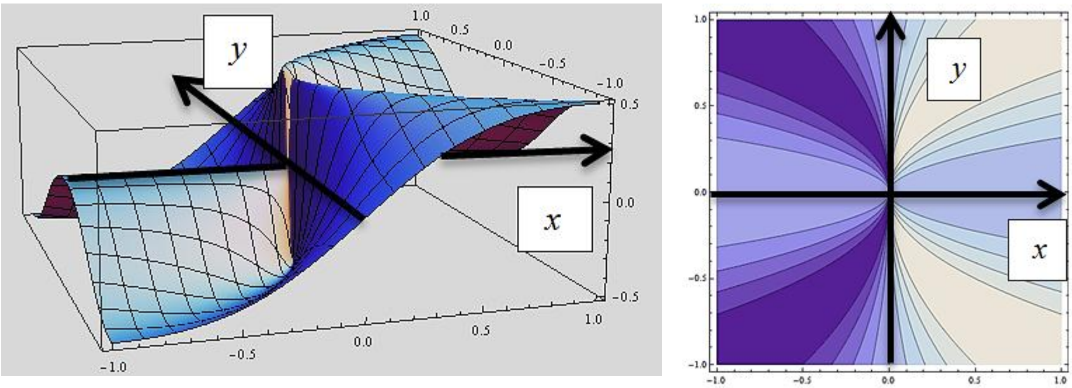


Obr. 1. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $f_2: z = f_2(x,y) = \wp_1(x^2,y)$

Náčrt riešenia. Spojitosť parciálnej funkcie vzhľadom k ľubovoľnej priamke $x = \alpha t, y = \beta t, t \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ vyplýva z toho, že pre každé $t \in \mathbb{R}$ je $f_2(\alpha t, \beta t) = \wp_1((\alpha t)^2, \beta t) = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^4 t^2 + \beta} t \to 0 = f(0,0)$ pre $t \to 0$. *Parciálna funkcia* k funkcii f_2 vzhľadom k *ľubovoľnej parabole* tvaru $y = Ax^2$ ($x \neq 0$, $A \in \mathbb{R}$), t.j. funkcia $\wp_1(x^2, Ax^2) = \frac{A}{1+A^2} = const$, preto existuje jej vlastná limita $\lim_{x\to 0} \wp_1(x^2, Ax^2) = \frac{A}{1+A^2}$. Pre rôzne A dostávame však rozličné výsledky, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} f_2(x,y)$ neexistuje a teda funkcia f_2 nie je spojitá v bode [0,0].

Poznámka 1. Pozoruhodné správanie sa funkcie f_2 je možné odhaliť na priestorovom a vrstevnicovom grafe tejto funkcie vytvorenom systémom *Mathematica* na Obr.1.

V niektorých zbierkach úloh nachádzame často prípad funkcie, ktorý je symetrický k funkcii f_2, t.j. funkciu $h_2 \colon h_2(x,y) = \wp_1(x, y^2)$. Z hľadiska našich cieľov je rozdiel medzi týmito funkciami nepodstatný. Totiž rozdiel je iba v tom, že funkcia g_2 je konštantná na parabolách s rovnicou $x = Ay^2, (y \neq 0, A \in \mathbb{R})$ (pozri tiež graf funkcie h_2 na Obr. 2).



Obr. 2. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $h_2 \colon z = h_2(x,y) = \wp_1(x, y^2)$

V nasledujúcej časti sa budeme venovať zovšeobecneniu úlohy z *Príkladu B*. Bezprostredným zovšeobecnením môže byť prípad, v ktorom rolu kvadratickej funkcie $y = x^2$ preberie ľubovoľná spojitá funkcia $g \colon y = g(x)$ s vlastnosťou $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Využitím Peanovej funkcie vytvoríme zloženú funkciu

$$F \colon F(x,y) \coloneqq \wp_1(g(x), y) = \frac{g(x)y}{g^2(x) + y^2}.$$

Táto funkcia má už jednu zaujímavú vlastnosť: jej parciálne funkcie vzhľadom na každú z kriviek $y = Ag(x)$, (kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), t.j. funkcie tvaru $f_A \colon f_A(x) = \frac{g(x)Ag(x)}{g^2(x)+g^2(x)} = \frac{A}{A^2+1}$ sú v prstencovom okolí bodu $x_0 = 0$ konštantnými funkciami, ktoré majú limity, ale ich hodnota závisí od čísel A, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} F(x,y)$ neexistuje. To však znamená, že funkcia F je nespojitá v bode $[0,0]$. Zostáva ešte nájsť funkciu $h \colon y = h(x)$, či možno ešte lepšie, systém funkcií (napr. $h_B \colon y = Bh(x)$, kde B je ľubovoľné reálne číslo), vzhľadom ku ktorým sú príslušné parciálne funkcie k funkcii F spojité v bode $x_0 = 0$, t.j. pre ktoré je $\lim_{x\to 0} F(x, h_B(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{Bg(x)h(x)}{g^2(x)+B^2h^2(x)} = 0$. Túto vlastnosť vieme zabezpečiť dvoma jednoduchými podmienkami na funkcie g, h.

Uvedenú úvahu môžeme preformulovať do nasledovnej vety.

Veta 1. Nech je funkcia g: $y = g(x)$ je daná spojitá v okolí $U(0)$ bodu 0, pričom pre každé $x \in U(0), x \neq 0$ je $g(x) \neq g(0) = 0$. Nech $h: y = h(x)$ je ľubovoľná spojitá funkcia v okolí $U(0)$ bodu 0 taká, že $h(0) = 0$ a pre každé $x \in U(0),\ x \neq 0$, je $h(x) \neq 0$. Nech funkcie g, h naviac spĺňajú: $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$, alebo $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$. Potom platí:

Funkcia $F: F(x,y) \coloneqq \wp_1(g(x), y) = \frac{g(x)y}{g^2(x)+y^2}$, kde $\wp_1$ je *Peanova funkcia. nemá v bode* $[0,0]$ *limitu*, preto *nie je spojitá* a *nie je* ani *diferencovateľná* v tomto bode, napriek tomu, že funkcia F má nasledovné vlastnosti

1. je *spojitá* (na množine $U(x_0) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) *vzhľadom na premennú* x i *vzhľadom na premennú* y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* ku krivke $\mathcal{H}_B$ danej rovnicou $y = Bh(x)$, (kde $B \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je *spojitou funkciou* v okolí $U(0)$ a teda i v bode $[0,0]$, preto pre limitu funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}_B$ platí
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{H}_B} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F[x, Bh(x)] = F(0,0);$$
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{L}_A$ danej rovnicou $y = Ag(x)$, ($A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je pre každé $x \in U(0), x \neq 0$ *konštantnou funkciou*, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii F, pričom
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{L}_A} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F[(x, Ag(x)] = \frac{A}{A^2+1};$$
4. existujú obe parciálne derivácie $\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}, \frac{\partial F(0,0)}{\partial y}$.

Dôkaz. Nech funkcie spĺňajú predpoklady vety a nech $A \neq 0, B \neq 0$ (pre $A = 0, B = 0$ je dôkaz triviálny). Pre limitu *parciálnej funkcie* k funkcii F *vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}_B$ danej rovnicou sa rovná
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{H}} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F[x, Bh(x)] = \lim_{x\to 0} \wp_1[g(x), Bh(x)] =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{Bg(x)h(x)}{g^2(x)+B^2h^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{B\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)}{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^2 + B^2} = \lim_{x\to 0} \frac{B\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)}{1+B^2\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)^2} = 0 = F(0,0),$$ pretože podľa predpokladu buď $\frac{g(x)}{h(x)} \to 0$ alebo $\frac{h(x)}{g(x)} \to 0$ pre $x \to 0$. To však znamená (ak uvážime aj spojitosť funkcií g, h), že funkcia F je spojitá vzhľadom na krivku $\mathcal{H}_B$ v celom okolí $U(0)$. Analogická situácia je aj s limitou funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{L}_A$. Platí totiž
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],[x,y]\in\mathcal{L}_A} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F[(x, Ag(x)] = \lim_{x\to 0} \frac{Ag^2(x)}{A^2g^2(x) + g^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{A}{A^2+1} = \frac{A}{A^2+1}.$$
Táto limita však závisí od výberu kriviek $\mathcal{L}_A$, preto $\lim_{[x,y]\to[0,0]} F(x,y)$ neexistuje.

A celkom na koniec, ľahko nahliadneme, že napríklad pre $\frac{\partial F(0,0)}{\partial x}$ platí
$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x,0)-F(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$. Podobná situácia je aj s $\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} = 0$.

Poznámka 2. Ľahko overíme, že vo formulácii Vety 1 môže byť okolie $U(0)$ bodu 0 nahradené pravým, resp. ľavým okolím tohto bodu, ba dokonca aj okolím $U(x_0)$ ľubovoľného bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Zaujímavé, že požiadavky na limity funkcií $g, h, f/g$ môžeme sformulovať aj pomocou tzv. symbolov „o“: $g(x) = o\big(h(x)\big)$, alebo $h(x) = o(g(x))$ pre $x \to 0$. Avšak vzhľadom na nejednotné používanie uvedeného symbolu, to neurobíme.

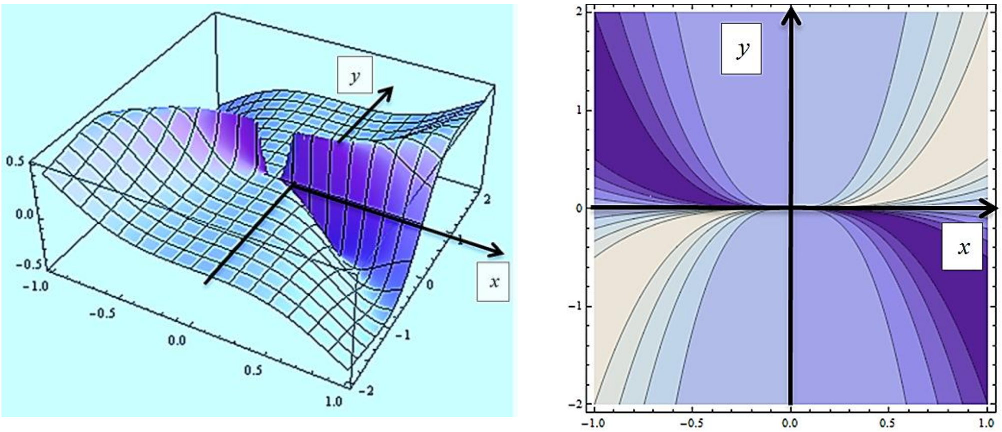
Na základe vyššie uvedenej vety je možné ľahko vyriešiť nasledovnú úlohu

Úloha 1. a) Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ sú dané čísla. Dokážte, že nasledovné funkcie nie sú spojité v bode $[0,0]$

a) $F_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^n y}{x^{2n}+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$ b) $F_2(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^{2\alpha}+y^2}, \text{pre } [x,y] \neq [0,0]; \\ 0, \quad \text{pre } [x,y] = [0,0]; \end{cases}$

napriek tomu, že funkcia F_1 (resp. F_2) má nasledovné vlastnosti:

1. je spojitá vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = A_k x^k$ (resp. $y = B|x|^\beta$) pre ľubovoľný exponent $k \in N, k \neq n$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0, \beta \neq \alpha$) a každú konštantu $B \in \mathbb{R}$, je *spojitou funkciou*;
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = Ax^n$ (resp. $y = A|x|^\alpha$), kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta, je pre každé $x \neq 0$ *konštantnou funkciou*, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií;
4. *jej obe **parciálne derivácie prvého rádu existujú na celej rovine**, teda aj v bode* $[0,0]$ (v *tomto bode sú však obe tieto parciálne derivácie nespojité*).



Obr. 3. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $F: F(x,y) = \frac{yx^3}{y^2+x^6}, F(0,0) = 0$

Poznámka 3. Je vhodné poznamenať, že pri tvorbe náročnejších úloh uvedeného typu je možné „skomplikovať" konkrétne zadanie funkcie $F: F(x,y) := \wp_1(g(x),y) = \frac{g(x)y}{g^2(x)+y^2}$ vynásobením „neškodným" súčiniteľom, napríklad funkciou $f: z = f(x,y)$, pre ktorú je: $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f\,(x,y) = b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$

V prípade, že funkcie f, g majú naviac aj derivácie, tak Vetu 1 je možné preformulovať do nasledovného tvaru.

Veta 2. Nech $n \in \mathbb{N}$, je ľubovoľné, ale pevne zvolené číslo a nech $k \in N, k \neq n$ je ľubovoľné číslo. Nech funkcia $g: y = g(x)$ je definovaná v okolí $V(0)$ bodu $x_0 = 0, g(x) \neq 0$ pre $x \neq 0$ a nech je v tomto okolí $n - krát$ spojite diferencovateľná, pričom pre $g^{(i)}(x) \neq 0$ ($i = 0,1,\dots,n$) pre každé $x \neq 0$ a v bode x_0 nech spĺňa
$g(0) = g'(0) = g"(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0, g^{(n)}(0) = a \neq 0,\ \ a \in \mathbb{R}$.

Potom funkcia $F: F(x,y) = \wp_1(g(x),y)$, kde $[x,y] \in \Omega = V(0) \times \mathbb{R}$ nemá v bode $[0,0]$ limitu, teda nie je ani spojitá a ani diferencovateľná, napriek tomu, že funkcia F má vlastnosti:

1. je spojitá (aj v bode $[0,0]$) vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}$ danej rovnicou $y = Bh(x)$, pre každú konštantu $B \in \mathbb{R}$ je *spojitou funkciou* a teda pre limitu funkcie F vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}$ platí $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0],\ [x,y]\in\mathcal{H}} F(x,y) = 0$ kde funkcia $h: y = h(x)$ je v okolí $V(0)$ $k - krát$ spojite diferencovateľná, s vlastnosťami: kde $h^{(j)}(x) \neq 0$ $(j = 0,1,\dots,k)$ pre $x \neq 0$ a $h(0) = h'(0) = h''(0) = \cdots = h^{(k-1)}(0) = 0, h^{(k)}(0) = b \neq 0, b \in \mathbb{R}$;
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke tvaru $y = Ag(x)$, kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta, je (s výnimkou bodu $[0,0]$) *konštantnou funkciou,* (s konštantou $\frac{A}{A^2+1}$), preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii F;
4. obe parciálne derivácie prvého rádu funkcie f existujú na množine $\Omega = V(0) \times \mathbb{R}$, teda j v bode $[0,0]$.

Dôkaz. Zrejme stačí dokázať iba tvrdenia z časti 2. Nech sú teda splnené predpoklady vety. Vytvorme parciálnu funkciu $F(x, Bh(x)) = \wp_1(g(x), Bh(x)), x \in V(0)$. Máme dokázať, že $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1(g(x), Bh(x)) = 0$.

Vzhľadom na to, že pre $n, k \in N$, platí $k \neq n$, môžu nastať dva prípady:

a) Nech $k > n$. Potom $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), Bh(x)\big) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{Bg(x)h(x)}{[g(x)]^2+[Bh(x)]^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{B\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)}{B^2\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right]^2+1}$ a stačí $n -$ krát aplikovať *L´Hospitalovo pravidlo* na limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}$:a využiť spojitosť $n -$tých derivácií funkcií g, h, teda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim\limits_{x\to 0}\frac{h^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{h^{(n)}(0)}{g^{(n)}(0)} = \frac{0}{a} = 0$, využitím čoho už ľahko dostaneme $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), Bh(x)\big)$,

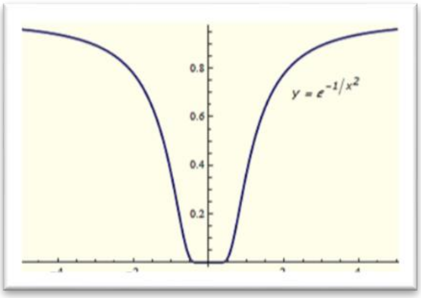
b) Nech $k < n$. Potom $\lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), h(x)\big) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)}{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]^2+1}$ a opätovne stačí $k -$ krát aplikovať *L´Hospitalovo pravidlo* na limitu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)} (= \frac{0}{b} = 0)$, teda tiež platí $\lim\limits_{x\to 0}F(x, Bh(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\wp_1\big(g(x), h(x)\big) = 0 = F(0,0)$.

Na záver sformulujeme tvrdenie, v ktorej vystupuje jedna zaujímavá funkcia, ktorá sa objavuje v mnohých protipríkladoch z matematickej analýzy. Ide o pozoruhodnú funkciu definovanú nasledovne

$$\mathscr{g}: \mathscr{g}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

Táto funkcia je *nekonečne krát diferencovateľná* na celej číselnej osi, s výnimkou jediného bodu $x = 0$ je kladná, ale napriek tomu je $\mathscr{g}^{(k)}(0) = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, pozri napríklad (Kluvánek et kol.,1961, s.111, príklad 5)).

Dôsledkom uvedených vlastností tejto funkcie je, že *MacLaurinov rad funkcie* $\boldsymbol{g}$ ***konverguje*** na intervale $(-\infty, \infty)$, ale ***jeho súčet*** sa v žiadnom bode $x \neq 0$ ***nerovná funkcii*** $\boldsymbol{g}(x)$.
V uvedenom príklade je tiež dokázané, že pre každé nezáporne celé čísla n a k platí $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{g}^{(n)}(x)}{x^k} = 0$. Tento fakt v ďalšom využijeme.



Obr. 4. Graf funkcie $\boldsymbol{g}: y = \boldsymbol{g}(x)$

Dá totiž očakávať, že aj zložená funkcia vytvorená z funkcie $\boldsymbol{g}$ a *Peanovej funkcia*

$$\mathcal{F}: \mathcal{F}(x, y) = \wp_1(\boldsymbol{g}(x), y)$$

bude mať určite zaujímavé vlastnosti.
V monografii (Gelbaum – Olmsted, s. 148-149, 1964) je uvedené, že limita funkcie $\mathcal{F}$ v bode $[0, 0]$ vzhľadom na ľubovoľnú ***algebraickú krivku*** $x^m = \left(\frac{y}{c}\right)^n$, t.j. $y = cx^{m/n}$, kde $c \neq 0$ je konštanta a $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné čísla, (v prípade párneho n sa samozrejme predpokladá, že $x \geq 0$) sa rovná nule. Tento výsledok v dôkaze nasledujúcej vety ***zovšeobecníme pre ľubovoľnú krivku*** $y = x^\alpha$ (kde $x \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$) a následne ho využijeme v našej teórii.

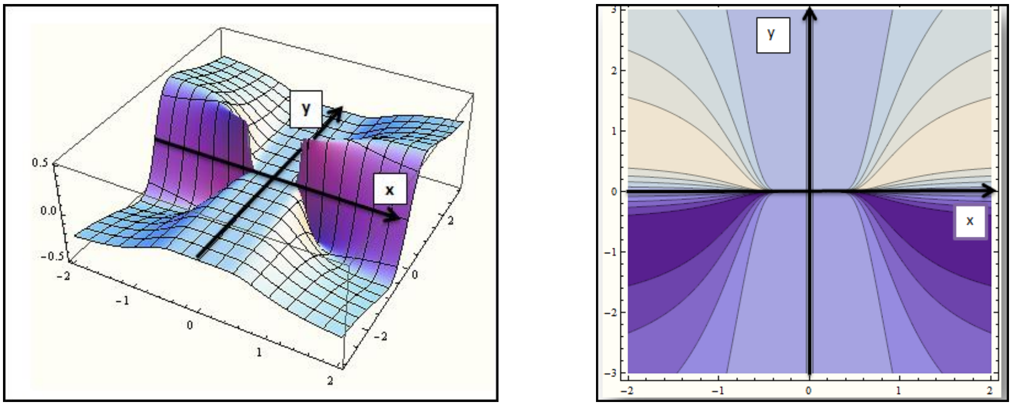
Veta 3. Funkcia $\mathcal{F}: \mathcal{F}(x, y) = \wp_1(\boldsymbol{g}(x), y)$ nemá v bode $[0,0]$ limitu, teda nie je ani spojitá a ani diferencovateľná v tomto bode, napriek tomu, že pre funkciu $\mathcal{F}$ platí

1. je spojitá (i v bode $[0,0]$) vzhľadom na premennú x i vzhľadom na premennú y;
2. *jej parciálna funkcia vzhľadom* k ľubovoľnej krivke $\mathcal{H}$ danej rovnicou $y = Bx^\alpha$, $x \geq 0$[1] (kde $\alpha, B \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ sú ľubovoľné konštanty), je *spojitou funkciou*, a teda pre limitu funkcie $\mathcal{F}$ vzhľadom ku krivke $\mathcal{H}$ platí
$$\lim_{[x,y]\to[0,0],\ [x,y]\in\mathcal{H}} \mathcal{F}(x, y) = \lim_{x\to 0} \wp_1(\boldsymbol{g}(x), Bx^\alpha) = 0;$$
3. *jej každá parciálna funkcia vzhľadom* ku krivke $\mathcal{H}_1$ tvaru $y = A\boldsymbol{g}(x)$, (kde $A \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta), je pre $x \neq 0$ *konštantnou funkciou s konštantou* $\frac{A}{A^2+1}$, preto v bode $[0,0]$ *existujú vlastné limity* každej z týchto parciálnych funkcií k funkcii $\mathcal{F}$;
4. obe parciálne derivácie prvého rádu funkcie f v bode $[0,0]$ existujú.

Dôkaz. Opätovne dokážeme iba tvrdenie z časti 2. Ostatné tvrdenia sú zrejmé. Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch ľahko nahliadneme, že pre $x > 0$ platí

$\mathcal{F}(x, Bx^\alpha) = \wp_1(\boldsymbol{g}(x), Bx^\alpha) = \frac{B\boldsymbol{g}(x)x^\alpha}{[\boldsymbol{g}(x)]^2+(Bx^\alpha)^2} = B\,\frac{\frac{\boldsymbol{g}(x)}{x^\alpha}}{[\boldsymbol{g}(x)/x^\alpha]^2+B^2}$. Tvrdenie vety zrejme platí v prípade, ak číslo $\alpha > 0$ je číslo prirodzené, t.j. ak $\alpha = n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade je podľa citovaného príkladu pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{g}(x)}{x^n} = 0$, preto aj $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{F}(x, Ax^n) = 0$.

[1] $\alpha > 0$ môže byť aj iracionálnym číslom, preto mocninná funkcia $y = x^\alpha$ je definovaná iba pre $x \geq 0$.



Obr. 5. Priestorový a vrstevnicový graf funkcie $\mathcal{F}: \mathcal{F}(x,y) = \wp_1(g(x), y)$

Pre $0 < \alpha \notin \mathbb{N}$ zrejme existuje nejaké $n = 0,1,2,\dots$ také, že pre $\alpha \in (n, n+1)$. Využitím *monotónnosti* mocninnej funkcie s *kladným exponentom* dostaneme pre každé $x > 0$ nerovnosť $\frac{g(x)}{x^{n+1}} < \frac{g(x)}{x^{\alpha}} < \frac{g(x)}{x^{n}}$, z ktorej na základe vety o limite troch funkcií dostaneme pre každé $x > 0, \alpha > 0$ požadovanú rovnosť $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{\alpha}} = 0$. Zvyšok dôkazu je už zrejmý.

Literatúra

[9] Eliáš J., Horváth J., Kajan J.(1980). *Zbierka úloh z vyššej matematiky,* Alfa, Bratislava, 1980

[10] Fulier, J. – Vrábel, M. (2007). *Diferenciálny počet*. Vysokoškolská učebnica. Nitra FPV, UKF 2007, 304 s. ISBN 978-80-8094-132-1

[11] Gelbaum, B.R. – Olmsted, J.M.N. (1964). *Counterexamples in Analysis*. HOLDEN-DAY, San Francisco, London, Amsterdam. 251 s.

[12] Hairer, E.,- Wanner, G. (2008). *Analysis by Its History*. Springer 2008. 377 s. ISBN 978-0-387-77031-4

[13] Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M. (1961). *Matematika* II. SVTL Bratislava, 1961, 855s.

[14] Kudrjavcev, L.D - Kutasov, A.D. - Čechlov, V.I. - Šabunin, M.I. (2002). Sbornik zadač po matematičeskomu analizu, Tom 3, Funkcii mnogich peremennych. Nauka 2002, 468 s.

[15] Peano, G. (1884). "Annotazioni" al trattato di calcolo del 1884, Opere scelte I, s. 47-73

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: jfulier@ukf.sk