



## SOLUTION OF FERMI'S PROBLEM WITH HELP OF PLACEMAT METHOD

### FERMIHO ÚLOHA RIEŠENÁ POMOCOU VYUČOVACEJ METÓDY PLACEMAT

KRISTÍNA CAFIKOVÁ – MICHAELA REICHELOVÁ

**ABSTRACT.** *The contribution is focused on the use of the Placement teaching method and solution of Fermi's problem. We point out the way to combine them in teaching mathematics. We provide the student's solution of a problem "How many volleyball balls can fit in this room?". We summarize the student's opinions on the teaching method and this problem obtained during the research.*

**KEY WORDS:** *Fermi's problem, Placemat, group work, teaching method*

**ABSTRAKT.** *V príspevku sa zameriavame na využitie vyučovacej metódy Placemat a riešenie Fermiho úlohy. Poukážeme na spôsob, ako ich spojiť v rámci vyučovania matematiky. Uvedieme študentské riešenie úlohy „Koľko volejbalových lôpt sa zmestí do tejto miestnosti?“. Zhrnieme počas výskumu získané názory študentov na vyučovaciu metódu a túto úlohu.*

**KEŤOVÉ SLOVÁ:** *Fermiho úloha, Placemat, skupinová práca, vyučovacia metóda*

**CLASSIFICATION:** *D45*

## Úvod

Matematika patrí medzi menej obľúbené predmety na základných aj stredných školách. Tento negatívny postoj žiakov nezmenilo ani to, že rozsah hodín určených na vyučovanie matematiky bol znížený a celkové učivo bolo zjednodušené. Príčinou tohto stavu môže byť, že matematika sa aj napriek reformám vyučuje klasickými metódami, ktoré neboli prispôsobené zmenám uskutočneným v poslednom storočí. Práve preto považujeme za potrebné, aby klasické vyučovacie metódy nahradili nové, efektívnejšie. Jednou takou vyučovacou metódou je Placemat. V našom príspevku popisujeme, ako riešili študenti Fermiho úlohu využitím tejto metódy.

## Fermiho úlohy

### 1. úloha

*Aký veľký ladovec by sme museli roztopiť, aby sme vodou z neho mohli zásobovať Nitru počas celého roka?*

### 2. úloha

*Koľko gumených medvedíkov sa zmestí do litrovej fľaše? Po koľké poschodie by siahala veža postavená z týchto medvedíkov?*

### 3. úloha

*Koľko klavírov je v Chicagu?*

Tento typ úloh je pomenovaný po známom fyzikovi, Enricovi Fermim, ktorý mal schopnosť riešiť zdanlivo neriešiteľné úlohy. Úlohy, ktoré sa zdajú byť neriešiteľné bez použitia doplňujúcich informácií alebo bez použitia zložitých postupov a vzorcov. Enrico Fermi bol nielen skvelý experimentálny a teoretický fyzik, ale taktiež skvelý učiteľ fyziky.

Získal Nobelovu cenu za výskum vlastností neutrónov. Štúdium matematiky považoval za nutný predpoklad na štúdium fyziky.

Fermiho úlohy taktiež nazývame „*back-of-envelope calculation*“ (približný, hrubý výpočet). (Robinson, 2008). Fermiho úlohy nie je možné riešiť iba samotným výpočtom (dosadením do vzorca), ale je potrebné pochopiť podstatu daného problému, rozdeliť úlohu na časti a kladením vhodne zvolených otázok dospieť k riešeniu úloh, ktorým nie je presná hodnota, ale odhad (rádový odhad) (Baeyer, 2001). Baeyer vo svojej publikácii píše o Fermiho úlohách ako o zdanlivom hlavolame. Na rozdiel od hlavolamu Fermiho úloha nemôže byť overená logickou dedukciou, je vždy približná. Fermiho úloha vyžaduje vždy aj vedomosti nespomenuté v zadaní. Fermiho úlohy a spôsoby, akými sú riešené, sú vzácné nielen vo vyučovaní matematiky a fyziky, ale aj v bežnom živote. Klasická Fermiho úloha, ktorá sa používa na objasnenie tohto typu úloh, znie: Koľko ladičov klavírov je v Chicagu? Je málo pravdepodobné, že niekto vie hneď a presne odpovedať na túto otázku. Riešenie tejto úlohy nie je štandardné, je treba teda výsledok odhadnúť.

Ako sme spomenuli vyššie, je potrebné rozdeliť úlohy na časti, a potom vhodne zvolenými otázkami dospieť k riešeniu týchto častí a následne k riešeniu celej úlohy. V prípade tretej úlohy by to vyzeralo nasledovne:

A: Koľko klavírov je v Chicagu?

1. Koľko obyvateľov má Chicago?
2. Má každý obyvateľ klavír?
3. Koľko rodín je v Chicagu?
4. Má každá rodina klavír?
5. Koľko rodín v Chicagu má klavír?

B: Koľko klavírov naladí jeden ladič za jeden rok?

1. Ako často sa ladí klavír?
2. Koľko klavírov je potrebné naladiť v Chicagu za rok?
3. Koľko klavírov naladí jeden ladič za jeden deň?
4. Koľko má ladič klavírov pracovných dní?

Riešenie: Vydělíme počet klavírov, ktoré je potrebné naladiť za rok, počtom klavírov, ktoré naladí jeden ladič za rok, a tak dostaneme hľadaný výsledok.

Årlebäck (2009) sformuloval päť základných charakteristických črt Fermiho úloh:

1. Dostupnosť – to znamená, že sú prístupné všetkým študentom, skupinám študentov, tiež na viacerých vzdelávacích stupňoch a rôznych úrovniach zložitosti.

2. Spojenie s reálnym svetom – sú realistické.

3. Potreba špecifikovať a štruktúrovať dôležité informácie a vzťahy – to znamená, že formulácia problému je tak otvorená, že riešiteľ si hneď nespojí problém so známou stratégiou riešenia, ale uplatňuje svoje skúsenosti, predstavy, konštrukcie, stratégie a iné kognitívne zručnosti na prístupnenie problému. Podstatou riešenia Fermiho úlohy je správne odhaliť jadro daného problému a rozdeliť ju na jednotlivé kroky. K správnej hodnote dospejeme kladením vhodných otázok.

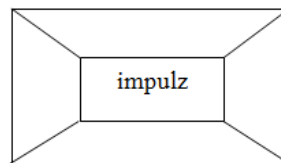
4. Potreba robiť odôvodnené odhady – absencia číselných dát.

5. Podpora diskusie – diskutovanie o probléme, o riešení, o odhadoch fyzikálnych veličín.

Pre Fermiho úlohy je ale typické, že úloha môže byť riešená viacerými spôsobmi, závisí to od charakteru kladených otázok. Teda, ak je nejaká rádová hodnota neznáma, môžeme začať aj s rôznymi predpokladmi a postupným kladením otázok dospejeme k približne rovnakému odhadu hľadanej hodnoty ako niekto, kto začal riešiť s inými predpokladmi.

## Vyučovacia metóda Placemat a jej využitie v praxi

Názov Placemat pochádza z anglického prekladu slova „prestieranie“. Táto vyučovacia metóda je v Nemecku známa aj ako „Platzdecken“. Hlavnými charakteristickými črtami sú neverbálna spolupráca žiakov a to, že učiteľ v procese riešenia nemôže zasahovať do práce žiakov.



Obrázok 1: Rozdelenie papiera

Žiaci sú rozdelení do štvorčlenných skupín. Každá skupina má k dispozícii papier formátu A1 a každý žiak v skupine dostane pero rôznej farby. Papier je rozdelený na päť častí, ako je to znázornené na obrázku 1. Štyri časti sú určené pre žiakov na písanie. Počas práce všetci majú vyhradené miesto na písanie, takže sa nemôže stať, že na tú istú časť píšú viacerí. Stredná časť je určená pre impulz. Impulz môže byť napísaná myšlienka, veta, vzorec, úloha alebo nakreslený obrázok či symbol. Na impulz musia žiaci reagovať. Žiaci svoje reakcie musia napísať na miesto, ktoré je pred nimi. Ich reakcie môžu byť napísané vety, myšlienky, vzorce alebo nakreslené obrázky, symboly. Keď vyčerpali všetky svoje myšlienky, zase otočia papier o 90° v smere hodinových ručičiek. Prečítajú si, čo napísal žiak pred nimi, a reagujú na to. Môžu daný text doplniť alebo aj opraviť. Keď už nevedia pokračovať, zase otočia papier o 90° a tento postup sa opakuje ešte dvakrát. Práca skončí, keď papier bol štvrtýkrát otočený a ku každému sa vráti časť papiera, na ktorú prvýkrát písal.

Po dokončení prác každej skupiny sa papiere pozbierajú a vyvesia. V tejto fáze využitia metódy sa začne diskusia. Učiteľ sa môže zapojiť do diskusie. Má možnosť povedať žiakom, v čom spočívajú nedostatky v ich vedomostiach. Keď to uzná za potrebné, môže problematiku ešte raz vysvetliť, alebo nechať svojich žiakov, aby si spoločne preopakovali celé učivo.

## Ukážka a výsledky využitia Placematu v praxi

Spojením aktivít medzinárodného projektu Primas a projektu A-Centrum FPV UKF v Nitre – Centrum Inovatívneho Vzdelávania, ITMS kód: 26110230026, aktivita 2.4 Nitrianska mladá veda, sa v dňoch 23. – 30. júna 2012 uskutočnila letná škola doktorandského študijného programu a letná škola objavného vyučovania v Račkovej doline. Na letnej škole sa zúčastnil jeden zahraničný lektor z Viedenskej univerzity, štyria lektori z Katedry matematiky Fakulty prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, frekventantmi kurzu boli dvaja doktorandi z Katedry fyziky FPV UKF v Nitre, dvanásť doktorandov z Katedry matematiky FPV UKF v Nitre a sedem študentov magisterského štúdia učiteľstva matematiky na KM FPV UKF v Nitre.

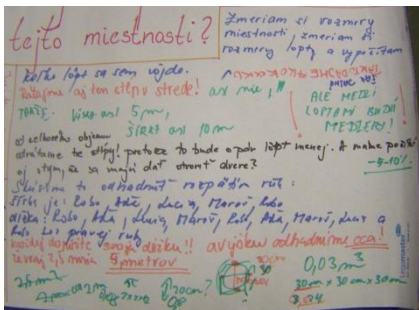
Metódu Placemat sme odskúšali na študentoch magisterského štúdia učiteľstva matematiky. Ako impulz sme vybrali úlohu, ktorá znie: „Koľko volejbalových lôpt sa zmestí do tejto miestnosti?“. Študenti po tom, čo sa zoznámili so zásadami správneho využitia vyučovacej metódy, obdržali papier s impulzom a každý z nich v rámci skupiny dostal fixku inej farby.

Študentom sme nepovedali, že ide o Fermiho úlohu a že úlohy tohto typu môžu mať viac správnych výsledkov. Nevedeli ani to, že v prípade Fermiho úlohy je dôležitejší správny spôsob riešenia ako výsledok.

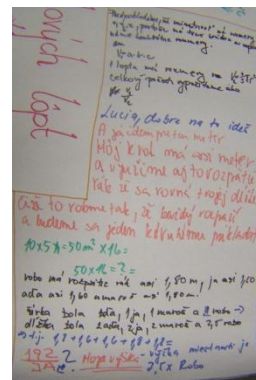
Pozorovali sme študentov počas celého riešenia danej úlohy. Po prečítaní impulzu 10 minút len rozmýšľali. Potom niektorí začali pracovať. Študenti sa rozhodli, že najskôr

zmerajú miestnosť pomocou dĺžky svojich tiel a pomocou takto získaných mierok vypočítajú objem miestnosti.

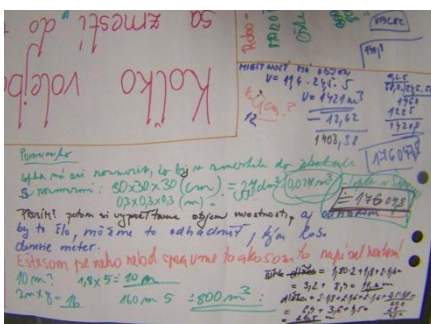
Z analýzy riešenie vyplýva, že nejakým neverbálnym spôsobom sa študenti dohodli o spolupráci. Aj na nasledujúcich obrázkoch (obr. 2, 3, 4 a 5) je dobre vidno súvislosť medzi časťami papiera. Vyzerá ako písomný rozhovor a dohadovanie sa o rozdelení práce. Podľa nás sa skupina rozhodla, že vyučovacia metóda je dosť flexibilná na to, aby sa trochu zmenili zásady jej používania. Namiesto toho, aby časti úlohy riešili sami, celú úlohu chceli spoločnou silou vyriešiť. Samotné dĺžky vyjadrili pomocou rozpätí rúk členov skupiny (napr. „Šírka bola Ad'a, 1 ja, 1 Maroš, 2 Robo“.) Výšku miestnosti zistili odhadom. Zo získaných údajov nakoniec vypočítali približný objem miestnosti, ktorá mala tvar kvádra. Potom pomocou odhadu zisťovali, koľko percent miestnosti môžu mať stĺpy. Časťou riešenia bol objem miestnosti  $2800 \text{ m}^3$ . Rozmery volejbalovej lopty tiež skúšali zistiť pomocou odhadu. Zistili, že lopta môže mať  $0,03 \text{ m}^3$ . Žiaľ, po týchto pomocných výpočtoch študenti nepokračovali vo svojom riešení z dôvodu nedostatku miesta na papieri. Pre nás bol postačujúci samotný postup riešenia.



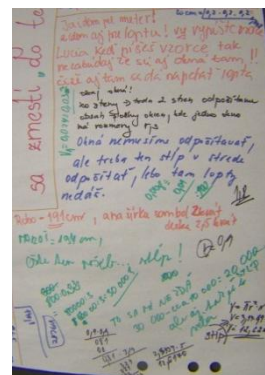
Obrázok 2: Prvá časť riešenia úlohy



Obrázok 3: Druhá časť riešenia úlohy



Obrázok 4: Tretia časť riešenia úlohy



Obrázok 5: Štvrtá časť riešenia úlohy

Správne používanie metódy umožňuje otočenie papiera najviac štyrikrát, v tomto prípade vidíme, že študenti otočili osemkrát. Odôvodnili to s tým, že podľa nich postup riešenia danej úlohy požadoval takýto prístup. Je pravdou, že niektoré zásady správneho používania metódy zmenili, ale hlavná charakteristika vyučovacej metódy zostala nezmenená, a tou je neverbálna písomná spolupráca.

**Názory študentov a pedagógov na túto metódu**

Využitie Placematu v skupine budúcich učiteľov nám umožnilo, aby sme mohli odpozorovať niekoľko kladov a záporov využitia vyučovacej metódy a Fermiho úlohy. Po rozhovore so študentmi sme sa dozvedeli ich názor o danej vyučovacej metóde a o samotnej Fermiho úlohe. Všetky klady a zápory sme zhrnuli a napísali.

Klady využitia Placematu

- ✓ žiaci pri vypočítaní úlohy využívali svoju kreativitu;
- ✓ spolupráca môže zlepšiť vzťah v skupine;
- ✓ keďže každý žiak má svoju časť papiera, nemôže byť nikto v skupine utlačovaný;
- ✓ každý žiak sa naučí byť trpezlivým a ohľaduplným, lebo papier môžu otočiť len vtedy, keď sú všetci členovia skupiny hotoví;
- ✓ dobrý výber impulzu môže spôsobiť nadšenie u žiakov, čo motivuje ich k práci;
- ✓ nikto sa nemusí báť vyjadriť sa;
- ✓ sebaujadrenie spôsobí silnejšiu sebaistotu;
- ✓ používanie odborných výrazov obohatí slovnú zásobu.

Klady využitia Fermiho úlohy

- ✓ je vhodné ju použiť aj v triedach s väčším počtom žiakov;
- ✓ rozvíja zmysel pre spoluprácu;
- ✓ učiteľ je facilitátorom;
- ✓ rozvíja sa kreativita žiakov;
- ✓ rozvíja schopnosť klásť správne otázky, štruktúrovať problémy a odhadovať hodnoty.

Zápory využitia Placematu

- ✗ zlý výber impulzu môže viesť k tomu, že žiaci nechcú na tento impulz reagovať;
- ✗ veľmi rozsiahly impulz môže spôsobiť, že žiaci zaplnia písmom celú vlastnú časť a po otočení papiera už nezostane priestor pre ďalšieho žiaka; náročná príprava pre učiteľa.

Zápory využitia Fermiho úlohy

- ✗ časová náročnosť;
- ✗ náročnosť na prípravu učiteľa;
- ✗ problematické hodnotenie práce žiakov.

**Záver**

Naším cieľom bolo, aby sme vyskúšali vyučovaciu metódu Placemat na študentoch. Táto metóda je vhodná na riešenie neštandardných úloh, preto sme si ju vybrali. Boli sme zvedaví, ako budú reagovať, keď si vyskúšajú metódu, s ktorou sa ešte nestretli. Chceli sme zistiť ich názory o vyučovacej metóde aj o Fermiho úlohe. Po dokončení práce v diskusií nám povedali, že ich Placemat a zadaná úloha zaujali. Dozvedeli sme sa aj to, že by radi vyskúšali úlohu spolu metódu počas budúceho učiteľského povolania. Počas rozhovoru nám zhrnuli pozitívne i negatívne názory, čo nám dalo komplexnú spätnú väzbu o výhodách a nevýhodách využitia. Diskutovali sme aj o možnostiach odstránenia jednotlivých nevýhod. Naše ciele sme síce dosiahli, ale musíme konštatovať, že pri ďalších využitíach vyučovacej metódy budeme musieť vykonať menšie úpravy. Je potrebné, aby úloha bola lepšie premyslená. Musíme postrážiť, aby študenti neotočili papier viac ako štyrikrát. Tiež musíme dávať pozor, aby mali dostatočne veľký priestor na papieri. Totiž môže nastať, že po tretom otočení už nie je miesto na reakciu štvrtého člena skupiny.

**Literatúra**

- [1] Årleback, J. B. 2009. *On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school*. The Montana Mathematics Enthusiast, 6(3): S. 331–364, 2009. ISSN 1551-3440.
- [2] Baeyer, H. C. 2001. *The Fermi Solution*, Dover Publications: New York. 2001. ISBN 978-0486417073.
- [3] Barzel, B – Büchter, A. – Leuders, T. (2011) *Mathematik Methodik*. Berlin: Cornelsen, 2011. 271 s. ISBN 978-3-589-22378-7.
- [4] Cafíková, K. 2012. *Prebudenie záujmu detí o matematiku*. Pisomná práca k dizertačnej skúške. KM FPV UKF Nitra 2012, 40 s.
- [5] Holubová, R. 2008. *Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže na PŘF UP v Olomouci*. In *Vyučovanie fyziky vo svetle nových poznatkov vedy, Zborník z konferencie DIFYZ 2008*.
- [6] MUED. *Steckbrief Methoden-Werkzeuge von A bis Z* [citované 21.6.2012] Dostupné na: (<http://www.Mued.de/docs/k5/methodenkoffer.pdf>)
- [7] Reich, K. *Placemat-Methode* [citované 21. 6. 2012] Dostupné na: (<http://methodenpool.uni-koeln.de/download/placemat.pdf>)
- [8] Reichelová, M. Teleki, A. 2012 *Význam Fermiho úloh vo vyučovaní fyziky*. In *Aktuálne problémy fyzikálneho vzdelávania v európskom priestore, DIFYZ 2012*. FPV UKF, Nitra, 2012.
- [9] Reichelová, M. 2012. *Zvýšenie úrovne znalostí stratégiou kvalitatívneho myslenia*. Pisomná práca k dizertačnej skúške. KF FPV UKF Nitra 2012, 54 s.
- [10] Robinson, A. W. 2008. *Don't just stand there—teach Fermi problems!* In *Physics Education*. 2008, vol. 43, no. 1, s. 83-88. ISSN 1361-6552.
- [11] Taggart, G. L. 2007. *Fermi Questions*, In *Mathematics Teaching in the Middle School*. 2007, vol. 13, no. 3, s. 164-167.
- [12] Tolar, J. 1975. *Enrico Fermi*, In *Pokraky matematiky, fyziky a astronomie*. 1975. Vol. 20, No. 1, s.1-4.

**Adresa autorov**

Mgr. Kristína Cafíková

Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: kristina.cafikova@ukf.sk

Mgr. Michaela Reichelová

Katedra fyziky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK – 949 74 Nitra; e-mail: michaela.reichelova@ukf.sk

**Pod'akovanie**

Príspevok a výskum popisovaný v rámci neho bol realizovaný z projektu UGA -> 22/2010: Tvorba materiálov na detské fyzikálne tábory a z projektu UGA -> VI/6/2013 - Prebudenie záujmu žiakov o matematiku prostredníctvom netradičných vyučovacích metód.