



DIFFERENT APPROACHES IN SOLVING OF CHOSEN MATHEMATICAL TASK FOR GRADUATING STUDENTS

RÔZNE POSTUPY RIEŠENIA VYBRANEJ ÚLOHY Z MATURITNÉHO TESTU

RENÁTA KUNOVÁ

ABSTRACT. *Recently, graduation from mathematics consists of two distinct parts: external written test given by national organization NÚCEM and internal oral part, which is self-set by each educational institution. In our contribution, we analyze one particular task found in graduation test from 2012 and explain different means and approaches of solution from the viewpoint of high school students.*

KEY WORDS: *quadratic equation – solutions, NÚCEM analysis*

ABSTRAKT. *V súčasnosti maturitná skúška z matematiky pozostáva z dvoch častí: externá písomná časť – test, ktorý zadáva celoštátne NÚCEM a ústna interná časť – maturitné zadania, ktoré si pripravuje každá škola sama. V našom príspevku analyzujeme jednu položku maturitného testu z roku 2012. Podávame rôzne spôsoby a postupy riešenia z pohľadu žiakov gymnázia.*

KLÚČOVÉ SLOVÁ: *kvadratická rovnica – riešenia, analýza NÚCEM*

CLASSIFICATION: *U94*

1 Teoretické východiská

Postupy riešenia kvadratických rovníc vysvetľuje Muhammad al-Chorezmí v knihe *Hisáb al-džabr ua'l-muqábala* (حساب الجبر و المقابلا). Zo slova al-džabr vznikol názov **algebra**, čo znamená spojenie alebo doplnok. Je to časť matematiky, ktorá študuje vzťahy a vlastnosti kvantity pomocou matematických symbolov.[1]

Algebru môžeme rozdeliť ešte do ďalších častí:

- *elementárna algebra* zaoberajúca sa základnými vlastnosťami operácií na množine reálnych čísel, výrazmi a rovnicami, ktoré obsahujú reálne premenné,
- *abstraktná algebra* študuje abstraktné algebrické štruktúry, ako sú napr. grupy, okruhy, zväzy a polia,
- *lineárna algebra* sa zaoberá špecifickými vlastnosťami vektorových priestorov,
- *počítačová algebra* študuje hlavne algoritmy symbolických a numerických výpočtov riešiacich rozmanité algebrické problémy.

V Štátnom vzdelávacom programe ISCED 3A [2] vo výkonovom štandarde v tematickom okruhu Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy a v Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky [3] v kapitole 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy sú uvedené pojmy, vlastnosti a vzťahy, ktoré si má osvojiť žiak, maturujúci z predmetu matematika.

Osvojené základné pojmy kvadratickej rovnice sú: koeficienty kvadratickej rovnice, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia. Rozširujúcimi pojmami sú: koeficient pri lineárnom a kvadratickom člene.

Vlastnosti a vzťahy:

- diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$
- využitie Vietových vzťahov, ktoré určujú vzťah medzi koreňmi x_1, x_2 a koeficientmi a, b, c kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$
 (ak má rovnica len jeden koreň x_1 , tak sa jedná o tzv. dvojnásobný koreň)
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- nájsť všetky riešenia kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení,
- zostaviť kvadratickú rovnicu,
- využívať ekvivalentné a neekvivalentné úpravy,
- rozhodnúť, či úprava zachová alebo zmení množinu riešení danej rovnice. [3]

2 Žiacke riešenia vybranej úlohy z testu MA 3606 (2012)

V našom príspevku sme sa zamerali na rozbor jednej úlohy externej časti maturitného testu z roku 2012. Bola to úloha uzavretá s výberom odpovede z piatich možností, pričom správna je vždy len jedna možnosť.

Naším cieľom bolo, danú úlohu vyriešiť za presne stanovený časový limit a následne urobiť rozbor všetkých ponúknutých žiackych riešení.

Štruktúra maturitného testu z matematiky

Každý školský rok je maturitný test externej časti maturitnej skúšky z matematiky určený pre maturantov všetkých typov stredných škôl. Obsahuje 30 úloh, ktoré vychádzajú z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Dvadsať úloh je otvorených s krátkou odpoveďou. Žiaci počítajú a výsledky zapisujú podľa pokynov v zadaní – zaokrúhľujú, počítajú s presnosťou na jedno alebo dve desiatinné miesta. Desať úloh je uzavretých s výberom jednej správnej odpovede z piatich ponúknutých možností. Pomôcky, ktoré žiaci využívajú sú bežné písacie potreby, kalkulačka bez grafického displeja a vzorce vypísané vzadu v teste. Časová dotácia na celý test je 120 minút. Test sa píše počas písomných maturitných skúšok v polovici marca ako tretí v poradí, po slovenskom jazyku a cudzích jazykoch.

Zadanie vybranej úlohy: Určte reálne čísla a, b tak, aby kvadratická rovnica

$$ax^2 + bx - 2 = 0 \text{ mala korene } -2 \text{ a } \frac{1}{2}.$$

- A. $a = 12 \quad b = 9$
- B. $a = 2 \quad b = -3$
- C. $a = 2 \quad b = 3$
- D. $a = -2 \quad b = 3$
- E. $a = -2 \quad b = -3$

Riešenie I.

Korene -2 a $\frac{1}{2}$ dosadíme do kvadratickej rovnice za neznámu x , zostavíme a riešime sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

$$\begin{array}{r} 4a - 2b - 2 = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - 2 = 0 \quad / \cdot 4 \\ \hline 4a - 2b - 2 = 0 \\ a + 2b - 8 = 0 \quad / + \\ \hline 5a - 10 = 0 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{array}$$

Správna odpoveď: C

Riešenie II.

Pri riešení využívame Vietove vzťahy. Kvadratickú rovnicu normujeme a zapíšeme do sústavy.

$$\begin{array}{r} x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{2}{a} = 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad -2 + \frac{1}{2} = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{a} \quad -2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{a} \\ \hline a = 2 \quad b = 3 \end{array}$$

Riešenie III.

Pri riešení využijeme rozklad kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ a roznásobíme.

$$\begin{array}{l} a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \\ (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}$$

Zo zostavenej rovnice priamo vidíme správnu odpoveď. $a = 2 \quad b = 3$

Riešenie IV.

Kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx - 2 = 0$ najčastejšie riešime pomocou diskriminantu.

$$D = b^2 - 4ac = b^2 + 8a$$

$$-2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$-4a = -b + \sqrt{D}$$

$$a = -b - \sqrt{D}$$

$$-3a = -2b$$

$$a = \frac{2}{3}b$$

Hľadaním závislosti medzi a a b nájdeme vyhovujúce riešenie - najmenšie hodnoty na množine celých čísel sú $b = 3$ a $a = 2$.

Riešenie V.

Overovanie každej z piatich možností po dosadení do pôvodného zadania kvadratickej rovnice za premenné a a b a následné vypočítanie koreňov kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu.

$$12x^2 + 9x - 2 = 0 \quad D = 177$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad D = 25$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad D = 25$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$-2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad D = -7$$

$$-2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad D = -7$$

Takto riešiť úlohu je vhodné žiakom, ktorí sú v počítaní rýchli a presní. Nerobia numerické chyby, chyby v znamienkach a pod.

Riešenie VI.

Do danej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx - 2 = 0$ dosadíme koreň -2 .

Z rovnice $4a - 2b - 2 = 0$ vyjadríme neznámu $b = 2a - 1$ a postupným dosadzovaním zistíme, že vyhovujú hodnoty $a = 2, b = 3$.

Ďalšie úlohy z maturitných testov:

1. Určte hodnotu c tak, aby číslo 4 bolo koreňom kvadratickej rovnice $3x^2 - 2x + c = 0$ ($c = -40$).
2. Určte hodnotu koeficientu b tak, aby jeden z koreňov kvadratickej rovnice $5x^2 + bx + 24 = 0$ bol $x_1 = 8$ ($b = -43$).
3. Určte parameter b tak, aby platila rovnosť $(6x^2 + bx + 2 = 0) : (2x - 1) = (3x - 2)$ ($b = -7$).

3 Analýza NÚCEM

V Správe o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky (2012) sa k danej úlohe (úloha č. 24 v maturitnom teste MA 6306) uvádza:

Testovaná myšlienková operácia: zložitejšia.

Predpokladaná obtiažnosť: stredná obtiažnosť.

Celková úspešnosť: 73 % (Gymnázia – 79,4 %, Stredné odborné školy 61,3 %)

Odpovede a frekvencia výskytu:

C 73 % správna odpoveď

B 9,9% numerická chyba – správne vyrátaná hodnota koeficientu a, ale chyba pri

dopočítaní hodnoty b

D 9,3% numerická chyba – správne vyrátaná hodnota koeficientu b, ale chyba pri

dopočítaní hodnoty a

E 5,2% numerická chyba – žiak sa dopustí viacerých numerických chýb, alebo

volia odpoveď náhodne
náhodne

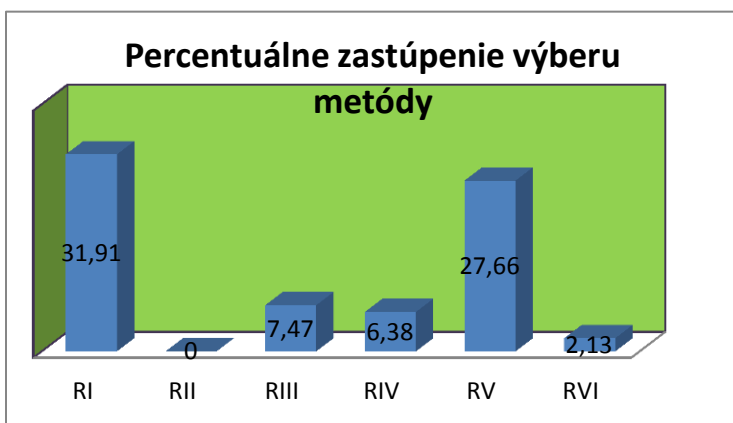
A 1,9% volia odpoveď náhodne

0,7 % neuvedená odpoveď.

Komentár: Úloha vyžadovala určiť kvadratickú rovnicu na základe koreňov rovnice, zručnosť pri umocňovaní a pri práci so zlomkami. Úspešnejší boli žiaci gymnázií v porovnaní s odbornými školami. Úloha nebola až tak obtiažna ako sa predpokladalo. Žiaci s priemernými schopnosťami riešili úlohu s pravdepodobnosťou 0,8. Tiež rozlišovacia sila položky nebola veľká. Všetky distraktory si vybrali žiaci rovnomerne. Pravdepodobnosť voľby správnej odpovede C sa s rastúcou hodnotou úrovne schopností žiaka zvyšovala [4].

4 Priebeh a vyhodnotenie riešenej úlohy

Úlohu riešilo spolu 94 žiakov, 19 žiakov 4. ročníka – maturantov z matematiky v tomto školskom roku, 56 žiakov 2. ročníka štvorročného gymnázia a 19 žiakov VI. ročníka osemročného gymnázia. Časová dotácia na danú úlohu bola 5 minút. Správne riešenie počas stanoveného času nevedelo najst' 24,47% žiakov.



Legenda:

- RI – sústava dvoch lineárnych rovníc
- RII – Vietove vzťahy
- RIII – rozklad na koreňové činitele
- RIV – riešenie diskriminantom
- RV – spätné dosadenie daných možností
- RVI – dosadenie jedného koreňa

Obrázok 1: Výber metódy riešenia

Snažili sme sa o analýzu žiackych riešení a z nich vyplývajúcich postupov a metód pri riešení zdanlivo ľahkej matematickej úlohy.

Najčastejšie použitou metódou bolo dosadenie oboch koreňov do kvadratickej rovnice a zostavenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi (Riešenie I) – tento postup zvolilo 31,91% žiakov. Potom nasleduje spätné dosadenie ponúknutých možností v zadaní úlohy a výpočet kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu (Riešenie V) – takto riešilo 27,66% žiakov. Riešenie pomocou koreňových činiteľov (Riešenie III) využilo 7,47% žiakov. Sústavou, ktorú si žiaci zostavili pomocou vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (Riešenie IV) riešilo úlohu 6,38 % žiakov. Dosadenie jedného koreňa a následné vyjadrenie neznámej (Riešenie VI) postupným dosadzovaním ponúknutých možností využilo 2,13% žiakov.

Riešenie využitím Vietových vzťahov (Riešenie II) nepoužil ani jeden žiak, až po zadaní návodu učiteľom vedeli žiaci pokračovať. Vo 4. ročníku nevedelo riešiť úlohu 31 % žiakov, v II. ročníku 25% žiakov a v VI. ročníku 15,78 % žiakov. Celkovo úspešnosť danej úlohy bola 75,53%, čo je v súlade s výsledkami NÚCEM.

5 Záver

V našom príspevku sme chceli ukázať, že úlohy v maturitnom teste poskytujú široké možnosti riešenia. Postupy riešení kvadratických rovníc si žiaci majú osvojiť na povinných hodinách matematiky v prvom a druhom ročníku strednej školy (podľa ŠVP). Našli sme šesť spôsobov ako dôjsť k správne výsledku vybranej úlohy, je teda len na žiakoch aký postup zvolia pri riešení. Úlohou školy a učiteľov je dbať na neustále rozvíjanie písomného prejavu v matematike, pretože od školského roku 2012/2013 (Maturita 2013) sa kladie vyšší dôraz na výsledky písomnej časti maturitnej skúšky. Doteraz žiak zmaturoval bez ohľadu na to, aké hodnotenie získal z EČ MS, ak z ústnej časti MS odpovedal aspoň na známku dobrý. Podľa nových zmien z matematiky bude musieť získať viac ako 25 % z EČ MS, ak odpovie z ústnej časti MS aspoň na známku dobrý, alebo získať viac ako 33 % z EČ MS, ak odpovie z ústnej časti MS na známku dostatočný.

Literatúra

- [1] Kubáček, Z. (2009). Matematika pre druhý ročník gymnázií. Prvá časť. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, spol. s r.o., 2009. 112s. ISBN 978-80-7158-983-9
- [2] Štátny pedagogický ústav, Štátny vzdelávací program Matematika – príloha ISCED 3A, schválené ÚPK, Bratislava 2009
- [3] Štátny pedagogický ústav, Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, Bratislava 2009
- [4] http://www.nucem.sk/documents//25/maturita_2012/vysledky_analyzy/Sprava_EC_M_S_2012_MAT.pdf

Článok prijatý dňa 24. apríl 2013.

Adresa autora

RNDr. Renáta Kunová, PhD.

Gymnázium Janka Kráľa, Ul. SNP 3, SK – 953 01 Zlaté Moravce,

e-mail: kunovarenata@gmail.com