FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

THEORY OF REAL NUMBERS – FROM EUDOXUS TO DEDEKIND

TEORIE REÁLNÝCH ČÍSEL – OD EUDOXA K DEDEKINDOVI

JINDŘICH BEČVÁŘ

ABSTRACT. *In the article, the basic ideas of Eudoxus' proportionalities and relationship between quantities are explained and they are compared with the underlying ideas of Dedekind's cuts. Some quotations (excerpts) from Dedekind's and Lipschitz' correspondence show their interest in building an exact theory of real numbers as well as their embarrassment which the comparison of both theory caused.*

KEYWORDS: *Eudoxus' ideas of proportionalities, Dedekind's cuts, real numbers*

ABSTRAKT. *Vyloženy jsou základní myšlenky Eudoxovy teorie proporcí a srovnány s výchozími idejemi Dedekindovy teorie řezů. Úryvky z korespondence Dedekinda a Lipschitze dokládají jejich zájem o exaktní vybudování teorie reálných čísel i určité rozpaky, které komparace obou teorií vyvolala.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Eudoxova teorie proporcí, Dedekindova teorie řezů, reálná čísla*

CLASSIFICATION: *A30*

1. Úvod

V 5. století před Kristem řečtí matematici zjistili, že existují nesouměřitelné úsečky (např. strana a úhlopříčka čtverce, strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku atd.).[1] Tento objev vedl k pádu jejich dřívějších představ, že celou matematiku je možno postavit na přirozených číslech a jejich poměrech. Od aritmetických veličin proto přešli k veličinám geometrickým a v geometrické řeči začali vyjadřovat záležitosti aritmetické, číselně teoretické i algebraické. Zrodila se tzv. řecká geometrická algebra, rozvíjelo se studium iracionalit. Aritmetickou teorii poměrů přirozených čísel nahradila teorie proporcí geometrických veličin. Vytvořil ji Eudoxos z Knidu (asi 408 až 355), matematik, astronom, lékař a geograf, který byl po nějakou dobu žákem Platóna (427–347). Kromě teorie proporcí koncipoval tzv. exhaustivní metodu a teorii homocentrických sfér. Jeho matematické výsledky se objevily na přelomu 4. a 3. století před Kristem v Eukleidových *Základech*. Viz [Be1], [Be2], [Be3] a [He].

2. Eudoxova teorie proporcí

Eudoxova teorie proporcí, teorie poměrů a úměr geometrických veličin (délek, obsahů a objemů), je zpracována v páté knize Eukleidových *Základů*. Eukleidés si byl dobře vědom jejího významu i postavení v tehdejší matematice. Vždyť partie o podobnosti, která předpokládá teorii poměrů a úměr geometrických veličin, je v *Základech* podána v následující knize šesté. V sedmé až deváté knize jsou předmětem zkoumání souměřitelné veličiny (čísla), v obsáhlé desáté knize zejména veličiny nesouměřitelné.

[1] Úsečky a, b se nazývají *souměřitelné*, existuje-li úsečka c (někdy se hovoří o měrné úsečce) a přirozená čísla m, n, pro která je $a = mc$, $b = nc$. V opačném případě se nazývají *nesouměřitelné*.

Pátá kniha *Základů* začíná 18 definicemi, po nichž následuje 25 vět. Nejprve uvedeme prvních sedm definic,[2] které jsou nejdůležitější, a objasníme problematiku v nich obsaženou. Přiblížíme tak duch Eukleidova díla a poznáme styl českého překladu. Současně ukážeme, jaké úsilí vyžaduje porozumění matematice, která je psána jiným stylem a téměř bez užití symboliky, zcela jinak, než jsme zvyklí.[3]

První dvě definice a jejich výklad

1. *Dílem veličiny větší jest veličina menší, když veličinu větší doměřuje.*
2. *Násobkem pak veličiny menší jest větší, když ji menší doměřuje.*

V prvních dvou definicích je zaveden pojem násobku a dílu veličiny: jestliže pro veličiny a, b je $na = b$, kde n je přirozené číslo, pak se veličina b nazývá násobkem veličiny a a veličina a dílem veličiny b.

Znovu připomeňme, že veličinami jsou míněny veličiny geometrické, tj. délky, obsahy a objemy a že násobkem veličiny a přirozeným číslem n rozumíme veličinu na, která vznikne sečtením n exemplářů veličiny a.

Třetí a čtvrtá definice a jejich výklad

3. *Poměrem jest nějaký vztah dvou stejnorodých veličin dle jejich kolikosti.*
4. *Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.*

O poměru dvou veličin je možno hovořit jen tehdy, jsou-li stejnorodé, tj. mají-li v dnešním slova smyslu „stejnou dimenzi“. Můžeme tedy uvažovat poměr dvou délek, poměr dvou obsahů, poměr dvou objemů, ale nikoli poměr délky a obsahu, poměr délky a objemu apod. Tento přístup odpovídá zákonu homogenity („stejnorodosti“), který byl řeckými matematiky zaveden po přechodu od aritmetických veličin k veličinám geometrickým a položen do základů řecké geometrické algebry.[4] Poměr dvou veličin zachycuje vztah jejich velikostí („kolikost“).

Čtvrtá definice navíc říká, že poměr mohou tvořit jen takové veličiny a, b, k nimž existují přirozená čísla m, n, pro něž $na > b$ a $mb > a$; tato důležitá podmínka vylučuje z dalších úvah nekonečně malé veličiny.[5] Uvědomme si, že n-násobkem nekonečně malé veličiny je opět nekonečně malá veličina.

Poznamenejme, že v Eukleidových *Základech* se nekonečně malé veličiny nevyskytují, ačkoliv výchozí axiómy, které jsou uvedeny na počátku první knihy, je a priori z dalších

---

[2] Využijeme českého překladu *Základů* [Eu], jehož autorem je František Servít (1848–1923). O českých překladech a překladatelích Eukleidových *Základů* viz [B].

[3] O problematice překladů a přepisů starých matematických textů viz například [Be5].

[4] Poznamenejme, že se k zákonu homogenity v 16. století vrátil francouzský matematik François Viète (1540–1603), autor významné knihy *In artem analyticem isagoge* (1591). Ve svém teoretickém počtu zvaném *logistica speciosa* zavedl celou hierarchii skalárů různých „dimenzí“. Zákon homogenity definitivně odstranil René Descartes (1596–1650) ve své slavné knize *La géométrie* (1637). Viz například [Be4].

[5] V řecké matematice neměly místo ani nekonečné (tj. nekonečně velké) veličiny, neboť aktuální nekonečno Řekové neuznávali. Přijetí aktuálního nekonečna naráželo až do 19. století na 8. axióm Eukleidových *Základů*: *A celek větší než díl*. Každá aktuálně nekonečná množina má totiž vlastní podmnožiny, které mají stejnou mohutnost jako ona.

úvah nevylučují. Výjimkou je „úhel sevřený tečnou ke kružnici a kružnicí samou“, který je „menší než jakýkoli ostrý úhel“ (III. kniha, 16. věta).[6]

Podmínka uvedená ve čtvrté definici je známá jako Eudoxův axióm, Archimédův axióm nebo Eudoxův-Archimédův axióm. Archimédés ze Syrákús (287–212)[7] tento požadavek, který připisuje Eudoxovi, formuloval pro délky, obsahy a objemy v práci *O kouli a válci*,[8] pro délky a obsahy ve spise *O spirálách*[9] a pro obsahy v práci *Kvadratura paraboly*.[10] Můžeme jej vyjádřit takto: Větší ze dvou daných veličin, ať jsou to délky, obsahy nebo objemy, přesahuje menší o jistý rozdíl, který, když je dostatečně znásoben, je větší než každá z obou daných veličin.

To znamená, že například délky dvou úseček se nemohou lišit o nekonečně malou veličinu. Tento axióm do jisté míry reaguje na dřívější úvahy řeckých matematiků a filozofů o povaze a charakteru geometrických útvarů: co je úsečka a z čeho se skládá, zda je dělitelná do nekonečna atd. (viz např. [Hj]).

Pátá a šestá definice a jejich výklad

5. *Pravíme, že jsou veličiny v témž poměru k sobě, první ke druhé, a třetí ke čtvrté, když stejné násobky veličiny první a třetí nad stejné násobky druhé a čtvrté jsou dle jakékoli násobnosti buď jeden nad druhý zároveň větší buď zároveň stejné buď zároveň menší, jsouce vzaty ve vzájemném pořádku.*
6. *Veličiny mající týž poměr nazýváme úměrou* (*úměrnými*).

Pátá a šestá definice zavádějí rovnost dvou poměrů, neboli úměru geometrických veličin. Pomocí současné matematické řeči a symboliky vyjádříme předchozí dvě definice takto: poměry $a:b$ a $c:d$ se rovnají, tj. tvoří úměru $a:b=c:d$, jestliže pro libovolně zvolená přirozená čísla m, n platí:

$$na < mb \text{ právě tehdy, když } nc < md,$$
$$na > mb \text{ právě tehdy, když } nc > md,$$
$$na = mb \text{ právě tehdy, když } nc = md.$$

Pokusme se nyní objasnit definici rovnosti poměrů pro délky, které lze reprezentovat úsečkami (pro obsahy a objemy by byla obdobná představa méně názorná). Představme si, že jsme na jednu polopřímku nanesli n exemplářů úsečky a a m exemplářů úsečky b a získali tak body A, B a na druhou polopřímku nanesli stejným způsobem n exemplářů úsečky c a m exemplářů úsečky d a získali tak body C, D. Jsou-li pro **každou** dvojici

[6] *Kolmice na konci průměru kruhového zřízená padne vně kruhu, a v prostor mezi přímkou* (*kolmicí*) *a obvodem nevejde se přímka jiná, a úhel polokružní větší jest nad jakýkoliv ostrý úhel přímkový, zbývající však jest menší.* ([Eu], str. 43)

[7] Archimédovo dílo máme k dispozici zejména v publikacích [Ar1], [Ar2].

[8] *Further, of unequal lines, unequal surfaces, and unequal solids, the greater exceeds the less by such a magnitude as, when added to itself, can be made to exceed any assigned magnitude among those which are comparable with* [*it and with*] *one another.* ([Ar1], str. 4)

[9] *And here too, as in the books previously published, I assume the following lemma, that, if there be* (*two*) *unequal lines or* (*two*) *unequal areas, the excess by which the greater exceeds the less can, by being* [*continually*] *added to itself, be made to exceed any given magnitude among those which are comparable with* [*it and with*] *one another.* ([Ar1], str. 155)

[10] *... the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of* (*two*) *unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area.* ([Ar1], str. 234)

přirozených čísel m, n koncové body A, B a C, D na obou polopřímkách (vůči počátkům těchto polopřímek) „stejně umístěny", tvoří dané poměry úměru, tj. $a : b = c : d$.

Rozeberme nyní problematiku úměry podrobněji, uvažujme pevně daný poměr $a : b$. Množina $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ všech dvojic přirozených čísel (m, n) se rozpadne na tři disjunktní podmnožiny: $X = \{(m, n);\ na < mb\}$, $Y = \{(m, n);\ na > mb\}$, $Z = \{(m, n);\ na = mb\}$.

Množiny X, Y, Z jsou uzavřeny na „krácení" a „rozšiřování" dvojic, tj. např. dvojice (m, n) leží v množině X právě tehdy, když v této množině leží dvojice (km, kn). Proto můžeme od dvojic přirozených čísel (m, n) přejít ke kladným racionálním číslům ${}^{m}/_{n}$ a množiny X, Y, Z chápat jako podmnožiny množiny $\mathbf{Q}^{+}$ všech kladných racionálních čísel. Množina $\mathbf{Q}^{+}$ je tedy disjunktním sjednocením množin X, Y, Z. Snadno lze dokázat následující tvrzení:

- množina X obsahuje s každým číslem x všechna racionální čísla, která jsou větší než x,
- množina Y obsahuje s každým číslem y všechna kladná racionální čísla, která jsou menší než y,
- jestliže je z prvkem množiny Z, potom každé racionální číslo, které je větší než z, je obsaženo v množině X a každé kladné racionální číslo, které je menší než z, je obsaženo v množině Y,
- množina Z je nejvýše jednoprvková; jsou-li veličiny a, b nesouměřitelné, je prázdná, jsou-li souměřitelné, je jednoprvková.

Poměr $a : b$ tedy definuje rozklad množiny kladných racionálních čísel $\mathbf{Q}^{+}$ na disjunktní množiny X, Y, Z, které mají výše uvedené vlastnosti. Poměry $a : b$ a $c : d$ se podle páté (a šesté) definice rovnají, tj. tvoří úměru, právě tehdy, když jim odpovídají (ve výše uvedeném smyslu) stejné rozklady množiny $\mathbf{Q}^{+}$.

Sedmá definice a její výklad

7. *Když ze stejných násobků násobek veličiny první jest větší než násobek druhé, násobek třetí však není větší než násobek čtvrté, tehdy pravíme, že první ke druhé jest v poměru větším než třetí ke čtvrté.*

Tato definice umožňuje srovnání poměrů podle velikosti: existují-li přirozená čísla m, n taková, že $na > mb$ a $nc \leq md$, pak budeme psát $a : b > c : d$.

Uvažujme opět pevně zvolený poměr $a : b$ a rozlišme dva případy.

Jestliže jsou veličiny a, b souměřitelné, pak pro nějaká přirozená čísla m, n je $a = mc$, $b = nc$, kde c je jejich společná míra. Pak je $na = mb = nmc$, tj. číslo ${}^{m}/_{n}$ leží v množině Z. Poměr $a : b$ neboli $mc : nc$ je nyní rozumné reprezentovat poměrem $m : n$ dvou přirozených čísel m, n, tj. (v naší řeči) racionálním číslem ${}^{m}/_{n}$.

Jsou-li veličiny a, b nesouměřitelné, je množina Z prázdná, a proto je $\mathbf{Q}^{+}$ disjunktním sjednocením množin X a Y. Jestliže je číslo ${}^{m}/_{n}$ prvkem množiny Y, potom je podle 7. definice $a : b > mc : nc$, neboť $na > mb$ a $nmc = mnc$. Poměr $a : b$ je tedy větší než poměr $mc : nc$, kterému jsme v předchozím odstavci přiřadili racionální číslo ${}^{m}/_{n}$. Jestliže je číslo ${}^{m}/_{n}$ prvkem množiny X, potom je podle 7. definice $b : a > nc : mc$, neboť $mb > na$ a $mnc = nmc$. Poměr $b : a$ je tedy větší než poměr $nc : mc$, kterému je přiřazeno racionální číslo ${}^{n}/_{m}$. Je přirozené usoudit, že poměr $a : b$ je menší než poměr $mc : nc$, kterému jsme přiřadili racionální číslo m/n. Můžeme tedy říci, že poměr $a : b$ je „sevřen“ množinami X a Y.

Uvědomme si ještě, že nerovnost $a : b > c : d$ platí právě tehdy, když existuje racionální číslo m/n, pro které je $a : b > m/n \geq c : d$ (příslušné rozklady množiny $\mathbf{Q}^+$ nejsou pro poměry $a : b$, $c : d$ stejné, liší se alespoň v prvku m/n).

Objasněme nyní celou záležitost ještě jednou, ale z trochu jiného pohledu. Zvolme jednotku 1 a uvažujme veličiny, které jsou s ní souměřitelné, resp. nesouměřitelné. Násobky jednotky značme přirozenými čísly, pišme tedy jednoduše $m = m \cdot 1$. Je-li veličina a souměřitelná s jednotkou, je $na = m$; veličina a je tedy n-tinou veličiny m, tj. $a = m/n$. Veličina a je v tomto případě racionální.

Je-li veličina a nesouměřitelná s jednotkou, potom poměr $a : 1$ určuje disjunktní rozklad množiny $\mathbf{Q}^+$ na podmnožiny X a Y. Jestliže m/n patří do Y, pak je $na > m$, a tedy $a > m/n$. Jestliže m/n patří do X, pak je $na < m$, a tedy $a < m/n$. Veličina a je tedy vymezena disjunktními podmnožinami X, Y množiny $\mathbf{Q}^+$ všech kladných racionálních čísel. Je iracionální.

Připomeňme, že řečtí matematici od nejstarších dob vymezovali iracionální čísla čísly racionálními. Již pýthagorejci znali následující odhad odmocniny ze dvou:

$$7/5 < \sqrt{2} < 17/12.$$

Archimédés v práci *O měření kruhu*[11] využíval při výpočtu horního a dolního odhadu poměru obvodu a průměru kruhu (odhad konstanty, kterou dnes značíme symbolem π) nerovnosti

$$265/153 < \sqrt{3} < 1\,351/780\,.$$

Toto vymezení je mimořádně přesné, jak ukazuje výpočet rozdílu horní a dolní meze:

$$1\,351/780 - 265/153 = 1/39\,780\,.$$

Pro číslo π nalezl Archimédés odhad

$$25\,344/8\,069 < \pi < 29\,376/9\,347\,,$$

který číslo π vymezuje s přesností na dvě desetinná místa, a jeho jednodušší, méně přesnou verzi

$$3\,10/71 < \pi < 3\,1/7\,.$$

Eudoxova myšlenka definice rovnosti poměrů, tj. definice úměry, je velmi zajímavá. Poznamenejme, že pro úsečky a, b, c, d by bylo možno zavést rovnost poměrů $a : b, c : d$ pomocí rovnosti obsahů ad, bc, tj. rovností $ad = bc$.[12] Jsou-li však a, b, c, d obsahy, resp. objemy (tj. veličiny druhé, resp. třetí dimenze), pak součiny ad, bc nemají (ve smyslu řecké geometrické algebry) geometrický význam (mají totiž dimenze větší než 3). Navíc

[11] O tomto spisu pojednává podrobně článek [Be6], o výpočtu odmocnin ve starověku článek [Be7].

[12] Porovnat obsahy dvou obdélníků umíme provést geometricky – můžeme je například nahradit rovnoplochými čtverci a porovnat délky jejich stran.

by toto pojetí nedávalo zjevnou možnost vymezení poměru nesouměřitelných veličin (iracionálního čísla) pomocí poměrů souměřitelných veličin (racionálními čísly).

Další definice

Osmá až osmnáctá definice již žádné závažné myšlenky neobsahují. Navíc jsou v nich obsažena některá jednoduchá tvrzení, která při exaktním přístupu do definic nepatří. Jako příklad uveďme osmou a devátou definici:

8. *Úměra o trojím členství jest nejmenší.*
9. *Když jsou tři veličiny úměrou, pravíme, že se má první ke třetí jako dvojmoc první ke dvojmoci druhé.*

Týkají se úměry $a : b = b : c$, z níž snadno vyplývá úměra $a : c = a^2 : b^2$.

Věty o poměrech a úměrách

Ve větách, které následují, jsou popsány jednoduché vztahy mezi veličinami a jejich násobky, mezi poměry a úměrami. Uveďme pro zajímavost několik těchto výsledků (věty 3, 10, 24 a 25) v Servítově překladu a v dnešní symbolice.

3. *Když první veličina je stejným násobkem druhé jako třetí čtvrté a vezmeme stejný násobek první a třetí, bude též z obdržených po řadě násobků první stejným násobkem druhé jako druhý čtvrté.*
10. *Z veličin k témuž poměr majících ta, jež má větší poměr, jest větší; ke které však totéž má větší poměr; ta jest menší.*
24. *Když první veličina má ke druhé týž poměr jako třetí ke čtvrté a též pátá ke druhé má týž poměr jako šestá ke čtvrté, také součet první s pátou bude míti ke druhé týž poměr jako součet třetí se šestou ke čtvrté.*
25. *Když jsou čtyři veličiny úměrou, největší s nejmenší jest větší než dvě ostatní.*

V současné symbolice tato tvrzení vyjádříme takto:

- Jestliže $a = mb$, $c = md$, potom $na = (nm)b$, $nc = (nm)d$.
- Jestliže $a : c > b : c$, potom $a > b$. Jestliže $c : b > c : a$, potom $a > b$.
- Jestliže $a : b = c : d$, $e : b = f : d$, pak $(a + e) : b = (c + f) : d$.
- Nechť $a : b = c : d$. Jestliže a je největší (a d nejmenší) z veličin a, b, c, d, pak $a + d > b + c$.

V moderní symbolice lze všechna tato tvrzení snadno dokázat. Podrobný komentář a pokus o moderní interpretaci této partie Eukleidových *Základů* je obsažen v práci [Be8].

3. Moderní teorie reálných čísel

S určitou mírou nadsázky můžeme říci, že Eudoxova teorie proporcí zavádí kladná reálná čísla. Její základní myšlenka je obsažena v postupu, který ke konstrukci reálných čísel použil ve druhé polovině 19. století vynikající německý matematik Richard Dedekind (1831–1916). Několika větami nastíníme jeho výchozí myšlenku.

Uvažujme disjunktní rozklad množiny **Q** všech racionálních čísel na podmnožiny X, Y splňující tuto podmínku: pro každé x množiny X a každé y množiny Y je $y < x$. Dvojice (X, Y) se pak nazývá řez. Uvažujme množinu všech takovýchto řezů, její prvky, tj. jednotlivé řezy, nazveme reálná čísla. Existuje-li v množině X nejmenší prvek x, resp.

v množině Y největší prvek y, definuje řez (X, Y) racionální číslo x, resp. y. Pokud nemá množina X nejmenší prvek a množina Y největší prvek, definuje řez (X, Y) iracionální číslo. Takovým je například řez (X, Y), kde $X = \{q\,;\, q^2 > 2\}$ a $Y = \mathbf{Q} \setminus X$, vymezující iracionální číslo $\sqrt{2}$.

Eudoxova teorie proporcí, tj. teorie poměrů a úměr geometrických veličin, představovala tedy jakousi teorii reálných čísel. Z dnešního pohledu nebyla dokonalá a při tehdejším chápání nekonečna ani dokonalá být nemohla. Odmítání aktuálního nekonečna totiž znemožňovalo úvahy o číselném oboru **všech** reálných čísel, o souhrnu, resp. množině **všech** iracionalit apod. Z těchto důvodů nebylo možno postihnout spojitost (resp. úplnost) této číselné struktury. Teprve v 19. století, více než dvě tisíciletí po Eudoxovi a Eukleidovi, dospělo několik matematiků k úvahám o exaktním vybudování číselného oboru reálných čísel.

Devatenácté století je obdobím zpřesňování základů matematické analýzy. V první polovině tohoto století byli hlavními aktéry tohoto procesu Bernard Bolzano (1781–1848), matematik, teolog a filozof italsko-německého původu, který celý život prožil v Čechách, a francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), autor významné knihy *Cours d'analyse* z roku 1821, od něhož pochází pojem cauchyovská posloupnost, který sehrál při pozdějším popisu reálných čísel důležitou roli. O něco později stavěli matematickou analýzu na pevnější základy další tvůrci, mezi nimiž vynikli zejména Bernhard Riemann (1826–1866) a Karl Weierstrass (1815–1897), který přispěl k tzv. aritmetizaci matematiky, tj. k vyjádření základních pojmů diferenciálního a integrálního počtu v řeči epsilon-delta (funkce, limita, spojitost, integrál atd.). Nakonec došlo i k přesnému popisu reálných čísel. O exaktním budování základů matematiky intenzivně přemýšlel již Bolzano, popisu reálných čísel se věnoval s částečným úspěchem v letech 1830 až 1835. Většina jeho úvah však zůstala nepublikována a vývoj matematiky neovlivnila. Teorii reálných čísel budovali nezávisle na sobě francouzský matematik Charles Méray (1835–1911) a německý matematik Heinrich Heine (1821–1881). Weierstrass se těmto otázkám věnoval od roku 1865 ve svých přednáškách na berlínské univerzitě. Z jeho myšlenek se odvozuje reprezentace reálných čísel desetinnými číselnými řadami.

Zcela exaktní teorii reálných čísel vypracoval německý matematik Georg Cantor (1845–1918) v sedmdesátých letech 19. století; postavil ji na své teorii množin. Reálná čísla reprezentoval třídami navzájem ekvivalentních *fundamentálních* (tj. cauchyovských) posloupností racionálních čísel. Ve stejné době prezentoval svou teorii řezů Richard Dedekind. Čtenářům zajímajícím se o vývoj názorů na reálná čísla lze doporučit pěkně koncipovaný článek Jaromíra Šimši [Š].

Richard Dedekind

Když byl roku 1858 Richard Dedekind postaven před povinnost vést na polytechnice v Curychu přednášky z diferenciálního počtu, uvědomil si, že dosud neexistuje exaktní teorie reálných čísel. Intenzivně se tímto problémem začal zabývat a takovouto teorii vytvořil. Její základní myšlenky publikoval roku 1872 v práci *Stetigkeit und irrationale Zahlen* a v jejím úvodu poznamenal, že sepsal své výsledky z podzimu roku 1858. Velmi významná pro rozšíření moderního pojetí analýzy – a matematiky vůbec – byla i jeho další práce *Was sind und was sollen die Zahlen?* z roku 1888. Svoji brožurku *Stetigkeit und irrationale Zahlen* začal Dedekind těmito slovy:

Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik. Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen. Auch jetzt halte ich ein solches Heranziehen geometrischer Anschauung bei dem ersten Unterrichte in der Differentialrechnung vom didaktischen Standpunkte aus für außerordentlich nützlich, ja unentbehrlich, wenn man nicht gar zu viel Zeit verlieren will. Aber daß diese Art der Einführung in die Differentialrechnung keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann, wird wohl niemand leugnen. Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschlußfaßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. ...

Dies gelang mir am 24. November 1858, ... ([De2]-III., str. 315–316)

Základní myšlenku popsal Dedekind takto:

Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke, hervorbringt. ([De2]-III., str. 322)

Poznamenejme, že Dedekinda problematika číselných oborů velmi zaujala. V knížce *Was sind und was sollen die Zahlen?* nalézáme mimo jiné známé Peanovy axiómy přirozených čísel, k nimž Dedekind dospěl ve stejné době jako italský matematik a logik Giuseppe Peano (1858–1939) – viz například [Gi]. Zdůraznil zde toto:

Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. ([De2]-III., str. 335)

Velmi zajímavé je srovnat předchozí citát se známým výrokem Leopolda Kroneckera (1823–1891), který byl vysloven roku 1886, tj. o dva roky dříve, na schůzi berlínských přírodovědců:[13] *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*

Oba zmíněné Dedekindovy texty o povaze reálných čísel byly mnohokrát vydány (viz [De1]), byly zařazeny i do Dedekindových sebraných matematických spisů [De2]. Jeho přednášky z diferenciálního a integrálního počtu ze školního roku 1861/1862 vyšly roku 1985 (viz [De3]).

Rudolf Lipschitz

Německý matematik Rudolf Lipschitz (1832–1903) byl jedním z prvních matematiků, kteří Dedekindovu teorii řezů promýšleli a uvědomovali si její historické souvislosti. Ve

[13] Viz Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2(1893), str. 5–31, citát ze str. 19, viz též Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 33(1925), str. 210–228.

druhé polovině 70. let 19. století připravoval k vydání svou dvoudílnou učebnici *Lehrbuch der Analysis, I. Grundlagen der Analysis, II. Differential- und Integralrechnung* [Li1], která vyšla v Bonnu v letech 1877 a 1880. Je pravděpodobné, že ho otázka exaktního budování oboru reálných čísel zaujala právě v souvislosti s přípravou této učebnice.

Zajímavé úryvky z korespondence Rudolfa Lipschitze a Richarda Dedekinda

Velmi zajímavá je Lipschitzova a Dedekindova vzájemná korespondence, která se týká exaktního budování reálných čísel. Lipschitz se tázal, co vlastně Dedekind udělal nového ve srovnání se starými řeckými matematiky, když jeho teorie řezů má předobraz v Eudoxově teorii proporcí. Dedekind poctivě přiznal, že základní myšlenka je stejná; podotknul však, že podstatným rozdílem je to, že teorie řezů zaručuje spojitost reálné osy.

Dne 8. června 1876 poslal Lipschitz Dedekindovi dopis, kterým navázal na jejich předchozí krátkou výměnu listů.[14] Mimo jiné napsal:

... Ich muss jetzt gestehen, dass ich die Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, dass ich aber der Meinung bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdruckes aber nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich kann nur sagen, dass die von Euclid V,5 aufgestellte Definition, welche ich lateinisch anführe rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare[15]*, und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition. Aus diesem Grunde würde ich wünschen, dass namentlich die Behauptung wegfiele, dass solche Sätze wie* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ *bisher nicht wirklich bewiesen seien.* ([Li2], str. 58)[16]

Dedekind obratem odpověděl. Jeho dlouhý dopis je datován 10. června 1876:

... das System aller Schnitte in dem für sich unstetigen Gebiete der rationalen Zahlen bildet eine stetige Mannigfaltigkeit.

... die Euklidischen Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen nicht enthalten ist, unfähig sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Grössen zu begründen ...

Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene Muster eines stetigen Gebietes erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Grössen-Verhältniss durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisiren. ([Li2], str. 65–68)

Lipschitz odpověděl dne 6. července 1876. Ve svém listu připomněl intuitivní představy o spojitosti křivky:

... Was Sie von der Vollständigkeit des Gebietes erwähnen, die aus Ihren Principien abgeleitet wird, so fällt dieselbe in der Sache mit der Grundeigenschaft einer Linie zusammen, ohne die kein Mensch sich eine Linie vorstellen kann. ([Li2], str. 73)

[14] Korespondence Lipschitze a Dedekinda je otištěna v knize [Li2] na stranách 47 až 106. Zahrnuje listy napsané v období od 11. března 1876 do 17. ledna 1894.

[15] Text 4. definice v Heibergově latinské edici Eukleidových *Základů* zní takto: *Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quae multiplicatae altera alteram superare possunt*. V Servítově překladu: *Pravíme, že k sobě mají poměr veličiny, které násobeny jsouce mohou býti jedna druhé větší.* Poznamenejme, že Heibergova kritická verze Eukleidových *Základů* vycházela až v letech 1883 až 1888.

[16] O tomto tématu viz článek [Fo].

Dedekind dne 27. července 1876 napsal:

... Aber Euklid schweigt vollständig über diesen, für die Arithmetik wichtigsten Punct, und deshalb kann ich Ihrer Ansicht nicht zustimmen, dass bei Euklid die vollständigen Grundlagen für die Theorie der irrationalen Zahlen zu finden seien. ([Li2], str. 78)

Odborná korespondence obou matematiků pokračovala i v dalších letech. Byla velmi zdvořilá a uctivá. Ve svém dopise z 8. června 1876 se Lipschitz za své pochybnosti o Dedekindově teorii řezů dokonce omlouvá:

Ich kann übrigens diese Bemerkung nicht schliessen, ohne zu sagen, wie schwer es mir wird, Ihnen dieselbe zu schreiben. ([Li2], str. 58)

O vztahu staré Eudoxovy teorie proporcí a moderní Dedekindovy teorie řezů viz např. [Kr], [St] a [Ga].

3. Závěr

Řečtí matematici dospěli v pátém a čtvrtém století před Kristem k pochopení podstaty souměřitelnosti a nesouměřitelnosti geometrických veličin, a tedy k existenci iracionalit. Byli schopni poměr konkrétních geometrických veličin velmi přesně vymezit shora i zdola poměry přirozených čísel. Jednotlivé iracionality tak dokázali „zařadit na správné místo" mezi čísla racionální.

K jasné představě o tom, že naopak **každé** rozdělení množiny kladných racionálních čísel ve výše uvedeném smyslu definuje kladné reálné číslo (racionální nebo iracionální), však řecká matematika nedospěla. Řečtí matematici nemohli při svém pojetí matematiky (odmítání aktuálního nekonečna) uvažovat (v dnešní řeči) množinu **všech** takovýchto rozdělení, nemohli tak získat obor **všech** kladných reálných čísel. Ze stejného důvodu nemohli hovořit (v našem smyslu) o spojitosti.[17]

Dedekind naproti tomu vytvořil v sedmdesátých letech 19. století množinu **všech** reálných čísel jako množinu **všech** řezů oboru racionálních čísel a přesně postihnul její spojitost. Tohoto svého přínosu, kterým kvalitativně překonal Eudoxovu teorii proporcí, si byl dobře vědom, jak vyplývá z jeho korespondence s Lipschitzem.

Představu o tom, kolik vlastně iracionalit je, přinesla až poslední třetina 19. století. Teprve Cantor ukázal, že racionálních čísel je „stejně mnoho" jako čísel přirozených, ale reálných čísel je „více".

Poznamenejme, že tento text vznikl úpravami a výrazným zkrácením článku [Be8].

Literatura

[Ar1] Archimedes (2002) *The Works of Archimedes, Edited by T. L. Heath*. New York: Dover Publications. clxxxvi+326+51 stran.

[17] Navíc je třeba připomenout, že tehdy bylo nutno uvažovat délky, obsahy a objemy odděleně, tj. uvažovat tři různé obory kvalitativně odlišných geometrických veličin.

[Ar2] Archimedes (1914) Archimedes' Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von Sir Thomas L. Heath. Deutsch von Dr. Fritz Kliem. Berlin: Verlag von O. Häring. xii+477 stran.

[Eu] Eukleides (1907) *Eukleidovy Základy* (*Elementa*). *Přeložil František Servít*. Praha: Jednota českých mathematiků. vi+314 stran.

[Be1] Bečvář J. (1994) *Hrdinský věk řecké matematiky*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky I, edice Dějiny matematiky, sv. 1. Brno: JČMF. Str. 20–107.

[Be2] Bečvář J. (1997) *Hrdinský věk řecké matematiky II*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky II, edice Dějiny matematiky, sv. 7. Praha: Prometheus. Str. 7–28.

[Be3] Bečvář J. (2007) *Cesta k Eukleidovým Základům*. G – Slovenský časopis pre geometriu a grafiku 4, str. 5–24.

[Be4] Bečvář J. (1999) *Algebra v 16. a 17. století*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, sv. 12. Praha: Prometheus. Str. 161–235.

[Be5] Bečvář J. (2009) *Interpretace matematických výsledků našich předků*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21.–25. 8. 2009. Praha: Matfyzpress. Str. 59–86.

[Be6] Bečvář J. (2012) *Měření kruhu*. In Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla, edice Dějiny matematiky, sv. 54. Praha: Matfyzpress. Str. 45–53.

[Be7] Bečvář J. (2012) *Výpočty odmocnin ve starověku*. In Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla, edice Dějiny matematiky, sv. 54. Praha: Matfyzpress. Str. 111–123.

[Be8] Bečvář J. (2008) *Teorie proporcí* (*od Eudoxa a Eukleida až k Dedekindovi*). In L. Dostálová (ed.): Eukleides: Základy geometrie, Sborník příspěvků ze semináře Katedry filozofie Fakulty filozofické ZČU. Plzeň: ZČU. Str. 63–105.

[B] Bečvářová M. (2002) *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, edice Dějiny matematiky, sv. 20. Praha: Prometheus. 297 stran.

[De1] Dedekind R. (1965) *Was sind und was sollen die Zahlen ? Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. [Jedná se o přetisk 10. vydání prvního textu a 7. vydání druhého textu; 2. vydání: 1969; anglicky: *Essays on the theory of numbers*, 1901, 1924, 1948, 1963, 2006; italsky: 1926.]

[De2] Dedekind R. (1930–1932) *Gesammelte mathematische Werke I., II., III.*, Braunschweig: F. Vieweg & Sohn.

[De3] Dedekind R. (1985) Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62. In einer Mitschrift von Heinrich Bechtold bearb. Von Max-Albert Knus und Winfried Scharlau. Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 1, Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Braunschweig-Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn. xiii+349 stran.

[Fo] Fowler D. (1992) *Dedekind's Theorem:* $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. The American Mathematical Monthly 99, str. 725–733.

[Ga] Gardies J.-L. (1984) *Eudoxe et Dedekind*. Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications 37, str. 111–125.

[Gi] Gillies D. A. (1982) *Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Assen: Van Gorcum. x+106 stran.

[He] Heath T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics I., II.*. Oxford: Clarendon Press. Reprint: New York: Dover Publications, 1981, xv+446, xi+586 stran.

[Hj] Hjelmslev J. (1950) *Eudoxus' Axiom and Archimedes' Lemma*. Centaurus 1, str. 2–11.

[Kr] Krull W. (1971) *Zahlen und Grössen – Dedekind und Eudoxos*. Mitteilungen aus dem mathematischen Seminar Giessen 90, str. 29–47.

[Li1] Lipschitz R. (1877, 1880) Lehrbuch der Analysis, I. Grundlagen der Analysis, II. Differential- und Integralrechnung. Bonn: M. Cohen & Sohn. xvi+594, xiv+734 stran.

[Li2] Lipschitz R. (1986) *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*. Bearbeitet von W. Scharlau, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 2, Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Braunschweig-Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn. xviii+253 stran.

[St] Stein H. (1990) Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics. Synthese 84, str. 163–211.

[Š] Šimša J. (1999) *Vývoj představ o reálných číslech*. In J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Matematika v 16. a 17. století, edice Dějiny matematiky, sv. 12, Praha: Prometheus. Str. 259–282.

Článok prijatý dňa 12. Apríla 2013.

Adresa autora

Doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83,
Praha 8, 186 75, e-mail: becvar@karlin.mff.cuni.cz