



TASKS WITH APPLICATIONS IN THE TEACHING OF LINEAR ALGEBRA

APLIKAČNÉ ÚLOHY VO VYUČOVANÍ LINEÁRNEJ ALGEBRY

DANA ORSZÁGHOVÁ

ABSTRACT. *In the paper we are dealing with one of topics of the theory of mathematics teaching, which is the inclusion of applied tasks into the teaching of mathematical courses. The chapter of linear algebra belongs to mathematical topics that are taught in economics study branches at bachelor's degree study and it has multilateral application in specialized subjects of economics. Presented examples of application tasks confirm that their solution is conditional on combining the knowledge of mathematics and special subjects from the economics area.*

KEY WORDS: *teaching of mathematics, applied tasks, linear algebra*

ABSTRAKT. *V príspevku sa zaoberáme jednou oblasťou teórie vyučovania matematiky, ktorou je zaradenie aplikačných úloh do vyučovania matematických predmetov. K preberaným tematickým celkom z matematiky v ekonomických študijných odboroch na bakalárskom stupni štúdia patria aj kapitoly z lineárnej algebry, ktorá má v ekonómii mnohostranné aplikácie. Prezentované ukážky aplikačných úloh potvrdzujú, že ich riešenie je podmienené spojením vedomostí z matematiky a odborných predmetov z ekonomickej oblasti.*

KEÚČOVÉ SLOVÁ: *vyučovanie matematiky, aplikačné úlohy, lineárna algebra*

CLASSIFICATION: *A85, H65, M25*

Úvod

Cieľom vysokoškolskej prípravy budúcich inžinierov – ekonómov je odborné vzdelanie s takými kvalitami, ktoré budú v súlade s nárokmi praxe na ich teoretické a odborné vedomosti, logické myslenie a tvorivé riešenie problémov a praktických úloh. Tok informačných a vzdelávacích zdrojov na bakalárskom stupni štúdia obsahuje vedecké a odborné poznatky z rôznych oblastí. Je potrebné, aby ich študenti vedeli vyhľadať, správne vyhodnotiť a spracovať, získať potrebné vedomosti, ktoré budú vedieť prezentovať a prakticky aplikovať.

Matematika ako veda poskytuje účinné a efektívne nástroje na riešenie úloh s aplikáciami, čím sa mnohokrát stáva nevyhnutnou súčasťou metodického aparátu aj v iných vedných disciplínach a študijných odboroch. Štúdium predmetov ako finančná matematika, poistná matematika, makroekonómia, mikroekonómia, optimálne programovanie a mnohé ďalšie, vyžadujú dobré znalosti matematického aparátu. Teoretické poznatky a matematické metódy sa stávajú pre študentov pochopiteľnejšími vtedy, keď sú spojené s konkrétnou ukážkou aplikácie. Skúsenosti z vyučovania potvrdzujú, že ukážky praktického použitia matematiky patria k motivačným faktorom jej štúdia. Efektívnosť matematického vzdelávania zvyšuje aktivita študentov v procese získavania vedomostí, čím sa zároveň podporuje aj účinnosť rozvoja schopností používať matematický aparát a metódy v aplikačných úlohách.

Matematické modelovanie zákonitostí reálnych situácií vyžaduje schopnosť aplikovať matematické metódy a ich použitie aj v tvorbe počítačových softvérov z matematiky. Tieto požiadavky sú základom pre moderné vzdelanie a ovplyvňujú aj obsah vyučovacích predmetov. Na praktické výpočty a riešenie aplikovaných úloh, prípadne na grafickú

interpretáciu získaných výsledkov môžeme použiť rôzne programy a softvéry. Napríklad voľne dostupný matematický softvér GeoGebra v sebe kombinuje a navzájom spája geometriu, algebru a matematickú analýzu [1].

Zaradenie matematických predmetov do študijných programov na fakultách pripravujúcich budúcich bakalárov a inžinierov má dôležité miesto najmä z aspektu použitia matematických metód v aplikačných úlohách. Riešením aplikačných úloh vplývame na:

- motiváciu študentov rozumieť a ovládať teoretické princípy matematiky,
- aktivitu, samostatnosť a tvorivosť študentov,
- schopnosti študentov matematicky zapísať podmienky vyjadrené slovne,
- trvácnosť a systematickosť vedomostí,
- rozvíjanie medzipredmetových vzťahov,
- kvalitu výstupov vzdelávania.

Rôznorodosť ukážok aplikačných úloh umožňuje ku každému tematickému celku priradiť úlohu, ktorá bude spájať matematickú teóriu a jej praktické použitie na riešenie daného problému. Závisí len od učiteľa, či vhodným výberom príkladov s aplikáciami ukáže študentom užitočnú stránku matematiky, prípadne rozšíri prístup študentov k aplikáciám matematických poznatkov aj atraktívnou formou e-vzdelávania [4].

Katedra matematiky na Fakulte ekonomiky a manažmentu (FEM) Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (SPU) v Nitre získala a rieši projekt KEGA 021SPU-4/2011: *Vyučovanie matematiky s aplikáciami - obsahové zmeny v univerzitnom matematickom vzdelávaní* (r. 2011–2013). Plánovaným výstupom projektu je publikácia, v ktorej budú k jednotlivým preberaným matematickým témam uvedené aplikačné úlohy.

Pedagógovia na Katedre matematiky sa vyučovaniu aplikácií systematicky venujú a aplikačné úlohy sú zaradené v publikáciách, ktoré sú určené pre študentov SPU [5], [6]. Okrem toho realizujú pedagogické experimenty a vyhodnocujú úspešnosť študentov pri riešení úloh s aplikáciami [2], [7].

Obsahová náplň tematického celku „Lineárna algebra“

Na FEM SPU sú v 1. ročníku bakalárskeho stupňa štúdia vyučované tieto povinné predmety: Matematika I a Matematika A v zimnom semestri, Matematika II a Matematika B v letnom semestri. Obsahová náplň jednotlivých celkov na seba nadväzuje, preto je náročné pochopiť matematickú nadstavbu bez príslušného základu. Do obsahovej náplne predmetov letného semestra patria tieto tematické okruhy:

- neurčitý integrál funkcie jednej reálnej premennej,
- určitý integrál funkcie jednej reálnej premennej,
- lineárna algebra (vektory, matice, determinanty, sústavy lineárnych rovníc),
- základy teórie pravdepodobnosti.

Podrobnejšie sa budeme zaoberať okruhom „Lineárna algebra“, ktorý obsahuje tieto témy:

Vektory:

- pojem n -rozmerného vektora, operácie s vektormi,
- lineárna kombinácia vektorov,
- lineárna závislosť a nezávislosť vektorov.

Matice:

- pojem matice, typy matíc, operácie s maticami,
- elementárne riadkové (stĺpcové) úpravy matíc,
- hodnosť matice,
- inverzná matica.

Determinanty:

- pojem a vlastnosti determinantu matice,
- výpočet hodnoty determinantu 2. a 3. stupňa,
- rozvoj determinantu 4. stupňa podľa riadku/stĺpca.

Sústavy lineárnych rovníc:

- homogénne a nehomogénne sústavy,
- metódy riešenia sústavy lineárnych rovníc: Gaussova eliminačná metóda, metóda inverznej matice, metóda determinantov.

Ukážky aplikačných úloh
Úloha 1

Dodávateľská spoločnosť C investovala do výroby produktov V_1, V_2 sumu 15 400 €. Dodávateľská spoločnosť D investovala do výroby rovnakých produktov V_1, V_2 sumu 16 100 €. Dodávateľ C má pri dodávke zisk 20 € a 30 € na jeden výrobok V_1, V_2 . Dodávateľ D má pri dodávke zisk 15 € a 40 € na jeden výrobok V_1, V_2 . Vypočítajte, pri akej minimálnej produkcii sa dodávateľom vrátia ich investície.

Postup riešenia:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 15\,400 \\ 16\,100 \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix}$$

Matica A vyjadruje zisk dodávateľov C, D na jeden výrobok V_1, V_2 .

Matica B vyjadruje celkové finančné investície dodávateľov C, D .

V matici X sú neznáme x_1, x_2 – počet výrobkov V_1, V_2 , ktorých produkcia zabezpečí dodávateľom návratnosť investícií.

Uvedené matice musia spĺňať rovnicu: $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Vypočítame inverznú maticu A^{-1} a pomocou uvedeného vzťahu neznámu maticu X :

$$(A | E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 20 & 30 & 1 & 0 \\ 15 & 40 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (E | A^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{array} \right)$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{8}{70} & -\frac{6}{70} \\ -\frac{3}{70} & \frac{4}{70} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15\,400 \\ 16\,100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 260 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix}$$

Zistili sme, že minimálna produkcia pre návratnosť investícií je 380 kusov výrobku V_1 a 260 kusov výrobku V_2 .

Úloha 2

Podnik vyrába tri druhy výrobkov V_1, V_2, V_3 , na ktoré potrebuje suroviny s_1, s_2, s_3 . Na vyrobenie jedného výrobku V_1 potrebuje 20 jednotiek $[j.]$ suroviny s_1 , 30 $j.$ suroviny s_2 a 40 $j.$ suroviny s_3 . Na výrobu jedného výrobku V_2 potrebuje 40 $j.$ suroviny s_1 , 50 $j.$ suroviny s_2 a 30 $j.$ suroviny s_3 . Na výrobu jedného výrobku V_3 potrebuje 30 $j.$ suroviny s_1 ,

10 j. suroviny s_2 a 50 j. suroviny s_3 . Vypočítajme, koľko kusov výrobkov V_1 , V_2 , V_3 bolo vyrobených, ak sa pritom spotrebovalo 5500 j. suroviny s_1 , 5900 j. suroviny s_2 a 7500 j. suroviny s_3 .

Postup riešenia stručne naznačíme.

Spotrebné vektory pre jednotlivé výrobky sú:

(20, 30, 40) pre výrobok V_1 ,

(40, 50, 30) pre výrobok V_2 ,

(30, 10, 50) pre výrobok V_3

(5500, 5900, 7500) pre celkovú výrobu.

Z týchto údajov zostavíme sústavu lineárnych rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3 , ktorú môžeme riešiť niektorou z uvedených metód (matica sústavy je regulárna).

$$20x_1 + 40x_2 + 30x_3 = 5500 \quad x_1 = 80$$

$$30x_1 + 50x_2 + 10x_3 = 5900 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 60$$

$$40x_1 + 30x_2 + 50x_3 = 7500 \quad x_3 = 50$$

Zistili sme, že z daného množstva surovín s_1, s_2, s_3 možno vyrobiť 80 kusov výrobku V_1 , 60 kusov výrobku V_2 a 50 kusov výrobku V_3 .

Úloha 3

Letecká spoločnosť poskytuje prepravu tromi druhmi lietadiel a prepravuje tri druhy nákladov. V tabuľke č. 1 je uvedené optimálne prepravné zaťaženie každého druhu lietadla. Predpokladáme, že v daný deň má spoločnosť prepraviť 1100 jednotiek (j.) pošty 1. triedy, 1930 osôb a 460 j. balíkov. Koľko lietadiel jednotlivých druhov na to potrebuje?

Prepravované jednotky	Druh lietadla		
	osobné	nákladné	veľkokapacitné
pošta 1. triedy	100	100	100
osoby	150	20	350
balíky	20	65	35

Tabuľka 1: Optimálne prepravné zaťaženie spoločnosti [3]

Označíme hľadané počty lietadiel: x – počet osobných lietadiel, y – počet nákladných lietadiel, z – počet veľkokapacitných lietadiel. Potom podmienky úlohy môžeme napísať v tvare sústavy troch lineárnych rovníc:

$$100x + 100y + 100z = 1100$$

$$150x + 20y + 350z = 1930 \quad \Rightarrow \quad [x, y, z] = [3, 4, 4]$$

$$20x + 65y + 35z = 460$$

Odpoveď: V daný deň potrebuje letecká spoločnosť na prepravu nákladov 3 osobné, 4 nákladné a 4 veľkokapacitné lietadlá.

Aplikačné úlohy – súčasť matematických predmetov

Z uvedených ukážok úloh a postupov riešenia vidíme, že v aplikácii sa spájajú pojmy a matematické metódy lineárnej algebry s praktickým kontextom ekonomických problémov. Slovné úlohy poskytujú priestor na konkrétne zadania z rôznych oblastí

ekonomickej praxe, pričom najprv musíme zadanie analyzovať, zostaviť matematický zápis úlohy a potom použiť príslušnú metódu riešenia. Študenti na prednáškach často žiadajú viac ukážok s aplikáciami, po ich uvedení zistia, že aplikácie sú „nadstavbou“ a chcú sa vrátiť k riešeniu úloh s matematickým zadaním.

Súčasnú vyučovaniu vysokoškolskej matematiky prechádza zmenami, ktoré súvisia aj s uplatňovaním informačných technológií vo vzdelávaní. Štúdium teoretického základu sa minimalizuje a do popredia vystupujú požiadavky na schopnosti študentov aplikovať teóriu a všeobecné metódy matematiky. Platí to aj na fakultách s ekonomickým zameraním, kde prichádza študovať čoraz viac absolventov obchodných akadémií, ktorí sú na strednej škole pripravovaní pre prax. Tento trend postupne prechádza do 1. stupňa vysokoškolského štúdia, kde študenti požadujú praktické návody a vyhýbajú sa štúdiu teoretického základu. To vyžaduje zmeny, aktualizáciu a inováciu v matematických predmetoch vo vzťahu k ich obsahu a používaniu vyučovacích metód, čo môžeme zhrnúť nasledovne:

1. obsah hlavných tém z matematiky aktualizovať a prispôbiť študijným odborom a programom podľa požiadaviek z odborných katedier a praxe,
2. vybrané témy vyučovať s využitím informačných technológií (napr. vysvetliť princíp matematickej metódy, realizáciu uskutočniť pomocou počítača),
3. matematický aparát priblížiť študentom prostredníctvom aplikačných úloh z rôznych oblastí ekonomickej praxe,
4. úlohami z praxe motivovať záujem študentov o matematiku,
5. inováciou systému a ponuky voliteľných predmetov rozšíriť možnosti štúdia niektorých matematických tém a ich aplikácií podrobnejšie,
6. riešením úloh rozvíjať schopnosti študentov tak, aby smerovali k samostatnej aktívnej činnosti v procese vzdelávania.

Lineárna algebra je zahrnutá na skúške v letnom semestri, preto sme sa rozhodli porovnať študijné výsledky a známky z letného semestra v akademickom roku 2011/2012. Vybrali sme z FEM tieto študijné programy: EKP – Ekonomia podniku, UCT – Účtovníctvo, DŠ – denné štúdium, EXT – externé štúdium. Údaje sú uvedené v tabuľke č. 2. Vo výpočte priemernej známky sme vynechali tých študentov, ktorí neuspeli na skúške. Z údajov v tabuľke vyplýva, že študenti dosiahli na skúške porovnateľné výsledky. Študenti programu Účtovníctvo dosahujú v rámci fakulty najlepšie študijné výsledky, čo platí aj pre známky z matematiky.

	A(1)	B(1,5)	C(2)	D(2,5)	E(3)	Počet študentov	Priemerná známka
EKP - DŠ	11	15	21	12	16	75	2,05
EKP - EXT	2	3	6	3	7	21	1,81
UCT - DŠ	14	7	6	10	2	39	1,73
UCT - EXT	2	1	4	2	3	12	2,13
Spolu	29	26	37	27	28	147	1,997

Tabuľka 2: Študijné výsledky vo vybraných študijných programoch FEM (2011/2012)

Záver/diskusia

V príspevku sme sa zaoberali vyučovaním tematického celku „Lineárna algebra“ na FEM SPU v Nitre, pričom sme sa sústredili na aplikačné úlohy so zameraním na ekonomickú oblasť. Bakalárske štúdium v ekonomických študijných programoch je zamerané na prepojenie teórie s praxou, čo sa prejavuje aj v matematike požiadavkami na

ukážky praktickej aplikácie matematických postupov a metód. Aplikáčne úlohy orientované na ekonómiu vyžadujú ovládanie matematiky a ich spojenie s odbornými poznatkami z ekonomickej oblasti. Aby ich študenti pochopili, musia rozumieť pojmom z oboch oblastí, čo zvyšuje nároky na obsah a metódy výučby matematiky.

V ukážkach aplikáčnych úloh sme sa sústredili na matematický aparát a metódy lineárnej algebry. Ak správne zvolíme náročnosť úlohy a zaradíme ju do obsahu prednášky alebo cvičenia, tak máme vytvorený prístup k inovácii obsahu a výučby matematiky.

Úspešnosť štúdia matematiky je podmienená aktívnou samostatnou prácou a štúdiom každého študenta. Ďalšou podmienkou sú kvalitné študijné zdroje v tlačenej alebo elektronickej verzii, ktoré budú obsahovať ukážky aplikáčnych úloh, aby študentom demonštrovali praktické použitie matematiky.

Literatúra

- [1] DRÁBEKOVÁ, J. 2011. Vizualizácia riešení vybraných ekonomických úloh pomocou softvéru GeoGebra. In Zborník príspevkov *Teoretická a edukačná transformácia matematického vzdelávania*. Nitra, SPU, 2011, s. 45-50. ISBN 978-80-552-0604-2
- [2] GREGÁŇOVÁ, R. 2006. Aplikované úlohy z matematiky na FEM SPU v Nitre. In: Zborník príspevkov z vedeckého seminára s medzinárodnou účasťou *Matematika a jej aplikácie v inžinierskom vzdelávaní 2006* (CD-nosič), Nitra, SPU, s. 61-64, 2006, Slovakia. ISBN 80-8069-708-6
- [3] HARSHBARGER, R. – REYNOLDS, J. 1989. *Mathematical Applications*. D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, 1989. 746 p. ISBN 63-551-86
- [4] ORSZÁGHOVÁ, D. 2006. Aplikácie matematiky v inžinierskom vzdelávaní. In: *Acta Mathematica 9 – zborník zo IV. nitrianskej matematickej konferencie*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2006, edícia Prírodovedec, 386 s. (s.165-170). ISBN 80-8094-036-3
- [5] ORSZÁGHOVÁ, D. a kol. 2004. *Aplikované úlohy z matematiky v ekonómii*. Nitra: Vydavateľstvo SPU v Nitre, 2004. ISBN 80-8069-333-1
- [6] ORSZÁGHOVÁ, D. a kol. 2010. *Matematika a jej aplikácie*. Nitra, SPU, 2010, s. 376, 1. upravené a doplnené vydanie. ISBN 978-80-552-0479-6
- [7] ORSZÁGHOVÁ, D. 2000. Niektoré aplikácie matematiky v ekonómii. In: *Zborník vedeckých prác z riešenia výskumných projektov (1997-1999)*. Nitra: SPU, 2000, s. 208 - 211. ISBN 80-7137-759-7

Článok prijatý dňa 22. apríla 2013.

Adresa autora

Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.

Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Trieda A. Hlinku 2, 949 76 Nitra; e-mail: dana.orszaghova@uniag.sk

PodĎakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 021SPU-4/2011: *Vyučovanie matematiky s aplikáciami - obsahové zmeny v univerzitnom matematickom vzdelávaní* (riešenie v rokoch 2011–2013).