FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

SOLVABILITY OF GROUPS OF LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS OF THE N-TH ORDER

ŘEŠITELNOST GRUP LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH OPERÁTORŮ N-TÉHO ŘÁDU

JAROSLAV BERÁNEK – JAN CHVALINA

ABSTRACT: *In the contribution there is constructed a certain group of linear ordinary differential operators of the n-th order and there is solved the problem of its solvability. In particular, using the stabilization of the commutant chain of that group, we have obtain that the mention group is solvable. Moreover, using the one-to-one correspondence between this group and the system of solution spaces of corresponding homogeneous differential equations of the n-th order we obtain that the isomorphic group of solution spaces is also solvable.*

KEY WORDS: *Differential equation, solution spaces of homogeneous differential equations, solvable group.*

ABSTRAKT: *V příspěvku je zkonstruována jistá grupa obyčejných lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu a je řešen problém její řešitelnosti. Zejména, užitím stabilizace řetězce komutantů této grupy, jsme obdrželi, že zmíněná grupa je řešitelná. Dále, užitím jedno-jednoznačné korespondence mezi touto grupou a systémem prostorů řešení příslušných homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu dostáváme, že izomorfní grupa prostorů řešení je také řešitelná.*

KLÍČOVÁ SLOVA: *Diferenciální rovnice, prostory řešení homogenních diferenciálních rovnic, řešitelná grupa.*

CLASSIFICATION: *20G07, 20F16, 47E05*

V tomto příspěvku, který náleží do série prací ([1], [2], [3], [4]) a na některé z nich podstatně navazuje, se věnujeme řešení konkrétního klasického problému, kterým je otázka řešitelnosti (v Galoisově smyslu) grup jistých lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu – pro libovolné přirozené číslo n ≥ 2. Tyto operátory tvaru

$$L=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k}{dx^k} \ ,$$

kde p_k jsou spojité funkce na nějakém otevřeném intervalu $J \subseteq \boldsymbol{R}$, tvoří-jak známo-levé strany obyčejných lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu.

Uspořádanou grupou rozumíme trojici $(G, . , \le)$, kde $(G, .)$ je grupa a binární relace $\le$ je uspořádání na G takové, že pro libovolnou trojici $x, y, z \in G$ plyne z vlastnosti $x \le y$ také $x . z \le y . z$, $z . x \le z . y$. V uspořádané grupě budeme symbolem $[a)_\le$ označovat hlavní konec generovaný prvkem $a \in G$, definovaný takto: $[a)_\le = \{x \in G;\ a \le x\}$.

Připomeňme standardně používané označení: Je-li H normální podgrupa grupy G (nazývaná také invariantní podgrupa nebo normální dělitel), píšeme $H \lhd G$. Dále, posloupnost podgrup H_i $(i = 0, 1, ..., n)$ grupy G taková, že

$$\boldsymbol{1} = H_0 \lhd H_1 \lhd \dots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G \qquad (\mathcal{S})$$

(symbol $\boldsymbol{1}$ označuje jednotkovou podgrupu grupy G), se nazývá subnormální řada grupy G a příslušné podílové grupy H_i / H_{i-1} $(i = 1, 2, ..., n)$ se nazývají faktory dané řady. Jsou-li všechny faktory řady ($\mathcal{S}$) komutativní, nazývá se tato řada řešitelná. Grupa se nazývá řešitelná, jestliže má alespoň jednu řešitelnou subnormální řadu (viz např. [10], [11],[13], [18]. Při praktickém ověřování řešitelnosti je v některých případech cesta k důkazu řešitelnosti základní grupy rychlejší ověřením stabilizace řetězce komutantů (na úrovni triviální podgrupy) než prostřednictvím pracného ověřování komutativity faktorů existující subnormální řady podgrup, o níž se dokazuje, že je řešitelná.

Připomeňme, že podgrupa G' grupy G generovaná množinou komutátorů $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ všech dvojic prvků $[a, b] \in G \times G$ se nazývá komutant grupy G. Komutant G'' grupy G' se nazývá druhý komutant grupy G. Obvyklé označení je také $G' = G^{(1)}$, $G'' = G^{(2)}$, atd. Obecně $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$. Komutant $G^{(n)}$ se také nazývá n-tá derivace grupy G a řetězec komutantů grupy G

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots$$

je také nazýván derivovaný řetězec grupy G.

Tvrzení 1: ([18, Věta 10.31, s.172]). *Buď G grupa. Tyto podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) Grupa G je řešitelná.

(ii) Existuje celé kladné číslo n s vlastností $G^{(n)} = \mathbf{1}$.

(iii) Existuje řešitelná subnormální řada grupy G.

Množinu všech reálných čísel budeme značit $\boldsymbol{R}$; pod označením $\boldsymbol{C}(J)$ (užívá se i označení $\boldsymbol{C}^0(J)$) budeme rozumět okruh všech spojitých funkcí na intervalu $J \subseteq \boldsymbol{R}$ s obvyklým sčítáním a násobením funkcí. Analogicky okruh všech spojitých funkcí na intervalu J, které mají všechny derivace až do řádu k pro nějaké přirozené číslo k, budeme označovat $\boldsymbol{C}^k(J)$. Symbolem $\boldsymbol{C}_+(J)$ označíme podpolookruh okruhu $\boldsymbol{C}(J)$, tvořený všemi kladnými spojitými funkcemi, tedy

$$\boldsymbol{C}_+(J) = \{ f: J \to \boldsymbol{R};\ f(x) > 0 ,\ x \in J \} .$$

Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ označíme jako $\boldsymbol{A}_n$ množinu všech lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu následujícího tvaru:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0$$

(viz [1], [8], [15], [16]), kde $p_k \in \boldsymbol{C}(J)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $p_0(x) > 0$ pro libovolné $x \in J$.

Uvažujme nyní diferenciální operátor n-tého řádu, přiřazený obyčejné homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu, ve tvaru

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

kde $D_k = \dfrac{d^k}{dx^k}$, $p_k(x)$ je spojitá funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \boldsymbol{R}$,

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, $p_n(x) \equiv 1$, tj. zápis $L_n(y) = 0$ označuje obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)y^{(k)}(x) = 0 .$$

V souladu s články [1], [7], [8] označme $L(p_0, \ldots, p_{n-1})(y) : \boldsymbol{C}^n(J) \to \boldsymbol{C}^n(J)$ výše definovaný lineární operátor. Platí tedy

$$L(p_0, \ldots, p_{n-1})(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y$$

a položme

$$\boldsymbol{LA}_n(J) = \{L(p_0, \ldots, p_{n-1}): p_k \in \boldsymbol{C}(J),\ k = 0, 1, \ldots, n-1\} .$$

Označme dále $\boldsymbol{N}_0(n)= \{0,1, \ldots,n-1\}$; symbolem δ_{ij} budeme označovat tzv. Kroneckerovo δ, přičemž klademe $\overline{\delta_{ij}} = 1 - \delta_{ij}$. Pro libovolné $m \in \boldsymbol{N}_0(n)$ označíme jako $\boldsymbol{LA}_n(J)_m$ množinu všech lineárních diferenciálních operátorů n-tého řádu

$L(p_0, \ldots, p_{n-1})$: $\boldsymbol{C}^n(J)\to \boldsymbol{C}(J)$, kde $p_k \in \boldsymbol{C}(J)$ pro libovolné $k \in \boldsymbol{N}_0(n)$, $p_m \in \boldsymbol{C}_+(J)$, (tj. $p_m(x) > 0$ pro libovolné $x \in J$). Nyní zavedeme vektorovou funkci $\vec{p}\,(x)$ takto:

$\vec{p}\,(x) = (p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x))$, $x \in J$. Potom lze psát $L_n(\vec{p}\,)y = y^{(n)} + (\vec{p}\,(x), (y, y', \ldots, y^{(n-1)}))$, kde v poslední závorce se jedná o skalární součin vektorů.

Nyní definujeme binární operaci „$\circ_m$“ a binární relaci „$\leq_m$“ na množině $\boldsymbol{LA}_n(J)_m$ takto: Pro libovolnou dvojici $L(\vec{p}\,), L(\vec{q}\,)\in \boldsymbol{LA}_n(J)_m$, $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_{n-1})$, $\vec{q} = (q_0, \ldots, q_{n-1})$ položíme $L(\vec{p}\,)\circ_m L(\vec{q}\,) = L(\vec{u}\,)$, $\vec{u} = (u_0, \ldots, u_{n-1})$, kde

$$u_k(x) = p_m(x)\, q_k(x) + (1 - \overline{\delta_{mk}}\,)\, p_k(x)\,,\ \ x \in J$$

a $L(\vec{p}\,) \leq_m L(\vec{q}\,)$, jestliže $p_k(x) \leq q_k(x)$, $k \in \boldsymbol{N}_0(n)$, $p_m(x) = q_m(x)$, $x \in J$.

Je zřejmé, že $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m ,\leq_m)$ je uspořádaná množina. Vlastnosti binární operace $\circ_m$ a vztah této operace k uspořádání $\leq_m$ na množině $\boldsymbol{LA}_n(J)_m$ uvádí následující tvrzení 1, jehož důkaz lze nalézt např. v [7].

Tvrzení 2*: Algebraická struktura $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m, \leq_m)$ je nekomutativní uspořádaná grupa.*

Nyní obrátíme svou pozornost k podgrupám grupy $\boldsymbol{LA}_n(J)_m$. Zavedeme označení $\boldsymbol{L}_1A_n(J)_m = \{ L(\vec{p}\,);\ \vec{p} = (p_0, \ldots, p_{n-1}),\ p_k \in \boldsymbol{C}(J),\ k \in \boldsymbol{N}_0(n),\ p_m(x) \equiv 1\}$. Pomocí tohoto označení lze formulovat tvrzení 2. Také jeho důkaz lze nalézt v publikaci [7].

Tvrzení 3*: Nechť $J\subset \boldsymbol{R}$ je otevřený interval. Pro libovolné $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n-1$ platí, že grupa $(\boldsymbol{L}_1A_n(J)_m, \circ_m)$ je invariantní podgrupa grupy $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$.*

Označme $\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m = \{L(p_0, p_1, \ldots, r, \ldots, p_{n-1});\ p_k \in \boldsymbol{C}(J),\ r \in \boldsymbol{R},\ r \neq 0\}$.

Z důvodu větší názornosti postupů v důkazech následujících vět rozepišme podrobněji výpočet součinů diferenciálních operátorů $L(\vec{p}\,(x)), L(\vec{q}\,(x))$, tedy aplikaci binární operace „$\circ_m$“ na prvky množiny $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m$:

Nechť $0 \leq m \leq n-1$ a $p_m \in \boldsymbol{C}(J)$, $p_m(x) \neq 0$, $x\in J$. Pro libovolnou dvojici operátorů $L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$, $L(q_0, \ldots, q_m, q_{n-1})$ z množiny $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}_n(J)_m$ platí:

$$L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1}) \circ_m L(q_0, \ldots, q_m, \ldots, q_{n-1}) = L(u_0, \ldots, u_m, \ldots, u_{n-1}),\ \text{kde}$$

$$\begin{gathered} u_0(x) = p_m(x)q_0(x) + p_0(x),\\ \vdots\\ u_m(x) = p_m(x)q_m(x),\\ \vdots\\ u_{n-1}(x) = p_m(x)q_{n-1}(x) + p_{n-1}(x),\ x\in J. \end{gathered}$$

Z důvodu stručnosti píšeme místo $p(x)$, $q(x)$ pouze p, q s příslušným indexem.

Poznamenejme, že inverzní operátor $L^{-1}(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$ k operátoru $L(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1})$ (jakožto inverzní prvek k tomuto prvku v grupě $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$) je tvaru

$$L^{-1}(p_0, \ldots, p_m, \ldots, p_{n-1}) = L\left(-\frac{p_0}{p_m}, \ldots, \frac{1}{p_m}, \ldots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right).$$

Věta 1: *Grupoidy $(\boldsymbol{L}_C\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$, $(\boldsymbol{L}_1\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ jsou podgrupy grupy $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$, přitom $(\boldsymbol{L}_1\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m) \lhd (\boldsymbol{L}_C\,\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m) \lhd (\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$.*

Důkaz: Pro libovolné operátory $L(\vec{p}) \in \boldsymbol{LA}_n(J)_m$, $L(\vec{q}) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ platí–podobně jako výše-$L^{-1}(\vec{p}) \circ_m L(\vec{q}) \circ_m L(\vec{p}) = L^{-1}(\vec{p}) \circ_m L(q_0, q_1, \dots, r, \dots, q_{n-1}) \circ_m L(p_0, p_1, \dots, p_m, \dots, p_{n-1}) = L\left(-\frac{p_0}{p_m}, -\frac{p_1}{p_m}, \dots, \frac{1}{p_m}, \dots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right) \circ_m L(r\,p_0 + q_0, \dots, r\,p_m, \dots, r\,p_{n-1} + q_{n-1}) =$

$$L\left(\frac{r\cdot p_0 + q_0}{p_m} - \frac{p_0}{p_m}, \frac{r\cdot p_1 + q_1}{p_m} - \frac{p_1}{p_m}, \dots, r, \dots, \frac{r\cdot p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m} - \frac{p_{n-1}}{p_m}\right) =$$

$$L\left(\frac{(r-1)\cdot p_0 + q_0}{p_m}, \frac{(r-1)\cdot p_1 + q_1}{p_m}, \dots, r, \dots, \frac{(r-1)\cdot p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m}\right) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m.$$

Protože $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je podgrupa grupy $(\boldsymbol{LA}_n(J)_m, \circ_m)$ (neboť pro libovolnou dvojici operátorů $L(\vec{p}), L(\vec{q}) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ platí $L(\vec{p}) \circ_m L^{-1}(\vec{q}) = L(p_0, p_1, \dots, r, \dots, p_{n-1}) \circ_m L\left(-\frac{q_0}{q_m}, \dots, \frac{1}{s}, \dots, -\frac{q_{n-1}}{q_m}\right) = L\left(\frac{p_0}{s} - \frac{q_0}{q_m}, \dots, \frac{r}{s}, \dots, \frac{p_{n-1}}{s} - \frac{q_{n-1}}{q_m}\right) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$ a $L(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m$), dostáváme, že grupa $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je invariantní podgrupou grupy $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. Podobně se ověří, že grupoid $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je podgrupa grupy $(\boldsymbol{L}_C\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$, a to invariantní, tedy normální dělitel. Další fakta vyplývají z výše uvedených tvrzení. □

Věta 2: *Buď $J \subseteq \boldsymbol{R}$ otevřený interval. Grupa $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ je řešitelná.*

Důkaz: Označme $G = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. První derivace G' grupy G, tj. první komutant grupy G, je její podgrupa generovaná všemi komutátory tvaru

$$L^{-1}(\vec{p}(x)) \circ_m L^{-1}(\vec{q}(x)) \circ_m L(\vec{p}(x)) \circ_m L(\vec{q}(x)),$$

kde $L(\vec{p}(x)), L(\vec{q}(x)) \in \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_n(J)_m$. Jelikož uvedený komutátor je tvaru

$$L\left(-\frac{p_0}{p_m}, \dots, \frac{1}{p_m}, \dots, -\frac{p_{n-1}}{p_m}\right) \circ_m L\left(-\frac{q_0}{q_m}, \dots, \frac{1}{q_m}, \dots, -\frac{q_{n-1}}{q_m}\right) \circ_m$$

$$L(p_m q_0 + p_0, \dots, p_m q_m, \dots, p_m q_{n-1} + p_{n-1}) =$$

$$= L\left(-\frac{q_m p_0 + q_0}{p_m q_m}, \dots, \frac{1}{p_m q_m}, \dots, -\frac{q_m p_{n-1} + q_{n-1}}{p_m q_m}\right) \circ_m$$

$$L(p_m q_0 + p_0, \dots, p_m q_m, \dots, p_m q_{n-1} + p_{n-1}) =$$

$$L\left(\frac{(p_m - 1)q_0 + (1 - q_m)p_0}{p_m q_m}, \dots, 1, \dots, \frac{(p_m - 1)q_{n-1} + (1 - q_m)p_{n-1}}{p_m q_m}\right) \in \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m,$$

dostáváme, že podgrupa grupy $(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$ generovaná všemi komutátory uvedeného tvaru je právě grupa $(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_n(J)_m, \circ_m)$. Vskutku, např. pro každé číslo $k \in \boldsymbol{N}$, $0 \le k \le n-1$, $k \ne m$ a pro libovolnou funkci $f \in \boldsymbol{C}(J)$, volbou $p_m(x) \equiv 1$, $q_m(x) = x^2+1$ a $p_k(x) = -\frac{f(x)}{x^2}(x^2+1)$ (za předpokladu $0 \notin J$ – který lze odstranit jinou konkrétní vhodnou volbou dat) obdržíme

$$\frac{1}{p_m(x)q_m(x)}\big((p_m(x)-1)q_k(x) + (1-q_m(x))p_k(x)\big) = \frac{-x^2 p_k(x)}{x^2+1} = f(x),\ x \in J,$$

tedy libovolný spojitý koeficient výše uvedeného operátoru lze vyjádřit v popsaném tvaru. Tedy $G' = (\boldsymbol{L_1 A_n}(J)_m, \circ_m)$.

Dále, uvažujme libovolnou dvojici diferenciálních operátorů $L(u_0, \dots, 1, \dots, u_{n-1})$, $L(v_0, \dots, 1, \dots, v_{n-1}) \in \boldsymbol{L_1 A_n}(J)_m$. Na základě podobné úvahy s výše uvedenou dostáváme
$L^{-1}(u_0, \dots, 1, \dots, u_{n-1}) \circ_m L^{-1}(v_0, \dots, 1, \dots, v_{n-1}) \circ_m L(u_0, \dots, 1, \dots, u_{n-1}) \circ_m L(v_0, \dots, 1, \dots, v_{n-1}) =$

$$L(-u_0, \dots, 1, \dots, -u_{n-1}) \circ_m L(-v_0, \dots, 1, \dots, -v_{n-1}) \circ_m L(u_0 + v_0, \dots, 1, \dots, u_{n-1} + v_{n-1}) =$$

$$L(-(u_0 + v_0), \dots, 1, \dots, -(u_{n-1} + v_{n-1})) \circ_m L(u_0 + v_0, \dots, 1, \dots, u_{n-1} + v_{n-1}) = L(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

tedy G'' je triviální grupa, tvořená pouze neutrálním prvkem. Souhrnem jsme tedy obdrželi

$$\{L(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\} = G'' \subset G' \subset G^{(0)} = G = (\boldsymbol{L A_n}(J)_m, \circ_m),$$

tudíž grupa $(\boldsymbol{L A_n}(J)_m, \circ_m)$ je řešitelná. □

Nyní podáme konstrukci nekomutativní uspořádané grupy lineárních prostorů hladkých funkcí třídy $\boldsymbol{C}^n$ definovaných na intervalu $J \subset \boldsymbol{R}$ (který může být i roven $\boldsymbol{R}$), podle [1]. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \boldsymbol{C}^n(J)$ jsou lineárně nezávislé funkce. Přesněji vyjádřeno, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení některé homogenní diferenciální rovnice, jejíž koeficienty jsou spojité funkce (tzn. Wronského determinant $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ není roven nule v žádném bodě intervalu J). Označme $V(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ lineární prostor dimenze n tvořený všemi funkcemi tvaru

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_n\phi_n(x),$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \boldsymbol{R}$, tedy

$$V(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \{c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \boldsymbol{C}^n(J), c_1, \dots, c_n \in \boldsymbol{R}\}.$$

Potom $V(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je lineárním prostorem dimenze n všech řešení homogenní diferenciální rovnice řádu n tvaru $L_n(y) = 0$, tedy

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x) = 0,$$

kde

$$p_k(x) = \frac{D_k[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)}{W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

$D_k[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ jsou příslušné subdeterminanty determinantu

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix},$$

vystupující v Laplaceově rozvoji uvedeného determinantu podle posledního sloupce.

Označme $F \subset \boldsymbol{C}^n(J) \times \boldsymbol{C}^n(J)$ množinu všech uspořádaných n-tic $[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ lineárně nezávislých funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, pro které platí $D_{n-1}[\varphi_1, \dots, \varphi_n] \neq 0$ na intervalu J, kde

$$D_{n-1}[\varphi_1,\dots,\varphi_n] = det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & . & . & . & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

a dále $p_m(x) = \dfrac{D_m[\varphi_1,\dots,\varphi_n](x)}{W[\varphi_1,\dots,\varphi_n](x)} > 0$ pro každé $x \in J$.

Označme dále $\boldsymbol{G}(F)$ soustavu (systém) všech prostorů dimenze n, $V(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, kde $[\varphi_1,\dots,\varphi_n] \in F$. Na soustavě $\boldsymbol{G}(F)$ definujme nyní binární operaci $\cdot$ tímto předpisem:

Z obecné teorie řešení diferenciálních rovnic je známo (srv. též výsledky monografie F. Neumana [16] a další práce tohoto autora), že mezi množinou všech operátorů $\boldsymbol{LA}_n(J)$ a systémem $\boldsymbol{G}(F)$ existuje bijektivní (jednojednoznačné) zobrazení $\Phi : \boldsymbol{LA}_n(J) \to \boldsymbol{G}(F)$. Nechť $V(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$, $V(\psi_1,\dots,\psi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$ jsou libovolně zvolené prostory, tzn. prostory řešení lineárních diferenciálních rovnic

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = 0,$$
$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + q_0(x)y = 0,$$

tj. rovnic

$$det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & . & . & . & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & . & . & . & \varphi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & . & . & . & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0,$$

$$det\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & . & . & . & \psi_n & y \\ \psi_1' & \psi_2' & . & . & . & \psi_n' & y' \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & . & . & . & \psi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0.$$

Pak jsou jednoznačně určeny operátory $L(p_0,\dots,p_n)$, $L(q_0,\dots,q_n)$ s vlastností $L(p_0,\dots,p_n) = \Phi^{-1}(V(\varphi_1,\dots,\varphi_n))$, $L(q_0,\dots,q_n) = \Phi^{-1}(V(\psi_1,\dots,\psi_n))$. Nyní pro zvolenou libovolnou dvojici prostorů $V(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$, $V(\psi_1,\dots,\psi_n) \in \boldsymbol{G}(F)$ položíme

$$V(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \cdot V(\psi_1,\dots,\psi_n) = V(\omega_1,\dots,\omega_n),$$

kde $V(\omega_1,\dots,\omega_n) = \Phi(L(p_0,\dots,p_n) \circ L(q_0,\dots,q_n))$.

Věta 3: *Buď $J \subset \mathbf{R}$ otevřený interval. Grupoid (**G**(F), ·) je nekomutativní grupa.*
Důkaz: Je uveden v práci [1].

Z věty 2 tohoto příspěvku vzhledem k výše provedené úvaze vyplývá
Věta 4: *Buď $J \subset \mathbf{R}$ otevřený interval. Grupa prostorů (**G**(F), ·) je řešitelná.*

Literatura

[1] BERÁNEK, JAROSLAV - CHVALINA, JAN. *Algebraické struktury a multistruktury vytvářené prostory řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic n-tého řádu*. In Acta Mathematica 12. Fakulta prírodných vied UKF, Nitra, 2009, s. 25-32. ISBN 978-80-8094-614-2.

[2] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Invariantní podgrupy grup obyčejných lineárních diferenciálních operátorů druhého řádu.* In: Acta Mathematica 13, Faculty of Natural Sciences. Constantine the Philosopher University, Nitra 2010, s. 43-47. ISBN 978-80-8094-781-1.

[3] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu*. In Acta Mathematica 14, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2011, s. 51-57. ISBN 978-80-8094-958-7.

[4] BERÁNEK, JAROSLAV, CHVALINA, JAN. *Řešitelnost jistých grup prostorů řešení lineárních homogenních diferenciálních rovnic třetího řádu*. In Acta Mathematica 15, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra, 2012, s. 43-50. ISBN 978-80-558-0135-3.

[5] BORŮVKA, OTAKAR. *Základy teorie grupoidů a grup*. 1. vyd. Praha : Nakladatelství Československé akademie věd, 1962. 216 s.

[6] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Solvability of certain groups of second-order linear differential operators.* 10th Internat. Conference APLIMAT, February 2011. Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2011, 113-119. ISBN 978-80-89313-51-8.

[7] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA. *Modelling of join spaces by n-th order linear ordinary differential operators.* 4-th Internat. Conference APLIMAT, Slovak Univ. of Technology in Bratislava 2005, 279-284. ISBN 80-969264-3-8.

[8] CHVALINA JAN, CHVALINOVÁ LUDMILA, MOUČKA, JIŘÍ. *Solvability of a Certain Group of the Third-Order Linear Differential Operators.* Proc. of XXX. International Colloquium, University of Defence, Brno 2012, 10 s., ISBN 978-80-7231-865-0.

[9] DIBLÍK, JOSEF, RŮŽIČKOVÁ, MIROSLAVA. *Obyčajné diferenciálne rovnice.* 1. vyd. Žilina: Edis – vydavatelství ŽU, 2008, 309 s. ISBN 978-80-8070-891-7.

[10] DRÁPAL, ALEŠ. *Teorie grup - základní aspekty*. Praha : Karolinum, 2009. 208 s. ISBN 80-246-0162-1.

[11] HALL, MARSHALL, J. *The Theory of Groups.* The Macmillan Company, New York 1959. (Ruský překlad : *Těorija grupp* – překl. N.V. Djumin, Z. P. Žilinskaja, red. L.A. Kalužnin – Izd. innostrannoj lit., Moskva 1962).

[12] KALAS, JOSEF, RÁB, MILOŠ. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2. vyd. Brno : Masaryk University in Brno, 2001. 207 s. ISBN 80-210-2589-1.

[13] KUROŠ, ALEKSANDR GENNADIJEVIČ. *Teorija grupp*. 3. vyd. Nauka Moskva 1967. 648 s.

[14] NEUMAN, FRANTIŠEK. From Local to Global Investigations of Linear Differential Equations of the n-th Order. Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1984, s. 55–80.

[15] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Ordinary Differential Equations – a Survey of the Global Theory*. Equadiff 6, Proc. Internat. Conf. Differential Equations and their Appl., Brno 1985, s. 59–70.

[16] NEUMAN, FRANTIŠEK. *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations*. 1. vyd. Praha : Academia, 1991. 320 s. ISBN 80-200-0423-8. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991)

[17] NEUMAN, FRANTIŠEK. *A Survey of algebraic methods in linear differential equations.* Studies of the University of Žilina, Math. Series, Vol. 21/2007, 23–34.

[18] PROCHÁZKA, LADISLAV, BICAN, LADISLAV, KEPKA, TOMÁŠ, NĚMEC, PETR. *Algebra.* Academia Praha 1990.

[19] SINGER, MICHAEL, F. *Introduction to the Galois theory of linear differential equations.* arXiv:712.4124v2 [math.CA] 10 jan 2008, s. 1-83.

Článok prijatý dňa 12.apríla 2013.

Adresa autorů

Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc
Katedra matematiky, Fakulta pedagogická, Masarykova Univerzita,
Poříčí 7, 603 00 Brno, Česká republika; e-mail: beranek@ped.muni.cz

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické, Technická 8, 616 00 Brno, Česká republika; e-mail: chvalina@feec.vutbr.cz