FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

HOW TO MISUSE L'HÔPITAL'S RULE 2

AKO NA L'HOSPITALA 2

MICHAL ZÁKOPČAN

ABSTRACT. *The article refers to works [1], [2], in which there are created such limits of types „0/0“ or „∞/∞“, which are not solvable by L'Hôpital's rule, as a motivation for students of Mathematical analysis to learn elementary techniques. The article is an extension and an adding of the works [1], [2].*

KEY WORDS: *L'Hôpital's rule, limit of a function, differential equation*

ABSTRAKT. *Článok vychádza z prác [1], [2], ktoré sa zaoberali vytváraním takých limít typu „0/0“ alebo „∞/∞“, ktoré nie sú riešiteľné l'Hospitalovým pravidlom, čím sa poskytuje motivácia pre študentov matematickej analýzy učiť sa elementárne postupy. Článok tieto práce ďalej dopĺňa a rozširuje.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: *l'Hospitalovo pravidlo, limita funkcie, diferenciálna rovnica*

CLASSIFICATION: *D55*

Úvod

Tento článok priamo nadväzuje na práce [1] a [2], dopĺňa ich a ďalej rozširuje. V oboch týchto prácach sa hľadajú príklady limít, vo výpočte ktorých je použitie l'Hospitalovho pravidla skôr na škodu, hoci je možné a oprávnené použiť ho. Ide o príklady limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, ktoré sú zväčša jednoducho riešiteľné za pomoci elementárnych úprav. Tým sa chce študentom matematickej analýzy zdôvodniť potreba ovládania výpočtu limít elementárnymi postupmi.

Práca [2] tiež obsahuje príklady limít, v ktorých je možné a vhodné použiť l'Hospitalovo pravidlo v prvom kroku, no v nasledujúcich krokoch je opäť potrebné vrátiť sa k elementárnym úpravám, pretože ďalším použitím l'Hospitalovho pravidla sa dostávame k zacykleniu. Tento článok ponúka rozšírenie aj v tomto smere.

Ako oklamať l'Hospitala druhýkrát

V prvej časti práce sa vráťme k článku [1]. Autor v ňom na nájdenie vhodných limít $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ vychádza zo vzťahu:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{g(x)}{f(x)},$$

z ktorého sa dá odvodiť diferenciálna rovnica:

$$f(x)f'(x)\,dx=g(x)g'(x)\,dx.$$

Potom pre ľubovoľnú funkciu f spĺňajúcu predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo volí funkciu g tak, aby platilo:

$$g(x) = \pm\sqrt{f^2(x) + c},$$

kde c je vhodná reálna konštanta. Ďalej stačí pracovať s $g(x) = \sqrt{f^2(x) + c}$.

Ako ďalej ukážeme, funkciu g môžeme hľadať aj v nasledujúcom všeobecnejšom tvare:

$$g(x) = \sqrt[n]{f^n(x) + c}, \tag{1}$$

kde $n \geq 2$ je ľubovoľné prirodzené číslo. Skutočne potom dvakrát aplikujúc l'Hospitalovo pravidlo dostávame:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\frac{1}{n}[f^n(x) + c]^{((1-n)/n)}nf^{n-1}(x)f'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{g^{n-1}(x)}{f^{n-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{(n-1)}{n}nf^{n-1}(x)f'(x)}{(n-1)g(x)f^{n-2}(x)f'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pozrime sa, ako to vyzerá v konkrétnej úlohe. Nech napr. $f(x) = e^x$, $c = 10$, $n = 4$ a $x \to \infty$. Riešme nasledujúcu úlohu najprv pomocou l'Hospitalovho pravidla:

Úloha 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x} + 10}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{[e^{4x} + 10]^{-3/4}e^{4x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{[e^{4x} + 10]^{3/4}}{e^{3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{[e^{4x} + 10]^{-1/4}e^{4x}}{e^{3x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x} + 10}}$$

a teraz jednoduchými úpravami, napríklad takto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sqrt[4]{e^{4x} + 10}} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^{4x}}{e^{4x} + 10}\right]^{1/4} = \lim_{x\to\infty}\left[1 - \frac{10}{e^{4x} + 10}\right]^{1/4} = 1.$$

Prirodzene miesto voľby funkcie g v tvare (1) by sme mohli voliť nasledujúcim spôsobom:

$$g(x) = [f^p(x) + c]^{1/p},$$

kde $p > 1$ je ľubovoľné reálne číslo. Nič sa tým na našich predchádzajúcich úvahách nemení a vyššie uvedené odvodenie platí aj v tomto prípade.

Ďalšie zovšeobecnenia

V článku [2] bolo ukázané, že ak pre ľubovoľnú funkciu f spĺňajúcu predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo zvolíme funkciu $g(x) = \left(\frac{m+1}{n+1}f^{n+1}(x) + c\right)^{\frac{1}{m+1}}$, kde m, n sú prirodzené čísla a c je vhodná konštanta taká, že limita $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ je typu „$0/0$" alebo „∞/∞", pričom g spĺňa predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo, tak platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{g^m(x)}{f^n(x)}.$$

Dôsledkom toho je, že použitím l'Hospitalovho pravidla na riešenie $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ dvakrát za sebou prichádza opätovne k zacykleniu.

Zovšeobecnenie v tomto prípade je nasledovné. Voľme pre toto f funkciu g ako:

$$g(x) = [f^p(x) + c]^q,$$

kde $p > 1$ a $q \in (0,1)$ sú reálne čísla a konštantu c volíme tak, aby daná limita bola typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, pričom g spĺňa predpoklady vety s názvom l'Hospitalovo pravidlo.

Ukážeme, že po dvojnásobnom použití l'Hospitalovho pravidla nastane zacyklenie:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{pq[f^p(x)+c]^{q-1}f^{p-1}(x)f'(x)} = \\ &= \lim_{x\to a}\frac{[f^p(x)+c]^{1-q}}{pqf^{p-1}(x)} = \lim_{x\to a}\frac{(1-q)p[f^p(x)+c]^{(-q)}f^{p-1}(x)f'(x)}{pq(p-1)f^{p-2}(x)f'(x)} = \\ &= \frac{(1-q)}{q(p-1)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Ako aj v predchádzajúcom platí, že na rozdiel od počítania l'Hospitalovým pravidlom vedú elementárne postupy rýchlo k výsledku. Stačí preniesť čitateľa do menovateľa menovateľa a vojsť pod q-tu mocninu.

Nech napr. $p = \pi$ a $q = 1/3$, nech ďalej $f(x) = \ln x$, $c = 5$ a $x \to \infty$. Riešme nasledujúcu úlohu l'Hospitalovým pravidlom:

Úloha 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi + 5]^{1/3}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{\pi}{x}[(\ln x)^\pi + 5]^{-2/3}(\ln x)^{\pi-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3[(\ln x)^\pi + 5]^{2/3}}{\pi(\ln x)^{\pi-1}} = \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\pi[(\ln x)^\pi + 5]^{-1/3}(\ln x)^{\pi-1}\frac{1}{x}}{\pi(\pi-1)(\ln x)^{\pi-2}\frac{1}{x}} = \frac{2}{(\pi-1)}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi + 5]^{1/3}}\end{aligned}$$

Vidíme, že prišlo k zacykleniu. Na druhej strane skúsme riešiť túto úlohu elementárnymi postupmi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{[(\ln x)^\pi + 5]^{1/3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{(\ln x)^\pi + 1}{(\ln x)^3}\right]^{1/3}} = 0,$$

kde sme využili, že podiel $1/(\ln x)^3$ ide k 0 pre $x \to \infty$ a $(\ln x)^{\pi-3}$ ide do ∞ pre $x \to \infty$.

Znovu o krok späť

Nakoniec sa budeme venovať rozšíreniu poslednej časti práce [2]. V nej sme sa oboznámili s úlohami na výpočet limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, v ktorých použitie l'Hospitalovho pravidla má oprávnenie v prvom kroku, ale ďalej si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Zvlášť veľmi vďačná bola:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{c}\left(x - \ln\left(\sqrt{c} + \sqrt{e^{2x} + c}\right)\right) + \sqrt{e^{2x} + c}}, \tag{2}$$

kde c je ľubovoľná kladná reálna konštanta. Úloha (2) vznikla integrovaním čitateľa aj menovateľa v nasledujúcej limite z práce [1]:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + c}},$$

ktorú veľmi ľahko vypočítame elementárnymi postupmi, ale pri opätovnom použití l'Hospitalovho pravidla dôjde k zacykleniu.

Takto však môžeme postupovať aj pri ďalších limitách z práce [1]. Ako prvé budeme skúmať limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{\sqrt{x^{2m} + c}},$$

kde m je nejaké prirodzené číslo a c je nenulová konštanta.

Na začiatok vezmime to najľahšie, tj. prípad, keď $m = 1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + c}}. \tag{3}$$

Potom hľadaná limita je:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + d}{x\sqrt{x^2 + c} + c\ln\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)}, \tag{4}$$

kde d je nejaká konštanta. V prípade, že c je kladná konštanta, hneď vidíme, že ide o limitu typu „∞/∞". V prípade, že c je záporná konštanta, bolo by vhodné ukázať, že tomu tak tiež je. Na to stačí ukázať, že menovateľ ide do ∞, ak $x \to \infty$. Ukážeme to. Vyjmime výraz $x\sqrt{x^2 + c}$ pred zátvorku, dostaneme:

$$x\sqrt{x^2 + c}\left(1 + c\frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)}{x\sqrt{x^2 + c}}\right).$$

Ďalej ukážeme, že podiel $\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)}{x\sqrt{x^2+c}}$ ide k 0 pre $x \to \infty$. Pomôžeme si l'Hospitalovým pravidlom:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + c}\right)}{x\sqrt{x^2 + c}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + c}} \frac{x + \sqrt{x^2 + c}}{\sqrt{x^2 + c}}}{\frac{2x^2 + c}{\sqrt{x^2 + c}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2 + c} = 0.$$

A teda menovateľ z limity (4) naozaj ide do ∞, ak $x \to \infty$.

Výraz $\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$, z ktorého počítame limitu (3) pre $x \to \infty$ sa dá upraviť na tvar $\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+c}}$. Integrovať menovateľ $x\sqrt{x^2+c}$ je jednoduchšie než $\sqrt{x^2+c}$. Učiňme tak. Dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3}, \tag{5}$$

kde d je nejaká konštanta. Použitím l'Hospitalovho pravidla na limitu (5) prejdeme znovu k limite (3). Limita (5) má navyše oproti limite (4) úspornejší zápis a na prvý pohľad je pre študentov ľahšie „stráviteľná“. Inými slovami neodradzuje ich od počítania, ako by tomu mohlo byť v prípade limity (4). A ako bonus ide veľmi ľahko vypočítať aj elementárnymi postupmi hneď od začiatku a nie je potrebné derivovať.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{d}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2+c}}{x}\right)^3} + 0 =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{3/2}} = 1.$$

Pre $m > 1$ môžeme postupovať rovnako ako v predošlom a využiť postup, v ktorom výraz $\frac{x^m}{\sqrt{x^{2m}+c}}$ najprv upravíme na tvar $\frac{x^{2m-1}}{x^{m-1}\sqrt{x^{2m}+c}}$ alebo na tvar $\frac{x^{3m-1}}{x^{2m-1}\sqrt{x^{2m}+c}}$ a potom integrujeme čitateľ aj menovateľ. Napríklad pre $m = 2$ dostaneme po zintegrovaní limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+d}{x^2\sqrt{x^4+c} + c\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+c}\right)}, \tag{6}$$

resp. limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^6+d}{\left(\sqrt{x^4+c}\right)^3}, \tag{7}$$

kde v oboch prípadoch d je nejaká konštanta. Aj tu vidíme, že limitu (7) možno rýchlo a ľahko vypočítať elementárnymi postupmi hneď od začiatku.

Ešte napíšme všeobecný tvar limít (4), (5), (6) a (7) pre ľubovoľné prirodzené číslo m. Zovšeobecnená verzia limít (4) a (6) teda bude:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2m}+d}{x^m\sqrt{x^{2m}+c} + c\ln\left(x^m+\sqrt{x^{2m}+c}\right)}.$$

Zovšeobecnená verzia limít (5) a (7) potom bude:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3m}+d}{\left(\sqrt{x^{2m}+c}\right)^3}.$$

Z limít uvedených v práci [1] možno predošlý postup zopakovať aj pre nasledujúcu limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x + c}}. \tag{8}$$

Rozšírme zlomok $\frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x+c}}$ v limite (8) výrazom $\frac{1/x}{1/x}$ a zintegrujme čitateľa aj menovateľa zvlášť, dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x + d}{\sqrt{\ln^2 x + c}\ln x + c\ln\left(\ln x + \sqrt{\ln^2 x + c}\right)},$$

kde opäť d je ľubovoľná konštanta.

Záver

Tento článok je doplnením a rozšírením prác [1], [2]. Podarilo sa nám v ňom nájsť ďalšie príklady limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“, v ktorých je síce možné l'Hospitalovo pravidlo použiť, no k výsledku sa s jeho pomocou nedopracujeme, resp. nájsť také limity, pri riešeniach ktorých je oprávnené a vhodné jeho použitie v prvom kroku, ale v ďalších si musíme vystačiť s elementárnymi postupmi. Uvedené príklady a úlohy je možné uvádzať študentom na cvičeniach, či seminároch z matematickej analýzy ako demonštráciu nutnosti ovládania elementárnych postupov na výpočet limít typu „$0/0$“ alebo „∞/∞“.

Literatúra

[1] Varga, M.: Ako oklamať l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 12, UKF, Nitra, 2009. Strany 275-278. ISBN 80-8094-614-2

[2] Zákopčan, M.: Ako na l'Hospitala. In: ACTA MATHEMATICA 15, UKF, Nitra, 2012. Strany 197-202. ISBN 978-80-558-0135-3

Článok prijatý dňa 12. apríla 2013.

Adresa autora

Mgr. Michal Zákopčan, PhD.
Oddelenie matematiky Ústavu informatiky a matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Slovenská technická univerzita, Ilkovičova 3, SK – 812 19 Bratislava;
e-mail: michal.zakopcan@stuba.sk

Poďakovanie

Článok vznikol vďaka podpore z grantu VEGA č. 1/0426/12 Ministerstva školstva Slovenskej republiky.