FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

HISTORICAL METHODS OF SOLVING LINEAR EQUATIONS IN TEACHING MATHEMATICS

VYUŽITIE NIEKTORÝCH HISTORICKÝCH METÓD RIEŠENIA LINEÁRNYCH ROVNÍC VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

MONIKA KRČMÁROVÁ

ABSTRACT. *This paper deals with some methods of solving linear equations known from the history of mathematics. We mainly focus on their use and inclusion in teaching mathematics. Various methods for solving linear equations together with the historical problems are the examples of the integration of history in mathematics education at primary and secondary school .*

KEY WORDS: *linear equations, teaching, history, methods of solving*

ABSTRAKT. *V príspevku sa zaoberáme niektorými metódami riešenia lineárnych rovníc známych z dejín matematiky. Zameriavame sa najmä na ich vhodné využitie a zaradenie do vyučovania matematiky. Rôzne metódy riešenia lineárnych rovníc spolu s historickými úlohami sú príkladom integrácie histórie do vyučovania matematiky na základných aj stredných školách.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *lineárne rovnice, vyučovanie, história, metódy riešenia*

CLASSIFICATION: *A30, D40*

Úvod

Slovné úlohy vedúce k lineárnym rovniciam sú tisícky rokov staré. Úlohy lineárneho charakteru sa objavujú už v *Matematike v deviatich knihách* aj v staroegyptských papyrusoch. Známe boli viaceré algoritmy na vyriešenie rovníc, úlohy mali ale slovný charakter, riešenia boli tiež popísané slovne, chýbala vhodná symbolika. V článku sa budeme venovať metódam riešenia lineárnych rovníc: metóde chybného predpokladu, metóde dvoch chybných predpokladov a metóde váh.

Tieto metódy sa v škole dnes už nevyučujú. Podľa štátneho vzdelávacieho programu (ŠVP - ISCED2, 2009) je riešenie rovníc (súčasť tematického okruhu Čísla, premenná a počtové výkony s číslami) zaradené do 8. a 9.ročníka ZŠ a na strednej škole sa rovnice a ich sústavy (súčasť tematického okruhu Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy) preberajú v 1.ročníku (ŠVP - ISCED 3A, 2009). Práve na základnej škole sa žiaci stretávajú s rovnicami prvýkrát. V ôsmom ročníku je však riešenie rovníc chápané len ako propedeutika, odporúča sa riešiť jednoduché úlohy vedúce k rovniciam, no bez formalizácie rovnice (úvahou, znázornením alebo metódou pokus-omyl) (ŠVP - ISCED2, 2009). V deviatom ročníku sa žiaci naučia riešiť rovnice systematicky, ekvivalentnými úpravami.

Práve tu vidíme dostatok priestoru na zaradenie motivujúcich prvkov z histórie matematiky do vyučovania. Tým, že učiteľ žiakom ukáže, ako sa riešili rovnice v minulosti, sa nielen prehĺbia vedomosti žiakov o riešení rovníc, motivácia formou poznatkov z histórie je aj dlhodobo jednou z používaných foriem ako zaujať žiakov. Podľa Smitha (Smith, 1996, In: Carter, D.B., 2006) dokonca matematika vyučovaná izolovane,

bez zmienky o jej pôvode a dejín, vedie v mnohých ohľadoch k odporu a strachu z matematiky.
Pri uvedených úlohách úplné riešenia neuvádzame, keďže sa rovnice ľahko vyriešia.

Metóda chybného predpokladu

Metóda chybného predpokladu sa zmieňuje v 7. a 8. knihe Matematiky v deviatich knihách. Tam sa metóda použila na riešenie systémov dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych (metóda je nazvaná *Tshuifen,* je popísaná len slovne). Nazývala sa aj metódou prebytku a nedostatku,[1] metódou falošného predpokladu, neskôr bola používaná nielen v Číne, ale i v Babylone, i v Európe, najmä v Taliansku., nachádza sa aj v 12.kapitole Fibonacciho *Liber abaci*.

Je možné, že táto metóda sa do Európy dostala z Číny alebo Egypta do Indie cez arabských matematikov k Fibonaccimu, nie je to však isté, mohla sa prirodzene vyvinúť všade nezávisle od seba.
Podstatou metódy je uhádnuť riešenie (rovnice $ax = b$) , hoci často chybné, a potom ho vhodne korigovať, aby sme dostali správne riešenie. Riešenie touto metódou by sme mohli popísať troma etapami (anglicky „guess-check-adjust“):

1. uhádnuť (odhadnúť) riešenie
2. skontrolovať navrhnuté riešenie
3. prispôsobiť riešenie, ak sme hádali nesprávne

Riešenie ukážme napríklad na úlohe z Rhindovho papyrusu:

Úloha 1. *„Hromada a jej štvrtina dávajú spolu 15.“* Treba zistiť, koľko predstavuje hromadu.
Úloha vedie na jednoduchú rovnicu

$$x+\frac{1}{4}x=15$$

Postup riešenia úlohy:

1. Uhádneme (vhodne) riešenie, napríklad $x = 4$, je vhodné, keďže sa z neho už ľahko vypočíta štvrtina (podobne sa postupuje aj v iných príkladoch).
2. Skontrolujeme riešenie: po dosadení riešenia do ľavej strany rovnice dostaneme 5 (namiesto 15, čo indikuje pravá strana rovnice)
3. Prispôsobíme riešenie - uhádnuté riešenie treba ešte strojnásobiť, aby sme dostali 15, preto správne riešenie bude trojnásobkom uhádnutého riešenia, teda 12.

Práve tento postup nám umožňuje ukázať žiakom ôsmeho ročníka (na vhodných rovniciach, tvaru $ax=b$), ako riešiť lineárne rovnice o jednej neznámej bez toho, aby vedeli niečo o ekvivalentných úpravách rovníc, ktoré sa preberajú až v deviatom ročníku.

Uvedieme niektoré historické úlohy (z Rhindovho papyrusu), ktoré sa riešili touto metódou a ktoré sú vhodné využiť na hodinách matematiky. Úlohou žiakov je vyriešiť úlohy, nájsť riešenie metódou chybného predpokladu. V nasledujúcej úlohe si žiaci precvičia prácu so zlomkami, učiteľ ich na začiatku vyzve, aby nepočítali s desatinnými číslami, aj riešenie uviedli v tvare zlomku.

[1] názov pochádza zo systému rovníc, ktorý sa riešil: $a_1x=y+d_1$, $a_2x=y-d_2$, $(a_1>a_2)$, kde d_1 bol prebytok, d_2 nedostatok nejakej čiastky peňazí.

Úloha 2. „*Neznáme množstvo a jeho sedmina dávajú spolu 19.*“
Úloha vedie na lineárnu rovnicu

$$x+\frac{x}{7}=19,$$

kde x je neznáme množstvo. Za riešenie je vhodné zvoliť násobok sedmičky, vezmime x = 7. Po dosadení dostaneme ľavú stranu rovnice rovnú ôsmym namiesto 19. Žiaci by mali (prípadne za pomoci učiteľa) zistiť, čím musíme vynásobiť číslo 8, aby sme dostali 19. Správna odpoveď je $\frac{19}{8}$, to je zlomok, ktorý predstavuje, koľkokrát treba zväčšiť uhádnuté riešenie 7. Riešenie rovnice je $7.\frac{19}{8}=\frac{133}{8}$.

Úloha 3. $x+\frac{x}{5}=21$

Úloha 4. „*K neznámemu množstvu sme pripočítali jeho dve tretiny a od tohto súčtu sme odčítali jeho tretinu. Ostalo nám 10. Aké bolo neznáme množstvo*?“
Riešenie: Riešme túto úlohu použitím metódy chybného predpokladu (použijeme ju dvakrát). Úloha vedie na rovnicu

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.(x+\frac{2}{3}x)=10$$

Substituujme najprv $x+\frac{2}{3}x=y$ a riešme tak metódou chybného predpokladu najprv rovnicu

$$y-\frac{1}{3}.y=10$$

Hádajme riešenie, napr. $y_0 = 3$. Ľavá strana tejto rovnice po dosadení čísla tri [$f(3)$] je 2, čo je päťkrát menej, ako 10. Preto správne riešenie rovnice bude päťkrát väčšie ako uhádnuté riešenie, teda $y = 15$.
Vrátime sa k substitúcii a riešime rovnicu

$$x+\frac{2}{3}x=15.$$

Uhádnime riešenie $x_0 = 3$, $f(3) = 5$, čo je trikrát menej ako 15, preto koreňom pôvodnej rovnice bude číslo trikrát väčšie ako pôvodné odhadované číslo, riešením rovnice je teda číslo 9.

Úloha 5. „*Našiel som kameň, ale neviem, koľko vážil. Po tom, ako som pridal jeho sedminu a potom jednu jedenástinu toho všetkého, kameň vážil 60 talentov. Koľko talentov vážil kameň?*“[2]
Riešte úlohou (dvojnásobným) použitím metódy chybného predpokladu.

[2] Talent bola jednotka hmotnosti používaná v Mezopotámii. 1 talent = 60 šekelov = 1/60 míny. Jedna mína predstavuje približne 500g.

Metóda dvoch chybných predpokladov

Táto metóda je podobná metóde (jedného) chybného predpokladu, vyžaduje si ale hádanie dvoch rôznych riešení. Tento postup riešenia lineárnych rovníc bol vysvetlený v Matematike v deviatich knihách (časť *Jiuzhang Suanshu*), uvedených bolo aj 19 problémov na riešenie úloh vedúcich na lineárnu rovnicu typu $ax = b$, alebo $ax + c = b$.[3] V arabskej matematike sa toto pravidlo tiež objavilo, pod názvom *hisab al-Chata΄ayn* („pravidlo dvoch chýb"). Známe sú aj iné označenia, „pravidlo dvoch chybných predpokladov", „druhá metóda prebytku a nedostatku", „regula duorum falsorum positionum".

Postup ukážeme na riešení rovnice: $10x - 6 = 0$

1. Uhádneme dve riešenia, napríklad $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
2. Pre obe riešenia vypočítame hodnoty výrazu $10x - 6$: $f_1 = 10.1 - 6 = 4$, $f_2 = 10.2 - 6 = 14$.
3. Prvé odhadnuté riešenie vynásobíme hodnotou f_2, druhé odhadnuté riešenie vynásobíme hodnotou f_1 a hodnoty súčinov odčítame: $1.14 - 2.4 = 6$. Tento výsledok bude predstavovať čitateľa riešenia rovnice.
4. Menovateľa riešenia rovnice získame ako rozdiel $f_2 - f_1$: $14 - 4 = 10$.
5. Zapíšeme riešenie rovnice: $\frac{6}{10}$

Všeobecne, pre riešenie rovnice $ax + b = 0$ (Smith, 1958, s.440):
zvolíme nejaké dve rôzne riešenia x_1, x_2. Dosadíme:

$$f_1 = ax_1 + b \qquad /.x_2 \tag{1}$$

$$f_2 = ax_2 + b \qquad /.x_1 \tag{2}$$

odkiaľ

$$f_1 - f_2 = a(x_1 - x_2) \tag{3}$$

Po vynásobení každej z rovnice (1) a (2) príslušnými uhádnutými riešeniami máme

$$f_1x_2 = ax_1x_2 + bx_2 \tag{4}$$

$$f_2x_1 = ax_2x_1 + bx_1 \tag{5}$$

po odčítaní (4) a (5) :

$$f_1x_2 - f_2x_1 = b(x_2 - x_1) \tag{6}$$

Vydelením (6) a (3) dostávame:

$$-\frac{b}{a} = \frac{f_1x_2 - f_2x_1}{f_1 - f_2},$$

pričom pravá strana je neznáme riešenie rovnice (vieme, že $x = -\frac{b}{a}$).

Vyriešte metódou dvoch chybných predpokladov nasledujúce úlohy:

[3] toto pravidlo sa používalo, keď metóda chybného predpokladu „nestačila". Akonáhle totiž namiesto typu rovnice *ax* = *b* bolo treba riešiť rovnice typu *ax* + *b* = *c*, metóda chybného predpokladu nefungovala, preto sa použilo pravidlo dvoch chybných predpokladov.

Úloha 6. $2x-14=0$

Úloha 7. $\frac{5}{4}x-50=0$

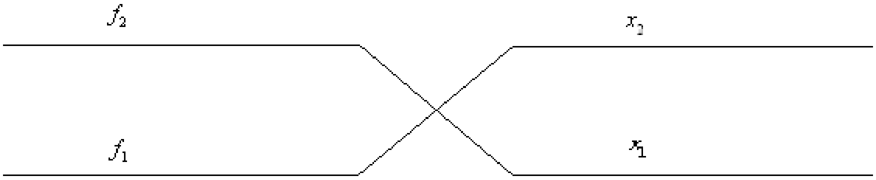
Je zrejmé, že úlohy na využitie metódy dvoch chybných predpokladov ($ax+b=c$) si vieme ľahko previesť na úlohy, kde vieme použiť jednoduchšiu, metódu jedného chybného predpokladu ($ax=b$). Tieto (ekvivalentné) úpravy však kedysi neboli známe.

Metóda váh

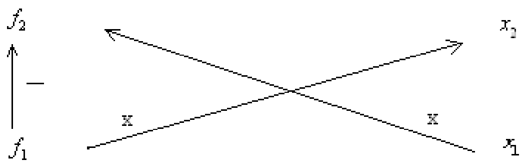
Túto metódu používali Arabi. Ide vlastne modifikáciu metódy popísanej vyššie, názov je odvodený od pomocnej schémy, ktorá sa pri metóde používala. Na jej ramená sa vpisovali hodnoty f_2, f_1 a odhadovaných riešení x_1 a x_2 (Obr.1). Riešenie získame ako podiel

$$\frac{f_1x_2-f_2x_1}{f_1-f_2} \tag{7}$$

Na zapamätanie vzťahu (7) nám slúži schéma. Do nej vpíšeme hodnoty f_2, f_1 a x_1 a x_2 (Obr.1). Obrázok 2 jednoducho ilustruje, ako grafickú pomôcku chápať (x predstavuje súčin, - predstavuje rozdiel).



Obrázok 1

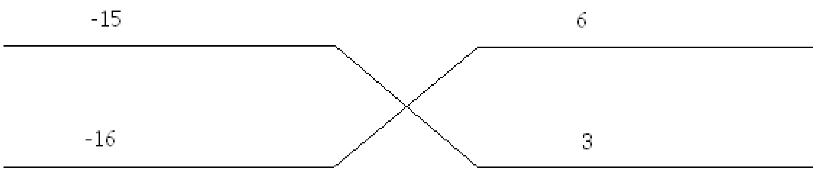


Obrázok 2

Úloha 8. $\frac{1}{3}x-17=0$

Za uhádnuté riešenia vezmime napríklad $x_1=3,\ x_2=6$

Schéma, pomocou ktorej úlohu vyriešime, potom vyzerá takto:



Obrázok 3

Riešenie rovnice bude nasledujúce:

$$\frac{-16.6-(-15).3}{-16-(-15)}=\frac{-96+45}{-1}=\frac{-51}{-1}=51$$

Žiaci si v úlohe precvičia počítanie s celými číslami (predpokladá sa, že pravdepodobne zvolia za uhádnuté riešenia čísla menšie ako 51). Tematický celok *celé čísla* sa odporúča zaraďovať do ôsmeho ročníka, preto je táto úloha vhodná najmä pre ôsmakov.

Záver

Na príklade niektorých historických úloh a postupov riešenia lineárnych rovníc sme ukázali, ako história matematiky môže byť aktívne využitá vo vyučovaní matematiky. Aj niektoré metódy, ktoré sa v škole nevyučujú, môžu nájsť uplatnenie v súčasných učebných plánoch a na hodine matematiky.

Literatúra

[1] BEČVÁŘ, J. (2007). Přímá úměrnost - lineární rovnice [online]. In: Jindřich Bečvář (author): Z historie lineární algebry. Praha: Matfyzpress, 2007 [cit.20.3.2013]. Dostupné na internete: http://dml.cz/dmlcz/400924.

[2] CARTER, D.B. (2006). The Role of History of Mathematics in the Middle School [online]. East Tennessee State University, 2006, [cit. 2012-07-10], 145 p. Dostupné na internete: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/historia/textos/The%20role%20of%20the%20history%20of%20mathematics%20in%20the%20middle%20school.*Donette%20Barker,%20Carter.*historia-%20tesis%20completa.pdf.

[3] KATZ, V., MICHALOWITZ, K. D. (eds). (2004). Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics (Module 7: Linear Equations). 2004, Electronic ISBN: 9780883857410.

[4] SMITH, D.E. (1958). History Of Mathematics, Vol II. Courier Dover Publications, 1958. 736 s. ISBN: 978-0486204307

[5] Štátny vzdelávací program: Matematika, príloha ISCED2. Bratislava, 2009.

[6] Štátny vzdelávací program: Matematika, príloha ISCED3A, 2.upr. verzia. Bratislava, 2009.

Článok prijatý dňa 2. mája 2013.

Adresa autora

Mgr. Monika Krčmárová
Katedra matematiky, Fakulta Prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr.A.Hlinku 1, SK – 94901 Nitra; e-mail: monika.galbava@ukf.sk