FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC CONCEPTIONS ABOUT PYTHAGOREAN THEOREM

ROZVOJ GEOMETRICKÝCH PREDSTÁV O PYTAGOROVEJ VETE

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ[1] – LUCIA RUMANOVÁ – JÚLIA ZÁHORSKÁ

ABSTRACT. *In this paper we present activities and tasks which support increase of understanding of Pythagorean Theorem and its applications in solving mathematical problems. Some of the proofs we use for creation of geometric puzzles. We adapted the use of tasks in the square grid in the mathematical education at primary school. Our aim was to present various possibilities of implementation of graded tasks and activities which lead to discovering and understanding of Pythagorean Theorem.*

KEY WORDS: *geometric conceptions, Pythagorean Theorem, discovering activities*

ABSTRAKT. *V príspevku prezentujeme vybrané aktivity a úlohy podporujúce zvyšovanie porozumenia Pytagorovej vete ako aj jej aplikáciám pri riešení matematických úloh. Z niektorých existujúcich dôkazov Pytagorovej vety sme vytvorili geometrické skladačky a úlohy v štvorcovej sieti, ktoré sme prispôsobili ich využitiu v rámci vyučovania matematiky už na primárnom stupni vzdelávania. Naším cieľom bolo prezentovať rôzne možnosti zavádzania gradovaných úloh a aktivít vedúcich k objaveniu a pochopeniu Pytagorovej vety.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *geometrické predstavy, Pytagorova veta, objavné aktivity*

CLASSIFICATION: *G10, E50*

1 Úvod

Podľa ŠVP ISCED 2 sa v tematickom okruhu Geometria a meranie žiaci na 2. stupni základnej školy v Slovenskej republike zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Téma „*Pytagorova veta, jej odvodenie a použitie pri riešení praktických úloh*“ býva v školských vzdelávacích programoch zaradená do deviateho ročníka ZŠ. Žiaci po jej prebratí majú poznať a vymenovať základné prvky pravouhlého trojuholníka (odvesna, prepona, súčet dvoch ostrých uhlov je $90°$); vedieť, pre aký útvar platí Pytagorova veta; poznať a vedieť formuláciu Pytagorovej vety a jej význam. Zapíšu Pytagorovu vetu vzťahom $c^2 = a^2 + b^2$, ale aj vzťahom pri danom označení strán pravouhlého trojuholníka. Samostatne vyjadrujú a zapisujú zo základného vzťahu Pytagorovej vety obsah štvorca nad odvesnou a ($a^2 = c^2 - b^2$) a nad odvesnou b ($b^2 = c^2 - a^2$), vyjadrujú vzťah pre výpočet odvesien a, b ($a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$) alebo ich druhých mocnín. Vypočítajú dĺžku tretej strany pravouhlého trojuholníka, ak sú známe dĺžky jeho dvoch zvyšných strán a samostatne používajú Pytagorovu vetu na riešenie kontextových úloh z reálneho praktického života.

Propedeutikou Pytagorovej vety môže byť už v nižších ročníkoch ZŠ výpočet obsahu rovinných útvarov v štvorcovej sieti, výpočet obsahov obrazcov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov, a tiež analýza takto vytvorených útvarov. V školskej praxi učitelia často využívajú *geometrické dôkazy* platnosti Pytagorovej vety a motivačne uvádzajú historické

[1] Corresponding author

poznámky. Na túto oblasť sa zameriame aj my v našom príspevku. Uvádzame už známe obrazce a postupy, ktoré sme sa snažili ucelene spracovať a poukázať na ich využitie v školskom vzdelávaní.

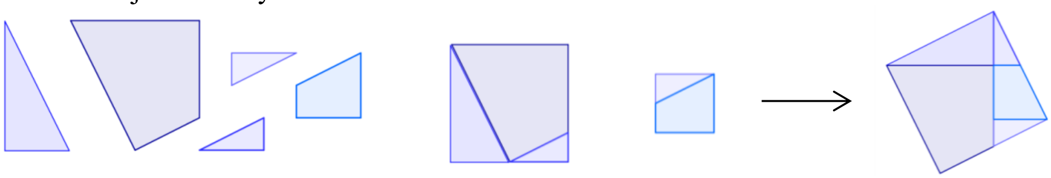
2 Objavujeme vzťahy v Pytagorovej vete

S aktivitami, ktoré neskôr môžeme využiť pri objavovaní a zavádzaní Pytagorovej vety, je vhodné začať už na primárnom stupni vzdelávania. V rámci aktivít s geometrickými skladačkami alebo v štvorcovej sieti môžu žiaci objaviť dôležité vlastnosti a vzťahy. Tie neskôr vedú k hlbšiemu porozumeniu Pytagorovej vete, i keď pri ich realizácii ju ešte nepoznajú. Ďalej uvádzame niektoré takéto aktivity bez použitia Pytagorovej vety, ako aj aplikačné úlohy, v riešeniach ktorých Pytagorovu vetu využívame.

2.1 Manipulačné aktivity s papierom

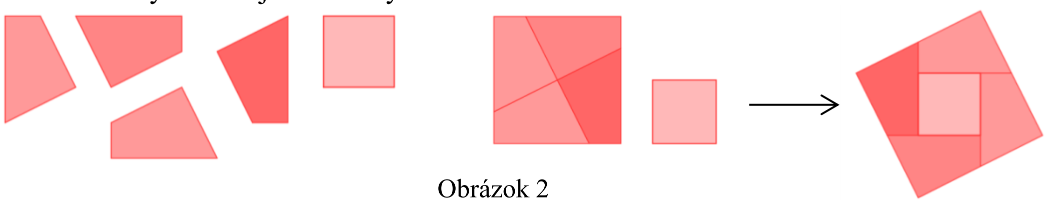
Strihanie a skladanie vhodne vytvorených geometrických obrazcov a skladačiek môže viesť k poznaniu, že ak vieme zložiť z dvoch menších štvorcov jeden veľký štvorec, tak jeho obsah je súčtom obsahov týchto dvoch štvorcov.

A. Z daných častí skladačky zložte najskôr dva menšie štvorce a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



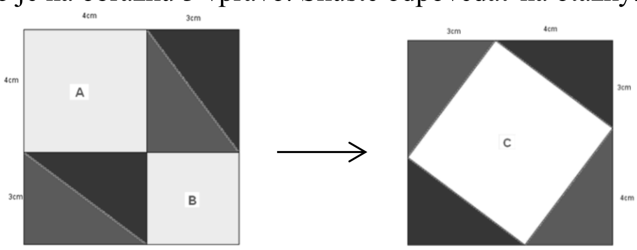
Obrázok 1

B. Z daných častí skladačky zložte k malému štvorcu jeden väčší štvorec a potom zo všetkých častí jeden veľký štvorec.



Obrázok 2

C. Štvorec na obrázku 3 vľavo rozstrihajte na jednotlivé časti, pričom dĺžka jeho strany je rozdelená na 3cm a 4cm. Potom zo štyroch trojuholníkov ohraničte ďalší štvorec, tak ako je na obrázku 3 vpravo. Skúste odpovedať na otázky.



Obrázok 3

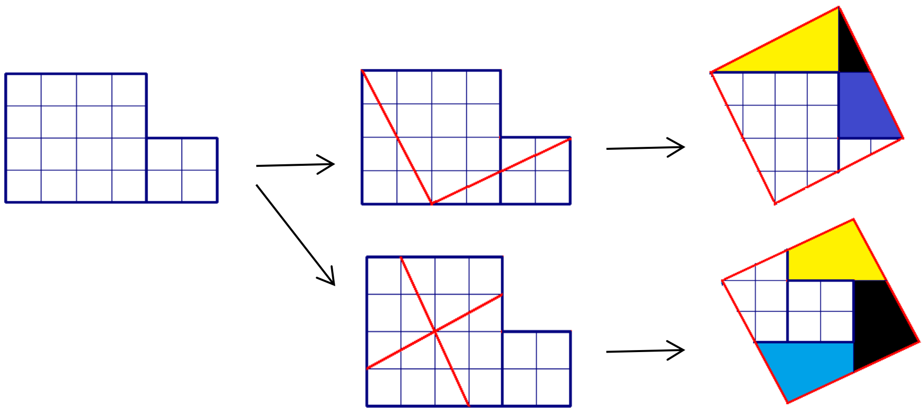
1. Aký je obsah štvorca C, ktorý vznikol?
2. Prečo je dĺžka prepony trojuholníkov 5cm?

D. Nastrihajte si štvorce s rôznymi dĺžkami strán, napríklad od 1cm po 15cm. Zisťujte, ktorými trojicami štvorcov vieme ohraničiť pravouhlý trojuholník (štvorce k sebe prikladajte tak, aby sa dotýkali vrcholmi a ich strany vytvorili pravouhlý trojuholník). Zisťujte dĺžky ich strán, určte ich obsahy a hľadajte vzťah medzi trojicami čísel určujúcich obsahy štvorcov. Nájdete tak trojice čísel: 3,4,5; 6,8,10; 5,12,13; 9,12,15 a ich obsahy tvoria tzv. „*sčítacie rodinky*“.

2.2 Aktivity v štvorcovej sieti

Aktivita 1

Vyššie uvedené aktivity A, B môžeme zadať aj ako úlohy v štvorcovej sieti: rozdeľte daný obrázok dvomi čiarami tak, aby sme zo vzniknutých častí mohli zložiť jeden štvorec.

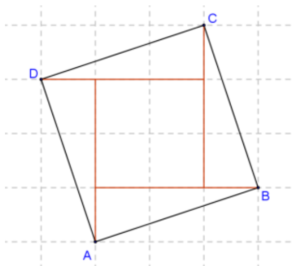


Obrázok 4

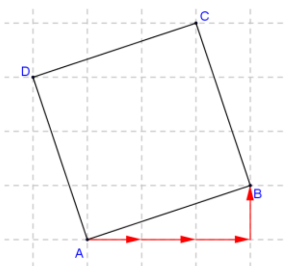
Aktivita 2

V nasledujúcej aktivite na objavenie Pytagorovej vety využijeme ako didaktické prostredie tiež štvorcovú sieť.

Nakreslite ľubovoľný štvorec *ABCD* do štvorcovej siete (obrázku 5) a zistite jeho obsah rozdelením na štyri pravouhlé trojuholníky a štvorec.



Obrázok 5



Obrázok 6: *A*→→→↑ *B*

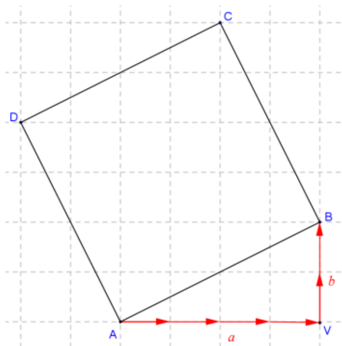
Do aktivity zavedieme šípkový zápis vyjadrujúci pohyb po štvorcovej sieti z bodu *A* do bodu *B* pre zvolený štvorec *ABCD*, napríklad pre štvorec na obrázku 6 je šípkový zápis *A*→→→↑ *B*.

Potom zakresľujte rôzne štvorce do štvorcovej siete, počítajte ich obsahy a výsledky zapisujte do tabuľky. Najskôr si zvoľte strany štvorcov tak, že budete zvyšovať šípky doprava → a šípka hore ↑ bude len jedna. Zisťujte obsahy týchto štvorcov, ktorých stranu ste určili šípkovým zápisom. Postupne zvyšujte šípky doprava → a šípky hore ↑ sú teraz dve, atď. Pokúste sa vyjadriť vzťah medzi obsahom vzniknutého štvorca a počtom šípok doprava a nahor. Nakoniec získate takto vyplnenú tabuľku (tabuľka 1).

→	↑	Obsah štvorca
a	1	a^2+1
a	2	a^2+4
a	3	a^2+9
a	4	a^2+16
a	5	a^2+25
a	b	a^2+b^2

Tabuľka 1: Obsah štvorcov pre *A*→...↑... *B*

Z tabuľky zistíte, že ak máme úsečku *AB* so šípkovým zápisom *A*→...↑... *B*, t. j. zápis obsahuje a šípok doprava a b šípok hore, potom obsah štvorca je a^2+b^2. Všimnite si, že a šípok tvorí jednu odvesnu a b šípok tvorí druhú odvesnu pravouhlého trojuholníka, pričom súčet a^2+b^2 je obsahom štvorca zostrojeného nad preponou tohto pravouhlého trojuholníka.(viac v Pavlovičová G. a kol., 2012, s.39-45).



Obrázok 7

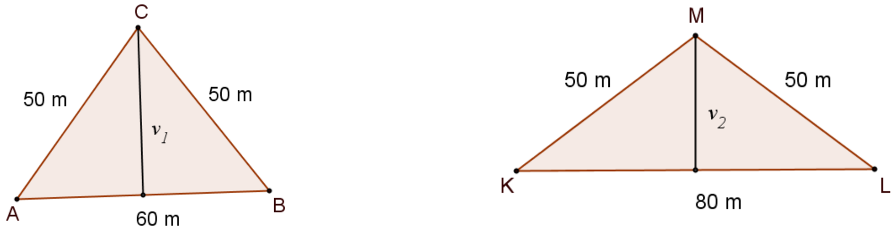
3 Aplikácia Pytagorovej vety v úlohách

Uvádzame ukážky dvoch aplikačných úloh vhodných pre školskú prax. Prvá je ukážka využitia nadobudnutých vedomostí o trojuholníku, jeho vlastnostiach a aplikácie Pytagorovej vety v jej riešení. Druhá úloha poukazuje na možnosti použitia Pytagorovej vety v riešení problému o kružniciach. Využívame tu všeobecné znenie Pytagorovej vety (platí pre všetky navzájom podobné útvary, ktoré sú zostrojené nad stranami trojuholníka).

Úloha 1

Dvaja majitelia pozemkov sa nemohli zhodnúť na tom, kto má väčší pozemok. Oba pozemky mali tvar trojuholníkov. Rozmery prvého pozemku boli $50\,m, 50m, 80m$*; druhý pozemok mal rozmery* $50\,m, 50m, 60m$*. Prvý majiteľ tvrdil, že jeho pozemok má dlhšiu základňu, preto má aj väčšiu výmeru. Druhý bol presvedčený, že na dĺžke základne nezáleží a výmera je rovnaká. Kto z nich mal pravdu?* (Šedivý a kol., 2008)

Riešenie úlohy pozostáva z niekoľkých krokov: 1) V rozbore úlohy načrtneme oba pozemky a konštatujeme, že ide o rovnoramenné trojuholníky s rovnakou dĺžkou ramien, ale rôznou dĺžkou základní.



Obrázok 8

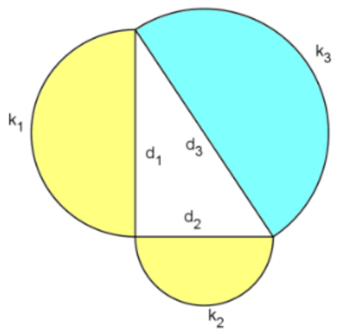
2) Zopakujeme si vlastnosti rovnoramenného trojuholníka a doplníme náčrty o výšky na základne, ktoré rozdelia oba trojuholníky na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. 3) S použitím Pytagorovej vety vypočítame dĺžky znázornených výšok. 4) Po zistení, že znázornené pravouhlé trojuholníky majú zhodné dĺžky strán prijmeme záver, že podľa vety sss sú zhodné.

Pre žiakov je náročné sformulovať záver v znení *„zhodné útvary majú zhodný obsah"*, častejšie dokončia riešenie úlohy výpočtom obsahov obidvoch trojuholníkov „pre istotu". V závere riešenia uvedieme správne sformulovanú slovnú odpoveď.

Úloha 2

Dané sú dve kružnice k_1 (S_1, r_1) a k_2(S_2, r_2). Zostrojte kružnicu k_3, ktorej obsah je súčtom obsahov kružníc k_1 a k_2.

Z rôznych možných riešení úlohy uvádzame aplikáciu Pytagorovej vety. Vzťah medzi obsahmi daných kružníc a hľadanej kružnice je $S_3 = S_1 + S_2$. Po dosadení do vzorca pre výpočet obsahu kruhu dostaneme vzťah pre polomery kružníc: $r_3^2 = r_1^2 + r_2^2$. Dĺžku polomeru hľadanej kružnice teda vieme zostrojiť ako preponu pravouhlého trojuholníka, ak využijeme nasledovné všeobecné znenie Pytagorovej vety: *Súčet obsahov dvoch podobných útvarov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu útvaru s nimi podobného zostrojeného nad preponou tohto trojuholníka.*[2] Na obrázku 8 prezentujeme tento vzťah analogicky medzi polkruhmi, kde strany trojuholníka tvoria priemery týchto polkruhov.



Obrázok 9

[2] Pôvodné znenie tejto vety uvedené v knihe Euklides: Základy, kniha VI, veta 31; nájdeme aj v knihe Fulier, J. a kol., 2011, s.197.

Záver

Pytagorova veta určite patrí medzi najčastejšie používanú vetu v školskej praxi a je pravdepodobne aj najslávnejšou matematickou vetou vôbec. Je to zároveň veta s najväčším počtom dôkazov, v dostupných zdrojoch sa ich uvádza až okolo 300. Táto geometrická veta je použiteľná aj v praktickom živote. Popísané aktivity v príspevku sú riešiteľné aj pre slabších žiakov, čo môže byť pre nich zároveň silne motivujúce. Motiváciou pre žiakov môžu byť aj konkrétne ukážky využitia všeobecného znenia Pytagorovej vety, prípadne aj historický pohľad na túto vetu.

Literatúra

[1] Fulier, J. a kol. (2011). Nové aspekty reformy matematického vzdelávania. Nitra: FPV UKF, 2011. 241 s. ISBN 978-80-558-0013-4

[2] Jirotková, D.- Kloboučková, J. (2011). Pythagorova věta tvořivě. In: Tvořivosť v počátečním vyučování matematiky. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011, s. 100-104. ISBN 978-80-7043-992-0

[3] Pavlovičová, G. a kol. (2012). Experimentujeme v elementárnej matematike. Nitra: FPV UKF, 2012. 123 s. ISBN 978-80-558-0126-1

[4] Pavlovičová, G.- Rumanová, L.- Vidermanová, K. (2010). Zábavné úlohy z geometrie. Nitra : FPV UKF, 2010. 90 s. ISBN 978-80-8094-789-7

[5] Šedivý, O. a kol. (2008). Zbierka zaujímavých, zábavných a aplikačných úloh z matematiky. Nitra: FPV UKF, 2008. 140 s. ISBN 978-80-8094-421-6.

[6] Štátny vzdelávací program, Matematika - príloha ISCED 2. Bratislava, 2011. Dostupné: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autorov

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa, Tr. A. Hlinku 1, SK –94974 Nitra;
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk, lrumanova@ukf.sk, jzahorska@ukf.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 007UKF-4/2011 Zvyšovanie kľúčových kompetencií v oblasti matematického a prírodovedného myslenia na primárnom stupni vzdelávania.