FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

ON AN APPROXIMATION OF NUMBER π

O JEDNOM ODHADE ČÍSLA π

MICHAELA KLEPANCOVÁ – MAREK VARGA

ABSTRACT. *In the arcticle with the help of the elementary geometric considerations we will try to find Viete's formula for evaluation the number π. At the same time we find the possibility of approximation of this constant.*

KEYWORDS: π **,** *inscribed circle, circumscribed circle, aproximation*

ABSTRAKT. *V článku sa pomocou elementárnych geometrických úvah pokúsime nájsť Vieteov vzorec na výpočet čísla π. Súčasne nájdeme možnosť aproximácie tejto konštanty.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Ludolfove číslo, kružnica vpísaná (opísaná) n – uholníku, aproximácia*

CLASSIFICATION: *A 308*

Úvod

Eulerova formula $e^{i\pi}+1=0$ je považovaná za najkrajší matematický vzorec. Obsahuje totiž základné konštanty matematickej analýzy, algebry, teórie čísel i geometrie. V ďalších riadkoch sa budeme venovať práve číslu π, spomenutému aj v uvedenom vzťahu, ktoré poznáme predovšetkým z geometrie. Toto číslo je známe už z viacerých starovekých civilizácií, pričom každá používala svoju vlastnú aproximáciu. Napríklad v babylonskej matematike sa počítalo s hodnotou $\pi \doteq \frac{25}{8}=3{,}125$; egyptskí matematici zas položili $\pi \doteq \frac{256}{81} \doteq 3{,}1605$; v Biblii postačila aproximácia $\pi \doteq 3$. Zatiaľ čo náš prvý uvedený odhad je asi z obdobia 2000 rokov p. n. l., Archimedes zo Syrakúz v dobe približne 200 rokov p. n. l. už našiel ohraničenie $\frac{223}{71} \doteq 3{,}140 < \pi < \frac{22}{7} \doteq 3{,}142$. Ďalší záujem o toto číslo prichádza až v stredoveku – Viete ho určil s presnosťou na 9 desatinných miest, van Roomen na 15, Ludolf van Ceulen dokonca na 35 desatinných miest (v roku 1610). Odvtedy číslo π nesie označenie Ludolfove číslo.

Nasledujúcimi úvahami sa pokúsime odvodiť rovnosť

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots=\frac{2}{\pi},$$

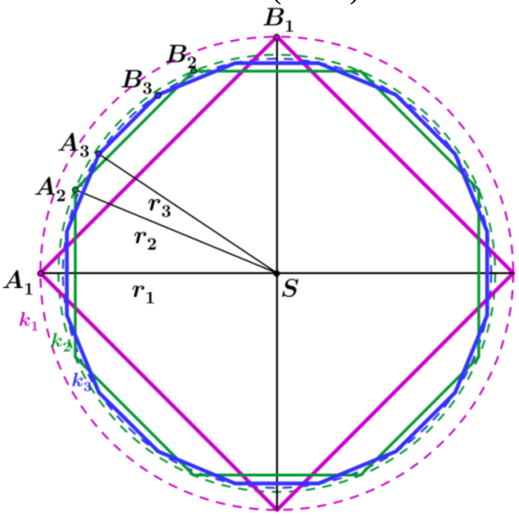
ktorú ešte v roku 1593, no odlišným spôsobom, objavil francúzsky matematik Francois Viete a ktoré zovšeobecnil Leonard Euler v tvare

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

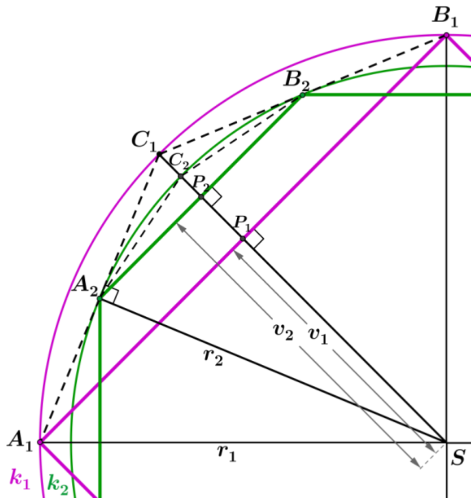
Z nášho postupu vyplynie aj istá možnosť odhadu čísla π .*

Kružnice opísané *n* - uholníku

Uvažujme postupnosť pravidelných 2^{n+1}- uholníkov s konštantným obvodom *o*. Nech kružnice k_n (kde $n = 1, 2, \ldots$) opísané uvažovaným 2^{n+1}- uholníkom sú sústredné so stredom v bode S (obr. 1).



Obrázok 1



Obrázok 2

Označme A_1B_1 stranu pravidelného 2^2- uholníka s obvodom *o*, potom pre jej dĺžku samozrejme platí $|A_1B_1| = \frac{o}{4}$. Ak bod S je stred kružnice k_1, opísanej uvažovanému štvorcu, potom úsečka SA_1 je jej polomerom (obr. 2).

Označme P_1 pätu kolmice z bodu S na stranu A_1B_1 uvažovaného štvorca, t.j. úsečka SP_1 je výškou z bodu S na stranu uvažovaného štvorca. Dĺžku polomeru SA_1 kružnice k_1 označme r_1 a dĺžku výšky z bodu S na stranu A_1B_1 uvažovaného štvorca ako v_1, teda $|SA_1| = r_1$, $|SP_1| = v_1$.

Nech úsečka A_2B_2 je stranou nasledujúceho pravidelného 2^3- uholníka s obvodom *o*. Potom pre jej dĺžku a veľkosť uhla A_2SB_2 platí $|A_2B_2| = \frac{o}{8}$, $|\measuredangle A_2SB_2| = \frac{360°}{8}$, t.j.

$$|A_2B_2| = \frac{1}{2}|A_1B_1|, \quad |\measuredangle A_2SB_2| = \frac{1}{2}|\measuredangle A_1SB_1| .$$

To však znamená, že stranu A_2B_2 pravidelného osemuholníka môžeme zostrojiť ako strednú priečku trojuholníka $A_1B_1C_1$, kde bod C_1 je priesečník osi uhla A_1SB_1

* V predošlých riadkoch sme spomenuli velikánov, ktorý sa snažili vyčísliť π logickými, tj. matematicky korektnými, postupmi. Ako protiklad k tomuto riešeniu problémov môžeme tradične použiť politikov a ich správanie. V roku 1897 sa v štáte Indiana jednoducho rozhodli, že “správnu“ hodnotu π môžu uzákoniť legislatívne... Našťastie, táto procedúra bola prerušená istým matematikom, ktorý zhodou náhod sa tohto zasadania zúčastnil.

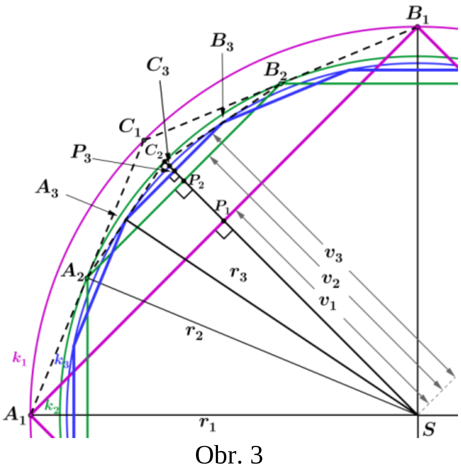
s kružnicou k_1. Potom je polomerom kružnice k_2, opísanej uvažovanému osemuholníku. Nech P_2 je päta kolmice z bodu S na stranu A_2B_2 uvažovaného osemuholníka, t.j. úsečka SP_1 je výškou z bodu S na stranu uvažovaného osemuholníka. Dĺžky úsečiek SA_2, SP_2, podobne ako v predchádzajúcom prípade označme $|SA_2| = r_2$, $|SP_2| = v_2$. Keďže r_2 je dĺžka strany a v_2 dĺžka výšky na základňu rovnoramenného trojuholníka A_2SB_2, je zrejmé, že platí $r_2 > v_2$.

Z obr. 2. tiež vidíme, že $r_2 - v_2 = |C_2P_2| < |C_1P_1| = r_1 - v_1$. Keďže v_2 je výškou na stranu A_2B_2 rovnoramenného trojuholníka A_2B_2S, kde $|A_2S| = |B_2S| = r_2$, tak $r_2 - v_2 > 0$. Odtiaľ už vyplýva platnosť nerovnosti $0 < r_2 - v_2 < r_1 - v_1$. No vzhľadom k tomu, že úsečka A_2C_2 leží na osi uhla $B_2A_2C_1$, bod C_2 patrí úsečke C_1P_2, t.j. $|C_2P_2| < |C_1P_2|$. Keďže úsečka A_2B_2 je strednou priečkou trojuholníka $A_2B_2C_1$, tak $|C_1P_2| = \frac{1}{2}|C_1P_1| = \frac{1}{2}(r_1 - v_1)$. Zhrnutím uvedeného dostávame

$$0 < r_2 - v_2 = |C_2P_2| < |C_1P_2| = \frac{1}{2}(r_1 - v_1),$$

prípadne

$$0 < r_2 - v_2 < \frac{1}{2}(r_1 - v_1).$$



Obr. 3

Stranu A_3B_3 pravidelného šestnásťuholníka, pre ktorej dĺžku platí $|A_3B_3| = \frac{1}{2}|A_2B_2| = \frac{o}{16}$ môžeme analogicky ako v predchádzajúcom prípade zostrojiť ako strednú priečku trojuholníka $A_2B_2C_2$, kde bod C_2 je priesečník osi uhla A_2SB_2 s kružnicou k_2 (obr. 3). Potom úsečka SA_3, kde $|SA_3| = r_3$, je polomerom kružnice k_3 opísanej uvažovanému šestnásťuholníku a úsečka SP_3, kde $|SP_3| = v_3$, je výškou z bodu S na stranu uvažovaného pravidelného šestnásťuholníka.

Z obr. 3 vidíme, že $r_3 - v_3 = |C_3P_3| < |C_2P_2| = r_2 - v_2$, t.j. $0 < r_3 - v_3 < r_2 - v_2$. Využitím nerovností z predchádzajúceho prípadu tak dostávame $0 < r_3 - v_3 < r_2 - v_2 < r_1 - v_1$. Keďže úsečka A_3C_3 leží na osi uhla $B_3A_3C_2$, bod C_3 patrí úsečke C_2P_3, t.j. $|C_3P_3|<|C_2P_3|$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade, úsečka A_3B_3 je strednou priečkou trojuholníka $A_3B_3C_2$, teda $|C_2P_3|=\frac{1}{2}|C_2P_2|=\frac{1}{2}(r_2-v_2)$. Odtiaľ už vyplýva nerovnosť

$$0<r_3-v_3=|C_3P_3|<|C_2P_3|=\frac{1}{2}|C_2P_2|=\frac{1}{2}(r_2-v_2)<\frac{1}{4}(r_1-v_1),$$

resp.

$$0<r_3-v_3<\frac{1}{2^2}(r_1-v_1).$$

V zostrojovaní pravidelných 2^{n+1}- uholníkov s konštantným obvodom o môžeme zrejme podobným spôsobom pokračovať ľubovoľne dlho. Nech teda úsečka SA_n, kde $|SA_n|=r_n$, je polomerom kružnice k_n, opísanej uvažovanému 2^{n+1}- uholníku a úsečka SP_n, kde $|SP_n|=v_n$, je výškou z bodu S na stranu tohto pravidelného 2^{n+1}- uholníka.

Potom zrejme platí aj nerovnosť $r_n-v_n=|C_nP_n|<|C_{n-1}P_{n-1}|=r_{n-1}-v_{n-1}$. Vzhľadom na to, že v_n je výškou na základňu rovnoramenného trojuholníka A_nB_nS, kde $|A_nS|=|B_nS|=r_n$, pre každé $n\in\mathbb{N}$ tiež platí $r_n>v_n$, čiže $r_n-v_n>0$. To však znamená, že platí $0<r_n-v_n<r_{n-1}-v_{n-1}$. Využijúc nerovnosti, získané v predchádzajúcich prípadoch, dostávame

$$0<\ldots<r_n-v_n<\ldots<r_3-v_3<r_2-v_2<r_1-v_1.$$

Podobnými úvahami ako v predchádzajúcich prípadoch by sme zrejme tiež dospeli k záveru (ktorý možno dokázať matematickou indukciou), že pre všetky $n\in\mathbb{N}$ tiež platí

$$r_n-v_n=|C_nP_n|<|C_{n-1}P_n|=\frac{1}{2}|C_{n-1}P_{n-1}|=\frac{1}{2}(r_{n-1}-v_{n-1})<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1),$$

resp.

$$r_n-v_n<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1).$$

Z uvedeného už vyplýva, že pre všetky $n\in\mathbb{N}$ platí

$$0<r_n-v_n<\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1).$$

Keďže $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ a súčasne $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}(r_1-v_1)=0$, tak na základe vety o limite zovretej postupnosti dostávame

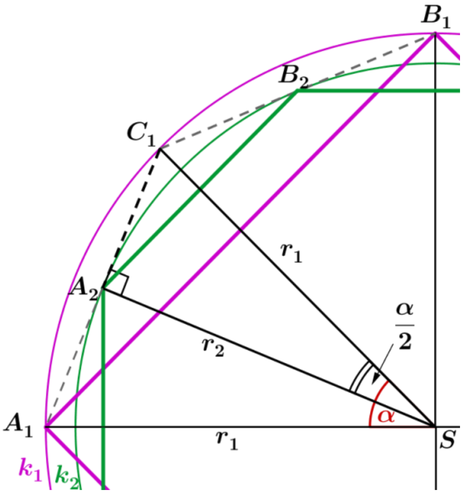
$$\lim_{n\to\infty}(r_n-v_n)=0 \text{ resp. } \lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}v_n.$$

Nech $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=R$. Pretože r_n je polomer kružnice opísanej 2^{n+1}- uholníku a v_n zas polomer kružnice vpísanej 2^{n+1}- uholníku, pre obvod o 2^{n+1}- uholníka, kde $n=1,2,\ldots$, platí

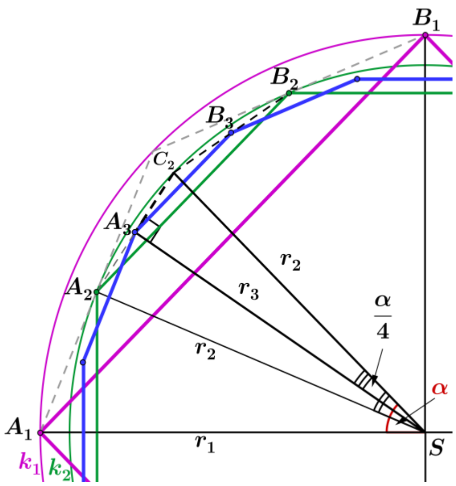
$$2\pi v_n<o<2\pi r_n.$$

No keďže $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi v_n = 2\pi R$ a tiež $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi r_n = 2\pi R$, z vety o limite zovretej postupnosti vyplýva, že aj $o = 2\pi R$, čiže $R = \dfrac{o}{2\pi}$.

Geometricky možno interpretovať tento fakt nasledovne: existuje jediná kružnica, ktorá je zároveň členom postupnosti vpísaných i opísaných kružníc; navyše – táto istá kružnica je súčasne akýmsi limitným „2^{n+1}– uholníkom“ v postupnosti nami konštruovaných 2^{n+1}– uholníkov.



Obr. 6a



Obr. 6b

Ak označíme veľkosť uhla $|A_1SC_1| = \dfrac{\pi}{4}$ symbolom α, potom z obr. 6a, 6b je už zrejmé, že platí $\dfrac{r_2}{r_1} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{r_3}{r_2} = \cos\dfrac{\alpha}{2^2}$. Matematickou indukciou už potom ľahko dokážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí rovnosť $\dfrac{r_n}{r_{n-1}} = \cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$.

Dosadením práve získaných rovností do nasledujúcej triviálne platnej rovnosti $r_n = r_1 \dfrac{r_2}{r_1}\cdot\dfrac{r_3}{r_2}\cdot\dfrac{r_4}{r_3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}\cdot\dfrac{r_n}{r_{n-1}}$ pre r_n tiež dostávame

$$r_n = r_1\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2}\cdot\frac{r_4}{r_3}\cdot\ldots\cdot\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}\cdot\frac{r_n}{r_{n-1}} = r_1\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Využijúc skutočnosť, že $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, získavame

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} r_1\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} = R,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{R}{r_1} \equiv \frac{\frac{o}{2\pi}}{r_1}.$$

Keďže $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, použitím vzťahu pre polovičný argument kosínusu, t.j. $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, môžeme predchádzajúcu rovnosť napísať v tvare

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots = \frac{R}{r_1} \equiv \frac{\frac{o}{2\pi}}{r_1}.$$

Ak zvolíme $o = 2$, potom $R = \frac{1}{\pi}$ a $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, dostávame

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

prípadne po úprave získavame rovnosť

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots = \frac{2}{\pi}.$$

Navyše si všimnime, že z uvedeného tiež vyplýva možnosť aproximácie čísla π, keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$v_n < R < r_n \Leftrightarrow v_n < \frac{o}{2\pi} < r_n, \text{ t.j. } \frac{o}{2r_n} < \pi < \frac{o}{2v_n}.$$

Záver

Výpočet čísla π fascinoval matematikov či laikov už oddávna. V článku sme sa dostali k vzorcu, ktorý iným spôsobom odvodil koncom 16. storočia Francois Viete (zaujímavosťou hodnou spomenutia je, že v tomto zápise sa prvýkrát v histórii matematiky objavil nekonečný súčin). Zároveň sme pri našom postupe pri opisovaní kružníc našli metódu na jednoduché ohraničenie Ludolfovho čísla.

Literatúra

[1] Znám, Š. (1986). Pohľad do dejín matematiky. Bratislava, Alfa, 1986. 240 s.

[2] Beckmann, P. (1998). Historie čísla π. Praha, Academia, 1998. 172 s. ISBN 80-200-0655-9

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autorov

Mgr. Michaela Klepancová
Katedra matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: michaela.klepancova@ukf.sk
PaedDr. Marek Varga
Katedra matematiky Fakulta prírodných vied Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 94974 Nitra; e-mail: mvarga@ukf.sk