FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY NITRA
ACTA MATHEMATICA 16

CONICS IN TANGENCY PROBLEMS SOLVING

KUŽEĽOSEČKY V RIEŠENÍ ÚLOH O DOTYKOCH

MARTIN BILLICH

ABSTRACT. *Problems in which we construct a circle tangent to given elements (point, line, circle) in a plane have an important place in school mathematics. In this paper, possible approach how to use the conics in solving classical construction problems is discussed.*

KEY WORDS: *conics, tangency problems, loci of points of given properties*

ABSTRAKT. *Úlohy, v ktorých hľadáme kružnicu dotýkajúcu sa daných geometrických útvarov (bodu, priamky, kružnice) v rovine majú dôležité miesto v školskej matematike. V príspevku uvedieme možnosti využitia kužeľosečiek v riešení klasických planimetrických úloh o dotykoch.*

KĽÚČOVÉ SLOVÁ*: kužeľosečky, úlohy o dotykoch, množiny bodov daných vlastností*

CLASSIFICATION: *G44, D44*

1. Úvod

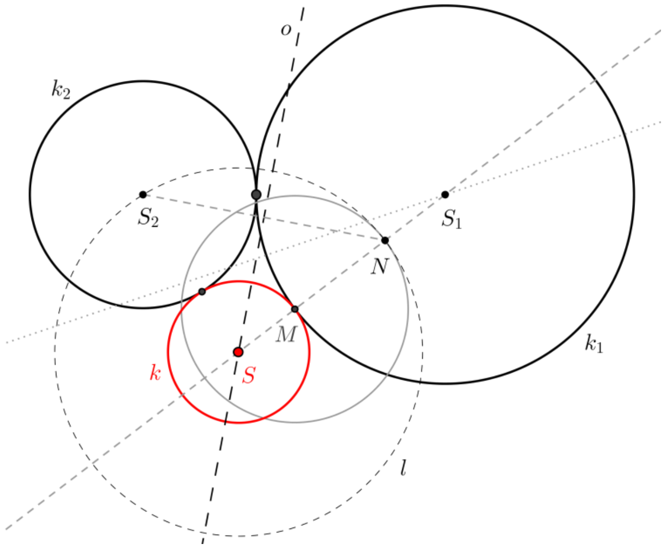
Medzi najpríťažlivejšie partie syntetickej geometrie možno zaradiť úlohy, v ktorých hľadáme kružnicu dotýkajúcu sa daných troch geometrických útvarov z útvarov bod, priamka, kružnica a ktoré sa v literatúre obvykle označujú ako Apolloniove úlohy. Namiesto podmienky dotyku môžeme v týchto úlohách zaviesť aj ďalšie špecifické podmienky, aby hľadaná kružnica mala daný polomer, pretínala danú kružnicu ortogonálne resp. pod daným uhlom. Viac o metódach riešenia týchto úloh možno nájsť v práci [2].

V tomto príspevku najskôr uvedieme konštrukciu regulárnych kužeľosečiek metódou množín bodov daných vlastností a následne metódou analytickej geometrie odvodíme ich rovnice. Využijeme pritom skutočnosť, že kužeľosečky môžeme definovať ako množiny stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú daných dvoch kružníc, resp. danej kružnice a priamky. Na tomto mieste treba poznamenať, že tu uvedené postupy pre stredové kužeľosečky (elipsu a hyperbolu), možno jednoducho aplikovať aj na parabolu (viac v [3]).

Pre lepšiu názornosť je vhodné pri týchto typoch úloh použiť niektorý z dostupných programov dynamickej geometrie. V súčasnosti je veľmi atraktívny softvér GeoGebra, ktorého hlavnou výhodou je, že nám umožňuje meniť vstupné prvky jednotlivých objektov (v algebraickom či geometrickom okne) a sledovať ako tieto zmeny vplývajú na výsledné objekty s nimi zviazanými. V tomto smere sa javí aj náš prístup, s prechodom od syntetických k analytickým metódam riešenia úloh, ako prirodzený.

2. Kužeľosečky ako množiny bodov daných vlastností

Uvažujme dve nezhodné, zvonku (príp. zvnútra) dotýkajúce sa kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, pričom $r_1 > r_2$ a bod M na kružnici k_1. Zostrojme kružnicu k, ktorá sa dotýka daných dvoch kružníc, pričom kružnice k_1 sa dotýka v danom bode M. V nasledujúcom postupe predpokladajme, že kružnice k_1, k_2 a k majú po dvojiciach navzájom vonkajší dotyk. Označme S stred kružnice k. Bod S leží na priamke incidentnej s bodom M a stredom S_1 kružnice k_1, pričom jeho vzdialenosť od bodu M je rovná vzdialenosti od kružnice k_2. Potom stred S kružnice k je súčasne i stredom kružnice l prechádzajúcej stredom S_2 kružnice k_2 a bodom N na úsečke MS_1, kde $|MN| = r_2$. Bod S teda leží na osi o úsečky S_2N, odkiaľ je zrejmá jeho konštrukcia (obr. 1).



Obrázok 1: Konštrukcia dotýkajúcich sa kružníc v programe GeoGebra

Z predchádzajúcej konštrukcie vyplýva, že pre každý bod M kružnice k_1 leží stred S kružnice k na *hyperbole*, pričom platí: $|SS_1| - |SS_2| = r_1 - r_2$. Ohniskami tejto hyperboly sú stredy S_1 a S_2 daných kružníc a dĺžka hlavnej osi je $2a = r_1 - r_2$. Takto dostávame obvyklú definíciu *hyperboly* ako množiny všetkých bodov roviny, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch daných bodov je konštantná.

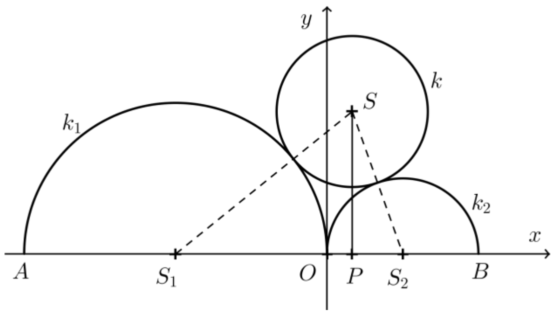
Ak sa dané kružnice k_1, k_2 dotýkajú zvnútra, tak je možné použiť analogický postup, pričom dostávame, že všetky stredy S kružníc k ležia na *elipse* s ohniskami S_1, S_2 a s dĺžkou hlavnej osi $2a = r_1 + r_2$, t. j. *elipsa* je množinou všetkých bodov roviny, ktorých súčet vzdialeností od daných dvoch bodov je konštantná (viac v práci [1]).

Analytické vyjadrenie hyperboly. Zvoľme sústavu súradníc s osou o_x incidentnou so stredmi S_1, S_2 daných dvoch zvonka dotýkajúcich sa kružníc k_1 a k_2, pričom začiatok O sústavy súradníc je ich dotykovým bodom. Nech kružnica k požadovaných vlastností (dotýkajúca sa zvonka oboch kružníc k_1, k_2) má stred $S = [x, y]$ a polomer s dĺžkou r. Z pravouhlých trojuholníkov S_1PS a S_2PS (bod P je pätou kolmice vedenej bodom S na os o_x, viď obr. 2) vyplýva, že

$$y^2 = (r + r_1)^2 - (x + r_1)^2 \tag{1}$$
$$y^2 = (r_2 + r)^2 - (r_2 - x)^2 \tag{2}$$

Elimináciou premennej y z týchto rovníc, dostávame pre x-ovú súradnicu stredu S

$$x = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\, r.$$



Obrázok 2

Vyjadrením r z tohto vzťahu a dosadením do jednej z rovníc (1) alebo (2) dostaneme

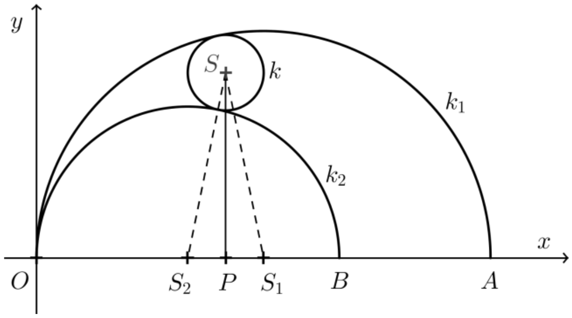
$$y^2 = \frac{4r_1r_2}{r_1 - r_2}\, x + \frac{4r_1r_2}{(r_1 - r_2)^2}\, x^2,$$

čo je vrcholová rovnica *hyperboly*. Týmto sme dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 1. Dané sú dve nezhodné zvonku dotýkajúce sa kružnice. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa zvonku dotýkajú daných kružníc je hyperbola.

Analytické vyjadrenie elipsy. Postupujeme podobne ako v prípade hyperboly, keď zvolíme sústavu súradníc s osou o_x incidentnou so stredmi S_1, S_2 daných dvoch zvnútra dotýkajúcich sa kružníc k_1 a k_2 (začiatok O sústavy je ich dotykovým bodom, obr. 3). Pre stred $S = [x, y]$ kružnice k, ktorá sa dotýka zvnútra kružnice k_1, zvonku kružnice k_2 a ktorej polomer má dĺžku r, platí:

$$y^2 = (r + r_2)^2 - (x - r_2)^2$$
$$y^2 = (r_1 - r)^2 - (r_1 - x)^2$$



Obrázok 3

Postupným riešením tejto sústavy rovníc (elimináciou premenných) dostávame:

$$y^2 = \frac{4r_1r_2}{r_1 + r_2}\, x - \frac{4r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2}\, x^2, \qquad x = \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}\, r.$$

Prvá z rovníc je vrcholovou rovnicou *elipsy*, čím sme dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 2. Dané sú dve nezhodné zvnútra dotýkajúce sa kružnice. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú daných dvoch kružníc (jednej zvonku a druhej zvnútra) je elipsa.

Analogický výsledok dostaneme aj pre dvojice navzájom nezhodných, nesústredných a *nedotýkajúcich sa* kružníc, čo možno zhrnúť do nasledujúcej vety (viď v [2]).

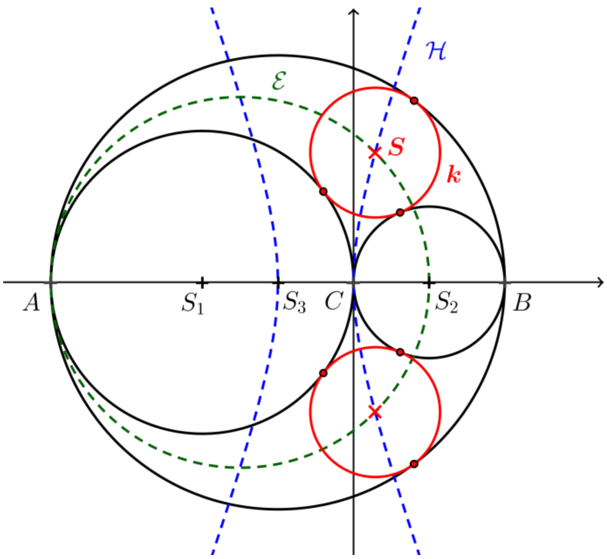
Veta 3. Množina stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú dvoch nezhodných, nedotýkajúcich sa a nesústredných kružníc $k_i(S_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$, sú dve konfokálne kužeľosečky s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $|r_1 - r_2|$ a $(r_1 + r_2)$ hlavnej osi (s výnimkou nevlastných bodov kužeľosečiek a prípadných spoločných bodov daných kružníc).

3. Kužeľosečky v úlohách

Metódou analytickej geometrie vyriešime dvojicu Apolloniovych úloh (v prostredí programu GeoGebra), pričom použijeme výsledky z predchádzajúcej časti.

Úloha 1. Daná je kružnica s priemerom AB a bod C na AB, ktorý tento priemer delí v pomere $2 : 1$. Nad priemermi AC a CB sú zostrojené ďalšie dve kružnice. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka všetkých troch daných kružníc.

Riešenie. Nech úsečka AB má dĺžku $2d$. Polomery kružníc nad priemermi AC a CB majú potom veľkosti $\frac{2}{3}d$ a $\frac{1}{3}d$. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak pre jej stred S platí:



Obrázok 4

a) bod S je stredom kružnice dotýkajúcej sa zvonka kružníc nad priemermi AC a CB, t. j. leží na hyperbole, ktorej rovnicu môžeme vo vhodne zvolenej sústave súradníc (kde os o_y je dotyčnicou kružníc nad priemermi AC a CB v ich spoločnom bode) vyjadriť v tvare

$$y^2 = \frac{8d}{3}x + 8x^2,$$

b) bod S je stredom kružnice, ktorá sa dotýka zvonku kružnice nad priemerom AC a zvnútra kružnice nad priemerom AB, t. j. leží na elipse, ktorej rovnica má tvar

$$y^2 = \frac{360 - 192d}{75}x - \frac{72}{75}x^2 + \frac{480 - 128d}{75}d.$$

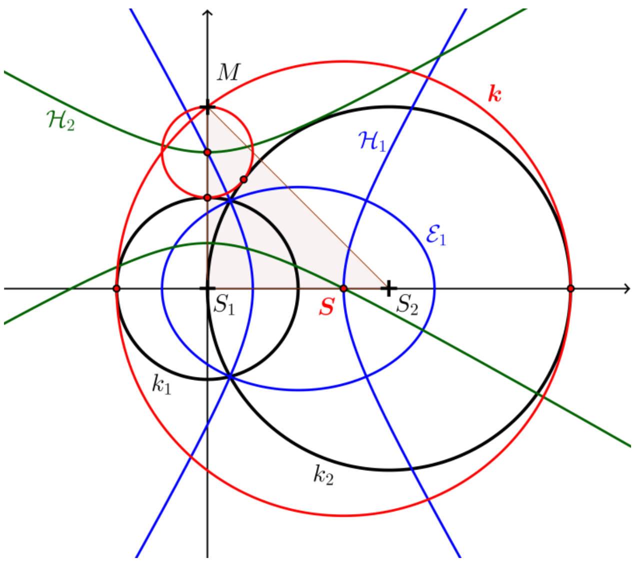
Elipsa a hyperbola (jedna jej vetva, pre $x > 0$), zostrojené podľa predchádzajúcich dvoch bodov, sa pretínajú v stredoch kružníc požadovaných vlastností. Obe riešenia úlohy, zostrojené v prostredí programu GeoGebra, sú znázornené na obrázku 4.

Poznámka. Namiesto hyperboly v bode a) môžeme uvažovať taktiež elipsu, ktorá je množinou stredov všetkých kružníc dotýkajúcich sa zvonku kružnice nad priemerom BC a zvnútra kružnice nad priemerom AB. V tomto prípade sú stredy hľadaných kružníc priesečníkmi dvoch elíps.

Úloha 2. Daný je rovnoramenný, pravouhlý trojuholník MS_1S_2 s pravým uhlom pri vrchole S_1, pričom $|MS_1| = d$ a kružnice $k_1(S_1, \frac{d}{2})$, $k_2(S_2, d)$. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka kružníc k_1, k_2 a prechádza bodom M.

Riešenie. Ak existuje kružnica k požadovaných vlastností, tak podľa vety 3 jej stred S je bodom dvojice konfokálnych kužeľosečiek s ohniskami S_1, S_2 a dĺžkami $(r_1 + r_2)$ a $|r_1 - r_2|$ hlavnej osi (elipsa E_1 a hyperbola H_1 na obr. 5), ktorých rovnice môžeme vo vhodne zvolenej sústave súradníc (s osami incidentnými s odvesnami daného pravouhlého trojuholníka) vyjadriť v tvare

$$E_1\colon\ y^2 = \frac{5d}{9}x - \frac{5}{9}x^2 + \left(\frac{5}{12}d\right)^2,\quad H_1\colon\ y^2 = -3dx + 3x^2 + \left(\frac{3}{4}d\right)^2.$$



Obrázok 5

Okrem toho, bod S je stredom kružnice, ktorá sa dotýka kružnice k_1 (resp. k_2) a prechádza bodom M, teda podľa vety 2 (v limitnom prípade, keď bodu M zodpovedá kružnica s "nekonečne malým" polomerom), leží na hyperbole s rovnicou

$$H_2:\ y^2 = \frac{1}{3}x^2 + dy - \frac{3}{16}d^2.$$

Pretože bod M je vonkajším bodom vzhľadom na kružnice k_1 a k_2, tak podmienkam úlohy vyhovujú dva body S, ktoré sú priesečníkmi hyperbol H_1 a H_2 (obr. 5).

4. Záver

Apolloniove úlohy sa tešili veľkému záujmu v celej svojej histórii, čoho dôkazom sú mnohé práce významných matematikov ako boli napr. Archimedes, Apollonius, Pappos, neskôr Viète, Descartes, Newton, Lambert, Euler a ďalší. Aj v dnešnej dobe môžeme nájsť v odbornej literatúre viacero zaujímavých príspevkov s problematikou dotýkajúcich sa kružníc, mnohé aj s podporou výpočtovej techniky. V súčasnej školskej matematike má dynamická podpora výučby geometrie svoje miesto, nakoľko prispieva k ľahšiemu a rýchlejšiemu pochopeniu učiva, ako aj k jeho hlbšej fixácii. Rôzne pohľady na kužeľosečky ako množiny bodov daných vlastností, spolu s ich vizualizáciou v prostredí programu dynamickej geometrie, sa stávajú základom mnohých žiackych aktivít, ktoré prispievajú k prirodzenému osvojovaniu si nových pojmov. Tieto možnosti sme sa snažili načrtnúť aj v tomto príspevku, pri riešení klasických planimetrických úloh metódou analytickej geometrie.

Literatúra

[1] Billich, M. (2009) *The use of geometric place in problem solving.* In: Scientific Issues, Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research (ed. M. Billich, M. Papčo, Z. Takáč), Ružomberok, Katolícka univerzita, 2009, s. 7-14. ISBN 978-80-8084-418-9

[2] Sklenáriková, Z. (2004). *K metódam riešenia Apolloniovej úlohy*. In Matematika v proměnách veku III, Edícia Dějiny matematiky, Praha, 2004, s. 45–55. ISBN 80-7285-040-7

[3] Tahir, H. (2007). *A New Approach to Conics.* In D. K. Pugalee, A. Rogerson and A. Schinck (Eds.), Proceedings of the Ninth International Conference: Mathematics Education in a Global Community. Charlotte NC, 2007, pp. 637-642.

Článok prijatý dňa 16. apríla 2013.

Adresa

RNDr. Martin Billich, PhD.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, Hrabovská cesta 1, SK – 034 01 Ružomberok; e-mail: billich@ku.sk

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 001UJS-4/2011.