



ACTIVE LEARNING OF GEOMETRY THROUGH TOPOGRAPHICAL TASKS

AKTÍVNE UČENIE SA GEOMETRIE PROSTREDNÍCTVOM TOPOGRAFICKÝCH PRÁČ

DUŠAN VALLO¹ – KITTI VIDERMANOVÁ

ABSTRACT. *Topographical tasks had their place in the curriculum 20 years ago. Today the time and technical reasons caused that their teaching has disappeared. We think that it is necessary to show to pupils what kind of applications of geometry may they meet in real life and prepare them to solve these problems. So we decided present to our students – future teachers of mathematics the basics of topographical tasks during a workshop. This paper deals with this workshop, the tasks given to students and their solutions.*

KEY WORDS: *active learning, topographical tasks, measurement in landscape, applications of geometry.*

ABSTRAKT. *Topografické práce mali v minulosti svoje miesto v školskom učive. Dnes sa z časových i technických dôvodov z vyučovania vytratili. Myslíme si, že je potrebné ukázať žiakom, s akými rôznymi aplikáciami geometrie sa môžu v reálnom živote stretnúť a pripraviť ich na riešenie týchto problémov. Preto sme sa rozhodli našim študentom – budúcim učiteľom matematiky predstaviť formou workshopu základy topografických prác. V príspevku popisujeme jeho priebeh – študentom zadané úlohy a ich riešenia.*

KLÚČOVÉ SLOVÁ: *aktívne vyučovanie, topografické práce, meranie v teréne, aplikácie geometrie.*

CLASSIFICATION: B55, G95

Úvod

Mnohí výskumníci (Kagan, 1992; Lortie, 1975; Thompson, 1984; Huibregtse, Korthagen & Wubbels, 1994) tvrdia, že spôsob, akým boli učení študenti – budúci učitelia v škole v rámci nejakého predmetu, má silný vplyv na ich predstavy o tomto predmete, jeho učení sa a aj ako ho vyučovať. Stofflett and Stoddart (1994) ukázali, že študenti, ktorí sami zažili aktívne učenie sa, viac inklinujú plánovať hodiny takým spôsobom, ktorý umožňuje aktívne nadobúdanie vedomostí. Títo autori zdôrazňujú náročnú úlohu v rámci prípravy budúcich učiteľov - zastaviť kruh „učenie – učenie sa – učenie“ (ako nás niekto učil, tak budeme učiť aj my). Keď sa v sedemdesiatych a osemdesiatych rokoch rozvíjalo *realistické vyučovanie* v Holandsku (z orig. *realistic education*), táto úloha mala najvyššiu prioritu v programe prípravy učiteľov matematiky pre druhý stupeň základných škôl v Utrechte.

Realistické vyučovanie matematiky (z orig. *realistic mathematics education*) nevychádza z abstraktných princípov a pravidiel s cieľom naučiť sa aplikovať ich v konkrétnych situáciách. Zamiera sa na to, aby žiaci matematické vedomosti získali riešením problémov s reálnym kontextom (z reálneho sveta). Nájdením riešenia zadanej úlohy práca žiakov nekončí. Učitelia pomáhajú deťom rozvíjať ich neformálne stratégie do

¹ Corresponding author

viac formálnych prístupov, ktoré potom môžu použiť v iných situáciách (Treffers, 1987).[in: Wubbels, Korthagen & Broekman 1997]

Jednou možnosťou, ako dosiahnuť aktívne nadobúdanie vedomostí z oblasti geometrie je napríklad opätovné zaradenie topografických prác do vyučovania matematiky na základných aj stredných školách. Poznnamenávame, že podľa osobných skúseností prvého autora tohto príspevku s výučbou matematiky na základnej škole, ide o učivo, ktoré sa z technických i časových dôvodov takmer vôbec nevyučuje.

V našom príspevku popisujeme workshop, v rámci ktorého sme našich študentov, budúcich učiteľov matematiky, oboznámili so základmi topografických prác. Najskôr si však predstavme topografické práce v školskej matematike. Analyzovali sme ich výskyt v učive v minulosti i dnes.

Topografické práce v minulosti a dnes

Topografické práce sú také úlohy a problémy, ktoré vychádzajú z reálnych potrieb a vyžadujú meranie vzdialeností, vytyčovanie plôch v teréne.

Učebné osnovy z roku 1973 uvádzali v rámci vyučovania matematiky nasledovné témy:

6. ročník: Vytyčovanie priamky a úsečky v teréne – odhad a meranie vzdialeností. Vytyčovanie pravého uhla. Vytyčovanie štvorca, obdĺžnika, áru, prípadne hektára.

7. ročník: Meranie a vytyčovanie uhlov v horizontálnej rovine a trojuholníka v teréne. Prenášanie uhlov – zmeranie neprístupnej vzdialenosti – stanovenie výmery (obsahu) pozemka tvaru štvoruholníka podľa merania v teréne.

9. ročník: Meračí stolík, zastaničenie, rajónovanie. Jednoduché prípady pretínania vpred.

V učebných osnovách z roku 1997 boli topografické práce zaradené ako rozširujúce učivo. V učebniciach matematiky pre základné školy autorov O. Šedivý a kol. nachádzame témy a k nim odporúčené úlohy:

6. ročník: Meranie vzdialeností. Vytyčovanie úsečiek v teréne. Vytýčenie pravého uhla (s pomocou zámerného kríža).

7. ročník: Vytýčenie pravého uhla bez použitia zámerného kríža. Vytýčenie rovinného obrazca v teréne. Použitie stredovej súmernosti pri meraní vzdialeností.

8. ročník: Meranie vzdialeností (cez prekážky).

9. ročník: Meranie výšok v teréne.

Od roku 2008 platí pre vzdelávanie Štátny vzdelávací program. V jeho prílohe ISCED 2 pre 2. stupeň základných škôl sú zaradené topografické práce do tematického celku Podobnosť trojuholníkov, konkrétne riešenie jednoduchých praktických topografických úloh s využitím vlastnosti podobnosti trojuholníkov. Príloha ISCED 3 pre gymnáziá obsahuje odporúčanie, aby sa využívali aj iné formy vyučovania, ako príklad sú uvedené terénne práce pre meranie. Pri preštudovaní nových učebníc matematiky pre základné a stredné školy (Žabka a kol., Kubáček a kol.) sme nenašli žiadne námety na topografické ani terénne práce.

Výhody zaradenia topografických prác do vyučovania matematiky:

- majú vysoký motivačný faktor – reálne využitie v praxi;
- žiaci si overujú rôzne definície a vzťahy naučené v rámci teórie;
- podpora tvorivej činnosti žiakov;

- vedenie ku kolektívnej práci – deľba práce a dobrá spolupráca členov pracovného kolektívu môže viesť k úspešnému splneniu úlohy;
- učiteľ spozná povahu žiakov a ich pracovnú morálku v kolektíve;
- učiteľ vedie žiakov k šetreniu majetku a jeho ošetrovanie – čistenie pásma, ukladanie pomôcok do škatule, atď.

Priebeh workshopu

Workshop sme zrealizovali v akademickom roku 2011/12 na trávinatej ploche vedľa hlavnej budovy UKF v Nitre. Stretnutia sa zúčastnili študenti 3. ročníka bakalárskeho štúdia učiteľstva matematiky, v celkovom počte 18 študentov.

Úvodom sme študentov nechali riešiť elementárne úlohy zamerané na merania a konštrukcie:

- odmerať úsečky dĺžok 12 m, 3 m, 5 m a vyznačiť ich pomocou špagátu,
- predĺžiť danú úsečku vyznačenú špagátom na stanovenú dĺžku,
- na danej úsečke vymedzenej špagátom určiť stred,
- zostrojiť z daného bodu mimo úsečky kolmicu a určiť pätu kolmice,
- zamerať pravý uhol pomocou zámerného kríža (obr. 1),
- zamerať pravý uhol pomocou pytagorejského trojuholníka so stranami dĺžok 3 m, 4 m a 5 m,
- odmerať vzdialenosť medzi dvoma vybranými stanovišťami (bodmi), ak sa medzi nimi nachádza prekážka (prekážkou bolo polyfunkčné ihrisko, obr. 2).



Obrázok 1: Zameranie pravého uhla pomocou zámerného kríža



Obrázok 2: Meranie vzdialenosti medzi dvoma stanovišťami cez prekážku

Po takýchto štandardných topografických meraniach, ktoré poslúžili ako „rozcvička“, sme zadali študentom niekoľko náročnejších konštrukčných úloh. Podotýkame, že študenti sa sami rozdelili do troch skupín a v jednotlivých skupinách riešili zadané problémy.

Úloha 1. Vymerajte na zemi rovnoramenný lichobežník so základňami 10 m a 6 m, ktorého rameno bude 5 m.

Riešenie. Študenti odmerali úsečku 10 m dlhú, určili na nej dva body, vzdialené od krajných bodov po 2 m. V týchto bodoch zostrojili pomocou zámerného kríža kolmicu (obr. 3). Pytagorovou vetou vypočítali výšku lichobežníka s hodnotou 4,6 m, namerali túto výšku na obe kolmice a vyznačili hranicu lichobežníka pripraveným fóliovým pásmom ako naznačuje fotografia na obr. 4.



Obr. 3



Obr. 4

Na našu výzvu vykonali skúšku – odmerali dĺžku kratšej základne a zistili hodnotu rovnú 6 m – jasná kontrola správnosti výpočtu výšky a samotného technického prevedenia konštrukcie. Na koniec sme ich ešte požiadali, aby vypočítali aj obvod lichobežníka. Pri pohľade na vyznačenú „malú“ plochu zostali mierne prekvapení, keď zistili, že obvod je až 26 m.

Úloha 2. Vymerajte na ploche pravidelný šesťuholník s dĺžkou strany 3 m.

Riešenie. Riešenie, ktoré nám prezentovali študenti, nás výrazne prekvapilo. Pomocou špagátu si vytvorili „šablónu“ jedného rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 3 m (obr. 5). Dvaja študenti uchopili tento špagát tak, že ho napli vo vrcholoch (obr. 6) a postupne otáčali o uhol veľkosti 60° do jedného smeru okolo potencionálneho streda šesťuholníka.



Obr. 5



Obr. 6

Značkovacími kolíkmi určovali pozície jednotlivých vrcholov šesťuholníka. Hranicu útvaru nakoniec vyznačili fóliou (obr. 7).



Obr. 7

Aj v tomto prípade sme ich požiadali o kontrolu – presne odmerať uhlopriečky zameraného šesťuholníka. Trvali sme na tom, aby merali uhlopriečky v opačnom poradí, než konštrukčne vznikali. Pri uhlopriečke, ktorú zostrojili ako poslednú namerali dĺžku 6,12 m, pri druhej bola dĺžka 6,04 m a tretia uhlopriečka mala presnú dĺžku 6 m.

Vysvetlenie bolo zrejmé hneď po meraní. Otáčali základný trojuholník vždy len v jednom smere a chyba narastala. Študenti rýchlo prišli s nápadom, že ak by otáčali základný trojuholník do oboch smerov, chyba by sa minimalizovala.

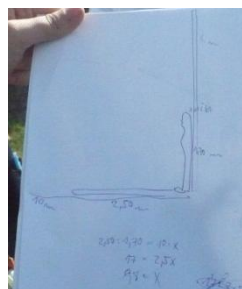
Predpokladáme, že ich postup s jedným základným trojuholníkom ako šablónou bol inšpirovaný vetyčovaním pravého uhla pomocou pytagorejského trojuholníka, t.j úlohou riešenou v úvode hodiny.

Úloha 3. Zistíte výšku stožiaru elektrického osvetlenia pri polyfunkčnom ihrisku.

Riešenie. Študentom sme dali návod v podobe nápovedy o dĺžke tieňa 1 m pravítka. Realizácia ich riešenia bola však nad očakávania unikátna. K stožiaru sa postavila jedna študentka, ktorá s presnosťou na cm udala svoju výšku, postavila sa k stožiaru a spolužiaci odmerali jej tieň.

Pomocou jednoduchého výpočtu vyplývajúceho z podobnosti trojuholníkov učili výšku stožiaru na 7 m.

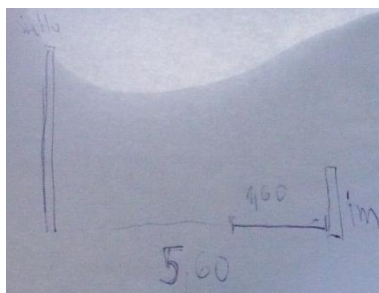
Pre kontrolu sme im predviedli určenie výšky stožiaru pomocou zrkadla, olovnice a 1 m pravítka. Správnosť výpočtu sa potvrdila.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Úloha 4. Vymerajte na ploche obdĺžnik 15 m x 8 m. Vyznačte na ploche štvorec rovnakého obsahu.

Riešenie. Pomocou meracieho pásma študenti odmerali úsek dlhý 15 m, podľa pytagorejského trojuholníka (obr. 11) určili v krajných bodoch úsečky kolmice, vyznačili špagátom a na nich odmerali 8 m dlhé úsečky.



Obr. 11

Kvôli kontrole sme ich požiadali, aby:

- a) odmerali stranu rovnobežnú s 15 m dlhým úsekom,
- b) Pytagorovou vetou vypočítali dĺžku uhlopriečky a obe uhlopriečky aj odmerali.

Meraním rovnobežnej strany zistili, že je dĺžka je 15,75 m a teda nejde o obdĺžnik. Tým sme ich upozornili, že použitie pytagorejského trojuholníka s obvodom 12 m môže pri dlhších úsečkách meraných na „kolmici“ viesť ku nepresnostiam.

Pomocou Pytagorovej vety zistili, že uhlopriečka má dĺžku 17 m, premeraním oboch rozmerov a ich následnou úpravou určili plochu požadovaných rozmerov.

Následná premena na rovnoploché štvorec bola realizovaná pomocou Euklidovej vety o výške. Po teoretickej stránke študenti problém zvládli hravo, dokonca s najväčším záujmom sa stretla konštrukcia Tálesovej polkružnice - jeden študent držal meracie pásmo na dĺžke 11,5 m a druhý študent držal koniec pásma a „kráčal po polkružnici“ (obr. 12).



Obr. 12

Po určení vrcholov štvorca študenti oba útvary vyznačili vymedzovacou fóliou (obr. 13). Študentov prekvapilo, že hoci majú oba útvary rovnakú plochu, obdĺžnik pôsobí opticky ako väčší pozemok.



Obr. 13

Záver

Topografické práce a merania priamo v teréne ponúkajú študentom, resp. žiakom priamu spätnú väzbu o geometrickom učive, jeho podstate a význame. Z pozorovaných situácií sme zistili, že tvorivosť a logické riešenie problémov je zo strany študentov podporené hravosťou, motiváciou a snahou problém vyriešiť. Úlohy, ktoré sme im zadávali vychádzali z reálneho života, ako napr. určenie plochy altánku, záhrady, oplotenie pozemku, určenie výšky budovy, atď.

Záujem, s akým sa stretol priebeh workshopu, bol aj pre nás, vyučujúcich, značne prekvapivý. Študenti, ktorí sa workshopu zúčastnili, sa podľa ich slov počas predchádzajúceho štúdia nikdy predtým nestretli s topografickými prácami, ale po jeho ukončení povedali, že ak raz učiť budú, určite ich zaradia. Veď škola má pripraviť žiakov najmä na riešenie problémov vychádzajúcich z reálneho života.

Na záver by sme ešte podotkli, že po workshope sa názory a reakcie študentov na jeho priebeh objavili aj na sociálnej sieti. Študenti uploadovali svoje fotky z workshopu a pochvalovali si výborné hodiny. Jedna študentka nám napísala: „Úlohy boli zaujímavé,

aktivizovali študentov, vytvorili priestor pre praktické a tvorivé myslenie, pozitívna atmosféra, utuženie kolektívu. Zvýraznenie praktickej stránky matematiky. Dúfam, že sa mi jedného dňa podarí pripraviť takúto hodinu a uskutočniť ju s mojimi budúcimi žiakmi.“

Literatúra

- [1] Bendl, J. – Mašín, Z. (1973) Metodický návod k použitiu topografickej soupravy. Praha: Komenius N. P., 1973. 28 s.
- [2] Kohanová, I. – Slavíčková, M. (2009) Development of Pedagogical Content Knowledge in Preparation of Future Mathematics' Teachers. In: Cernák, I. et al (ed.) IMEM 2009, proceedings of the international congress on interdisciplinary relationships in the theory and practise of informatics, management, economics and mathematics, Spišská Kapitula, Slovakia, September 9-11, 2009. Ružomberok: Catholic University in Ružomberok, 2009. ISBN 978-80-8084-471-4/pbk. P. 572-581.
- [3] Laššáková, V. – Vankúš, P. (2011) Výchovný aspekt kontextových matematických úloh. In: Šedivý, O. a kol. (ed.) Zborník vedeckých príspevkov z IX. nitrianskej matematickej konferencie. Nitra: UKF v Nitre, 2011: ISBN 978-80-8094-958-7. S. 131-135
- [4] Majovská, R. – Fridrich, V. (2009) Zprístupnení ICT ve výuce matematiky. In: Žilková, K. (ed.) Potenciál prostredia IKT v školskej matematike I. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2009. ISBN 978-80-223-2754-1. S. 29-43.
- [5] Šedivý, O. a kol. (1999) Matematika pre 6. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 1999. 144 s. ISBN 80-08-02678-2
- [6] Šedivý, O. a kol. (2000) Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 2000. 160 s. ISBN 80-08-02680-4
- [7] Šedivý, O. a kol. (2001) Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť. Prvé vydanie. Bratislava: SPN, 2001. 160 s. ISBN 80-08-03032-1
- [8] Šedivý, O. a kol. (2004) Matematika pre 9. ročník základných škôl, 2. časť. Druhé vydanie. Bratislava: SPN, 2004. 144 s. ISBN 80-10-00397-2
- [9] Štátny vzdelávací program MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 2 (2010) [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/2stzs/isced2/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced2.pdf
- [10] Štátny vzdelávací program MATEMATIKA (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami), Príloha ISCED 3A. [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www.Statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/vzdelavacie_oblasti/matematika_isced3a.pdf
- [11] Učebné osnovy Matematika pre 5. až 9. ročník základnej školy. (1997) [Citované 10. 4. 2013] Dostupné na http://www2.statpedu.sk/buxus/docs/Pedagogicke_dokumenty/zakladne_skoly/osnovy/UO_matematika_5-9_ZS.pdf
- [12] Wubbels, T. – Korthagen, F. – Broekman, H. (1997) Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. In: Educational Studies in Mathematics, vol. 32/1997, Issue 1, ISSN 1573-0816 (online). P. 1 – 8.

Článok prijatý dňa 28. apríla 2013.

Adresa autorov

RNDr. Dušan Vallo, PhD.

Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: dvallo@ukf.sk

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.

Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: kvidermanova@ukf.sk

PodĎakovanie

Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia projektu KEGA 038UKF-4/2011: Geometria telies v príprave budúcich učiteľov matematiky s dôrazom na aktivizujúci prvok manipulačnej činnosti a aplikačných úloh.