FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITYNITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SUPER EDGE-MAGIC TOTAL LABELING OF SOME CLASSES OF GRAPHS

HRANOVO SUPERMAGICKÉ ÚPLNÉ OHODNOTENIE NIEKTORÝCH TRIED GRAFOV

LUKÁŠ LEDNICKÝ

ABSTRACT. *In this contribution we investigate the super edge-magic total labeling of certain classes of graphs. We prove that the triangular book $B_{3,n}$ is super edge-magic for any n and prove a necessary condition for a (n,k)-kite graph to be super edge-magic.*

KEY WORDS: *Graph theory, Super edge-magic graphs, Book graph, Kite graph.*

ABSTRAKT. *V tomto príspevku sa budeme zaoberať hranovo supermagickým ohodnotením niektorých tried grafov. Dokážeme, že kniha $B_{3,n}$ je hranovo supermagická pre ľubovoľné n a nutnú podmienku, aby bol graf draka $D_{n,k}$ hranovo supermagický.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *Teória grafov, Hranovo supermagické grafy, Graf knihy, Graf draka.*

CLASSIFICATION: K35

Úvod

V tomto príspevku budeme pod označením graf $G=(V,E)$ uvažovať neorientovaný graf bez násobných hrán a slučiek. Označme $v=|V(G)|$ počet vrcholov grafu *G* a $e=|E(G)|$ počet hrán grafu *G*.

Existuje viacero druhov ohodnotení s prívlastkom magické. V tomto príspevku sa budeme zaoberať hranovo magickým a supermagickým úplným ohodnotením grafov. Hranovo magické grafy prvýkrát definovali Kotzig a Rosa v roku 1970. Okrem iného dokázali, že bipartitný graf $K_{m,n}$ je hranovo magický pre ľubovoľné prirodzené čísla *m* a *n*, kružnica C_n je hranovo magická pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ [2].

Základné definície a poznatky

Ohodnotenie grafu je zobrazenie elementov grafu (vrcholov, hrán) do množiny prirodzených alebo nezáporných celých čísel. V tomto príspevku bude definičným oborom tohto zobrazenia zjednotenie vrcholovej a hranovej množiny. Takéto zobrazenie sa nazýva úplné. Na takéto zobrazenie môžeme klásť rôzne podmienky, čím vzniká množstvo rôznych druhov ohodnotení. Najúplnejší prehľad takýchto ohodnotení podal Gallian [2].

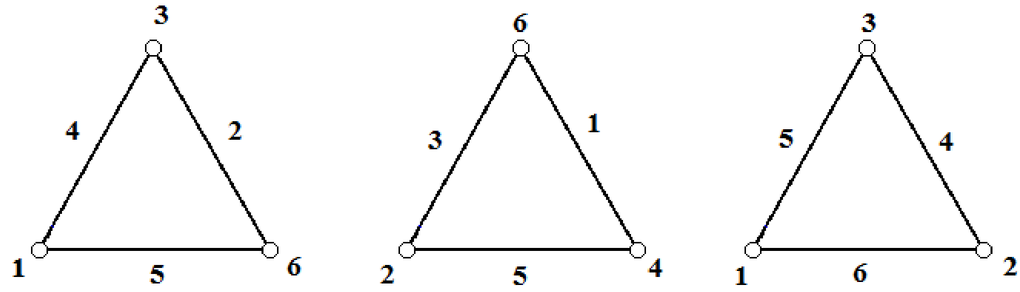
Prenesením vlastnosti magických štvorcov na hrany grafu vytvoríme hranovo magické úplné ohodnotenie grafu.

Definícia: Hranovo magické úplné ohodnotenie grafu *G* je bijektívne zobrazenie $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\dots,v+e\}$ s vlastnosťou:

$$\forall uw \in E(G): \lambda(u)+\lambda(uw)+\lambda(w)=m,$$

pre nejakú konštantu *m*, ktorú budeme nazývať magický súčet grafu. Ak existuje aspoň jedno hranovo magické úplné ohodnotenie grafu *G*, tak hovoríme, že graf *G* je hranovo magický. Ak sú vrcholy hranovo magického grafu ohodnotené číslami 1, 2, ..., *v*, tak sa tento graf nazýva hranovo supermagický.

Pre daný graf môže existovať viacero magických ohodnotení, a to s rôznymi magickými súčtami. Na obrázku 1 sú tri rôzne úplné ohodnotenia grafu C_3. Prvé nie je hranovo magické, druhé je hranovo magické s magickým súčtom 11 a tretie je hranovo supermagické s magickým súčtom 9.



Obrázok 2

Z obrázku vidíme, že hodnota magického súčtu pre ten istý graf môže byť rôzna a závisí od samotného magického ohodnotenia. Predpokladajme, že graf *G*, je supermagický. Potom množina $S=\{\lambda(u)+\lambda(w); uw\in E(G)\}$ je tvorená postupnosťou *e* po sebe nasledujúcich prirodzených čísel [4]. Každý vrchol prispieva svojim ohodnotením do toľkých prvkov postupnosti, s koľkými hranami je incidentný. Potom platí:

$$\sum_{u\in V(G)}(\deg(u)\lambda(u))=s+(s+1)+\ldots+(s+e-1)=es+\frac{e(e-1)}{2}=es+\binom{e}{2},$$

kde deg(*u*) je stupeň vrcholu *u* v grafe *G* a *s* je minimum množiny *S*.

Ak existuje bijektívne zobrazenie $\lambda: V(G)\to\{1,2,\ldots,v\}$, pre ktoré platí, že množina *S* je tvorená postupnosťou za sebou nasledujúcich prirodzených čísel, tak toto zobrazenie indukuje hranovo supermagické úplné ohodnotenie grafu *G*. Toto ohodnotenie bude mať rovnaké ohodnotenie vrcholov ako zobrazenie λ. Hranám priradíme čísla *v*+1, *v*+2, ... *v*+*e* tak, aby magický súčet grafu bol *s*+*v*+*e*.

Niektoré hranovo supermagické grafy

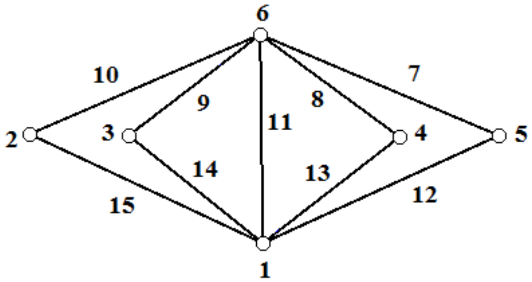
Teraz sa budeme zaoberať magickými ohodnoteniami istých skupín grafov. Graf knihy (z anglického book graph) B_n sa skladá z *n* kružníc C_4 s práve jednou spoločnou hranou. Zovšeobecnený graf knihy $B_{k,n}$ sa skladá z *n* kružníc C_k s práve jednou spoločnou hranou. Pre knihy $B_{3,n}$ platí nasledujúca veta.

Veta 1: Graf $B_{3,n}$ je hranovo supermagický pre ľubovoľné *n*.

Dôkaz: Označme vrcholy incidentné so spoločnou hranou všetkých kružníc u_1 a u_{n+2}. Ostatné vrcholy označme $u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}$. Definujme zobrazenie $\lambda: V(B_{3,n})\cup E(B_{3,n})\to\{1,2,\ldots 3n+3\}$ nasledovne:

$$\lambda(u_i) = i \qquad 1 \le i \le n+2$$
$$\lambda(u_1 u_i) = 3n+5-i \qquad 2 \le i \le n+2$$
$$\lambda(u_i u_{n+2}) = 2n+4-i \qquad 2 \le i \le n+1$$

Zobrazenie spĺňa podmienky uvedené v definícii 1, a preto je graf hranovo supermagický s magickým súčtom 3*n*+6. Na obrázku môžeme vidieť ohodnotenie grafu pomocou zobrazenia z dôkazu vety 1.



Obrázok 3

Graf draka (z anglického kite graph) $D_{n,k}$ pozostáva z kružnice dĺžky *n* a cesty dĺžky *k* pripojenej k jednému z vrcholov kružnice. O tejto triede grafov môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 2: Ak je graf $D_{n,k}$ hranovo supermagický, tak *n* a *k* sú rovnakej parity.

Dôkaz: Graf $D_{n,k}$ obsahuje $n+k$ vrcholov z toho jeden vrchol stupňa 3, jeden vrchol stupňa 1 a ostatné vrcholy sú stupňa 2. Označme *x* vrchol stupňa 3 a *y* vrchol stupňa 1. Nech graf $D_{n,k}$ je hranovo supermagický, potom existuje bijektívne zobrazenie $\lambda : V(D_{n,k}) \cup E(D_{n,k}) \to \{1,2,\ldots,2(n+k)\}$ a platí:

$$\sum_{u \in V(D_{n,k})} \deg(u)\lambda(u) = \lambda(x) - \lambda(y) + \sum_{u \in V(D_{n,k})} 2\lambda(u) = (n+k)(n+k+1) + \lambda(x) - \lambda(y) =$$
$$= s(n+k) + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

Z poslednej rovnosti vyjadríme *s*.

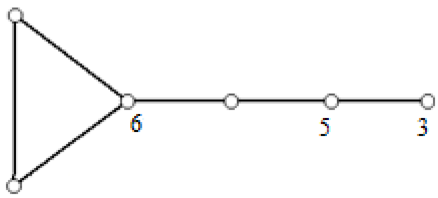
$$s = \frac{n+k+3}{2} + \frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{n+k}$$

Rozdiel v čitateli druhého zlomku bude vždy nenulový a nikdy neprevýši číslo $n+k-1$. Ak uvážime, že *s* musí byť prirodzené číslo, tak jediné prípustné hodnoty pre druhý zlomok sú ±0,5. V tom prípade však súčet $n+k$ musí byť párny, a teda čísla *n* a *k* musia byť rovnakej parity.

Veta 2 je nutnou podmienkou, aby bol graf $D_{n,k}$ hranovo supermagický. Dá sa ukázať, že graf $D_{3,3}$ nie je hranovo supermagický. Dôkaz tohto tvrdenia možno vykonať preskúmaním všetkých šiestich možných ohodnotení vrcholov *x* a *y*. Rozdiel medzi ohodnoteniami týchto vrcholov musí byť ±3, preto sú prípustné len nasledujúce spôsoby ohodnotenia oboch vrcholov:

$$\lambda(x)=6 \quad \lambda(y)=3 \qquad \lambda(x)=3 \quad \lambda(y)=6$$
$$\lambda(x)=5 \quad \lambda(y)=2 \qquad \lambda(x)=2 \quad \lambda(y)=5$$
$$\lambda(x)=4 \quad \lambda(y)=1 \qquad \lambda(x)=1 \quad \lambda(y)=4$$

Vezmime si prvé priradenie. Potom $s=5$ a množina S je tvorená číslami 5, 6, 7, 8, 9 a 10. Potom však vrchol s ohodnotením 1 nesmie byť susedný s vrcholmi s ohodnoteniami 1 a 2. Vrchol s ohodnotením 6 musí byť susedný s vrcholom, ktorý má ohodnotenie 4 a nesmie byť susedný s vrcholom, ktorý má ohodnotenie 5. Na obrázku 3 môžeme vidieť, čiastočné ohodnotenie tohto grafu. Vrcholom je potrebné priradiť ohodnotenia 1, 2 a 4. Žiadnemu z neohodnotených vrcholov už nie je možné priradiť ohodnotenie 2, lebo by vznikol súčet 8. Ten však už vytvárajú vrcholy s ohodnoteniami 3 a 5.K podobným sporom vedú aj ostatné možnosti ohodnotenia vrcholov *x* a *y*.

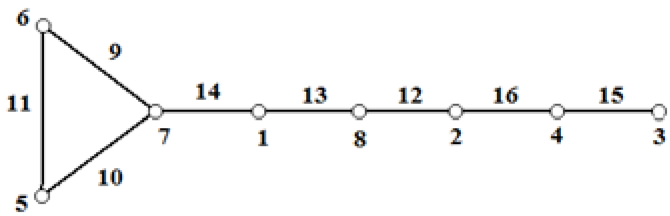


Obrázok 4

Na obrázku 4 môžeme vidieť graf $D_{3,5}$, ktorý hranovo supermagický je s magickým súčtom 22. Pri hľadaní supermagických ohodnotení tejto triedy grafov nám pomáha podmienka z dôkazu vety 2. Ak má platiť

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(y)}{n+k}=\pm\frac{1}{2},$$

tak potom platí $|\lambda(x)-\lambda(y)|=\frac{n+k}{2}$.



Obrázok 4

Pre niektoré špeciálne hodnoty k už bola dokázaná nutná a postačujúca podmienka. Park a kolektív [3] dokázali, že graf $D_{n,2}$ je hranovo supermagický vtedy a len vtedy, keď n je párne.

Záver

V príspevku sme sa dokázali, že graf knihy $B_{k,n}$ je hranovo supermagický pre $k = 3$ a ľubovoľné n. Ďalej je možné skúmať graf knihy pre iné hodnoty k a zistiť, či sú hranovo supermagické. Dokázali sme tiež nutnú podmienku, kedy je graf draka $D_{n,k}$ hranovo supermagický. Okrem týchto tried existuje ešte mnoho ďalších, ktorých magické vlastnosti neboli preskúmané.

Literatúra

[1] Figueroa-Centeno, R. M., Ichishima, R., Muntaner-Batle, F. A. (2001).The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings. In Discrete Mathematics 231. Elsevier, 2001.s. 153 – 168.

[2] Gallian, J. A. (2009). A dynamic survey of graph labeling. In The electronic journal of combinatorics 16. s. 1 – 219.

[3] Park, J. Y., Choi, J. H., Bae, J. H. (2008). On super edge-magic labeling of some graphs. In Bulletin of the Korean Mathematical Society 45. 2008. s. 11 -21.

[4] Wallis, W. D. Magic Graphs, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 2001. ISBN 0-8176-4252-8.

Článok prijatý dňa 24. apríla 2013.

Adresa autorov

Mgr. Lukáš Lednický
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, 97974 Nitra; e-mail: lukas.lednicky@ukf.sk